Trabalho 4 de Cálculo Numérico

Diferenciação e Integração Numérica

Nome: Vinícius Renato Rocha Geraldo

Professor(a): Larissa Astrogildo de Freitas

1. Integração Numérica

Considerando uma integral de interesse de *f(x)* no intervalo [a, b], ou seja,

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

desejamos que seja estimada numericamente essa integral em subintervalos do intervalo fornecido inicialmente no problema, onde esse tamanho de cada intervalo é dado por um $h_i = x_{i+1} - x_i$. Nesse caso, todos os intervalos possuem um tamanho padrão que estamos relacionando com a fórmula $h = \frac{b-a}{n}$. Nas próximas seções serão descritas de forma mais ampliada os métodos possíveis de aproximações a partir de regras de áreas.

1.1 Regra do Trapézio

A regra do trapézio consiste em realizar aproximações da função *f(x)* para um polinômio de grau 1. A ideia desse método é utilizar da integral I_t é a área do trapézio de altura h = x1 – x0 e de base f(x0) e f(x1). Ao substituir a área sob a curva *f(x)* pela área do trapézio estamos realizando uma aproximação e cometendo um erro, porém nesse trabalho não estamos realizando o erro associado a função.

1.2 Regra dos Trapézios Repetida

Quando o intervalo [a, b] é grande, devemos fazer várias subdivisões e aplicar a regra dos trapézios repetidas vezes. Quanto maior o número de subdivisões que iremos fazer, menor vai ser o passo de *h* que vai ser nos trapézios, ou seja, teremos mais iterações para chegar no intervalo desejado.

No trabalho foi feita a implementação do método do trapézio repetido e utilizada na lista 11 exibidas na Figura 1.

```
Exercício A

Intervalos

[1.   1.25 1.5  1.75 2.  ]

Função Resultante

[0.         0.27892944 0.60819766 0.97932763 1.38629436]

Função Utilizando Regra do Trapézio

[0.         0.55785888 1.21639532 1.95865526 1.38629436]

Solução

0.639900477687986
--------------------------------------------------

Exercício B

Intervalos

[-2. -1.  0.  1.  2.]

Função Resultante

[-1.08268227 -0.36787944  0.          2.71828183 59.11244879]

Função Utilizando Regra do Trapézio

[-1.08268227 -0.73575888  0.          5.43656366 59.11244879]

Solução

31.365285650063754
```

```
Exercício C

Intervalos

[0.         0.33333333 0.66666667 1.         1.33333333 1.66666667
 2.        ]

Função Resultante

[0.5        0.48648649 0.45       0.4        0.34615385 0.29508197
 0.25      ]

Função Utilizando Regra do Trapézio

[0.5        0.97297297 0.9        0.8        0.69230769 0.59016393
 0.25      ]

Solução

0.7842407666178157
--------------------------------------------------

Exercício D

Intervalos

[0.         0.33333333 0.66666667 1.         1.33333333 1.66666667
 2.        ]

Função Resultante

[ 0.          0.10499522  0.34928323  0.54030231  0.41820013 -0.26589874
 -1.66458735]

Função Utilizando Regra do Trapézio

[ 0.          0.20999043  0.69856645  1.08060461  0.83640026 -0.53179749
 -1.66458735]

Solução

0.10486282062502479
```

```
Exercício E

Intervalos

[0.   0.25 0.5  0.75 1.   1.25 1.5  1.75 2.  ]

Função Resultante

[  0.           1.12383232   2.7114725    3.48708214   1.04274366
  -6.96304231 -19.63421727 -28.44400395 -15.25556929]

Função Utilizando Regra do Trapézio

[  0.           2.24766465   5.42294499   6.97416428   2.08548731
 -13.92608463 -39.26843454 -56.88800791 -15.25556929]

Solução

-13.575979391799388
--------------------------------------------------

Exercício F

Intervalos

[1.   1.25 1.5  1.75 2.   2.25 2.5  2.75 3.  ]

Função Resultante

[0.         0.35955056 0.32       0.28318584 0.25       0.22068966
 0.19512195 0.17297297 0.15384615]

Função Utilizando Regra do Trapézio

[0.         0.71910112 0.64       0.56637168 0.5        0.44137931
 0.3902439  0.34594595 0.15384615]

Solução

0.4696110146984233
```

