

Porównanie działania wybranych algorytmów minimalizacji stochastycznej

Kacper Feliks, Maciej Wiśniewski

28-01-2025

Cel projektu

Projekt polega na prostym opracowaniu statystycznym wyników porównania działania wybranych algorytmów minimalizacji stochastycznej. Zdecydowaliśmy się do porównania użyć następujących algorytmów:

- **Poszukiwanie przypadkowe (Pure Random Search, PRS)**

- **Metoda wielokrotnego startu (multi-start, MS)**

Opis algorytmów

Poszukiwanie przypadkowe (Pure Random Search, PRS)

Algorytm PRS polega na losowym przeszukiwaniu przestrzeni rozwiązań, w której minimalizowana funkcja jest zdefiniowana. Działa w następujący sposób:

1. **Losowanie punktów:** Losujemy kolejne punkty w przestrzeni poszukiwań z rozkładu jednostajnego. Jeżeli dziedzina poszukiwań jest kostką wielowymiarową, to każdą współrzędną punktu losujemy z odpowiedniego jednowymiarowego rozkładu jednostajnego.
Na przykład, jeśli dziedzina poszukiwań to kostka trójwymiarowa $[0, 1] \times [-2, 2] \times [100, 1000]$, losowanie współrzędnych wygląda następująco:
 - pierwsza współrzędna: $U(0, 1)$,
 - druga współrzędna: $U(-2, 2)$,
 - trzecia współrzędna: $U(100, 1000)$.
2. **Porównanie wartości funkcji:** Wartość funkcji w każdym wylosowanym punkcie porównujemy z aktualnie zapamiętanym minimum. Jeśli wartość funkcji w nowym punkcie jest mniejsza, zapamiętujemy ten punkt jako nowe minimum.
3. **Wynik:** Wartość funkcji w ostatnim zapamiętanym punkcie stanowi wynik algorytmu.

Metoda wielokrotnego startu (Multi-Start, MS)

Algorytm **MS** łączy losowe przeszukiwanie przestrzeni z metodami optymalizacji lokalnej. Jego kroki są następujące:

1. **Losowanie punktów:** Podobnie jak w **PRS**, losujemy zadany zbiór punktów startowych z rozkładu jednostajnego w przestrzeni poszukiwań.
2. **Uruchomienie optymalizacji lokalnej:** Dla każdego wylosowanego punktu startowego uruchamiana jest metoda optymalizacji lokalnej.
3. **Porównanie wyników:** Dla każdego startu zapisujemy wartość funkcji w zwróconym punkcie lokalnego minimum. Wynikiem algorytmu jest minimalna wartość funkcji spośród wszystkich punktów końcowych.

Oba algorytmy można stosować w zadanej dziedzinie, różnią się jednak podejściem. **PRS** polega na losowym próbkowaniu całej przestrzeni, natomiast **MS** wykorzystuje optymalizację lokalną, aby dokładniej zbadać okolice losowo wybranych punktów startowych.

Do porównania należało wybrać dwie z funkcji dostępnych w pakiecie **smoof**, które są skalarne (single-objective) i mają wersje dla różnej liczby wymiarów (akceptują parametr **dimensions**).

W celu sprawdzenia dostępnych algorytmów wykonaliśmy następujący algorytm, który znajdował dostępne funkcje o wymaganych parametrach:

```
library(smoof)

scalar_dimensional_functions <- Filter(function(fn_name) {
  fn <- get(fn_name, envir = asNamespace('smoof'))
  is.function(fn) &&
  'dimensions' %in% names(formals(fn)) &&
  inherits(try(fn(2), silent = TRUE), 'smoof_function') &&
  getNumberOfObjectives(fn(2)) == 1
}, ls('package:smoof'))

print(scalar_dimensional_functions)
```

Do porównania wybraliśmy dwie funkcje:

- **Schwefel**
- **Griewank**

Nasz wybór padł dokładnie na te funkcje ze względu na nich odmiennosc, trudność w optymalizacji oraz niebanalną implementację.

Specyfikacja sprzętu

Obliczenia i testy zostały wykonane na komputerze o następujące specyfikacji:

- system Windows 10
- procesor Intel Core i7-6700HQ 2.60 GHz.
- pamięć Ram 16Gb

WYNIKI

Funkcja Griewanka 2D

MS

- średnia: 0.6055442
- Wartość najmniejsza: 0.007396
- Wartość największa: 4.4481658
- Mediana: 0.3253765
- Dolny kwartył: 0.1257573
- Górny kwartył: 0.8310025

PRS

- średnia: 0.6434122
- Wartość najmniejsza: 0.0373963
- Wartość największa: 1.7034647
- Mediana: 0.6161477
- Dolny kwartył: 0.4292943
- Górny kwartył: 0.8541051

Funkcja Griewanka 10D

MS

- średnia: $5.3433198 \times 10^{-11}$
- Wartość najmniejsza: $1.3820056 \times 10^{-12}$
- Wartość największa: $2.1964297 \times 10^{-10}$
- Mediana: $4.1341264 \times 10^{-11}$
- Dolny kwartył: $2.7560176 \times 10^{-11}$
- Górny kwartył: $7.4529827 \times 10^{-11}$

PRS

- średnia: 51.7091663
- Wartość najmniejsza: 12.0229676
- Wartość największa: 83.9943267
- Mediana: 51.6668436
- Dolny kwartył: 43.7718444
- Górny kwartył: 61.4505366

Funkcja Griewanka 20D

MS

- średnia: $8.1357054 \times 10^{-11}$
- Wartość najmniejsza: $1.3866686 \times 10^{-13}$
- Wartość największa: $1.7841773 \times 10^{-10}$
- Mediana: $7.5553341 \times 10^{-11}$
- Dolny kwartyl: $5.6181226 \times 10^{-11}$
- Górny kwartyl: $1.0998349 \times 10^{-10}$

PRS

- średnia: 222.7744787
- Wartość najmniejsza: 138.0348086
- Wartość największa: 271.2005696
- Mediana: 223.940142
- Dolny kwartyl: 207.9649149
- Górny kwartyl: 239.8048899

Funkcja Schwefela 2D

MS

- średnia: -836.7813912
- Wartość najmniejsza: -837.9657745
- Wartość największa: -719.5274399
- Mediana: -837.9657745
- Dolny kwartyl: -837.9657745
- Górny kwartyl: -837.9657745

PRS

- średnia: -797.1918759
- Wartość najmniejsza: -836.5685042
- Wartość największa: -643.5621982
- Mediana: -804.2280449
- Dolny kwartyl: -823.5638115
- Górny kwartyl: -781.6197479

Funkcja Schwefela 10D

MS

- średnia: -3262.1275223
- Wartość najmniejsza: -3716.0755343
- Wartość największa: -2923.4470726
- Mediana: -3259.0250766
- Dolny kwartyl: -3378.9804707
- Górny kwartyl: -3142.8476519

PRS

- średnia: -1990.2290063
- Wartość najmniejsza: -2648.5365291
- Wartość największa: -1671.7495182
- Mediana: -1977.0998535
- Dolny kwartyl: -2101.5557137
- Górny kwartyl: -1880.3428427

