

# Porównanie działania wybranych algorytmów minimalizacji stochastycznej

Kacper Feliks, Maciej Wiśniewski

28-01-2025

## Cel projektu

Projekt polega na prostym opracowaniu statystycznym wyników porównania działania wybranych algorytmów minimalizacji stochastycznej. Zdecydowaliśmy się do porównania użyć następujących algorytmów:

- **Poszukiwanie przypadkowe (Pure Random Search, PRS)**

- **Metoda wielokrotnego startu (multi-start, MS)**

## Opis algorytmów

### Poszukiwanie przypadkowe (Pure Random Search, PRS)

**Algorytm PRS** polega na losowym przeszukiwaniu przestrzeni rozwiązań, w której minimalizowana funkcja jest zdefiniowana. Działa w następujący sposób:

1. **Losowanie punktów:** Losujemy kolejne punkty w przestrzeni poszukiwań z rozkładu jednostajnego. Jeżeli dziedzina poszukiwań jest kostką wielowymiarową, to każdą współrzędną punktu losujemy z odpowiedniego jednowymiarowego rozkładu jednostajnego.  
Na przykład, jeśli dziedzina poszukiwań to kostka trójwymiarowa  $[0, 1] \times [-2, 2] \times [100, 1000]$ , losowanie współrzędnych wygląda następująco:
  - pierwsza współrzędna:  $U(0, 1)$ ,
  - druga współrzędna:  $U(-2, 2)$ ,
  - trzecia współrzędna:  $U(100, 1000)$ .
2. **Porównanie wartości funkcji:** Wartość funkcji w każdym wylosowanym punkcie porównujemy z aktualnie zapamiętanym minimum. Jeśli wartość funkcji w nowym punkcie jest mniejsza, zapamiętujemy ten punkt jako nowe minimum.
3. **Wynik:** Wartość funkcji w ostatnim zapamiętanym punkcie stanowi wynik algorytmu.

## Metoda wielokrotnego startu (Multi-Start, MS)

Algorytm **MS** łączy losowe przeszukiwanie przestrzeni z metodami optymalizacji lokalnej. Jego kroki są następujące:

1. **Losowanie punktów:** Podobnie jak w **PRS**, losujemy zadany zbiór punktów startowych z rozkładu jednostajnego w przestrzeni poszukiwań.
2. **Uruchomienie optymalizacji lokalnej:** Dla każdego wylosowanego punktu startowego uruchamiana jest metoda optymalizacji lokalnej.
3. **Porównanie wyników:** Dla każdego startu zapisujemy wartość funkcji w zwróconym punkcie lokalnego minimum. Wynikiem algorytmu jest minimalna wartość funkcji spośród wszystkich punktów końcowych.

---

Do porównania należało wybrać dwie z funkcji dostępnych w pakiecie **smoof**, które są skalarne (single-objective) i mają wersje dla różnej liczby wymiarów (akceptują parametr **dimensions**).

W celu sprawdzenia dostępnych algorytmów wykonaliśmy następujący algorytm, który znajdował dostępne funkcje o wymaganych parametrach:

```
library(smoof)

scalar_dimensional_functions <- Filter(function(fn_name) {
  fn <- get(fn_name, envir = asNamespace('smoof'))
  is.function(fn) &&
  'dimensions' %in% names(formals(fn)) &&
  inherits(try(fn(2), silent = TRUE), 'smoof_function') &&
  getNumberOfObjectives(fn(2)) == 1
}, ls('package:smoof'))

print(scalar_dimensional_functions)
```

Do porównania wybraliśmy dwie funkcje:

- Schwefel
- Griewank

Nasz wybór padł dokładnie na te funkcje ze względu na nich odmiennność, trudność w optymalizacji oraz niebanalną impelmentację.

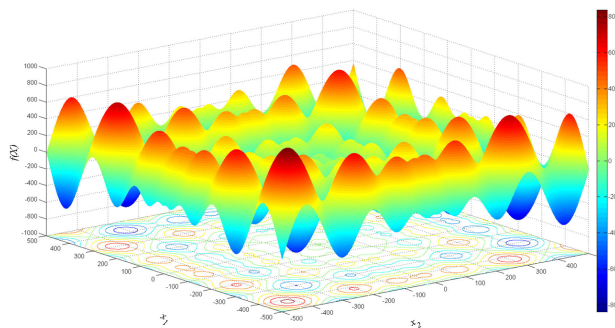
## Funkcja Schwefela

Funkcja Schwefela jest złożoną funkcją, posiadającą wiele minimów lokalnych. Wzór funkcji:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n -x_i \sin\left(\sqrt{|x_i|}\right)$$

gdzie przez  $d$  rozumiemy ilość wymiarów. Funkcja jest zazwyczaj definiowana na hipersześcianach  $x_i \in [-500, 500]$ , dla każdego  $i = 1, \dots, d$ .

Minimum globalne  $f(\mathbf{x}^*) = 418.9829 * d$ , dla  $\mathbf{x}^* = (420.9687, \dots, 420.9687)$



Reprezentacja funkcji Schwefela w przestrzeni 3D

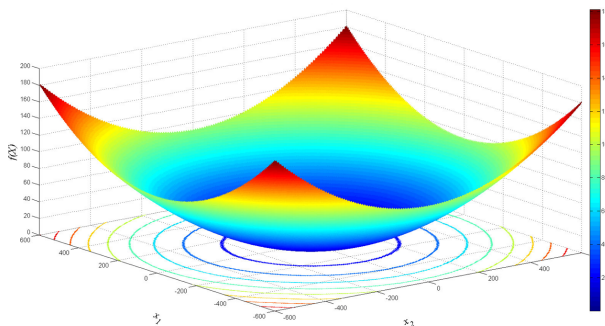
## Funkcja Griewanka

Funkcja Griewanka ma wiele szeroko rozproszonych minimów lokalnych, które są regularnie dystrybuowane. Wzór funkcji:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^d \frac{x_i^2}{4000} - \prod_{i=1}^d \cos\left(\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right) + 1$$

gdzie przez  $d$  rozumiemy ilość wymiarów. Funkcja jest zazwyczaj definiowana na hipersześcianach  $x_i \in [-600, 600]$ , dla każdego  $i = 1, \dots, d$ .

Minimum globalne  $f(\mathbf{x}^*) = 0$ , dla  $\mathbf{x}^* = (0, \dots, 0)$



Wizualizacja funkcji Griewanka w 3D

## Specyfikacja sprzętu

Obliczenia i testy zostały wykonane na komputerze o następujące specyfikacji:

- system Windows 10
- procesor Intel Core i7-6700HQ 2.60 GHz.
- pamięć Ram 16Gb

## WYNIKI

### Funkcja Griewanka 2D

#### MS

- średnia: 0.6055442
- Wartość najmniejsza: 0.007396
- Wartość największa: 4.4481658
- Mediana: 0.3253765
- Dolny kwartyl: 0.1257573
- Górny kwartyl: 0.8310025

#### PRS

- średnia: 0.6434122
- Wartość najmniejsza: 0.0373963
- Wartość największa: 1.7034647
- Mediana: 0.6161477
- Dolny kwartyl: 0.4292943
- Górny kwartyl: 0.8541051