Figura 1 – Lista 11 de Exercício com Método de Trapézios Repetidos

1.3 Regra 1/3 de Simpson Repetido

Utilizamos esse método com a implementação da forma de Lagrange para estabelecer a fórmula de integração resultante da aproximação da $f(x)$ por um polinômio de grau 2. Seja $p_2(x)$ o polinômio que interpola $f(x)$ nos pontos $x_0 = a$ e $x_1 = x_0 + h$ e $x_2 = x_0 + 2h = b$. Novamente, quando o intervalo [a, b] é grande, a solução é realizar várias subdivisões e aplicar o método de 1/3 de Simpson repetidas vezes até que o valor seja o mais aproximado possível da função $f(x)$ analisada.

Utilizando a mesma lista 11 que foi aplicada o método dos trapézios repetidos aplicou-se também a regra de 1/3 de Simpson Repetida para ver a geração dos valores de cada função e analisar o erro associado a cada um. Podemos levar em conta que contém algumas diferenças de casa decimais de cada implementação. A Figura 2 é aplicação do método 1/3 de Simpson Repetida na lista do trabalho.

```
Exercício A

Intervalos

[1.   1.25 1.5  1.75 2.  ]

Função Resultante

[0.         0.27892944 0.60819766 0.97932763 1.38629436]

Função Utilizando Regra 1/3 de Simpson

[0.         1.11571776 1.21639532 3.91731052 1.38629436]

Solução

0.6363098297969493
--------------------------------------------------

Exercício B

Intervalos

[-2. -1.  0.  1.  2.]

Função Resultante

[-1.08268227 -0.36787944  0.          2.71828183 59.11244879]

Função Utilizando Regra 1/3 de Simpson

[-1.08268227 -1.47151776  0.         10.87312731 59.11244879]

Solução

22.477125358234236
```

```
Exercício C

Intervalos

[0.         0.33333333 0.66666667 1.         1.33333333 1.66666667
 2.        ]

Função Resultante

[0.5        0.48648649 0.45       0.4        0.34615385 0.29508197
 0.25      ]

Função Utilizando Regra 1/3 de Simpson

[0.5        1.94594595 0.9        1.6        0.69230769 1.18032787
 0.25      ]

Solução

0.7853979452340107
--------------------------------------------------

Exercício D

Intervalos

[0.         0.33333333 0.66666667 1.         1.33333333 1.66666667
 2.        ]

Função Resultante

[ 0.          0.10499522  0.34928323  0.54030231  0.41820013 -0.26589874
 -1.66458735]

Função Utilizando Regra 1/3 de Simpson

[ 0.          0.41998087  0.69856645  2.16120922  0.83640026 -1.06359498
 -1.66458735]

Solução

0.15421938655911804
```

```
Exercício E

Intervalos

[0.   0.25 0.5  0.75 1.   1.25 1.5  1.75 2.  ]

Função Resultante

[  0.           1.12383232   2.7114725    3.48708214   1.04274366
  -6.96304231 -19.63421727 -28.44400395 -15.25556929]

Função Utilizando Regra 1/3 de Simpson

[   0.            4.49532929    5.42294499   13.94832857    2.08548731
  -27.85216926  -39.26843454 -113.77601581  -15.25556929]

Solução

-14.183341561446696
--------------------------------------------------

Exercício F

Intervalos

[1.   1.25 1.5  1.75 2.   2.25 2.5  2.75 3.  ]

Função Resultante

[0.         0.35955056 0.32       0.28318584 0.25       0.22068966
 0.19512195 0.17297297 0.15384615]

Função Utilizando Regra 1/3 de Simpson

[0.         1.43820225 0.64       1.13274336 0.5        0.88275862
 0.3902439  0.69189189 0.15384615]

Solução

0.48580718157413294
```