Funkcja Schwefela 20D

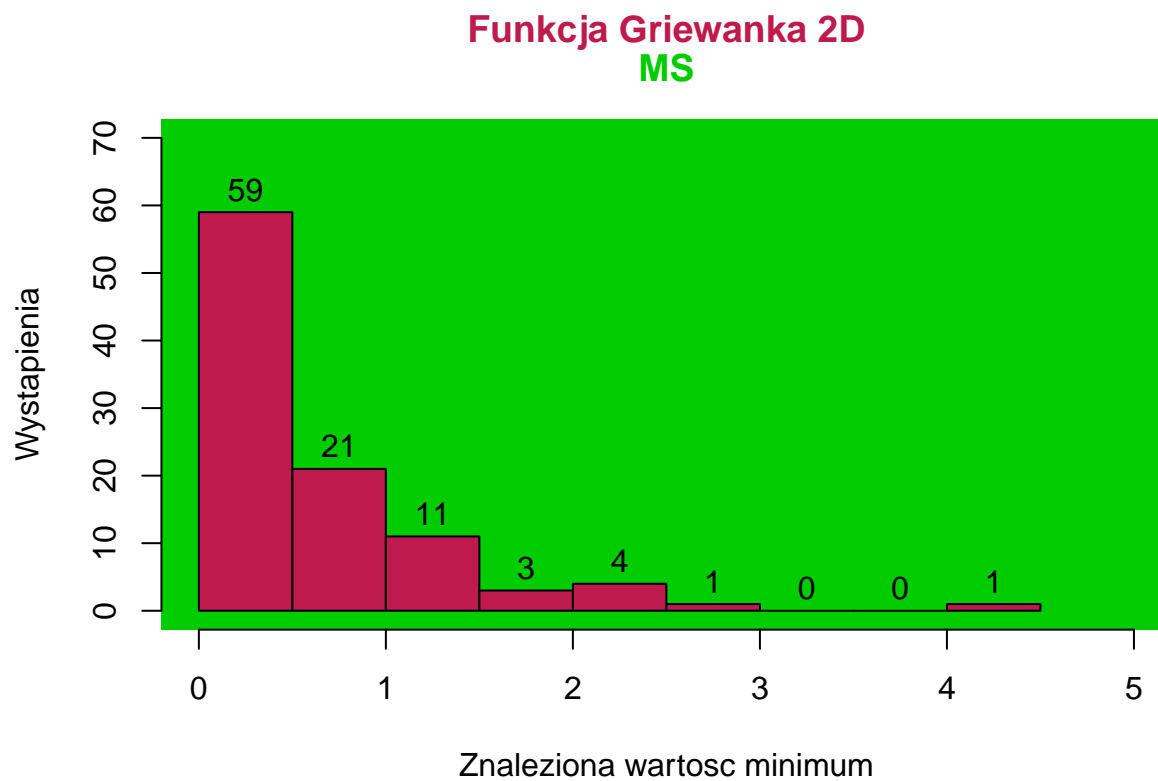
MS

- średnia: -5930.2842622
- Wartość najmniejsza: -6721.5020158
- Wartość największa: -5415.4216596
- Mediana: -5927.3537852
- Dolny kwartyl: -6073.1127276
- Górny kwartyl: -5732.1016643

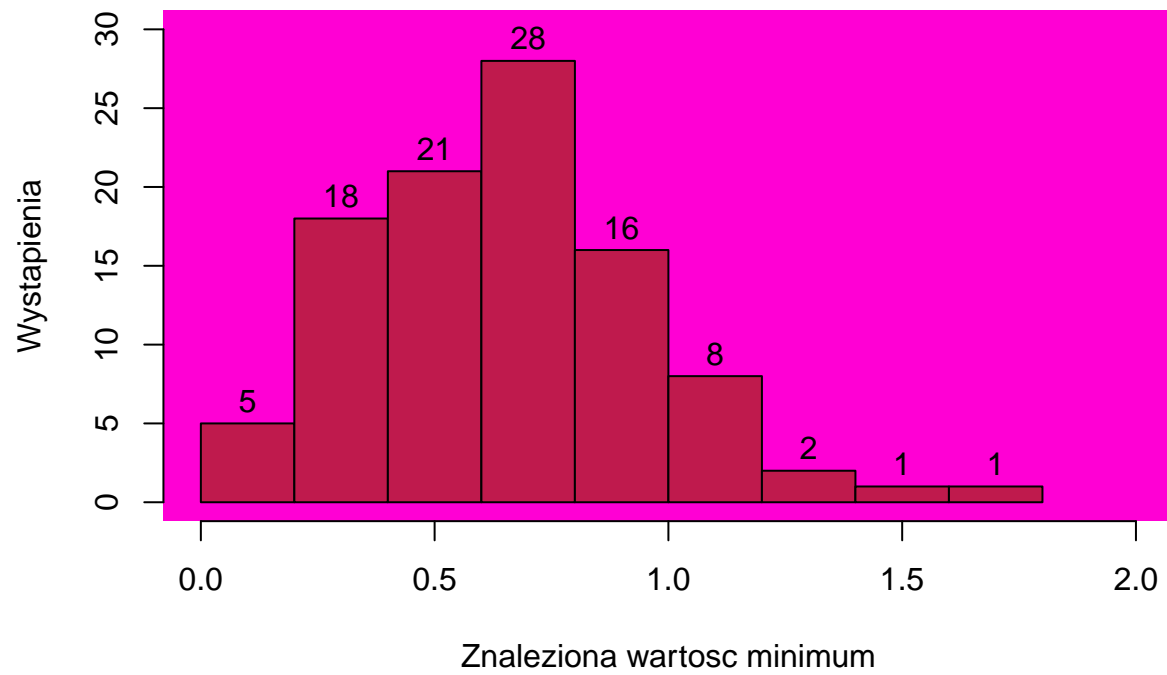
PRS

- średnia: -2871.2092706
- Wartość najmniejsza: -3883.630182
- Wartość największa: -2404.6476755
- Mediana: -2845.6522752
- Dolny kwartyl: -3018.7275952
- Górny kwartyl: -2683.1582378

