Trabalho 3 de Cálculo Numérico – Interpolação e Ajuste de Funções

Nome: Vinícius Renato Rocha Geraldo

Esse relatório tem o intuito de fazer uma descrição dos métodos de interpolação de Newton e Lagrange os quais são referentes a um polinômio associado onde desejamos encontrar um valor aproximado a um conjunto de valores de entrada. Para isso utilizamos a escolha de polinômios como funções interpolantes é natural por diversos motivos, entre eles: se *p* é um polinômio de grau *n*, o valor *p(x)* para um *x* real é calculado através de n+1 operações de adição. Interpolar uma função f(x) consiste em aproximar essa função por uma função g(x), escolhida dentro de uma classe de funções definida e que satisfaça algumas propriedades. A função g(x) é usada no lugar da função f(x).

Existem três formas de obtermos uma interpolação polinomial as quais são através da resolução de sistemas, forma de Lagrange, e forma de Newton. Para esse trabalho exploraremos mais as formas de Lagrange e Newton.

- Forma de Lagrange

Sejam (n+1) pontos distintos $x_0, x_1, ..., x_n$, consideramos que a interpolação de $f(x_n)$ consiste em obter a função $\mathbf{p_n(x)}$ tal que:

$$p(x) = y_1L_1(x) + y_2L_2(x) + \cdots + y_nL_n(x) = \sum_{k=1}^{n} y_kL_k(x).$$

Figura 1 – Polinômio desejado para ser encontrado em Lagrange utilizado na interpolação

Utilizando esse formato queremos que as condições de $\mathbf{p_n(x_i) = y_i}$, sejam satisfeitas. Por fim, a forma de Lagrange para o polinômio interpolador é:

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n} y_kL_k(x)$$

Com o seguinte $L_k(x)$:

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}$$

Figura 2 – Encontrando os valores para L(x)

Abaixo estão contidos os exercícios propostos para o trabalho da lista 8 para as questões 1, letras A e B, e questão 2

```
Letra A
O valor de z 1950 interpolado é: 192539000.0
--------------------------------------------
O valor de z 1975 interpolado é: 215525714.84375
--------------------------------------------
O valor de z 2014 interpolado é: 306214887.6160001
--------------------------------------------
O valor de z 2020 interpolado é: 266165000.0
```

Figura 3 – Questão 1(a) para a solução de Lagrange

Para questão 1(b):

Como visto em nas aulas teoricas para cada cálculo do polinômio ass
ociado existe um

erro relacionado com o valor interpolado e isso se aplica para as q
uestões dos anos
vemos que o erro associado ao ano de 1950 gera um resultado muito i
nesperado e isso ocorre
uma inconsistência do valor encontrado, já para o ano de 2014 o err
o associado ao polinômio é bem baixo,
ou seja, gera resultados esperados com o interpolador. Para os resu
ltados dos anos de 1975 acontece um valor mais aproximado
porque existem intervalos que abrangem o resultado na tabela inform
ada, já para o ano de 2020 existe uma estimativa maior do valor

```
Utilizando a Amostra 1
O valor de z 14 interpolado é: 34.61205269311793

Utilizando a Amostra 2
O valor de z 14 interpolado é: 13.562466604340404
```

Figura 4 – Questão 2 para solução de Lagrange

- Forma de Newton – Operador Diferenças Divididas

A forma de Newton para o polinômio $p_n(x)$, que interpola $f(x)$ em n+1 pontos distintos $x_0, x_1, \dots, x_n$, é a seguinte:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_1 + a_2(x - x_1) + a_3(x - x_1)(x - x_2) + \cdots \\ &+ a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Figura 5 – Polinômio desejado para ser encontrado em Newton utilizado na interpolação

Na forma de Newton, os valores de a_k são dados por diferenças divididas de ordem k.

Seja *f(x)* definida em n+1 pontos distintos $\boldsymbol{x_0, x_1, \ldots, x_n}$. O operador diferenças finitas ou divididas é dado:

$$f[x_0] = f(x_0)$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$$

$$f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

Figura 6 – Funções utilizadas para montar a tabela de diferenças e assim conseguir o polinômio desejado

Abaixo estão contidos os exercícios propostos para o trabalho da lista 8 para as questões 1, letras A e B, e questão 2

```
Letra A
O valor de z 1950 interpolado é: 192539000.0
--------------------------------------------
O valor de z 1975 interpolado é: 215525714.84375
--------------------------------------------
O valor de z 2014 interpolado é: 306214887.616
--------------------------------------------
O valor de z 2020 interpolado é: 266165000.0
```

Figura 7 – Questão 1(a) para a solução de Newton

Para questão 1(b):

