

# TIPE : Interpolation d'images et Transport Optimal

Martin CUINGNET  
Numéro d'inscription : 22268

# Sommaire

- ① Introduction
- ② Algorithme des enchères
  - Présentation de l'algorithme
  - Terminaison et correction
  - Complexité
  - Résultats
- ③ Barycentre de Wasserstein
  - Critique de l'approche précédente
  - Définition mathématique
  - Implémentation pratique
- ④ Annexe
  - Preuves
  - Codes Python
  - Références

# La ville et le transport optimal

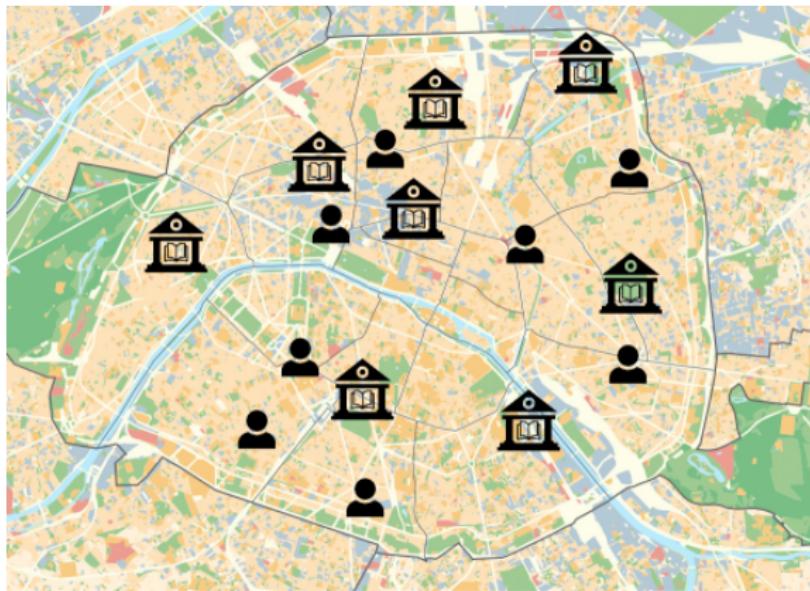


Figure – Carte des étudiants et des bibliothèques à appairer

# La ville et le transport optimal

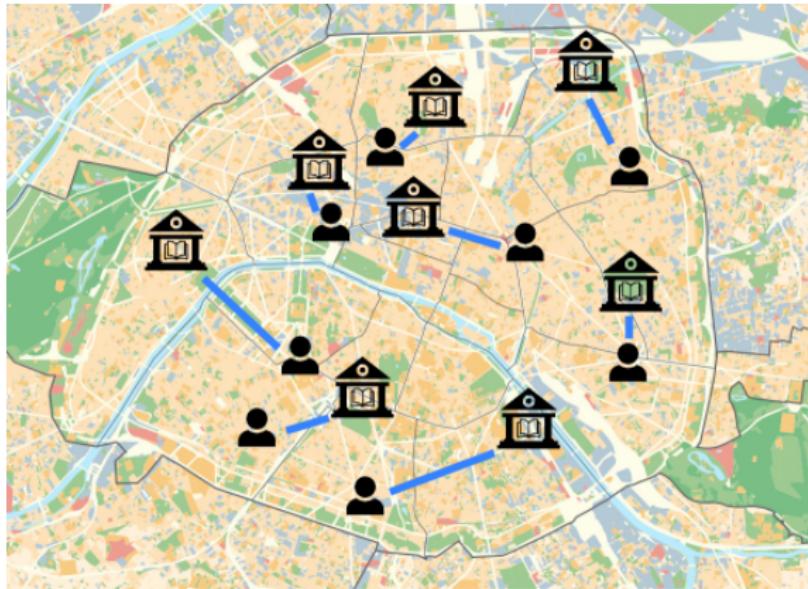


Figure – Plan d'appariement avec le transport optimal

# Objectifs

Réaliser des interpolations entre plusieurs images.

Interpolations de nature :

- Géométrique
- Colorimétrique

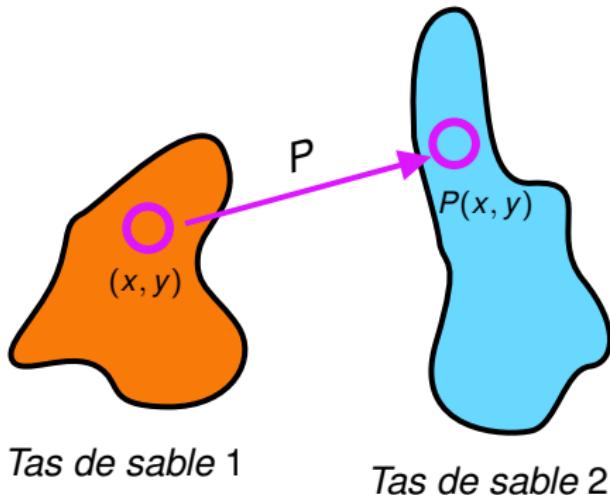
Interpolation : Conserver les informations (colorimétriques et géométriques) contenues dans les images interpolées.