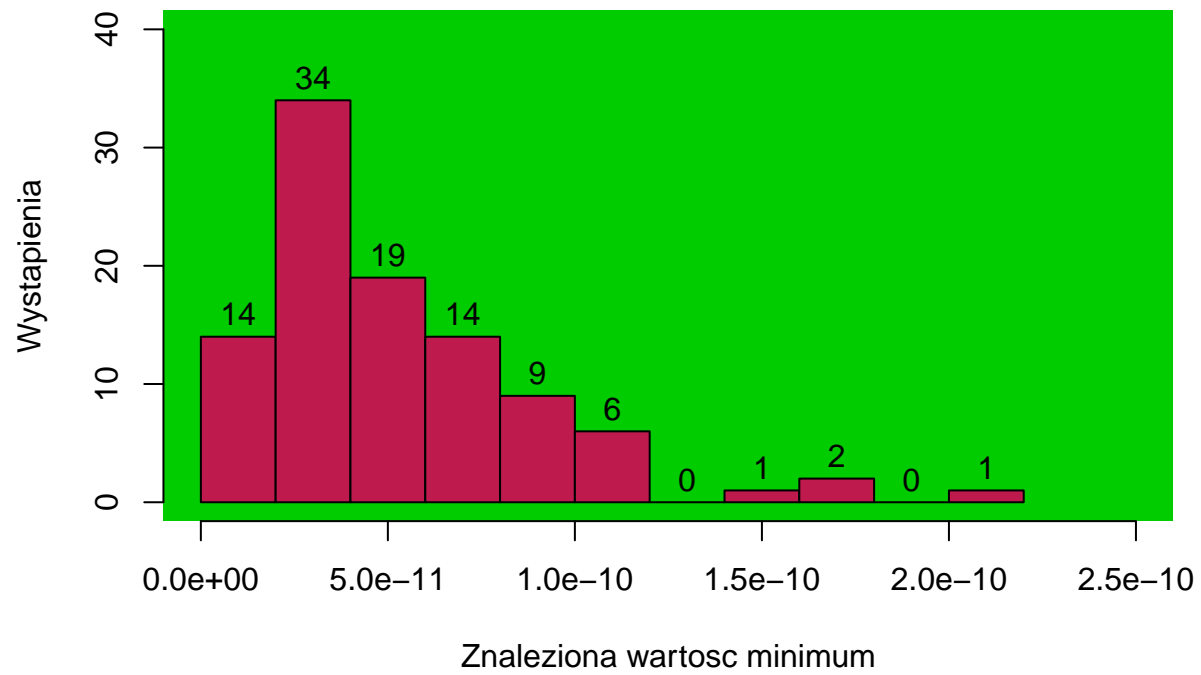
Wyniki na wykresach



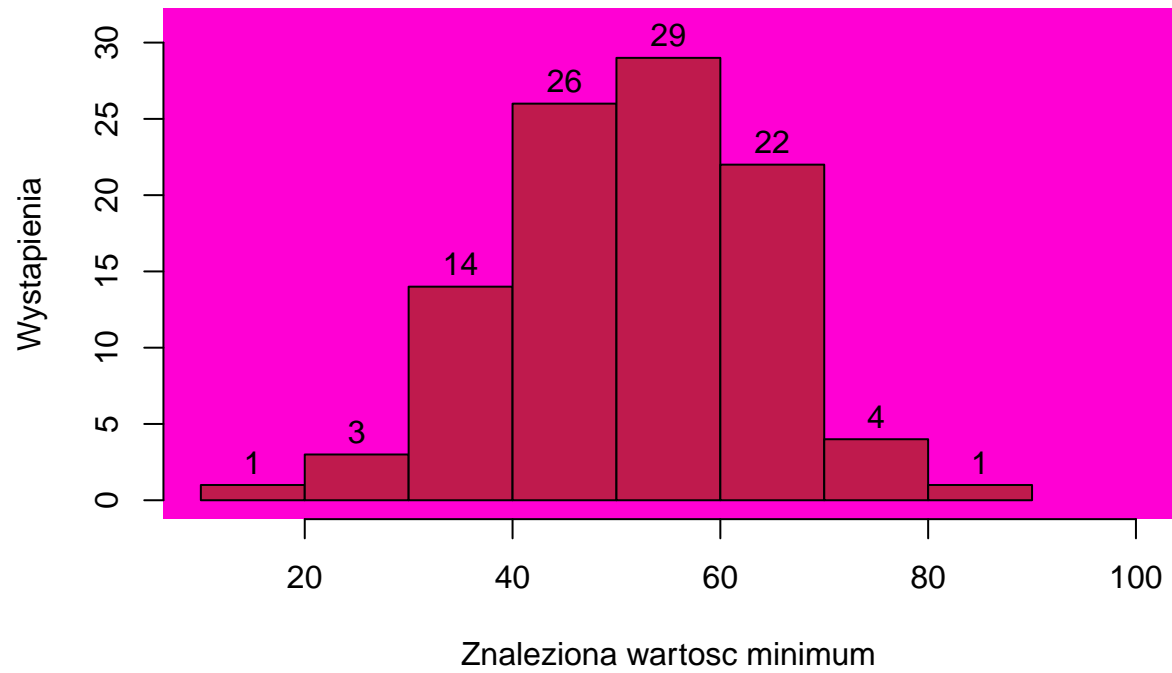
Funkcja Griewanka 2D PRS



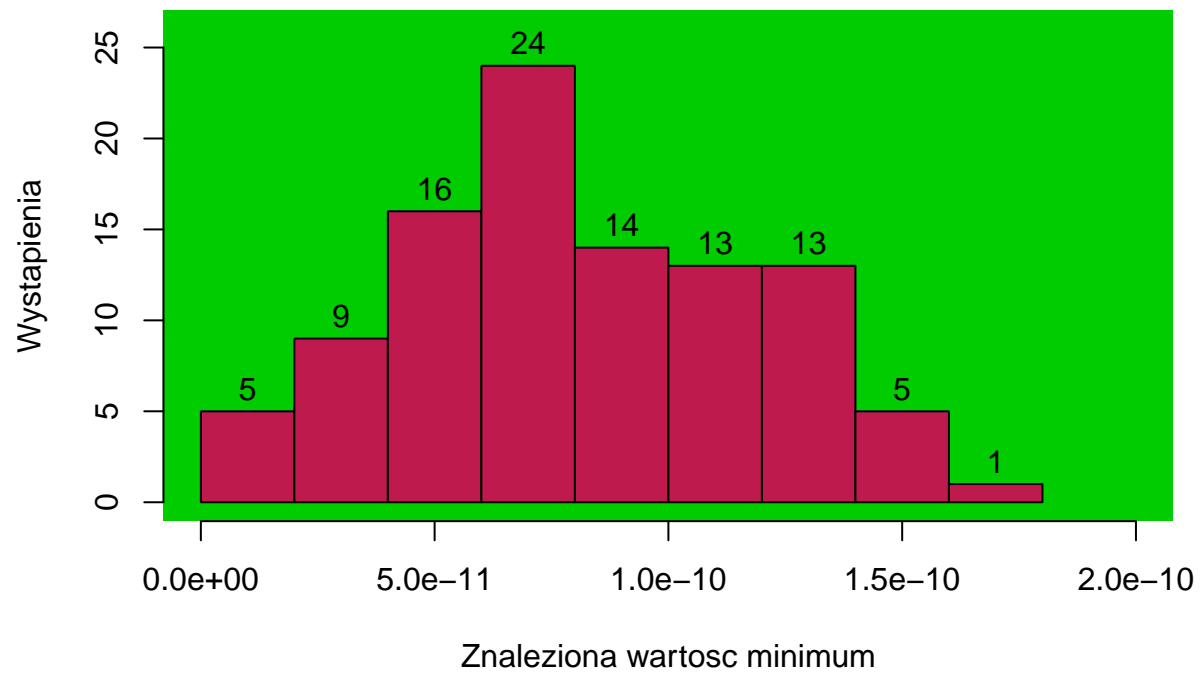
Funkcja Griewanka 10D MS



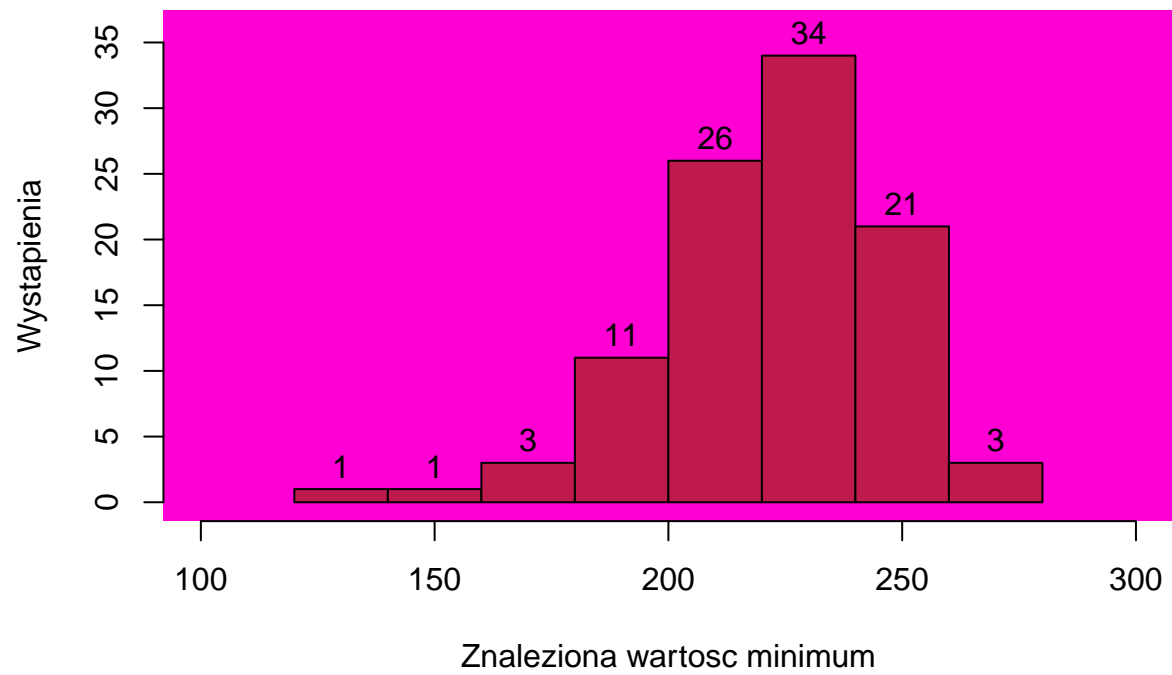
Funkcja Griewanka 10D PRS



Funkcja Griewanka 20D
MS

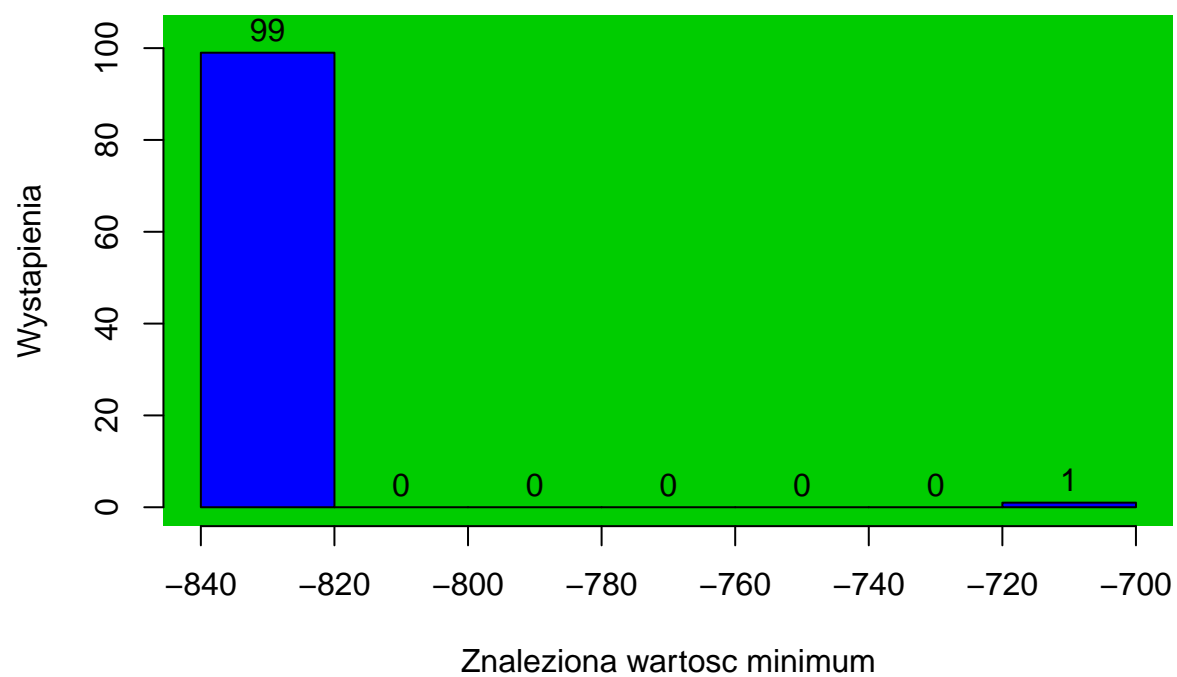


Funkcja Griewanka 20D PRS

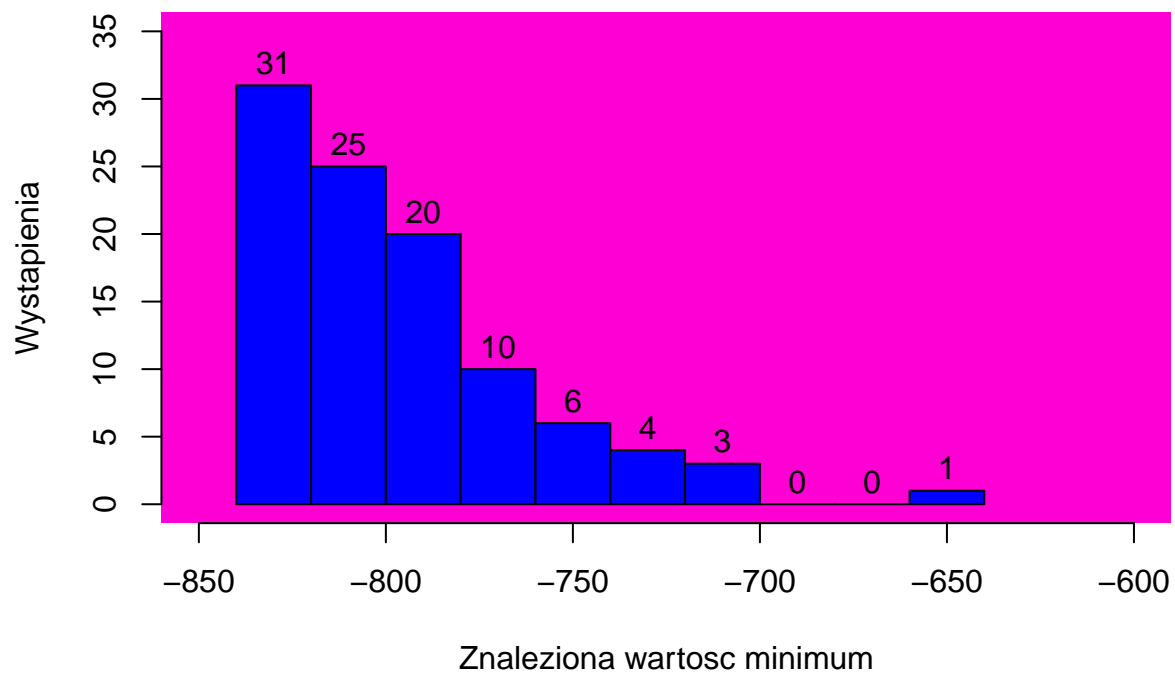


Funkcja Schwefela 2D

MS

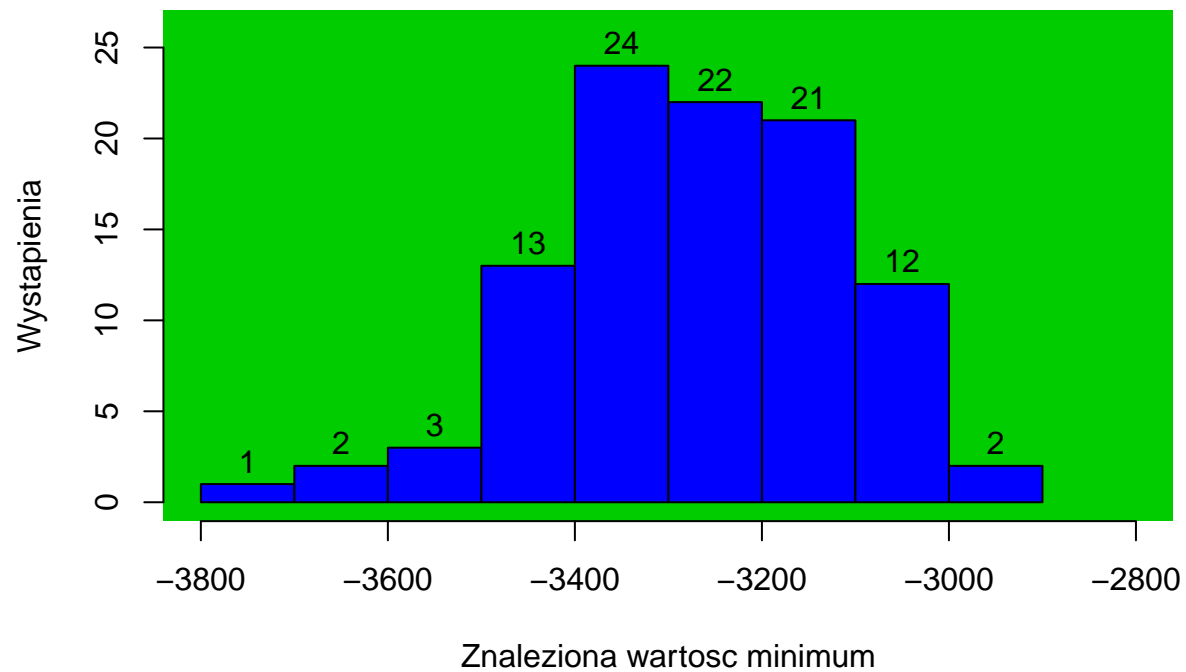


Funkcja Schwefela 2D PRS

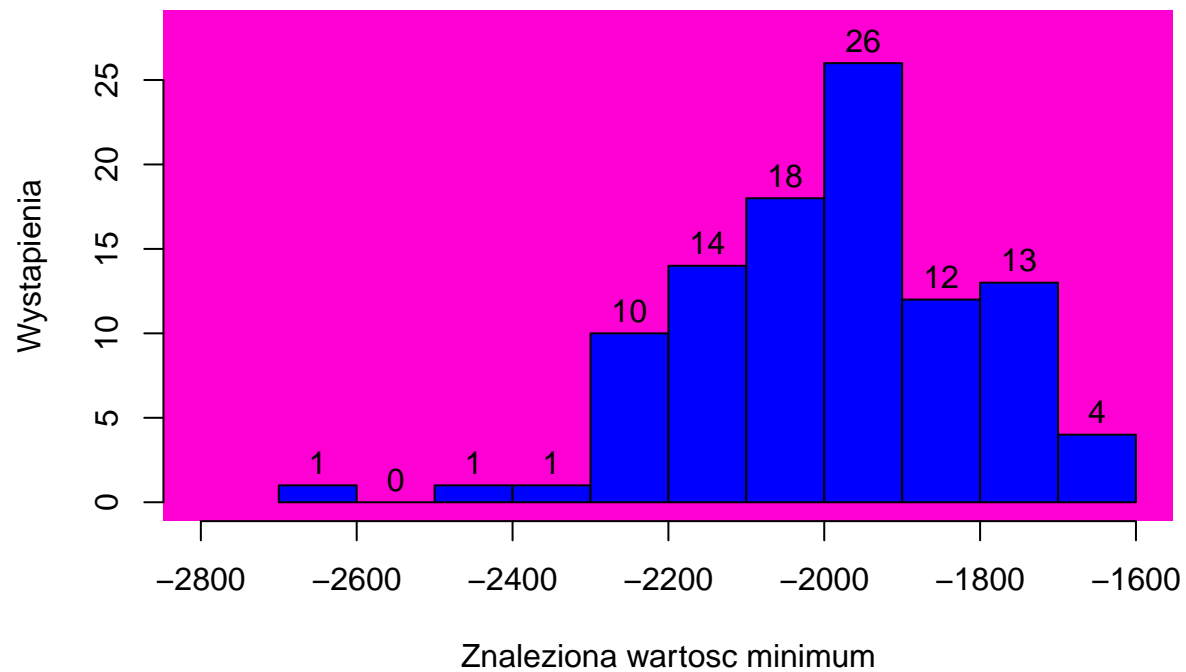


Funkcja Schwefela 10D

MS

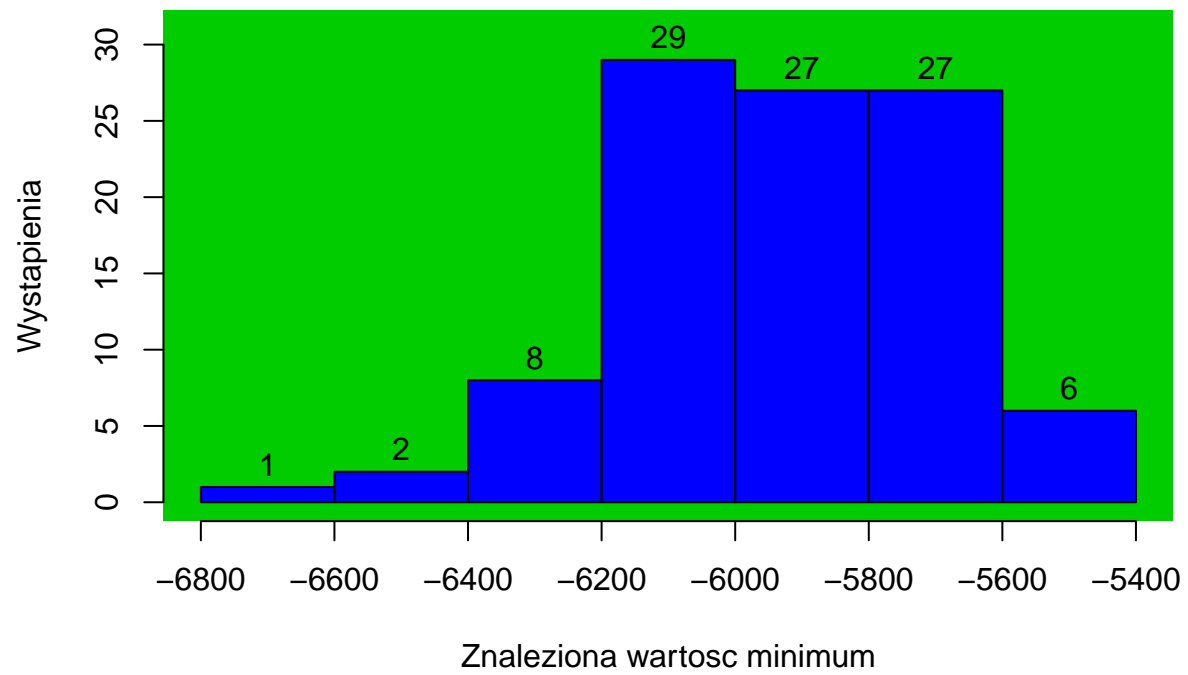


Funkcja Schwefela 10D PRS