Figura 2 – Lista 11 de Exercício com a Regra de 1/3 de Simpson Repetidos

1.4 Regra 3/8 de Simpson Repetido

O método de 3/8 de Simpson Repetidos contém as mesmas especificações da regra de 1/3 de Simpson Repetidos, porém algumas existem algumas modificações nas aproximações dos cálculos. Por utilizar uma divisão de 3/8 para cada iteração da função o cálculo das integrais acaba se aproximando de um valor muito pequeno por conta dessa multiplicação de 3/8 a cada função de interesse no polinômio de terceira ordem. Podemos ver que as casas de aproximação em relação a regra de 1/3 de Simpson Repetidos e do Trapézio Repetidos estão mais próximos em relação da regra de 3/8 de Simpson Repetidos. Vemos que aplicado a lista 11 nas outras seções a aproximação era perceptível na terceira casa decimal, já por conta das divisões por um valor pequeno na regra de 3/8 de Simpson torna uma aproximação mais fiel a função desejada. Na Figura 3 é a aplicação da regra de 3/8 de Simpson Repetidos na lista 11 como desejado no trabalho.

```
Exercício A

Intervalos

[1.   1.25 1.5  1.75 2.  ]

Função Resultante

[0.         0.27892944 0.60819766 0.97932763 1.38629436]

Função Utilizando Regra 3/8 de Simpson

[0.         0.83678832 1.82459299 2.93798289 1.38629436]

Solução

0.6549054892214894
--------------------------------------------------

Exercício B

Intervalos

[-2. -1.  0.  1.  2.]

Função Resultante

[-1.08268227 -0.36787944  0.          2.71828183 59.11244879]

Função Utilizando Regra 3/8 de Simpson

[-1.08268227 -1.10363832  0.          8.15484549 59.11244879]

Solução

24.405365132780666
```

```
Exercício C

Intervalos

[0.         0.33333333 0.66666667 1.         1.33333333 1.66666667
 2.        ]

Função Resultante

[0.5        0.48648649 0.45       0.4        0.34615385 0.29508197
 0.25      ]

Função Utilizando Regra 3/8 de Simpson

[0.5        1.45945946 1.35       1.2        0.69230769 0.59016393
 0.25      ]

Solução

0.7552413857741727
--------------------------------------------------

Exercício D

Intervalos

[0.         0.33333333 0.66666667 1.         1.33333333 1.66666667
 2.        ]

Função Resultante

[ 0.          0.10499522  0.34928323  0.54030231  0.41820013 -0.26589874
 -1.66458735]

Função Utilizando Regra 3/8 de Simpson

[ 0.          0.31498565  1.04784968  1.62090692  0.83640026 -0.53179749
 -1.66458735]

Solução

0.2029697091109323
```

```
Exercício E

Intervalos

[0.   0.25 0.5  0.75 1.   1.25 1.5  1.75 2.  ]

Função Resultante

[  0.           1.12383232   2.7114725    3.48708214   1.04274366
  -6.96304231 -19.63421727 -28.44400395 -15.25556929]

Função Utilizando Regra 3/8 de Simpson

[  0.           3.37149697   8.13441749  10.46124643   2.08548731
 -13.92608463 -58.90265182 -56.88800791 -15.25556929]

Solução

-11.336218635489457
--------------------------------------------------

Exercício F

Intervalos

[1.   1.25 1.5  1.75 2.   2.25 2.5  2.75 3.  ]

Função Resultante

[0.4        0.35955056 0.32       0.28318584 0.25       0.22068966
 0.19512195 0.17297297 0.15384615]

Função Utilizando Regra 3/8 de Simpson

[0.4        1.07865169 0.96       0.84955752 0.5        0.44137931
 0.58536585 0.34594595 0.15384615]

Solução

0.4982574816855577
```

Figura 3 – Lista 11 de Exercício com a Regra de 1/3 de Simpson Repetidos

2. Derivação Numéricas

Nesta seção será mostrada algumas estratégias de aproximações de derivações de funções reais para chegar no cálculo desejado. Na maior parte dos problemas envolvem mais de uma variável de interesse e acaba sendo necessário a utilização de equações diferenciais para realizar a aproximação dos métodos de problemas reais. Serão discutidos os métodos de Euler, Runge-Kutta de Segunda e Quarta ordem nessa seção.

