Lógica Matemática
Prof. Marcelo Casadei

Introdução

Embora existam muitas definições para o campo de estudo da lógica, essas definições não diferem essencialmente umas das outras; há um certo consenso entre os autores de que a Lógica tem, por objeto de estudo, as leis gerais do pensamento, e as formas de aplicar essas leis corretamente na investigação da verdade.

Embora tenham sido encontrados na Índia, textos sobre esse assunto, escritos em épocas remotas, é tradicionalmente aceito que a Lógica tenha nascido na Grécia Antiga, por volta do século IV antes de Cristo. Os primeiros trabalhos sobre Lógica são devidos a Parménides, Zenão, e ao grupo conhecido como '"sofistas", mas o verdadeiro criador da Lógica é, sem dúvida, Aristóteles, pois foi ele quem sistematizou e organizou esse conhecimento, elevando-o à categoria de ciência. Em sua obra chamada Organum (que, em tradução livre, significa "ferramenta") Aristóteles estabeleceu princípios tão gerais e tão sólidos que dominou o pensamento ocidental durante dois mil anos, e até hoje são considerados válidos.

Aristóteles tinha como objetivo a busca da verdade, e, para isso, procurava caracterizar os instrumentos de que se servia a razão, nessa busca. Em outras palavras, Aristóteles se preocupava com as formas de raciocínio que, a partir de conhecimentos considerados verdadeiros, permitiam obter novos conhecimentos. Caberia, pois, à Lógica, a formulação de leis gerais de encadeamentos de conceitos e juízos que levariam à descoberta de novas verdades. Essa forma de encadeamento é chamada, em Lógica, de argumento, enquanto as afirmações envolvidas são chamadas proposições; um argumento é, pois, um conjunto de proposições tal que se afirme que uma delas é derivada das demais; usualmente, a proposição derivada é chamada conclusão, e as demais, premissas. Em um argumento válido, as premissas são consideradas provas evidentes da verdade da conclusão.

Eis um exemplo de argumento;

Se eu ganhar na Loteria, serei rico
Eu ganhei na Loteria
Logo, sou rico

Como a conclusão "sou rico" é uma decorrência lógica das duas premissas, esse argumento é considerado válido.

É preciso deixar claro que a Lógica se preocupa com o relacionamento entre as premissas e a conclusão, com a estrutura e a forma do raciocínio, e não com seu conteúdo, isto é, com as proposições tomadas individualmente. Em outras palavras, não é objeto da Lógica saber se quem ganha na Loteria fica rico ou não, ou se eu ganhei ou não na Loteria. O objeto da Lógica é determinar se a conclusão é ou não uma consequência lógica das premissas. Por esse motivo, por que o objeto da Lógica é a forma pela qual o raciocínio está estruturado, a Lógica costuma receber o nome de Lógica Formal.

A validade do argumento está diretamente ligada à forma pela qual ele se apresenta, como pode ser mostrado pelo enunciado abaixo:

Se eu ganhar na Loteria, serei rico
Não ganhei na Loteria
Logo, não sou rico

Embora seja semelhante ao anterior, tem outra forma, e, nessa forma, a conclusão não se segue logicamente das premissas, e, portanto, não é um argumento válido

2. Dedução e Indução.

A Lógica dispõe de duas ferramentas principais que podem ser utilizadas pelo pensamento na busca de novos conhecimentos: a dedução e a indução, que dão origem a dois tipos de argumentos, dedutivos e indutivos. Os argumentos dedutivos pretendem que suas premissas forneçam uma prova conclusiva da veracidade da conclusão. Um argumento dedutivo é válido quando suas premissas, se verdadeiras, fornecem provas convincentes para sua conclusão, isto é, quando for impossível que as premissas sejam verdadeiras e a conclusão falsa; caso contrário, o argumento dedutivo é dito inválido. Os dois argumentos citados anteriormente são do tipo dedutivo, o primeiro válido e o segundo inválido.

Os argumentos indutivos, por outro lado, não pretendem que suas premissas forneçam provas cabais da veracidade da conclusão, mas apenas que forneçam indicações dessa veracidade. Veja um exemplo de argumento indutivo:

Joguei uma pedra no lago, e a pedra afundou;
Joguei outra pedra no lago e ela também afundou;
Joguei mais uma pedra no lago, e também esta afundou;
Logo, se eu jogar uma outra pedra no lago, ela vai afundar.

Os termos "válidos" e "inválidos" não se aplicam aos argumentos indutivos; eles costumam ser avaliados de acordo com a maior ou menor possibilidade com que suas conclusões sejam estabelecidas.

Costuma-se dizer que os argumentos indutivos partem do particular para o geral, isto é, a partir de observações particulares, procura estabelecer regras gerais, que, no caso das ciências naturais, devem ser provadas por outros meios; os argumentos dedutivos, por seu lado, partem de regras gerais para estabelecer a veracidade de acontecimentos particulares. O desenvolvimento da ciência tem dependido, em grande parte, da habilidade em combinar os dois tipos de raciocínio.