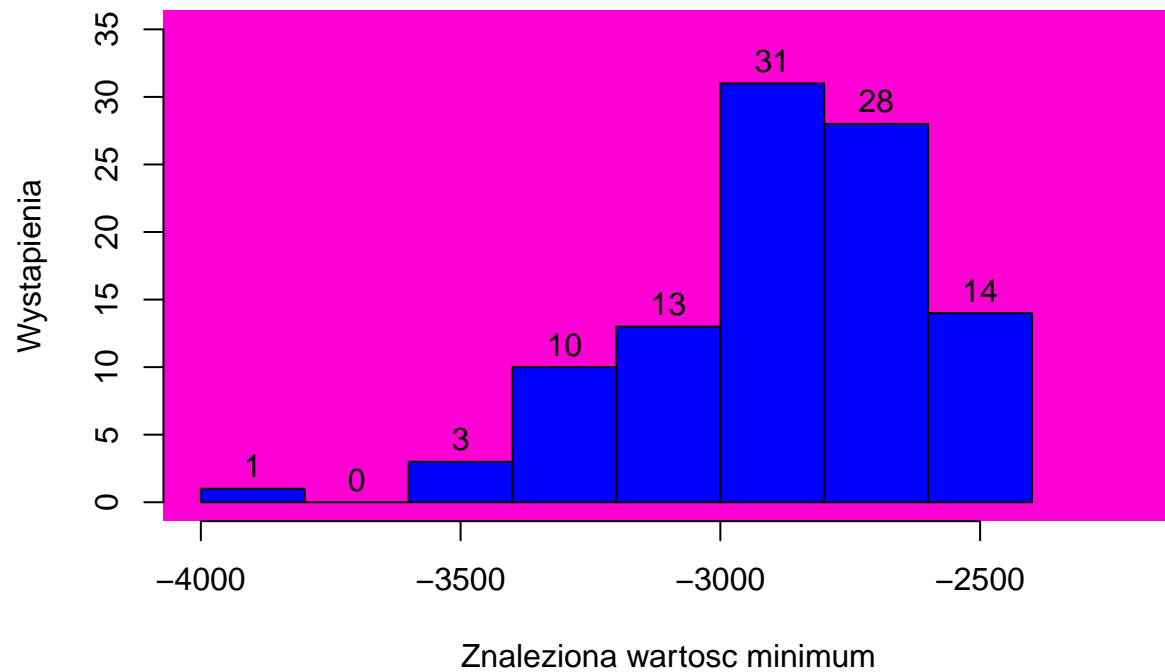


Funkcja Schwefela 20D

MS

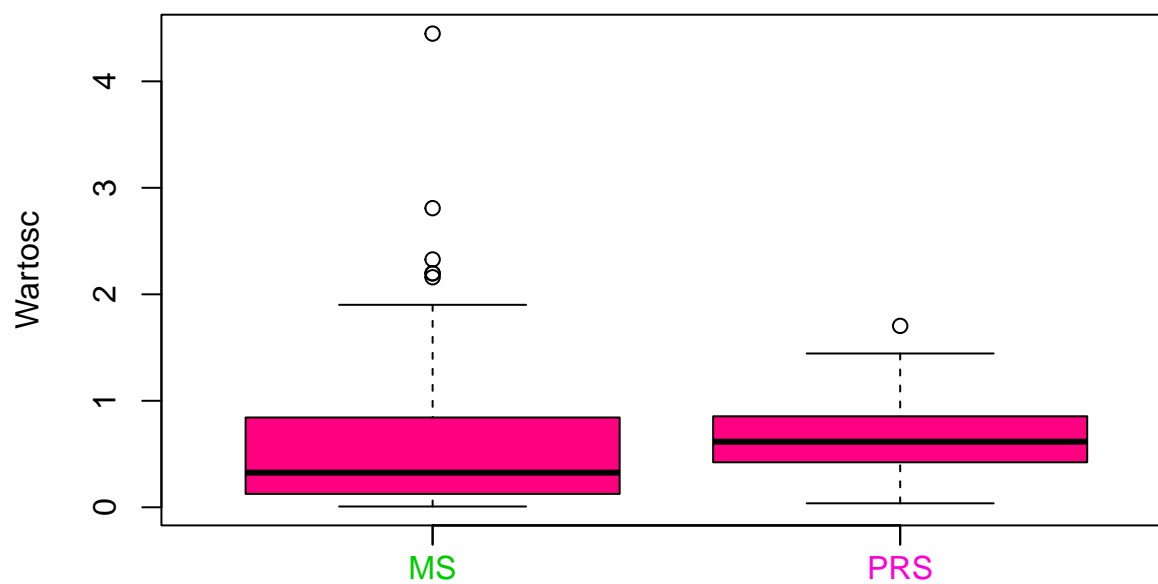


Funkcja Schwefela 20D PRS

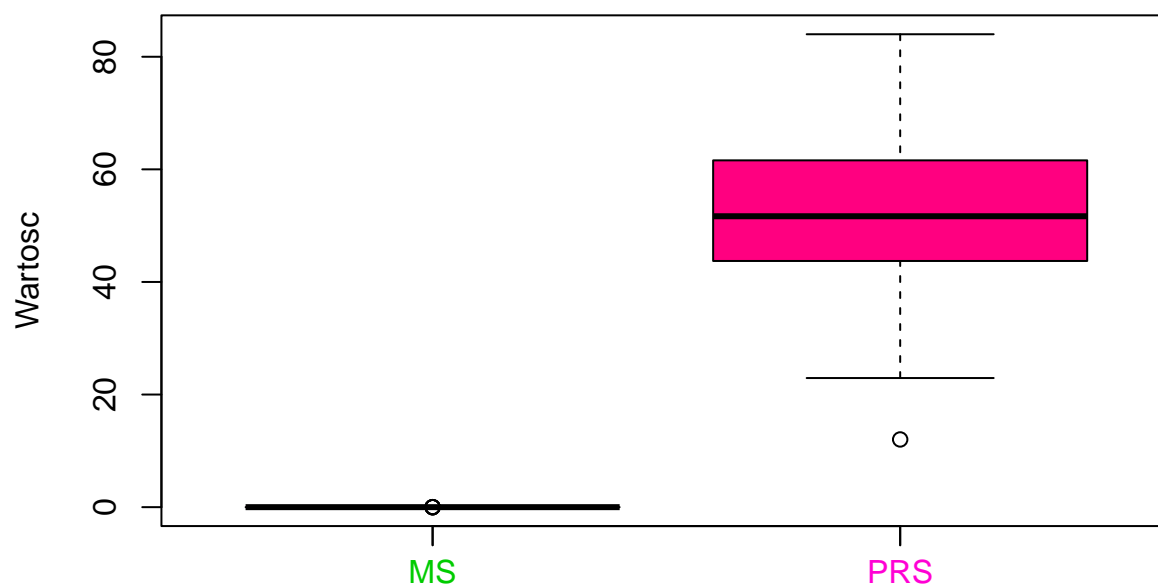


Wykresy pudełkowe

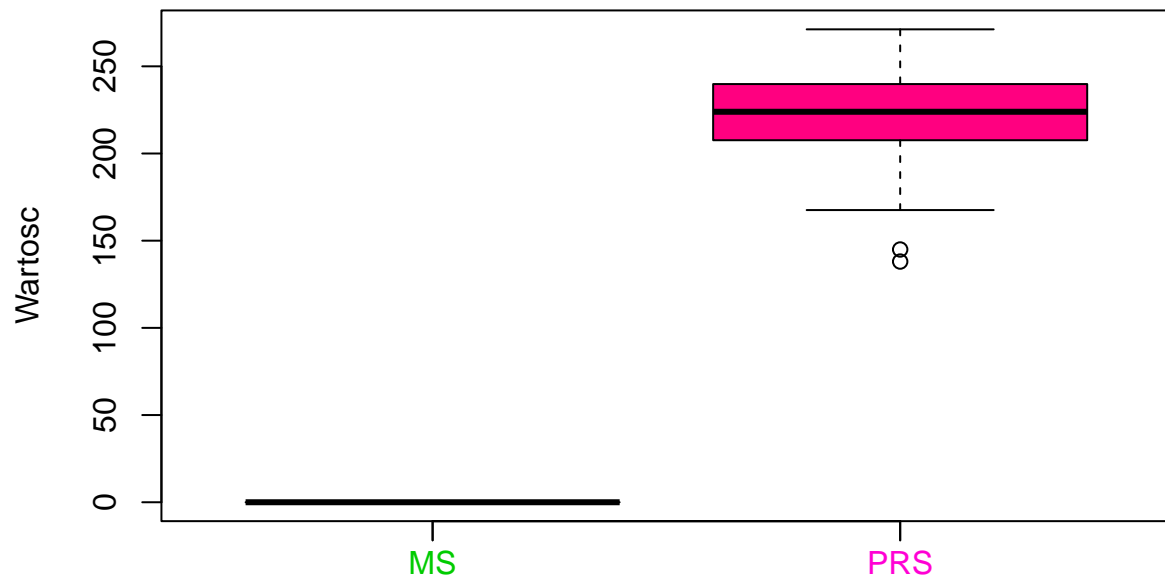
Funkcja Griewanka, 2D



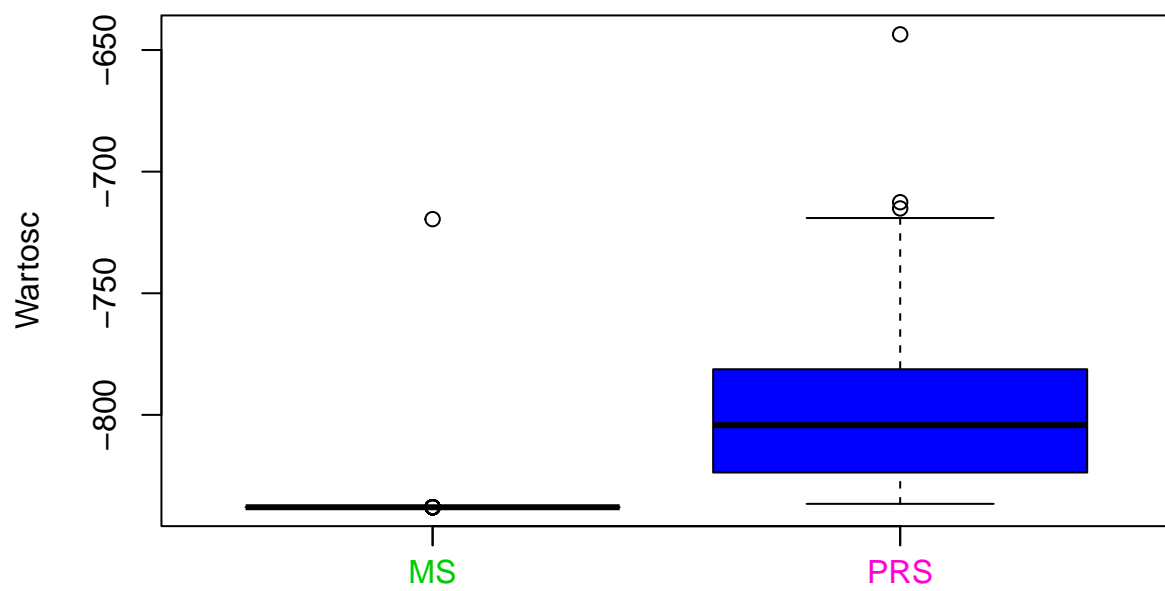
Funkcja Griewanka, 10D



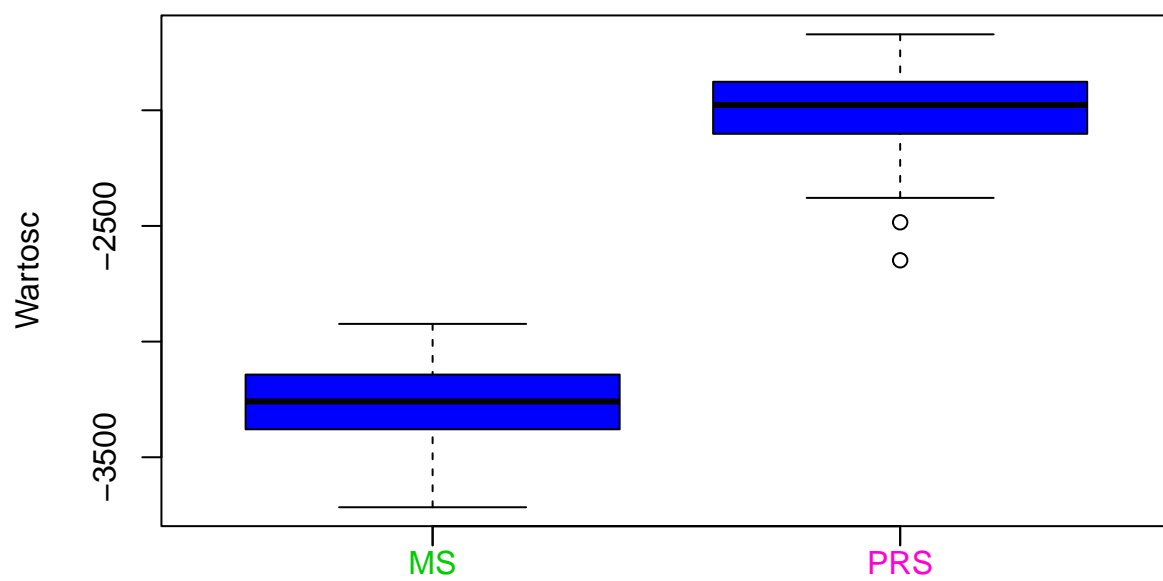
Funkcja Griewanka, 20D



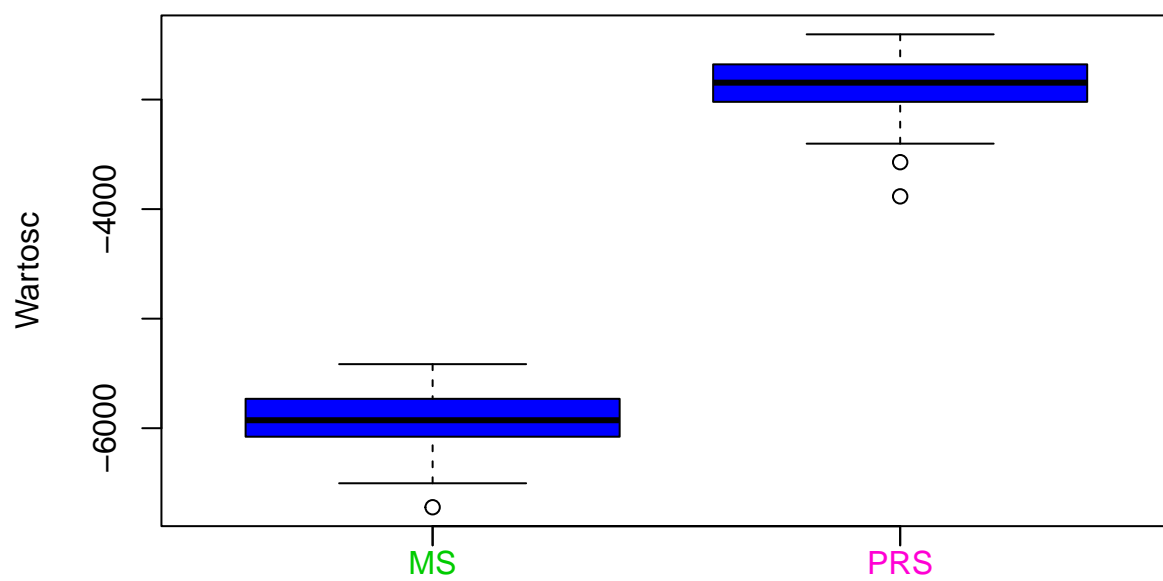
Funkcja Schwefela, 2D



Funkcja Schwefela, 10D



Funkcja Schwefela, 20D



T testy

Dla hipotezy zerowej twierdzącej, że średnie są sobie równe

Funkcja Griewanka, 2D

```