# Méthode Naïve



**Figure** – Moyenne pondérée entre les images des logos de Batman et Capitain America

# Monge et le transport optimal



Tas de sable 1

Tas de sable 2

Figure – Plan de transport entre deux tas de sables

*MÉMOIRE  
SUR LA  
THÉORIE DES DÉBLAIS  
ET DES REMBLAIS.  
Par M. MONGE.*

LORSQU'ON doit transporter des terres d'un lieu dans un autre, on a coutume de donner le nom de Déblai au volume des terres que l'on doit transporter, & le nom de Remblai à l'espace qu'elles doivent occuper après le transport.

Le prix du transport d'une molécule étant, toutes choses d'ailleurs égales, proportionnel à son poids & à l'espace qu'on lui fait parcourir, & par conséquent le prix du transport total devant être proportionnel à la somme des produits des molécules multipliées chacune par l'espace parcouru, il s'enfuit que le déblai & le remblai étant donnés de figure & de position, il n'est pas indifférent que telle molécule du déblai soit transportée dans tel ou tel autre endroit du remblai, mais qu'il y a une certaine distribution à faire des molécules du premier dans le second, d'après laquelle la somme de ces produits sera la moindre possible, & le prix du transport total fera un *minimum*.

Figure – 1ere page de  
Théorie des Remblais et des Déblais  
de Gaspard Monge en 1784

# Introduction au Transport Optimal

Plan de transport : application bijective  $P : \text{orange} \rightarrow \text{bleu}$   
Valeur d'un plan de transport :

$$V(P) = \int \int_{(x,y) \in \text{orange}} ||P(x,y) - (x,y)|| dx dy$$

Plan de transport optimal : Plan de transport  $P^*$  minimisant la valeur Ainsi :

$$P^* = \min \left\{ \int \int_{(x,y) \in \text{orange}} ||P(x,y) - (x,y)|| dx dy , P : \text{orange} \rightarrow \text{bleu} \right\}$$

# Formalisation mathématique discrète

Soit  $X$  et  $Y$  des ensembles finis de points de même cardinal.  
Plans de transports  $P : X \rightarrow Y$ . Plan de transport optimal :

$$P^* = \min \left\{ V(P) \mid P : X \rightarrow Y, \text{bijective} \right\}$$

avec  $V(P) = \sum_{x \in X} \|x - P(x)\|$ , valeur plan de transport.

En pratique : solution exacte irréalisable  $\Rightarrow$  solution approchée

# Application du Transport Optimal à l'interpolation d'image



Figure – Image de départ

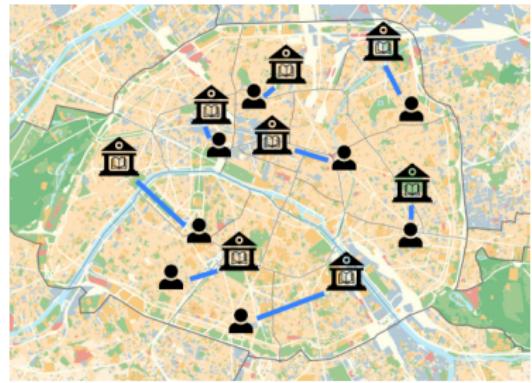
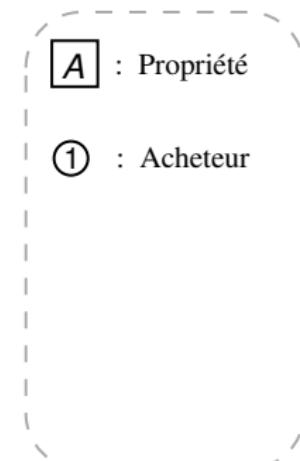
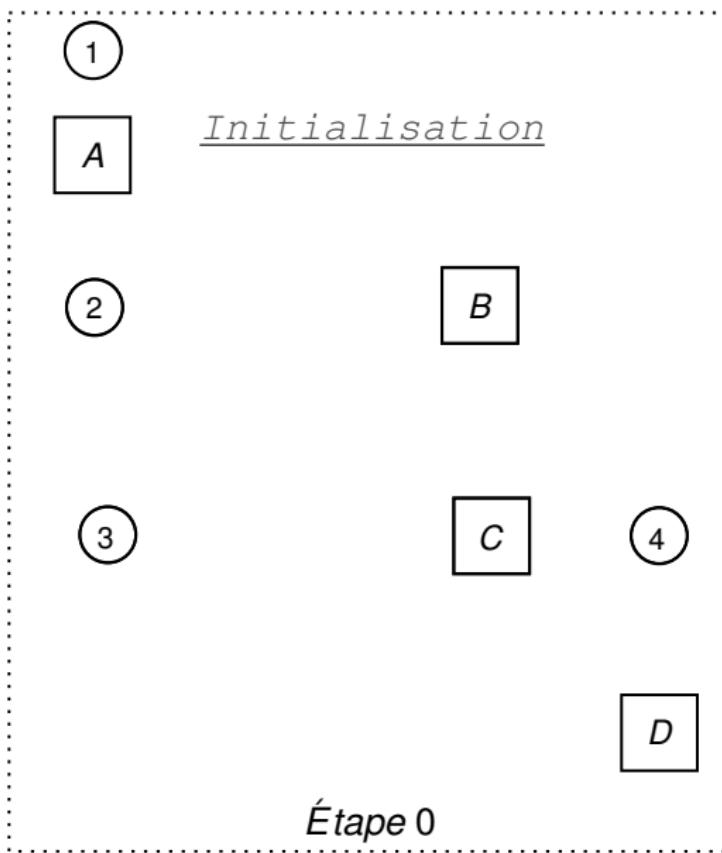
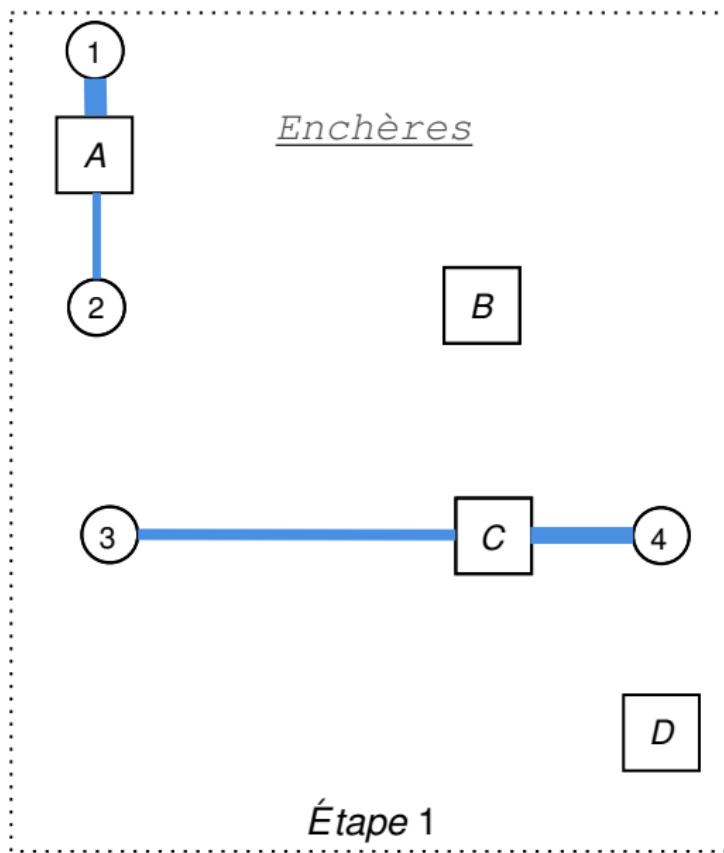


