

# Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice

## Laboratorium 7

### Dekompozycja spektralna

28 kwietnia 2025

#### Przydatne funkcje Matlaba i Octava

- `eigs, eig`

#### Przydatne funkcje NumPy

- `numpy.linalg.eig`

## 1 Metoda potęgowa

Napisz funkcję obliczającą metodą potęgową dominującą wartość własną (największą co do modułu) i odpowiadający jej wektor własny dla danej macierzy rzeczywistej symetrycznej. Sprawdź poprawność działania programu porównując własną implementację z wynikami funkcji bibliotecznej. Przedstaw na wykresie zależność czasu obliczeń od rozmiaru macierzy (rozmiary macierzy 100x100, 500x500, ...).

- Powtarzaj mnożenie wektora  $\mathbf{x}_i$  przez macierz  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_i,$$

dzieląc za każdym razem wektor wynikowy przez  $\|\mathbf{x}_{i+1}\|_\infty$

- Element wektora  $\mathbf{x}_i$  o największej wartości bezwzględnej zbiega do dominującej wartości własnej
- Przeskalowany wektor  $\mathbf{x}_i$  zbiega do dominującego wektora własnego
- Obliczenia powinny się zatrzymać po przekroczeniu maksymalnej liczby iteracji, albo w przypadku gdy  $\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i+1}\| < \epsilon$  (kryterium małej poprawki)
- Pod koniec obliczeń znormalizuj otrzymany wektor własny.

## 2 Odwrotna metoda potęgowa

Opierając się na twierdzeniu o transformacji widma macierzy:

**Twierdzenie 1** *Macierz  $(\mathbf{A} - \sigma \mathbf{I})^{-1}$  (jeśli istnieje), to ma wartości własne równe  $\frac{1}{\lambda_k - \sigma}$  ( $\lambda_k$  jest  $k$ -tą wartością macierzy  $\mathbf{A}$ ) i wektory własne identyczne z macierzą  $\mathbf{A}$ .*

oraz wykorzystując metodę potęgową i faktoryzację LU zaimplementuj odwrotną metodę potęgową pozwalającą na szybkie znalezienie wektorów własnych macierzy  $\mathbf{A}$ , dla wartości  $\sigma$  bliskich odpowiedniej wartości własnej. Wykorzystaj fakt, że mnożenie wektora  $\mathbf{x}_i$  przez macierz  $\mathbf{A}^{-1}$  ( $\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}_i$ ) odpowiada rozwiązaniu układu równań  $\mathbf{A}\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i$ .

## 3 Iteracje z ilorazem Rayleigha

Zaimplementuj iteracyjną metodę wyznaczania wartości własnej i skojarzonego z nią wektora własnego wykorzystując odwróconą metodę potęgową oraz iloraz Rayleigha. Porównaj zbieżność metody ze zbieżnością algorytmu potęgowego (macierz symetryczna rzeczywista).

$$r(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x}^T}{\mathbf{x}\mathbf{x}^T}$$

$$r(\mathbf{q}_i) = \lambda_i$$