2.1. Método Euler

O método de Euler utiliza os dois primeiros termos da série de Taylor, ou seja, a aproximação linear da função y. Isso faz que o comportamento desse método é que utilizando de derivações e aproximações sucessivas da função iremos adquirir dois pontos no gráfico e assim calculando uma reta entre eles onde quanto mais traços fazemos na função mais próximo o método de Euler se apresentará da função fornecida. Veremos que na hora de projetar os gráficos para esse método apresenta um formato discreto da função, pois por realizar pequenas iterações o passo da plotagem vai ser pequeno.

2.2. Método de Runge-Kutta Segunda e Quarta Ordem

O método de Runge-Kutta de ordem *m* fornece valores aproximados da solução da equação diferencial que coincidem com os valores obtidos através da expansão em série de Taylor de y em relação ao ponto x. Percebe-se que nesse método utilizam aproximações da média dos valores de *h* para o de segunda ordem e na de quarta ordem dividimos em seis vezes o nosso parâmetro para aproxima a EDO no melhor caso possível.

2.3. Aplicação dos métodos

Essa seção será discutida um pouco sobre cada questão da lista 12 disponível no trabalho. As questões 1 e 2 fazemos as aplicações em problemas reais de que podem ser resolvidos com aproximações em cálculos para chegar a valores desejados. Na primeira questão é mostrada como podemos estimar a quantidade de estudantes que saberão de um boato através de uma equação de entrada para estipular a variação dos estudantes. Nesse caso foi feita uma modificação na função de Euler, Runge-Kutta de Segunda e Quarta ordem para que seja feita operações com EDO’s de primeira ordem também.

Já para questão dois é utilizada da aplicação de drenagem de água de um sistema de tanque e precisamos estimar em quanto tempo conseguimos estimar que o tanque vai ser necessário para esvaziar todo o tanque onde também é utilizado uma equação associada a uma constante que depende da forma do furo e da área do reservatório. Iremos ver que para cada aplicação o tanque esvazia em um tempo, no caso do método de Euler é em 56 minutos e nos RK’s é esvaziado em 54 segundos. Isso tudo está relacionado com a aproximação de cada método onde está implementado.

Para as questões três e quatro é mostrado em um gráfico a aplicação dos métodos de Euler e RK de Quarta ordem e ver o impacto da variação do passo da iteração *h* para cada função. Pode-se analisar que quanto menor o valor do passo mais próximo o gráfico se comportará da sua função real, pois estamos plotando de uma forma discreta da função.

A Figura 4 está apresentada as questões 1, 2 e 3 aplicando os métodos de Euler e a Figura 5 são as questões 1, 2, e 4 aplicando os métodos de Runge-Kutta de Segunda e Quarta ordem.

Questão 1

	Xk	Yk
0	0.0	10.000000
1	1.0	66.645845
2	2.0	77.805403
3	3.0	80.091557

Questão 2

	Xk	Yk	Função
0	0.0	3.000000	-0.103923
1	0.5	2.948038	-0.103019
2	1.0	2.896529	-0.102115
3	1.5	2.845471	-0.101211
4	2.0	2.794866	-0.100307
..	...	...	...
108	54.0	0.008077	-0.005392
109	54.5	0.005381	-0.004401
110	55.0	0.003180	-0.003383
111	55.5	0.001488	-0.002315
112	56.0	0.000331	-0.001091

Questão 3

	Xk	Yk	Função
0	0.0	1.000000	0.000000
1	0.5	0.500000	-0.375000
2	1.0	0.312500	0.000000
3	1.5	0.312500	0.390625
4	2.0	0.507812	1.523438

	Xk	Yk	Função
0	0.00	1.000000	0.000000
1	0.25	0.750000	-0.703125
2	0.50	0.574219	-0.430664
3	0.75	0.466553	-0.204117
4	1.00	0.415524	0.000000
5	1.25	0.415524	0.233732
6	1.50	0.473957	0.592446
7	1.75	0.622068	1.283015
8	2.00	0.942822	2.828465