Figure – Image d'arrivée

# Présentation de l'algorithme des enchères



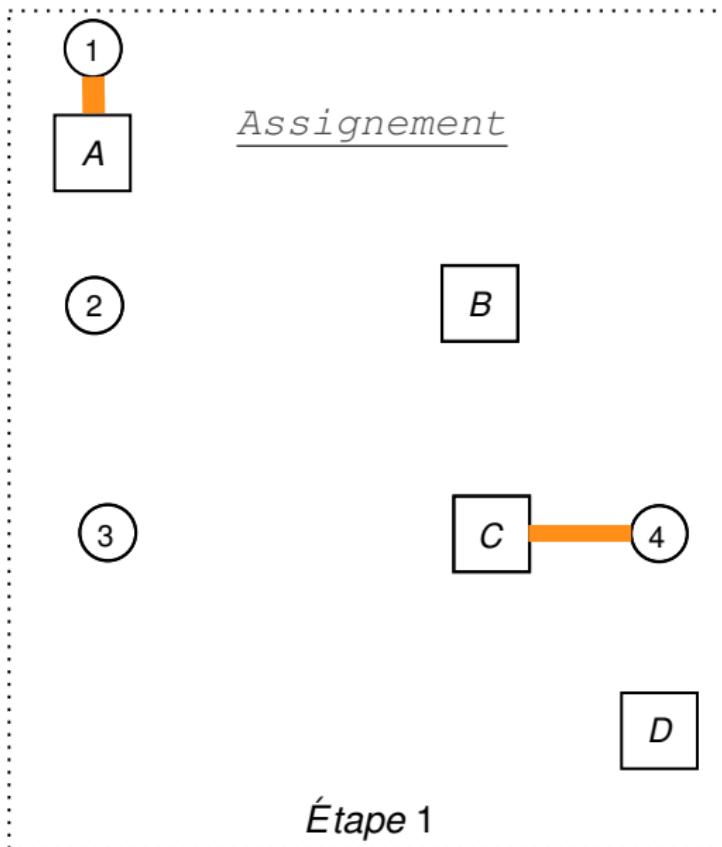
# Présentation de l'algorithme des enchères