### Funkcja Griewanka 10D

#### MS

- średnia:  $5.3433198 \times 10^{-11}$
- Wartość najmniejsza:  $1.3820056 \times 10^{-12}$
- Wartość największa:  $2.1964297 \times 10^{-10}$
- Mediana:  $4.1341264 \times 10^{-11}$
- Dolny kwartyl:  $2.7560176 \times 10^{-11}$
- Górny kwartyl:  $7.4529827 \times 10^{-11}$

## PRS

- średnia: 51.7091663
- Wartość najmniejsza: 12.0229676
- Wartość największa: 83.9943267
- Mediana: 51.6668436
- Dolny kwartył: 43.7718444
- Górny kwartył: 61.4505366

## Funkcja Griewanka 20D

### MS

- średnia:  $8.1357054 \times 10^{-11}$
- Wartość najmniejsza:  $1.3866686 \times 10^{-13}$
- Wartość największa:  $1.7841773 \times 10^{-10}$
- Mediana:  $7.5553341 \times 10^{-11}$
- Dolny kwartył:  $5.6181226 \times 10^{-11}$
- Górny kwartył:  $1.0998349 \times 10^{-10}$

## PRS

- średnia: 222.7744787
- Wartość najmniejsza: 138.0348086
- Wartość największa: 271.2005696
- Mediana: 223.940142
- Dolny kwartył: 207.9649149
- Górny kwartył: 239.8048899

## Funkcja Schwefela 2D

### MS

- średnia: -836.7813912
- Wartość najmniejsza: -837.9657745
- Wartość największa: -719.5274399
- Mediana: -837.9657745
- Dolny kwartył: -837.9657745
- Górny kwartył: -837.9657745

## PRS

- średnia: -797.1918759
- Wartość najmniejsza: -836.5685042
- Wartość największa: -643.5621982
- Mediana: -804.2280449
- Dolny kwartyl: -823.5638115
- Górny kwartyl: -781.6197479

## Funkcja Schwefela 10D

### MS

- średnia: -3262.1275223
- Wartość najmniejsza: -3716.0755343
- Wartość największa: -2923.4470726
- Mediana: -3259.0250766
- Dolny kwartyl: -3378.9804707
- Górny kwartyl: -3142.8476519

## PRS

- średnia: -1990.2290063
- Wartość najmniejsza: -2648.5365291
- Wartość największa: -1671.7495182
- Mediana: -1977.0998535
- Dolny kwartyl: -2101.5557137
- Górny kwartyl: -1880.3428427

## Funkcja Schwefela 20D

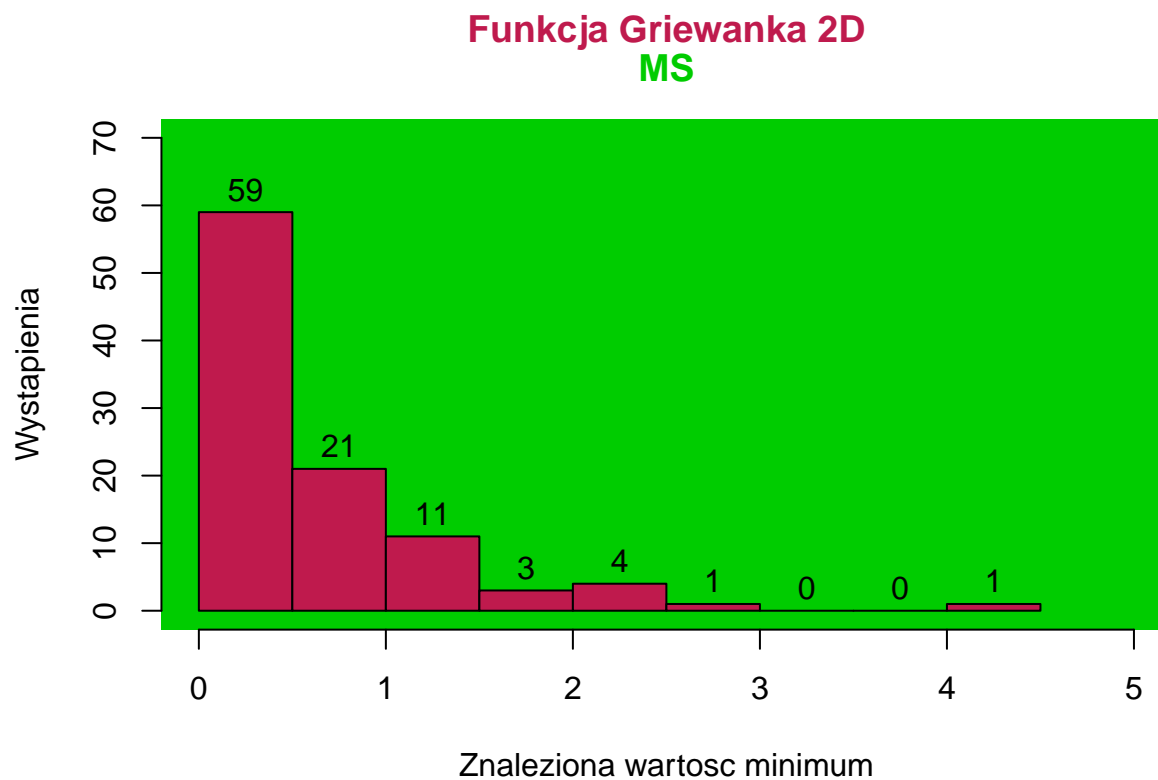
### MS

- średnia: -5930.2842622
- Wartość najmniejsza: -6721.5020158
- Wartość największa: -5415.4216596
- Mediana: -5927.3537852
- Dolny kwartyl: -6073.1127276
- Górny kwartyl: -5732.1016643