##
## Paired t-test
##
## data: G2PRS and G2MS
## t = 0.51955, df = 99, p-value = 0.6045
## alternative hypothesis: true mean difference is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
## -0.1067528 0.1824889
## sample estimates:
## mean difference
## 0.03786802
```

Funkcja Griewanka, 10D

```
##
## Paired t-test
##
## data: G10PRS and G10MS
## t = 40.75, df = 99, p-value < 2.2e-16
## alternative hypothesis: true mean difference is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
## 49.19135 54.22699
## sample estimates:
## mean difference
## 51.70917
```

Funkcja Griewanka, 20D

```
##
## Paired t-test
##
## data: G20PRS and G20MS
## t = 87.939, df = 99, p-value < 2.2e-16
## alternative hypothesis: true mean difference is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
## 217.7479 227.8011
## sample estimates:
## mean difference
## 222.7745
```

Funkcja Schwefela, 2D

```
##
## Paired t-test
##
## data: S2PRS and S2MS
## t = 10.624, df = 99, p-value < 2.2e-16
## alternative hypothesis: true mean difference is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
## 32.19550 46.98353
## sample estimates:
## mean difference
## 39.58952
```

Funkcja Schwefela, 10D

```
##
## Paired t-test
##
## data: S10PRS and S10MS
## t = 56.898, df = 99, p-value < 2.2e-16
## alternative hypothesis: true mean difference is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
## 1227.543 1316.254
## sample estimates:
## mean difference
## 1271.899
```