**A** : Propriété  
① : Acheteur  
■ : Enchère

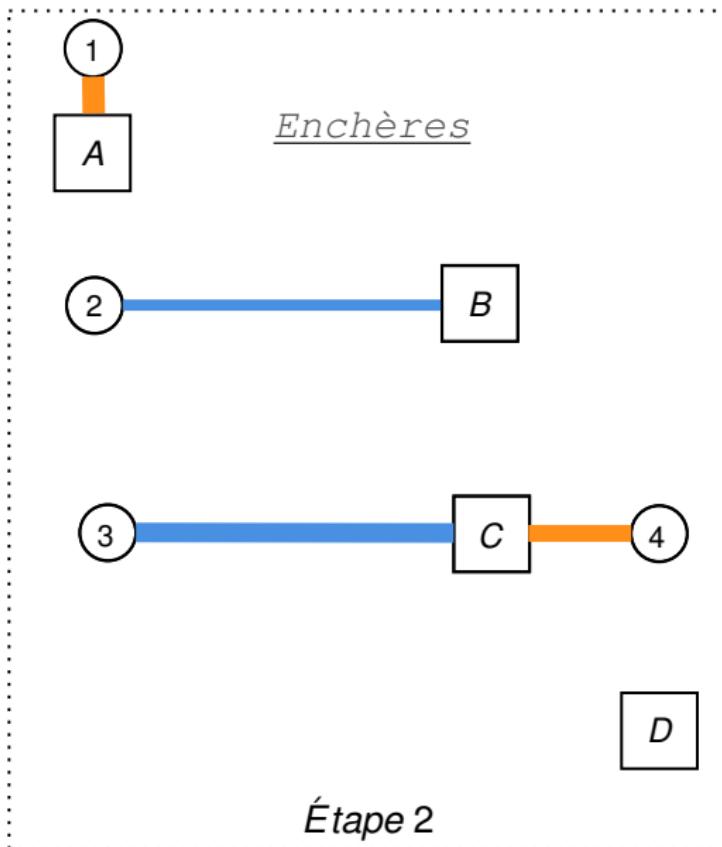
Epaisseur trait =  
Valeur de l'enchère

# Présentation de l'algorithme des enchères



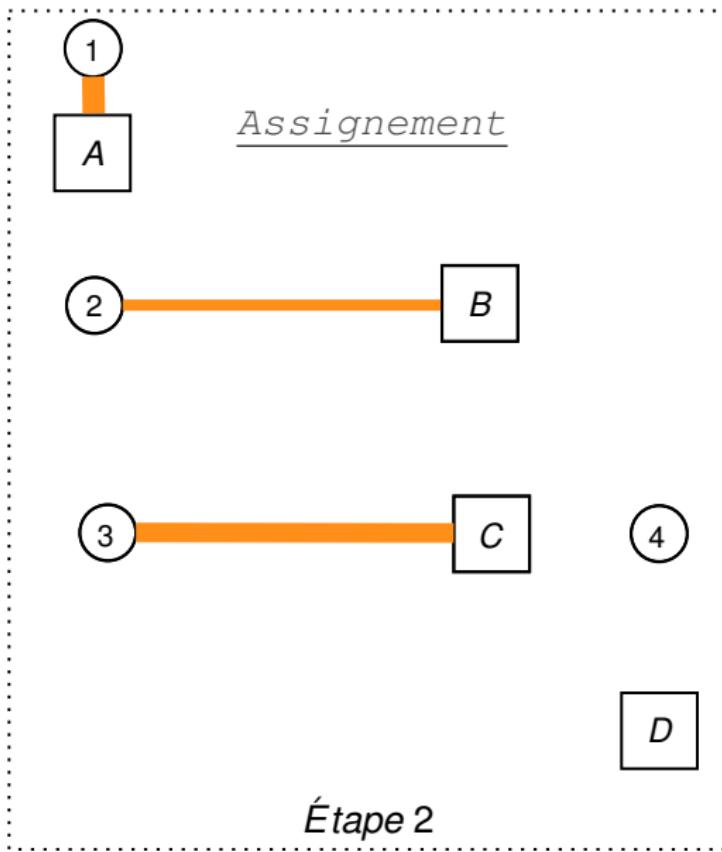
**A** : Propriété  
① : Acheteur  
■ : Enchère  
■ : Possession  
Epaisseur trait = Valeur de l'enchère

# Présentation de l'algorithme des enchères



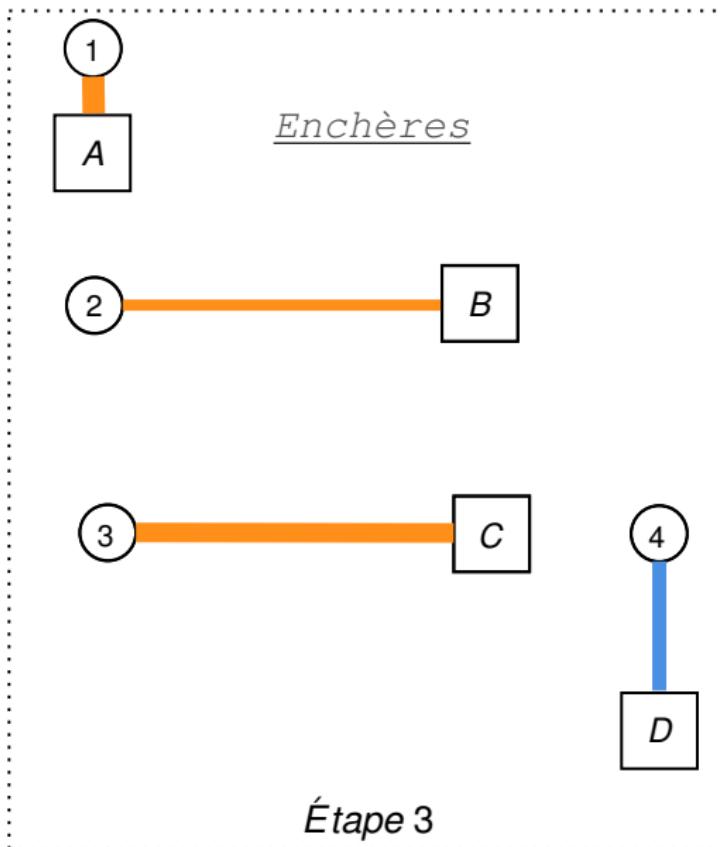
A : Propriété  
① : Acheteur  
Blue line : Enchère  
Orange line : Possession  
Epaisseur trait = Valeur de l'enchère