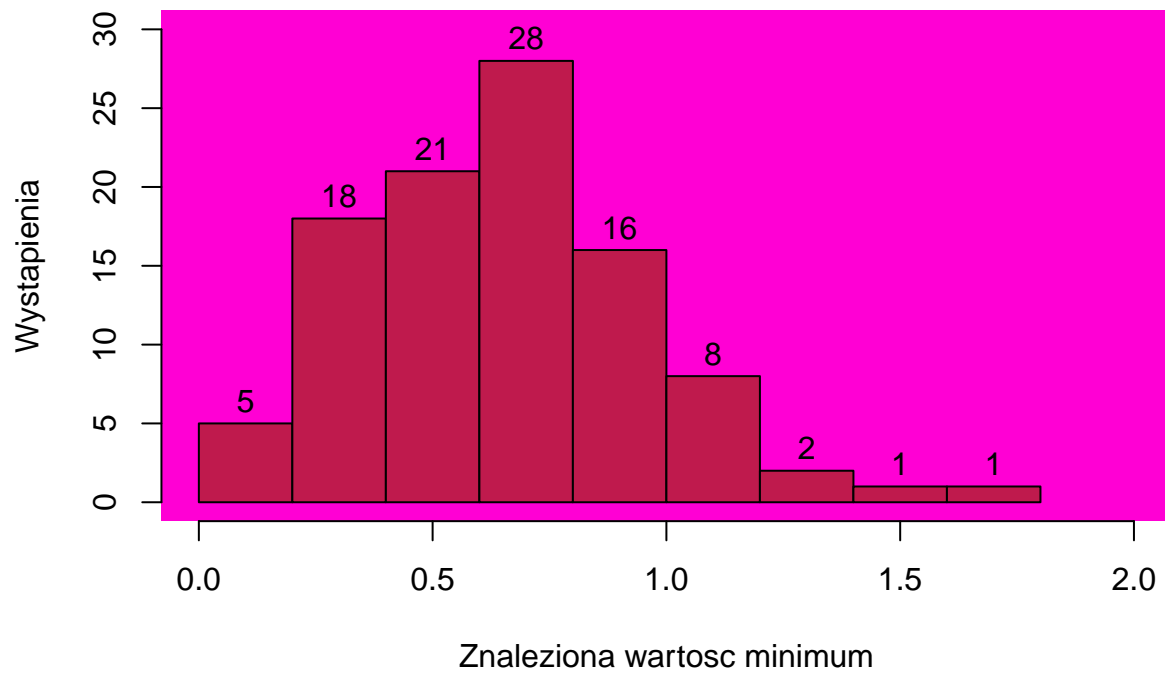
## PRS

- średnia: -2871.2092706
- Wartość najmniejsza: -3883.630182
- Wartość największa: -2404.6476755
- Mediana: -2845.6522752
- Dolny kwartył: -3018.7275952
- Górny kwartył: -2683.1582378