Como visto em nas aulas teoricas para cada cálculo do polinômio associado existe um

erro relacionado com o valor interpolado e isso se aplica para as questões dos anos
vemos que o erro associado ao ano de 1950 gera um resultado muito inesperado e isso ocorre
uma inconsistência do valor encontrado, já para o ano de 2014 o erro associado ao polinômio é bem baixo,
ou seja, gera resultados esperados com o interpolador. Para os resultados dos anos de 1975 acontece um valor mais aproximado
porque existem intervalos que abrangem o resultado na tabela informada, já para o ano de 2020 existe uma estimativa maior do valor

```
Questão 2
O valor de z 0.75 interpolado é: 72.96666666666667
Esse valor interpolado está em segundos
```

Figura 8 – Questão 2 para a solução de Newton

- Spline cúbica natural

As splines cúbicas são as mais utilizadas. Uma spline cúbica $S_3(x)$ é uma função polinomial, contínua, onde cada parte $s_k(x)$ é um polinômio de grau 3 nos intervalos $[x_{k-1}, x_k]$.

$S_3(x)$ tem derivadas primeira e segunda contínuas, logo não tem bicos e não troca abruptamente a curvatura nos nós.

Sejam as partes da spline cúbica dadas por

$$s_k(x) = a_k(\mathrm{x} - \mathrm{x_k})^3 + b_k(\mathrm{x} - \mathrm{x_k})^2 + c_k(\mathrm{x} - \mathrm{x_k}) + d_k$$

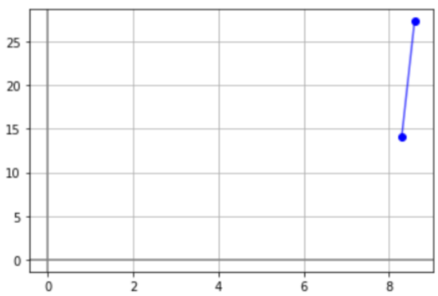
Figura 9 – Polinômio associado a interpolação por Spline cúbica natural

Para isso utilizamos de sistemas lineares para encontrar a solução dos coeficientes relacionado ao polinômio que desejamos fazer a interpolação. Existe parâmetros que são necessários para encontrar esse coeficientes os quais são g_k e $[h_k – h_{k+1}]$. Para encontrar os parâmetros h’s é necessário fazer a diferença entre os valores da tabela da função desejada em x’s e assim fazendo os cálculos para os g’s.

Abaixo contém a lista 9 de spline cúbica natural com a resolução dos gráficos para cada questão. Realizei uma verificação no código para saber se o valor interpolado é o desejado entre os valores relacionado a cada vetor assim colocando a solução mais esperada possível.

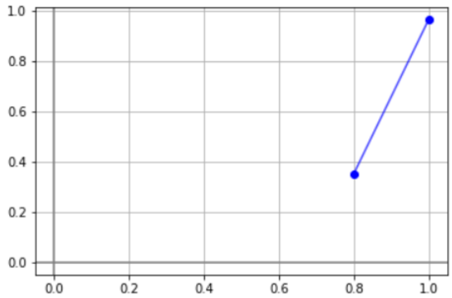
```
Letra A - Questão 1 e 2
Matriz A
[[1. 0.]
 [0. 1.]]
Matriz B
[0. 0.]
Vetor de solução g
[0. 0.]

Solução geral para a função desejada
S0
27.32893266666668
```



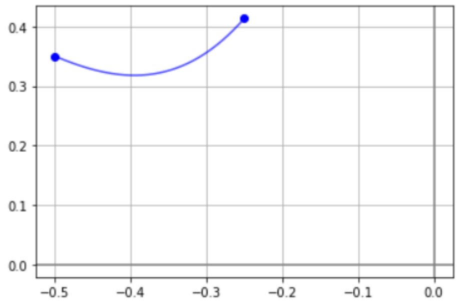

```
Letra B - Questão 1 e 2
Matriz A
[[1. 0.]
 [0. 1.]]
Matriz B
[0. 0.]
Vetor de solução g
[0. 0.]

Solução geral para a função desejada
S0
0.9647745929999999
```



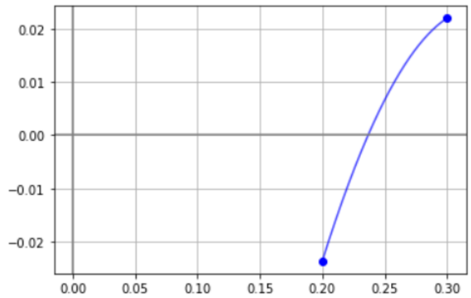
```
Letra C - Questão 1 e 2
Matriz A
[[1.   0.   0.  ]
 [0.25 1.   0.25]
 [0.   0.   1.  ]]
Matriz B
[0.    9.753 0.   ]
Vetor de solução g
[0.    9.753 0.   ]
```

```
Solução geral para a função desejada
S0
0.41361612400000003
```




```
Letra D - Questão 1 e 2
Matriz A
[[1.  0.  0.  0. ]
 [0.1 0.4 0.1 0. ]
 [0.  0.1 0.4 0.1]
 [0.  0.  0.  1. ]]
Matriz B
[ 0.        -2.7555162 -2.9258508  0.       ]
Vetor de solução g
[ 0.       -5.397476 -5.965258  0.      ]
```

```
Solução geral para a função desejada
S1
0.02197009858333334
```