# Présentation de l'algorithme des enchères



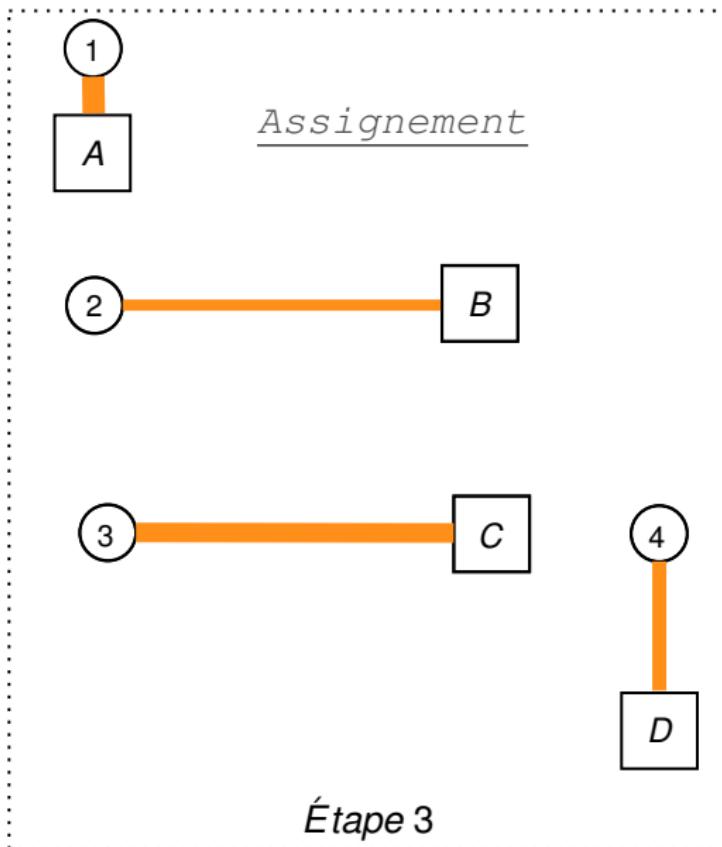
A : Propriété  
① : Acheteur  
: Enchère  
: Possession  
Epaisseur trait = Valeur de l'enchère

# Présentation de l'algorithme des enchères



A : Propriété  
① : Acheteur  
: Enchère  
: Possession  
Epaisseur trait = Valeur de l'enchère

# Présentation de l'algorithme des enchères



A : Propriété  
① : Acheteur  
: Enchère  
: Possession  
Epaisseur trait = Valeur de l'enchère

# Pseudo-code de l'algorithme des enchères

```
1   Algorithme des enchères (ensemble A de taille n,
2   ensemble B de taille n, réel  $\epsilon$ ) :
3
4   gains  $\leftarrow$  obtention matrice de gain
5   prix  $\leftarrow$  liste nulle de taille n
6   enchères  $\leftarrow$  tableau nul de taille  $n \times n$ 
7   appariement  $\leftarrow$  liste vide
8
9   tant que tous les acheteurs ne sont pas appariés :
10
11      pour chaque acheteur non apparié :
12          bénéfices  $\leftarrow$  gains - prix
13          max, max_id, deux_max  $\leftarrow$  bénéfice max, son index, ainsi que deuxième
14           $\leftarrow$  bénéfice max
15          enchères.( index de l'acheteur, max_id )  $\leftarrow$  prix.(max_id) + (max - deux_max)
16           $\leftarrow$  +  $\epsilon$ 
17
18      pour chaque objet sur lequel on a placé une enchère :
19          max_ench, max_ench_id  $\leftarrow$  obtention de l'enchère max et son index
20          retirer à appariement le précédent détenteur de l'objet
21          ajouter à appariement l'encherisseur max comme détenteur de l'objet
22          prix.(max_ench_id)  $\leftarrow$  max_ench
23
24      retourner appariement
```

# Algorithme des enchères : Terminaison et Correction

L'algorithme des enchères est correct et termine : le plan de transport obtenu est  $\varepsilon$ -optimal.