## Wyniki na wykresach



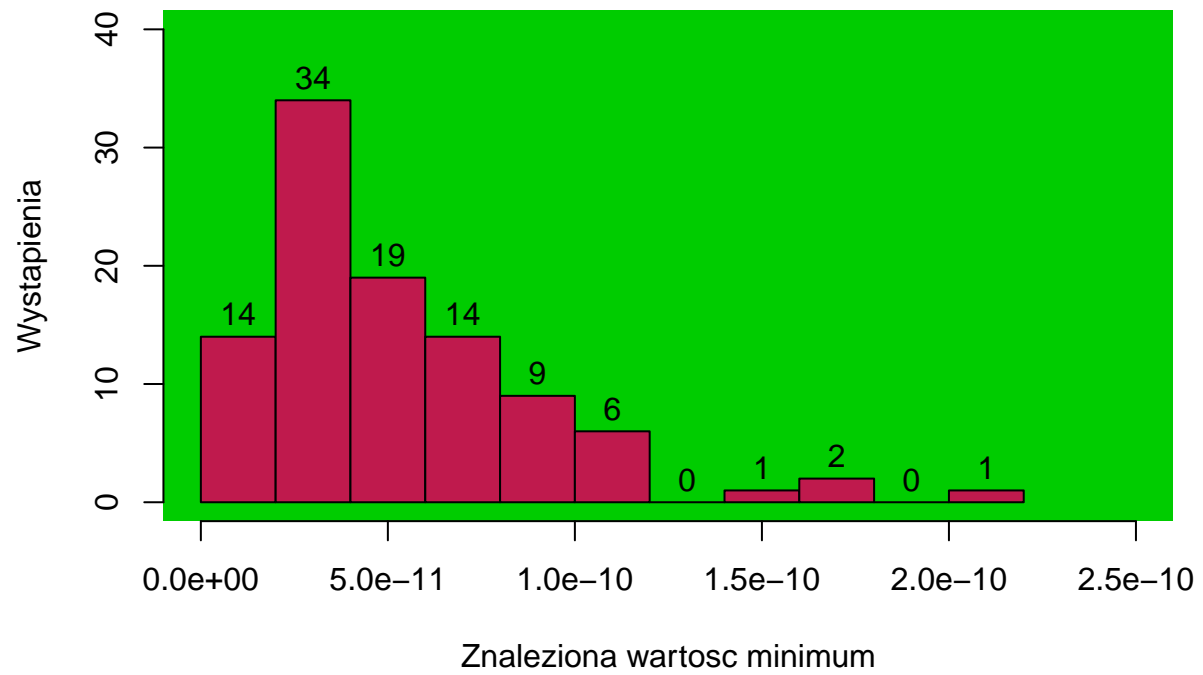
## Funkcja Griewanka 2D PRS



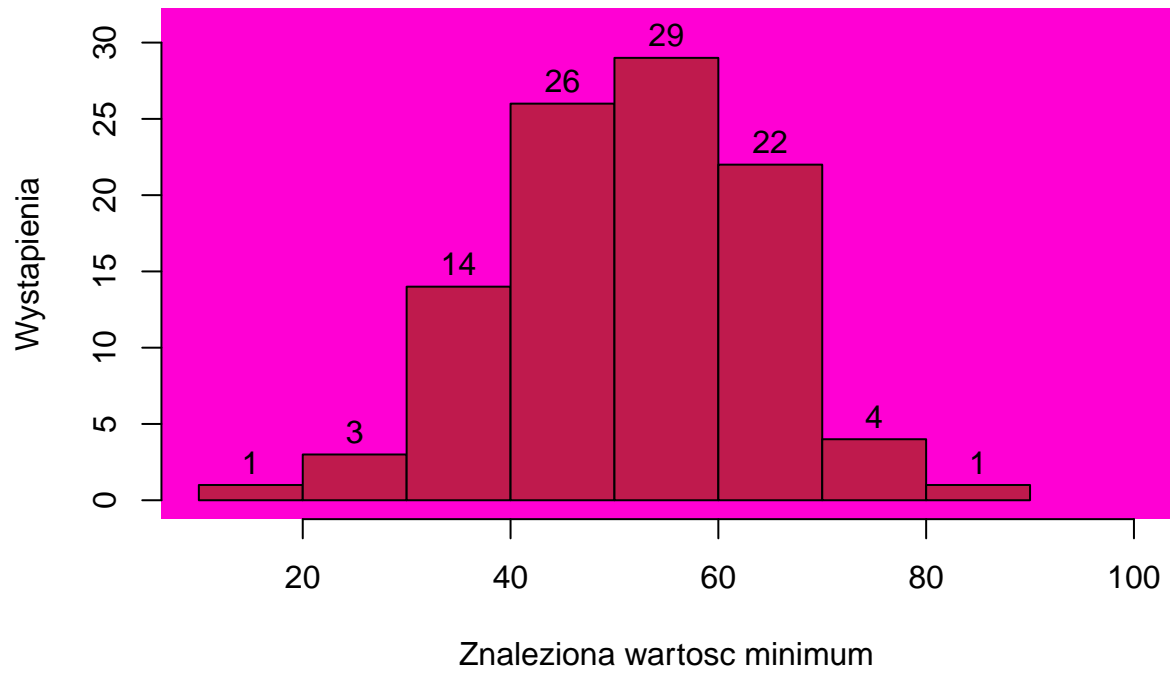


# Funkcja Griewanka 10D

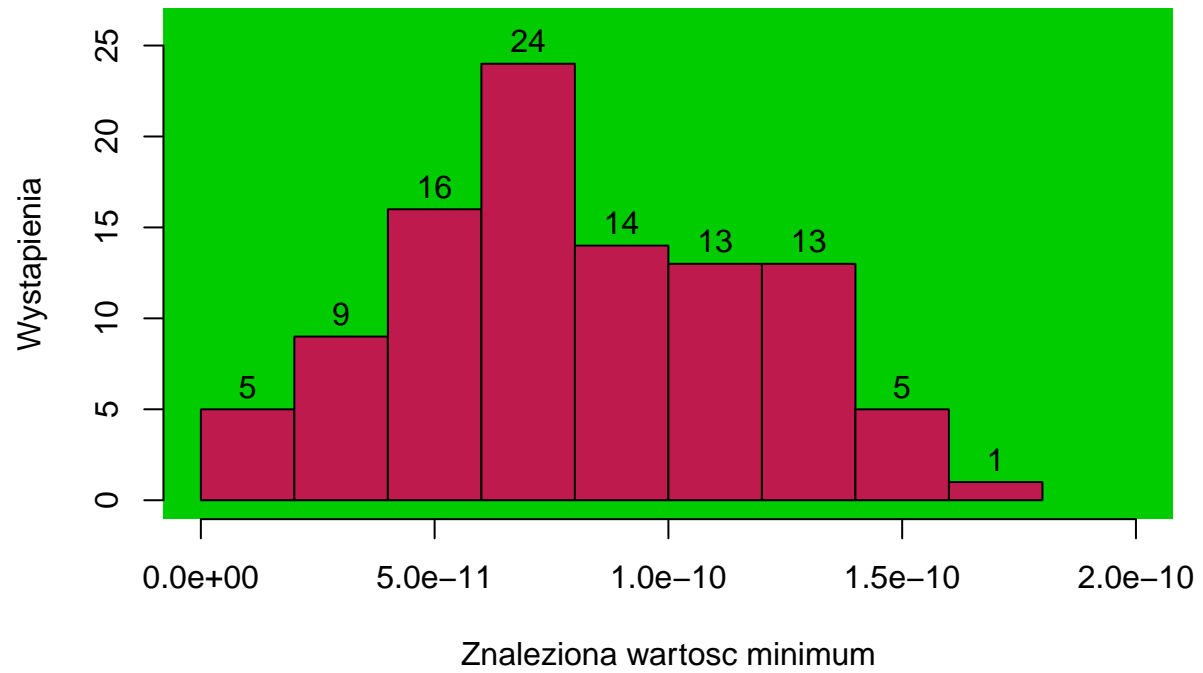
## MS



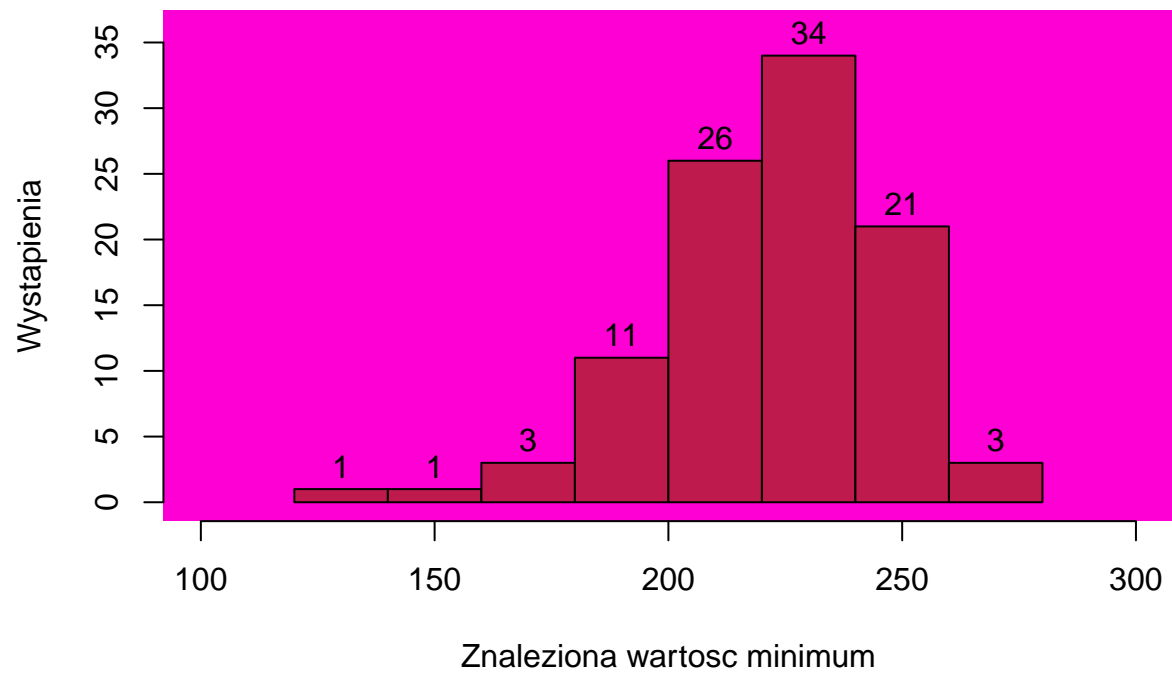
## Funkcja Griewanka 10D PRS



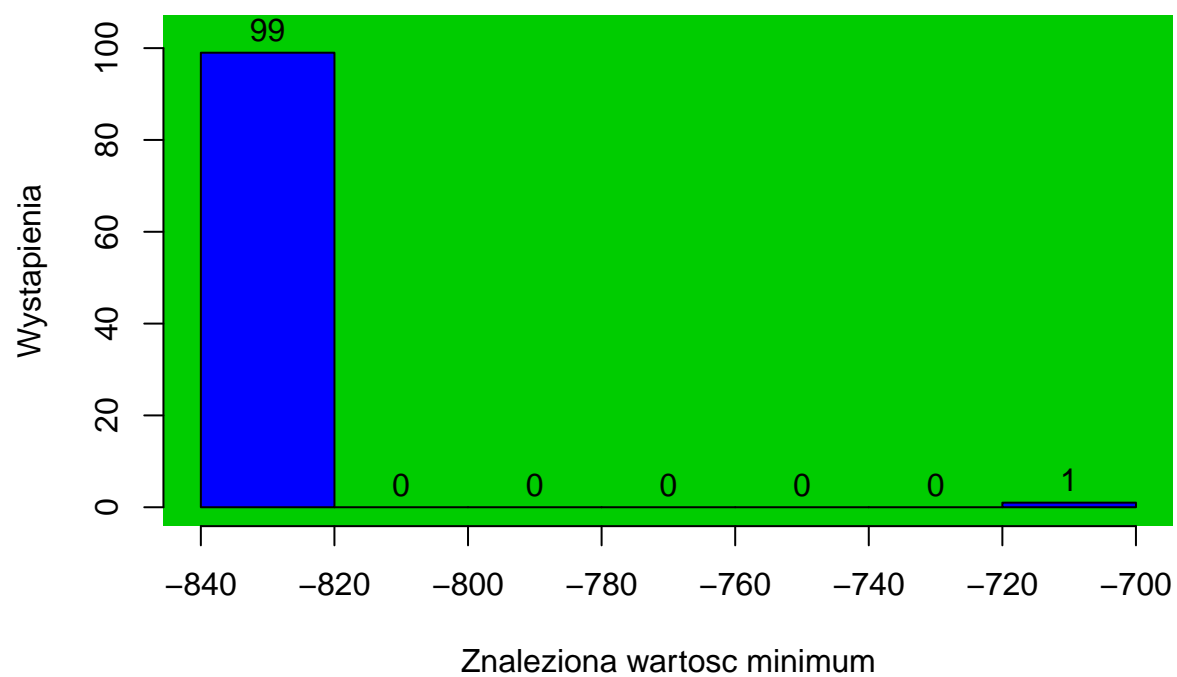
# Funkcja Griewanka 20D MS



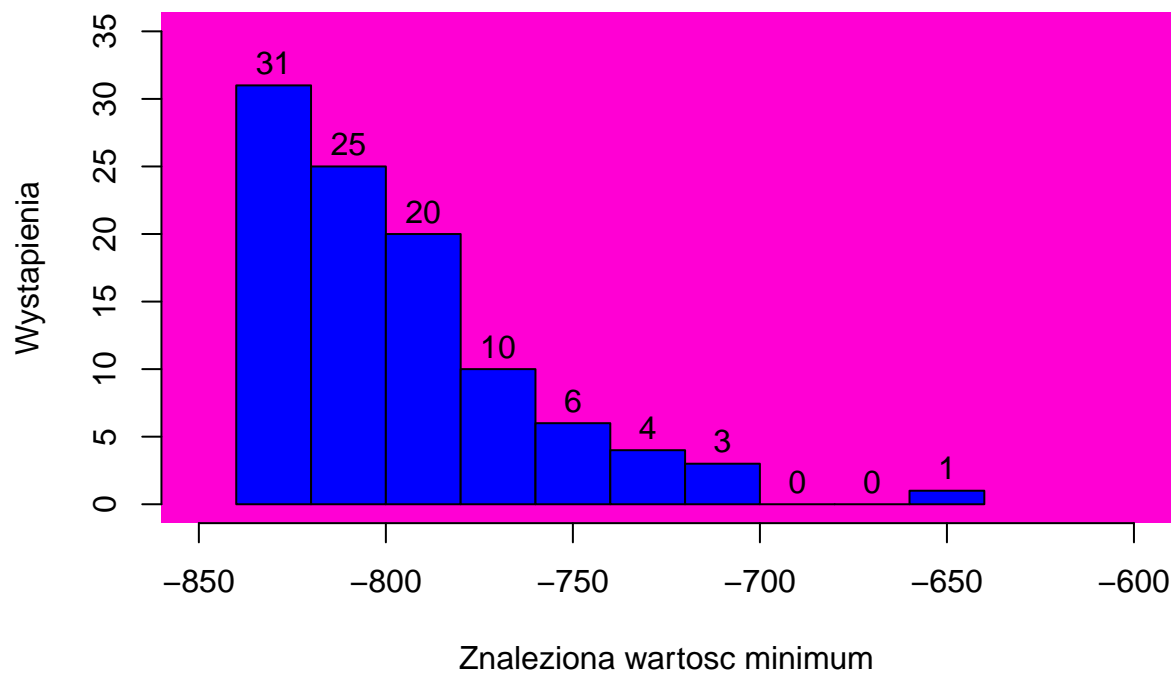
## Funkcja Griewanka 20D PRS



## Funkcja Schwefela 2D MS

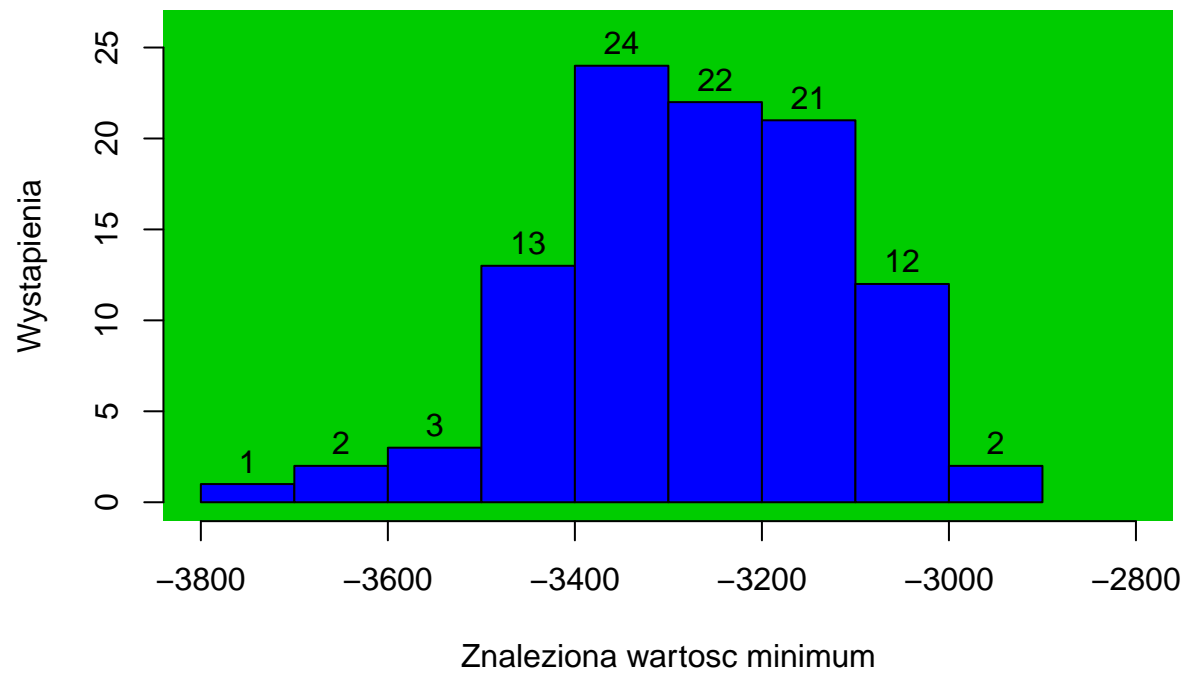


## Funkcja Schwefela 2D PRS

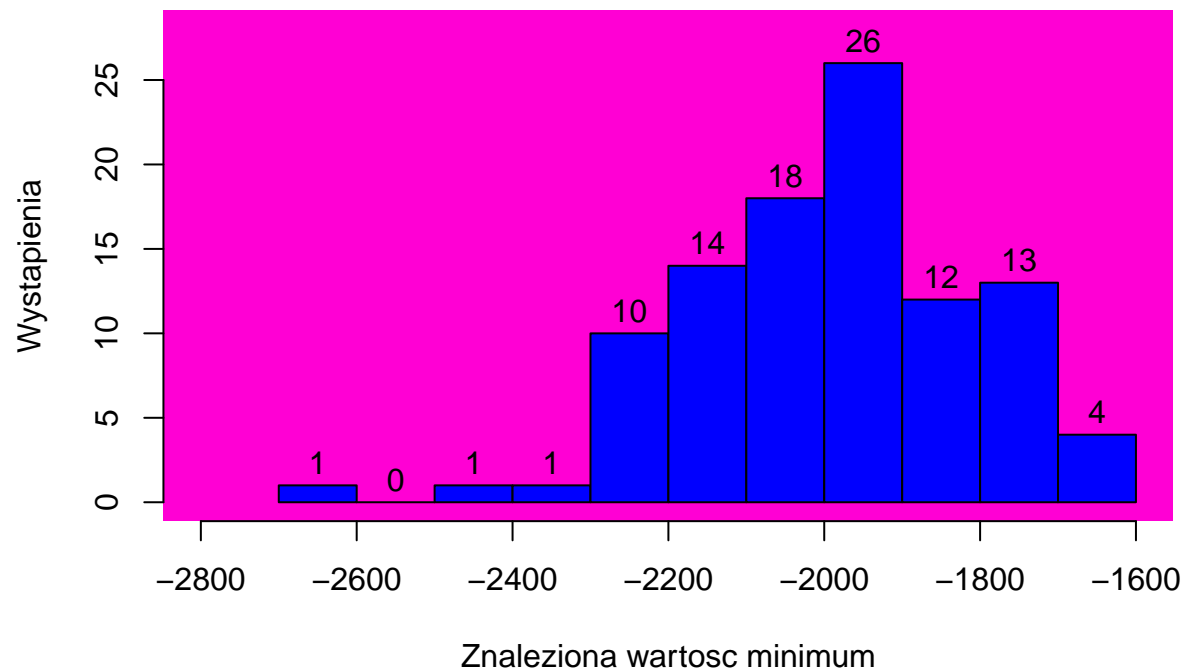


# Funkcja Schwefela 10D

## MS



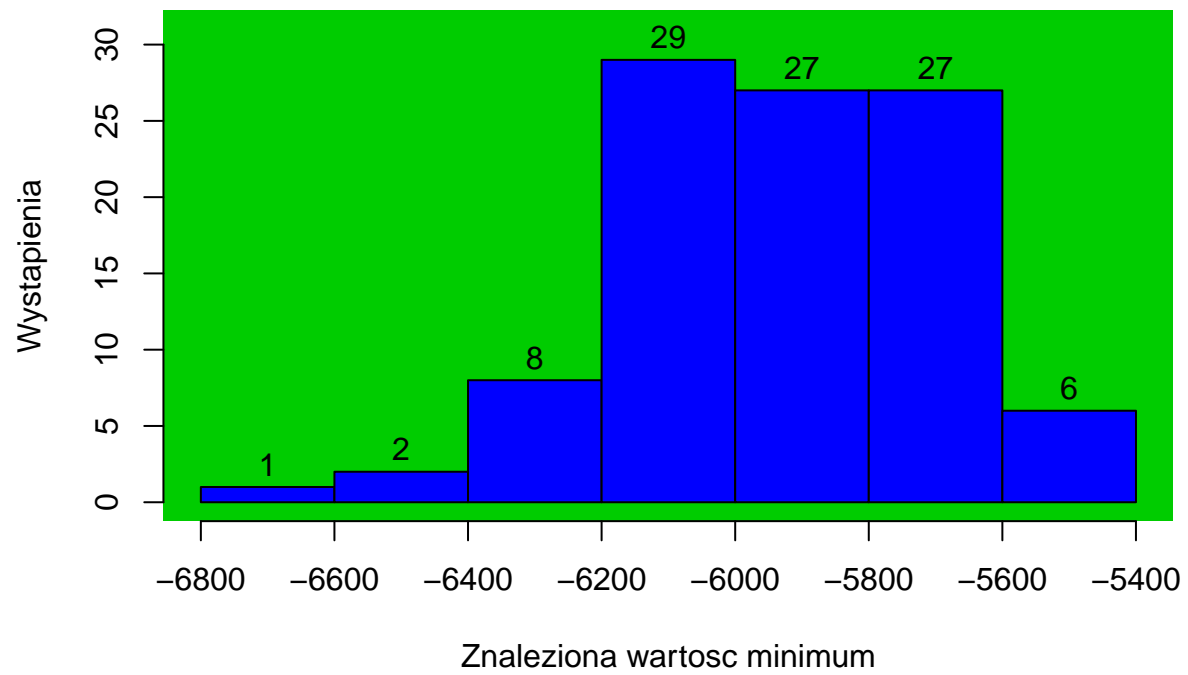
## Funkcja Schwefela 10D PRS



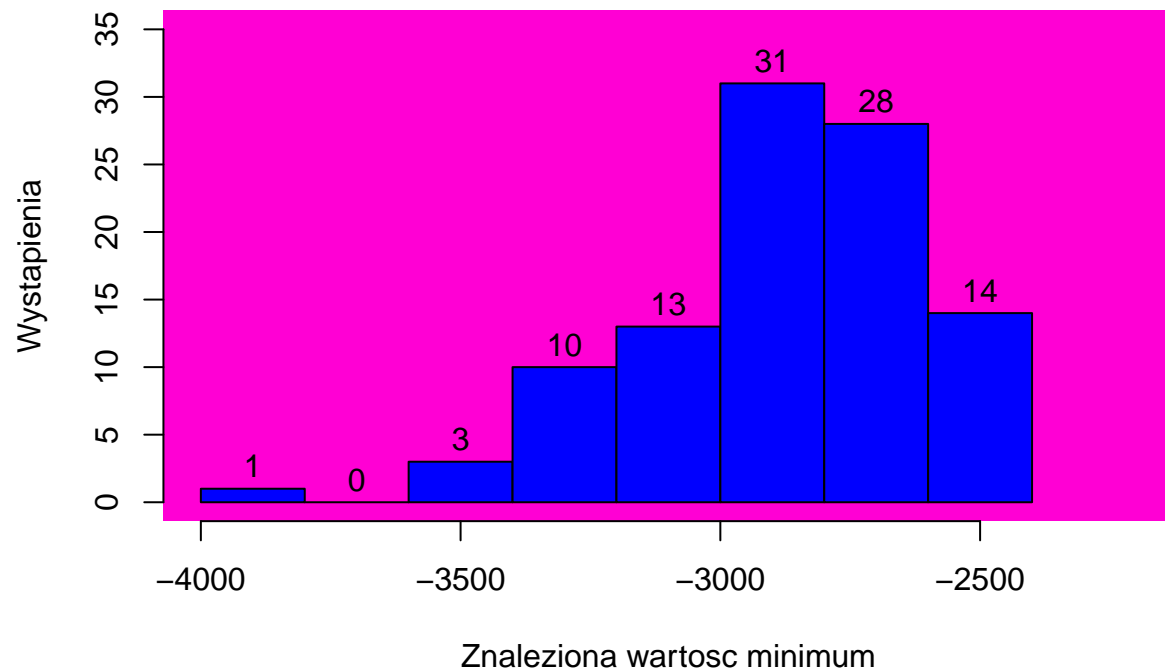