Funkcja Schwefela, 20D

```
##
## Paired t-test
##
## data: S20PRS and S20MS
## t = 91.343, df = 99, p-value < 2.2e-16
## alternative hypothesis: true mean difference is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
## 2992.623 3125.527
## sample estimates:
## mean difference
## 3059.075
```


Wnioski końcowe:

Wpływ wymiarowości:

Wraz ze wzrostem liczby wymiarów, różnica między algorytmami staje się coraz bardziej wyraźna. Przewaga **MS** nad **PRS** rośnie wykładniczo wraz z wymiarowością.

Porównanie funkcji:

Funkcja **Schwefela** wykazuje większe różnice między algorytmami niż funkcja **Griewanka**. Dla funkcji **Griewanka** w 2D nie zaobserwowano istotnej różnicy między algorytmami.

Efektywność algorytmów:

MS konsekwentnie osiąga lepsze wyniki niż **PRS** dla wszystkich przypadków (z wyjątkiem G2D). Różnice są szczególnie widoczne w wyższych wymiarach. **MS** wydaje się być znacznie bardziej odpowiedni dla problemów wielowymiarowych.

Rekomendacje:

Dla problemów 2D: można stosować oba algorytmy (szczególnie dla funkcji **Griewanka**). Dla problemów wielowymiarowych: zdecydowanie zalecane jest użycie **MS**. W przypadku funkcji **Schwefela**: **MS** powinien być preferowanym wyborem niezależnie od wymiarowości.