# Idée de la preuve

- Terminaison : par l'absurde
- Correction : invariant de boucle avec condition des écarts complémentaires

# Algorithme des enchères : Premiers résultats

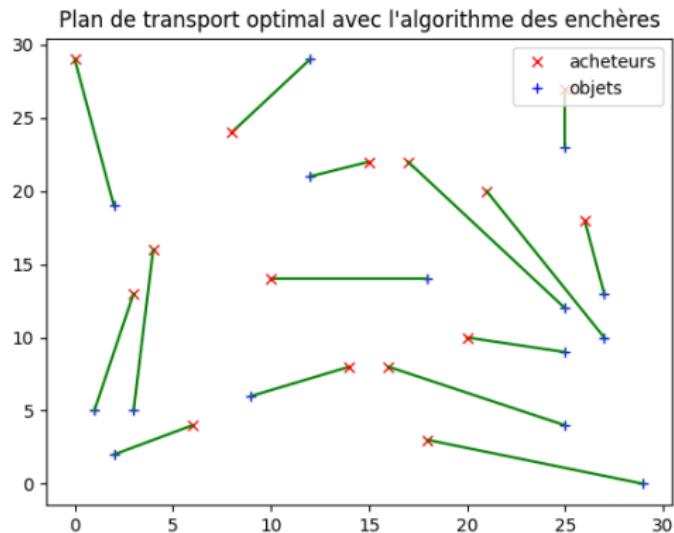


Figure – Exemple algorithme des enchères -  $n = 15, \varepsilon = 0$

# Algorithme des enchères : Premiers résultats

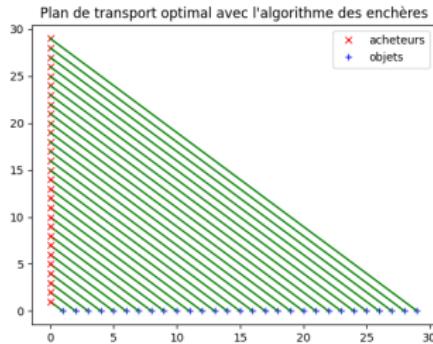


Figure – Exemple algorithme des enchères -  $n = 29$ ,  $\varepsilon = 0$

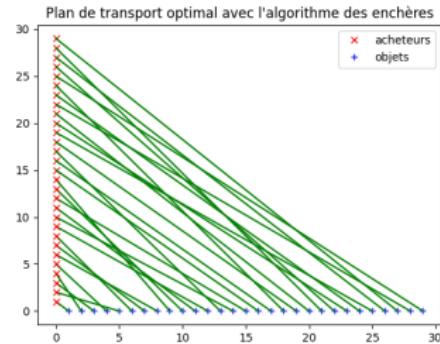


Figure – Exemple algorithme des enchères -  $n = 29$ ,  $\varepsilon = 0.5$

# Algorithme des enchères : Analyse de la complexité

Étude complexité corps boucle tant que  
Boucle pour enchère :

- ① Vérifie si la personne est déjà appariée  $\mathcal{O}(n)$
- ② Crée la liste de bénéfices  $\mathcal{O}(n)$
- ③ Trouve le premier et second bénéfice maximal.  $\mathcal{O}(n)$
- ④ Enchérit sur l'objet au bénéfice maximal  $\mathcal{O}(1)$

Complexité boucle pour enchère :  $\mathcal{O}(n^2)$

# Algorithme des enchères : Analyse de la complexité

Boucle pour d'appariement :

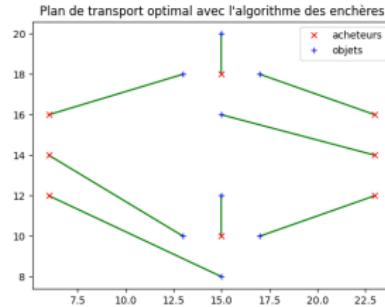
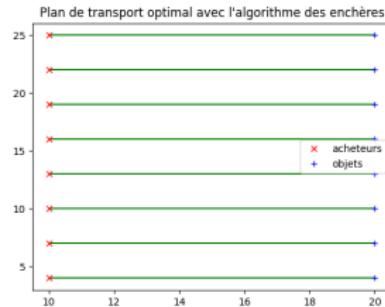
- ① Trouve la personne ayant fait l'enchère maximale  $\mathcal{O}(n)$
- ② Vérifie si l'enchère maximale est non nulle  $\mathcal{O}(1)$
- ③ Augmente le prix de l'objet  $\mathcal{O}(1)$
- ④ Assigne l'enchérisseur maximal à l'objet.  $\mathcal{O}(1)$

Complexité boucle pour appariement :  $\mathcal{O}(n^2)$ .