3. Lógica Clássica e Lógica Simbólica.

Os argumentos formulados em uma linguagem natural, como o inglês ou português, são, muitas vezes, de difícil avaliação, principalmente por causa da ambiguidade inerente às linguagens naturais, e das construções às vezes vagas ou confusas dos termos. Em virtude desses fatos, a partir dos trabalhos de George Boole, em meados do século XIX, foram sendo utilizados cada vez mais símbolos de origem matemática para expressar os enunciados e raciocínios da Lógica. A Lógica apresentada dessa forma é chamada Lógica Matemática ou Lógica Simbólica, enquanto a Lógica baseada em linguagem natural é chamada Lógica Clássica.

A medida que a Lógica Simbólica desenvolve sua própria linguagem técnica, vem se tornando um instrumento cada vez mais poderoso para a análise e a dedução dos argumentos. A utilização de uma simbologia matemática ajuda a expor, com maior clareza, as estruturas lógicas das proposições e dos argumentos, que podem não ficar suficientemente claras se expressas em linguagem natural.

Uma outra vantagem da utilização de uma linguagem simbólica para a Lógica é a possibilidade de utilização de recursos computacionais no tratamento de enunciados e argumentos; os computadores digitais se mostram bastante adequados à manipulação de símbolos, enquanto apresentam extrema dificuldade no tratamento de linguagem natural. Em 1965, um pesquisador chamado Robinson desenvolveu um procedimento computacional para a dedução, chamado Resolução, evidenciando as vantagens da utilização de uma linguagem simbólica para a Lógica.

4. Proposições e Predicados.

Muitas das ideias envolvidas nos argumentos podem ser apresentadas através de proposições (também chamados enunciados ou sentenças) que se referem a um objeto; por exemplo, "eu ganhei na Loteria", "José atirou uma pedra no lago", 'Sócrates é um homem". Tais proposições são chamadas singulares

Existem outras proposições, no entanto, que fazem referência a conjuntos de objetos; por exemplo, "todos os homens são mortais", "alguns astronautas foram à Lua", "'nem todos os gatos caçam ratos". Os termos "homens", "astronautas" e "gatos" são conceitos; não se referem a nenhum homem, astronauta ou gato em particular, mas sim ao conjunto de propriedades que faz com que um objeto esteja em uma categoria ou em outra. Tais propriedades são chamadas predicados.

Como a Lógica que trata apenas das proposições singulares é mais simples que a que trata também com conjuntos de objetos, os autores preferiram separar o estudo da Lógica Matemática em duas partes: o Cálculo Proposicional, ou Lógica Sentencial, que se ocupa das proposições singulares, e o Cálculo de Predicados, ou Lógica dos Predicados, que trata dos conjuntos de objetos e suas propriedades.

Para tratar com objetos e suas propriedades, o Cálculo de Predicados apresenta dois conceitos matemáticos, a variável, para se referir a um objeto genérico de uma categoria, e os quantificadores, expressões como "para todo" e "existe algum" para se referirem à quantidade de objetos que partilham o mesmo predicado; assim a proposição "'todos os homens são mortais" assume a forma "para todo x, se x é um homem, então x é mortal" e as proposições "'alguns astronautas foram à Lua" e "nem todos os gatos caçam ratos" assumem respectivamente as formas "existe um x tal que x é um astronauta e x foi à Lua" e "existe um x tal que x é um gato e x não caça ratos".

Quando as variáveis e quantificadores se referem apenas aos objetos, o Cálculo de Predicados também é chamado Lógica de Primeira Ordem; mas podemos pensar em uma situação na qual as variáveis e quantificadores se refiram também aos predicados; por exemplo, considere o enunciado "existe um predicado que todas as pessoas possuem", que pode ser expressa por "existe um p tal que p é um predicado e tal que para todo x, se x é uma pessoa, x possui p".

Quando as variáveis e quantificadores se referem também aos predicados, como na expressão acima, temos o que chamamos Lógica de Segunda Ordem. Um exemplo importante da Lógica de Segunda Ordem é o Princípio de Indução Matemática: "se o número 1 tiver um predicado, e o fato de n possuir esse predicado implica em que n + 1 também o possua, então o predicado se aplica a todos os números naturais".

Os predicados de primeira ordem são, pois, aqueles que se aplicam a indivíduos; de segunda ordem são aqueles que se aplicam a indivíduos e aos predicados de primeira ordem. A generalização pode prosseguir, considerando—se predicados de terceira ordem, de quarta ordem, e assim por diante, cada um deles aplicando—se aos indivíduos e aos predicados das ordens anteriores.