## Funkcja Schwefela 20D

MS

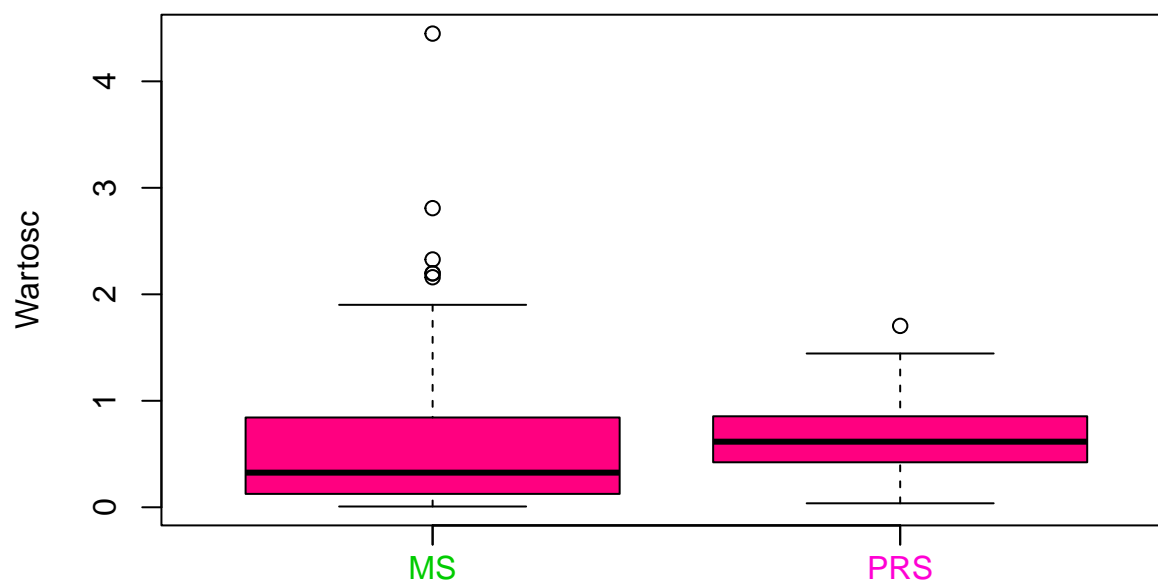


## Funkcja Schwefela 20D PRS

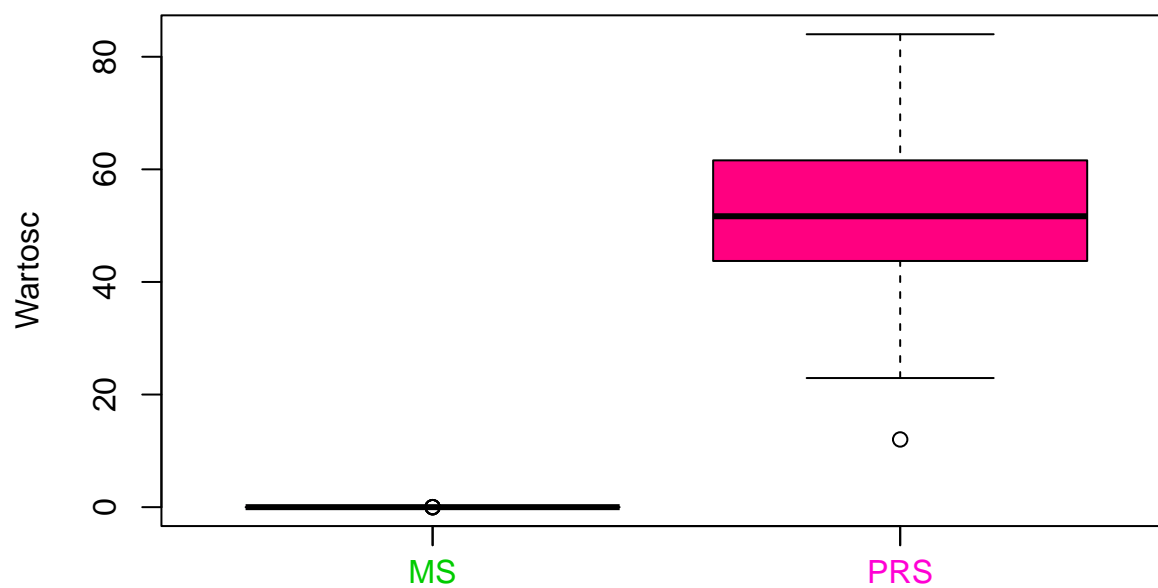


## Wykresy pudełkowe

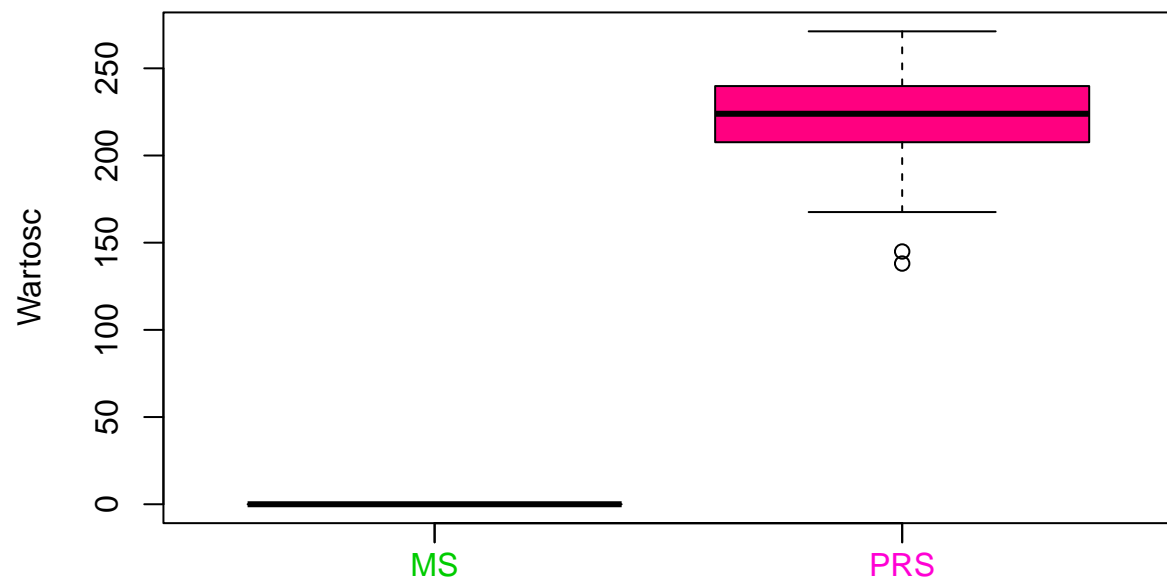
### Funkcja Griewanka, 2D



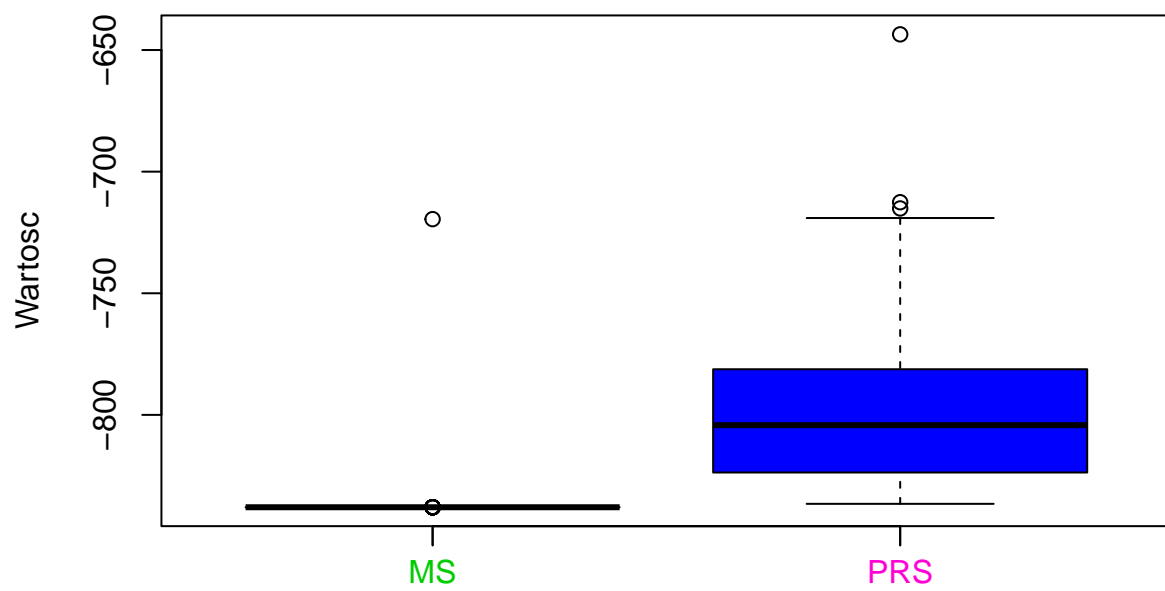
### Funkcja Griewanka, 10D



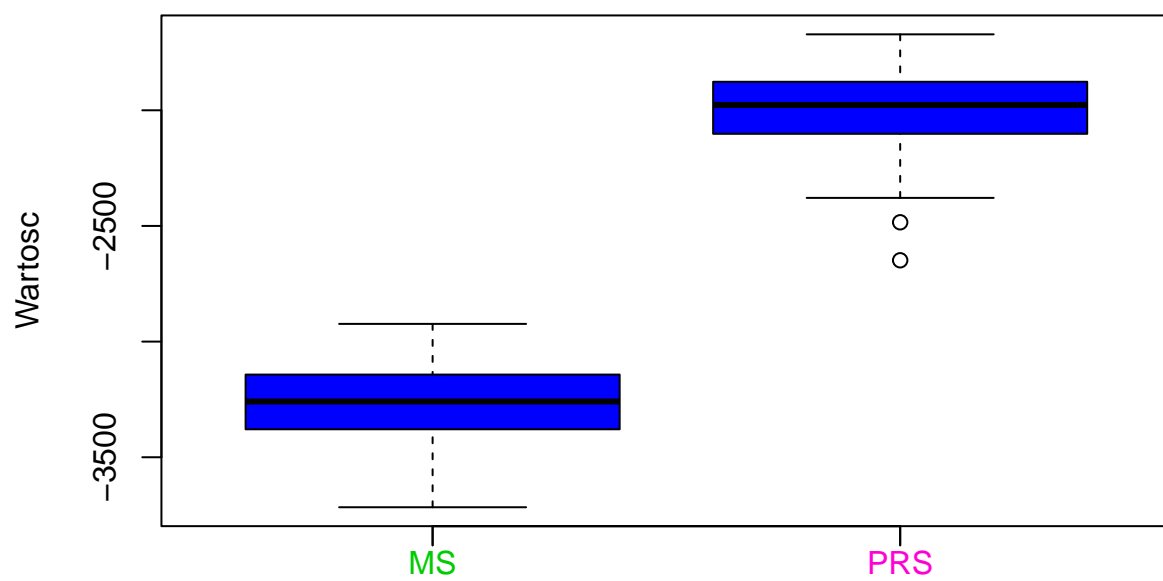
## Funkcja Griewanka, 20D



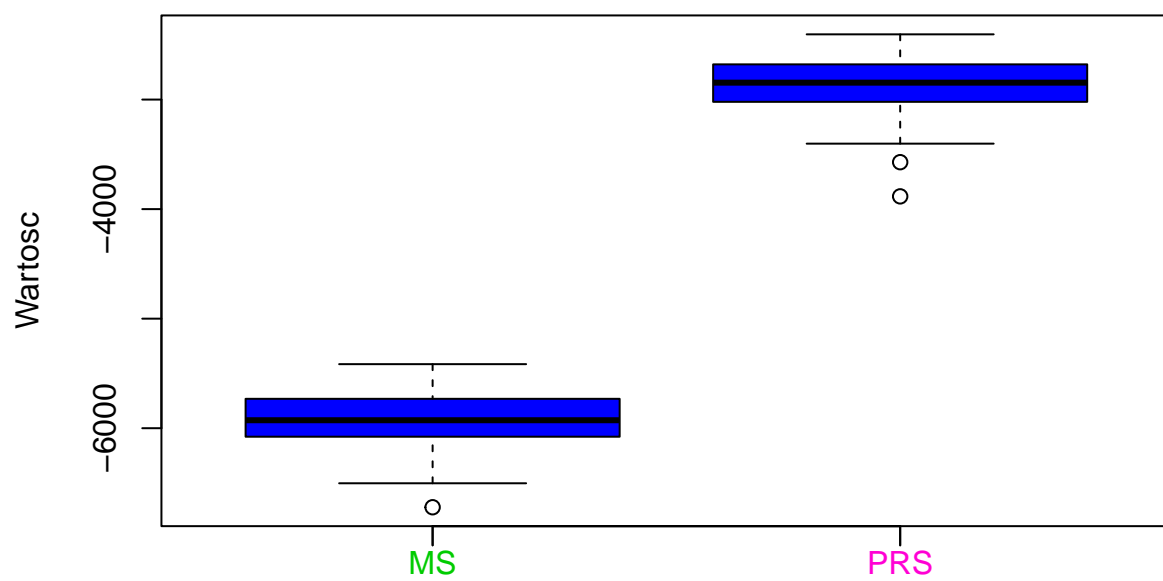
## Funkcja Schwefela, 2D



## Funkcja Schwefela, 10D



## Funkcja Schwefela, 20D



## T testy

Dla hipotezy zerowej twierdzącej, że średnie są sobie równe

### Funkcja Griewanka, 2D

```