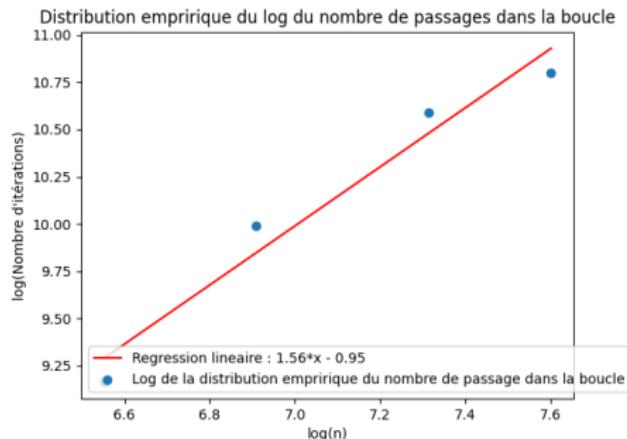
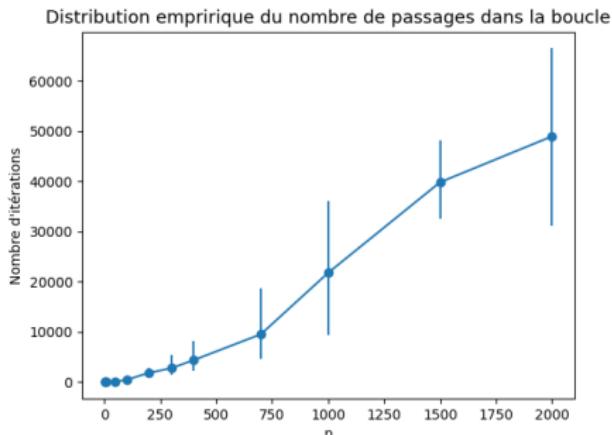
Complexité corps boucle tant que :  $\mathcal{O}(n^2)$ .

# Algorithme des enchères : Analyse de la complexité

Nombre d'itérations de la boucle tant que :  
Difficile obtenir expression théorique.  
Avec  $n = 8$ , si  $k$  est le nombre d'itérations dans la boucle tant que :

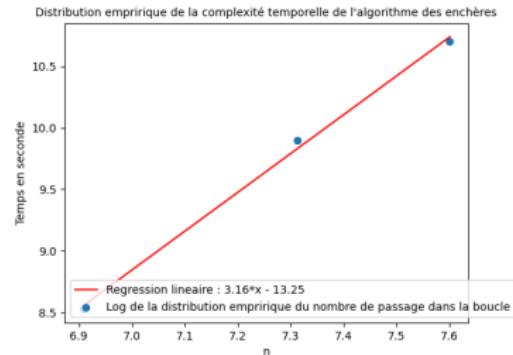
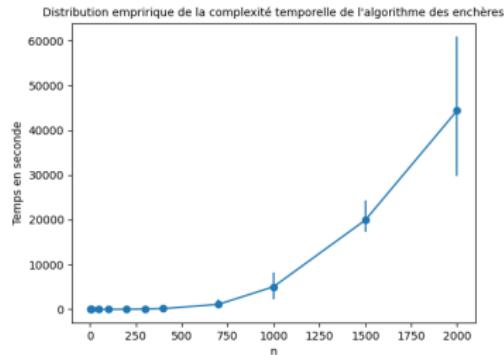


# Algorithme des enchères : Analyse de la complexité



Nombre de passages dans la boucle tant que :  $\mathcal{O}(n^{1.56})$ .  
Complexité totale théorique :  $\mathcal{O}(n^{3.56})$ .

# Algorithme des enchères : Analyse de la complexité



Complexité totale empirique :  $\mathcal{O}(n^{3.16})$ , ce qui diffère légèrement de la complexité trouvée précédemment.

# Résultats

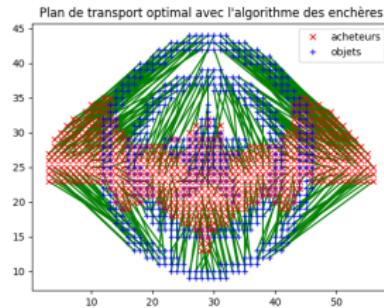


Figure – Plan de transport de Capitain America vers Batman



Figure – Capitain America vers Batman

# Résultats

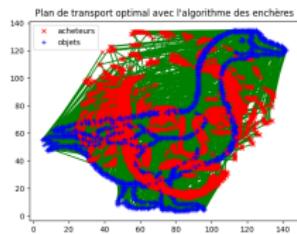


Figure – Plan de transport d'une oie vers Einstein

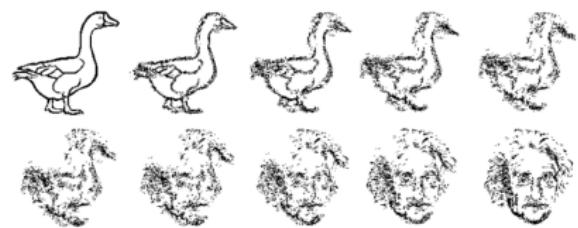


Figure – Une oie vers Einstein -  
 $\varepsilon = 2, n = 2719$

# Une nouvelle approche

Critique de l'approche précédente :

- Complexité trop importante en  $\mathcal{O}(n^3)$
- Donne un plan de transport bijectif, ce qui n'est pas nécessaire pour la synthèse d'image

On propose donc une nouvelle approche : le barycentre de Wasserstein.