Em nosso curso vamos nos limitar ao Cálculo Proposicional e ao Cálculo de Predicados de Primeira ordem.

5. Princípios da Lógica.

A Lógica Formal repousa sobre três princípios fundamentais que permitem todo seu desenvolvimento posterior, e que dão validade a todos os atos do pensamento e do raciocínio. São eles:

Princípio de Identidade

O que é, é; ou seja, todo objeto é idêntico a si próprio. Isso não é um simples jogo de palavras; na verdade, é possível defender a noção oposta, de que a realidade é fluida, de que nada permanece igual a si próprio, e que qualquer raciocínio sobre objetos é uma ficção.

Princípio da Não Contradição

Um objeto não pode, simultaneamente, ser e não ser. Ou seja, não é possível afirmar e negar o mesmo predicado para o mesmo objeto ao mesmo tempo; ou ainda, de duas afirmações contraditórias, uma é necessariamente falsa.

Princípio do Terceiro Excluído

Todo objeto é ou não é. Ou seja, uma dada afirmação é necessariamente verdadeira ou falsa, não existindo uma terceira opção.

Sobre esses princípios repousa todo o arcabouço da Lógica Clássica. A negação de um ou mais desses princípios dá origem a outras lógicas, chamadas genericamente de Lógicas Não Clássicas, cujas principais vertentes são:

- as lógicas modais, que incluem os conceitos de possibilidade e de necessidade, e nas quais o verbo pode ser modificado por um advérbio de modo, como nos enunciados "talvez chova amanhã", e '"certamente João saiu";
- as lógicas plurivalentes, nas quais o conceito de veracidade deixa de ser binário (verdadeiro e falso) para assumir outros valores, como nas lógicas trivalentes, nas quais as proposições podem ser verdadeiras, falsas e neutras, nas lógicas nebulosas, em que existem gradações de veracidade e nas quais uma proposição pode ser mais verdadeira que outra, e nas lógicas probabilísticas, nas quais existe uma probabilidade de que uma proposição possa ser verdadeira;
- as lógicas fracas, como a intuicionista, que não aceita o Princípio do Terceiro Excluído, e, para a qual, a dupla negação não equivale à afirmação, o que pode ser exemplificado pelo enunciado "não tenho nada" onde o termo '"não" ao invés de se contrapor ao termo "nada" o reforça.

Nos últimos anos as lógicas não clássicas têm sofrido enorme desenvolvimento, em virtude, principalmente, de novas aplicações, algumas das quais na área computacional, como a lógica nebulosa.

6. Raciocínio Lógico.

Antes de iniciarmos o estudo sistemático da Lógica, exercitemos desde já nosso raciocínio, e apelemos ao velho e útil bom senso para resolver os seguintes problemas:

1. Se eu não tenho carro, a afirmação "meu carro não é azul" é verdadeira ou falsa?
2. Tenho 9 pérolas idênticas, mas sei que uma delas é falsa, e é mais leve que as outras; como posso identificar a pérola falsa, com apenas duas pesagens em uma balança de dois pratos?
3. Um rei resolveu dar a um prisioneiro a oportunidade de obter a liberdade. Levou—o até uma sala, com duas portas de saída, chamadas A e B, cada uma com um guarda. Disse: "Uma das portas leva à liberdade, enquanto a outra leva à forca; além disso, um dos guardas fala sempre a verdade, enquanto o outro só fala mentiras. Você pode fazer uma única pergunta a um dos guardas e escolher uma porta para sair." O prisioneiro pensou durante alguns segundos; depois, dirigiu-se a um dos guardas e disse: "Se eu perguntasse a seu companheiro qual a porta que leva à liberdade, o que ele me diria V. Depois de alguns segundos, o guarda respondeu: "A" "Obrigado", disse o prisioneiro, e passou pela porta B. O prisioneiro obteve a liberdade ou foi para a forca? Como saber?
4. Um outro rei resolveu dar a três prisioneiros uma oportunidade de obter a liberdade. Mandou vir três chapéus brancos e dois vermelhos, e escolheu um chapéu para cada prisioneiro; ganharia a liberdade aquele que fosse capaz de dizer a cor de seu próprio chapéu, observando unicamente a cor dos chapéus de seus companheiros. O primeiro prisioneiro observou o chapéu dos outros dois prisioneiros, mas não foi capaz de dizer a cor de seu próprio chapéu e voltou para a prisão; o segundo, à sua vez, após observar os chapéus dos outros prisioneiros também não soube dizer que cor tinha seu chapéu, e também voltou para a prisão. O rei, ao perceber que o terceiro prisioneiro era cego, nem ia se dar ao trabalho de perguntar, mas este insistiu que deveria ter a mesma oportunidade. Inquirido, declarou corretamente a cor de seu chapéu. Qual a cor do chapéu do prisioneiro cego, e como ele chegou à conclusão correta?