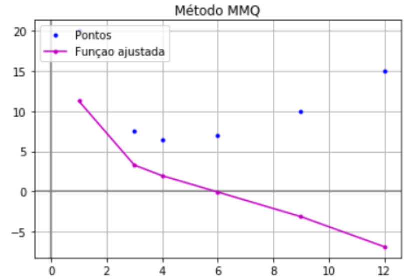
- Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) – Ajuste de Funções

O ajuste de funções é outra maneira de aproximação de funções que em geral se aplica a um conjunto de dados experimentais e deseja-se obter y = f(x) que relaciona x com y, e a partir disso se calcula o y para certo x que não consta nos dados experimentais.

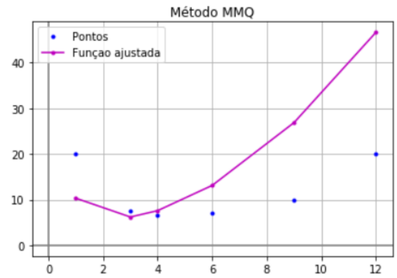
Quando desejamos encontrar um valor da função fora da tabela de valores já informada utilizamos esse método, pois ele irá encontrar a resposta do gráfico mais aproximada aos valores informados e por isso ajustamos essas funções tabelas a uma função mais aproximada possível e que melhor se comporte aos dados.

Abaixo é realizado o método dos mínimos quadrados para a lista 10 como foi desejada a aplicação desse método.

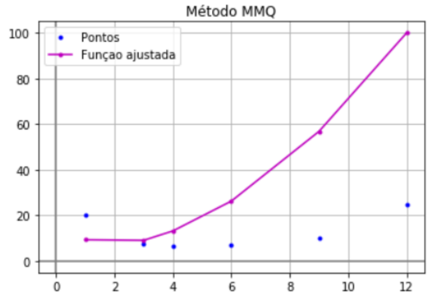
```
Questão 1 - Usando A = 15
-0.05432595573440644
11.316901408450704
[11.26257545  3.28336687  1.96001006 -0.06958417 -3.14296892 -6.87986251]
```




```
Questão 1 - Usando A = 20
0.317907444668008
9.97887323943662
[10.29678068  6.18745808  7.58123742 13.10781355 26.85926671 46.6102448 ]
```



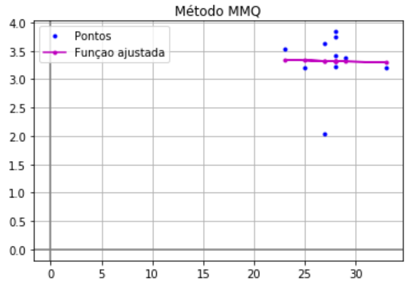

```
Questão 1 - Usando A = 25
0.6901408450704225
8.640845070422536
[  9.33098592   9.0915493   13.20246479  26.28521127  56.86150235
 100.10035211]
```



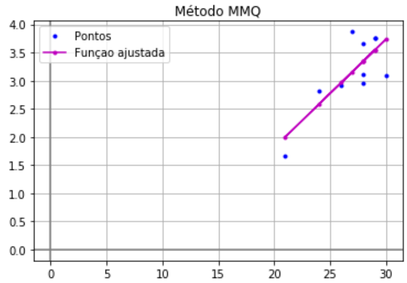
Para essa questão é desejada analisar como funciona o método quando mudamos um dado da nossa tabela de valores de y e fica notável que a disposição do comportamento do gráfico está diretamente ligada aos valores da tabela. Por isso existe os erros associados para quando não temos a resposta desejada possível para a função.

Os exercícios seguintes podemos reparar que a partir de valores de uma função e queremos aproximar de um gráfico que tem um comportamento similar a esses valores. Nesses próximos exercícios estão relacionados a MMQ`s de tabelas com o comportamento de uma reta (y = ax + b).

```
Questão 2 - Primeira Tabela
-0.0045695364238444326
3.4471192052980575
[3.31917219 3.33288079 3.31917219 3.32374172 3.31917219 3.2963245
 3.31917219 3.31460265 3.34201987 3.32374172]
```




```
Questão 2 - Segunda Tabela
0.19272727272727383
-2.0446363636363953
[3.54445455 3.35172727 3.159      3.54445455 2.00263636 3.35172727
 3.35172727 2.96627273 3.73718182 2.58081818]
```




```
Questão 3 - Uniao das tabelas
0.1329000483569161
9.854645417656581
[11.58234605 11.84814614 11.98104619 12.64554643 12.77844648 12.91134653
 13.17714663 13.70874682 13.84164687 13.97454692 14.63904716 15.17064735
 15.43644745 17.16414808 17.82864832 18.09444842 18.36024851 19.1576488
 19.4234489  23.14465025 27.1316517 ]
```