##
## Paired t-test
##
## data:  G2PRS and G2MS
## t = 0.51955, df = 99, p-value = 0.6045
## alternative hypothesis: true mean difference is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
##  -0.1067528  0.1824889
## sample estimates:
## mean difference
##      0.03786802
```

### Funkcja Griewanka, 10D

```
##
## Paired t-test
##
## data:  G10PRS and G10MS
## t = 40.75, df = 99, p-value < 2.2e-16
## alternative hypothesis: true mean difference is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
##  49.19135 54.22699
## sample estimates:
## mean difference
##      51.70917
```

### Funkcja Griewanka, 20D

```
##
## Paired t-test
##
## data:  G20PRS and G20MS
## t = 87.939, df = 99, p-value < 2.2e-16
## alternative hypothesis: true mean difference is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
##  217.7479 227.8011
## sample estimates:
## mean difference
##      222.7745
```



### Funkcja Schwefela, 2D

```
##
## Paired t-test
##
## data: S2PRS and S2MS
## t = 10.624, df = 99, p-value < 2.2e-16
## alternative hypothesis: true mean difference is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
## 32.19550 46.98353
## sample estimates:
## mean difference
## 39.58952
```

### Funkcja Schwefela, 10D

```
##
## Paired t-test
##
## data: S10PRS and S10MS
## t = 56.898, df = 99, p-value < 2.2e-16
## alternative hypothesis: true mean difference is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
## 1227.543 1316.254
## sample estimates:
## mean difference
## 1271.899
```

### Funkcja Schwefela, 20D

```
##
## Paired t-test
##
## data: S20PRS and S20MS
## t = 91.343, df = 99, p-value < 2.2e-16
## alternative hypothesis: true mean difference is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
## 2992.623 3125.527
## sample estimates:
## mean difference
## 3059.075
```

## Wnioski końcowe:

### Wpływ wymiarowości:

Wraz ze wzrostem liczby wymiarów, różnica między algorytmami staje się coraz bardziej wyraźna. Przewaga **MS** nad **PRS** rośnie wykładniczo wraz z wymiarowością.

### Porównanie funkcji:

Funkcja **Schwefela** wykazuje większe różnice między algorytmami niż funkcja **Griewanka**. Dla funkcji **Griewanka** w 2D nie zaobserwowano istotnej różnicy między algorytmami.