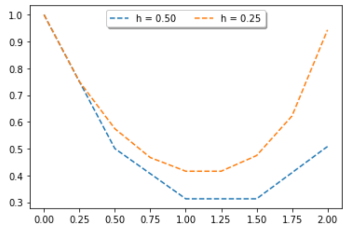

Figura 4 – Lista 12 Aplicando o método de Euler

Questão 1 - RK2

	Xk	Yk	P	Q
0	0.0	10.000000	17.826087	38.819758
1	1.0	38.322923	44.718750	16.172055
2	2.0	68.768325	34.730508	-25.872083
3	3.0	73.197537	0.000000	0.000000

Questão 1 - RK4

	Xk	Yk	P	Q
0	0.0	10.000000	17.826087	38.819758
1	1.0	19.440974	30.665612	45.633390
2	2.0	32.157475	41.834445	28.966357
3	3.0	43.957608	0.000000	0.000000

Questão 2 - RK2

	Xk	Yk	K1	K2
0	0.0	3.000000	-0.103923	-0.103019
1	0.5	2.948264	-0.103023	-0.102119
2	1.0	2.896979	-0.102123	-0.101219
3	1.5	2.846143	-0.101223	-0.100319
4	2.0	2.795758	-0.100323	-0.099419
..	...	...	...	...
104	52.0	0.029708	-0.010342	-0.009399
105	52.5	0.024773	-0.009444	-0.008496
106	53.0	0.020288	-0.008546	-0.007593
107	53.5	0.016253	-0.007649	-0.006689
108	54.0	0.012669	-0.006753	-0.005784

[109 rows x 4 columns]

Questão 2 - RK4

	Xk	Yk	K1	K2	K3	K4
0	0.0	3.000000	-0.103923	-0.103472	-0.103474	-0.103023
1	0.5	2.948263	-0.103023	-0.102572	-0.102574	-0.102123
2	1.0	2.896977	-0.102123	-0.101672	-0.101674	-0.101223
3	1.5	2.846140	-0.101223	-0.100772	-0.100774	-0.100323
4	2.0	2.795754	-0.100323	-0.099872	-0.099874	-0.099423
..	...	...	...	...	...	...
104	52.0	0.029602	-0.010323	-0.009863	-0.009884	-0.009422
105	52.5	0.024665	-0.009423	-0.008962	-0.008985	-0.008522
106	53.0	0.020178	-0.008523	-0.008061	-0.008086	-0.007621
107	53.5	0.016142	-0.007623	-0.007159	-0.007188	-0.006721
108	54.0	0.012555	-0.006723	-0.006257	-0.006290	-0.005820

[109 rows x 6 columns]

Questão 4 - Aplicando h = 0.5 e h = 0.25

	Xk	Yk	K1	K2	K3	K4
0	0.0	1.000000	-1.000000	-0.703125	-0.772705	-0.460236
1	0.5	0.632342	-0.474257	-0.224778	-0.252065	0.000000
2	1.0	0.513347	0.000000	0.288758	0.329364	0.847536
3	1.5	0.686995	0.858744	1.859718	2.375845	5.624753

	Xk	Yk	K1	K2	K3	K4
0	0.00	1.000000	-1.000000	-0.861328	-0.878391	-0.731627
1	0.25	0.782872	-0.733943	-0.593939	-0.608979	-0.472971
2	0.50	0.632341	-0.474256	-0.349208	-0.358733	-0.237413
3	0.75	0.543693	-0.237866	-0.120459	-0.123899	0.000000
4	1.00	0.513419	0.000000	0.136377	0.140905	0.308613
5	1.25	0.549385	0.309029	0.523699	0.547598	0.857855
6	1.50	0.687279	0.859099	1.303750	1.394939	2.136779
7	1.75	1.036998	2.138809	3.281255	3.640500	5.841370

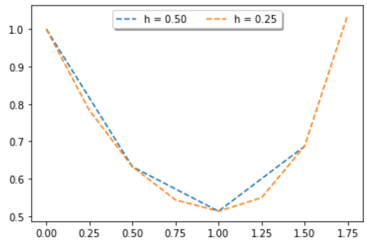

Figura 5 – Lista 12 Aplicando o método de RK de Segunda e Quarta Ordem