# Definition mathématique du barycentre de Wasserstein

Barycentre de Wasserstein : généralisation du barycentre entre des ensembles

Le barycentre des points de  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  pondéré par les  $(m_i)_{1 \leq i \leq n}$  s'écrit

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^n \overrightarrow{OA_i} m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Définir barycentre d'ensembles d'ensembles  $\Rightarrow$  définir une distance entre ensembles.

# Definition mathématique du barycentre de Wasserstein

Distance choisie : **deuxième distance de Wasserstein**, notée  $W_2(X, Y)$  pour deux ensembles de points  $X$  et  $Y$  de même cardinal, avec :

$$W_2(X, Y) = V(P^*)$$

avec  $P^*$  : plan de transport optimal entre  $X$  et  $Y$  et  $V(p^*)$  la valeur de ce transport.

Ainsi pour des ensembles de points de  $\mathbb{R}^d$ ,  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  et des scalaires  $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ , le barycentre s'écrit :

$$Bar((X_i), (\lambda_i)) = B$$

tel que  $B \in \mathbb{R}^d$  minimise  $\frac{\sum\limits_{i=1}^n W_2(B, X_i) \lambda_i}{\sum\limits_{i=1}^n \lambda_i}$

# Barycentre de Wasserstein en pratique

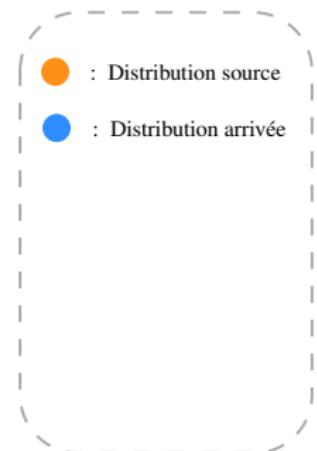
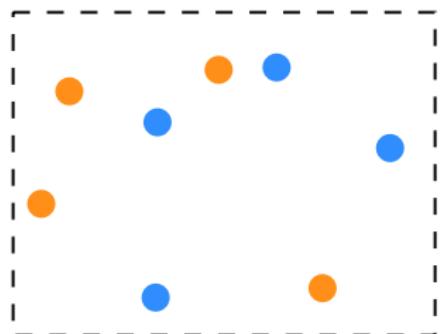
Une telle définition répond exactement aux objectifs :

- Barycentre géométrique : points de  $\mathbb{R}^2$  représentant les coordonnées des pixels
- Barycentre colorimétrique : points de  $\mathbb{R}^3$  représentant les couleurs de chacun des pixels

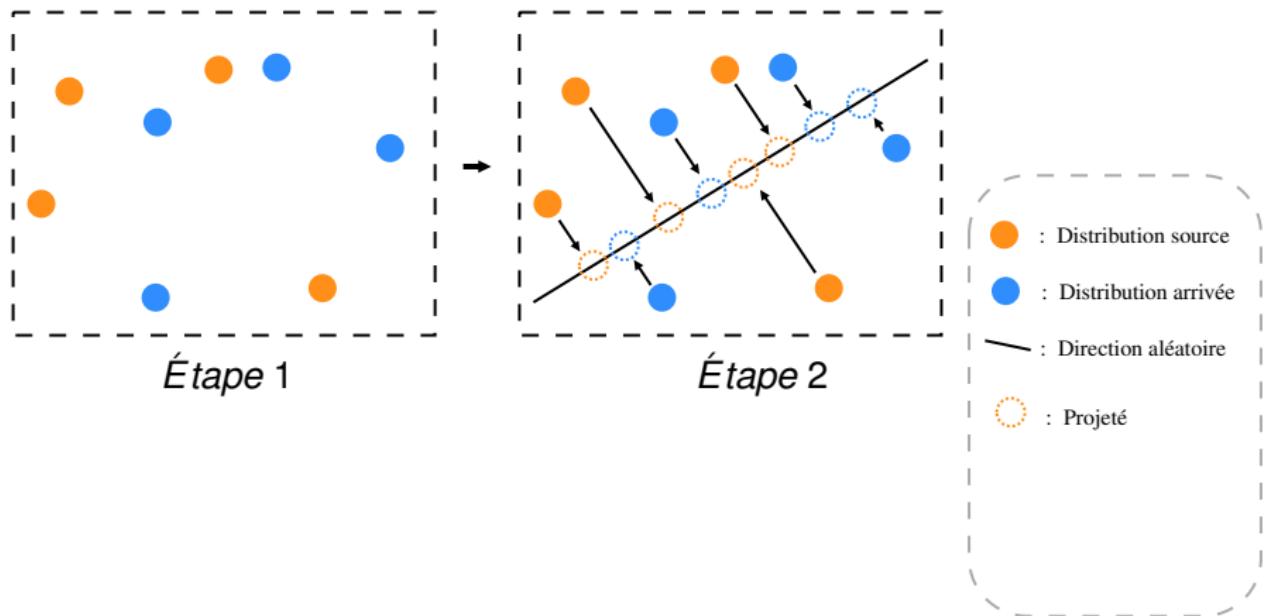
Mais difficile à calculer : trouver un plan de transport optimal pour calculer la distance très coûteux.

Méthode approchée de calcul du barycentre de Wasserstein : le barycentre de Wasserstein en tranches.

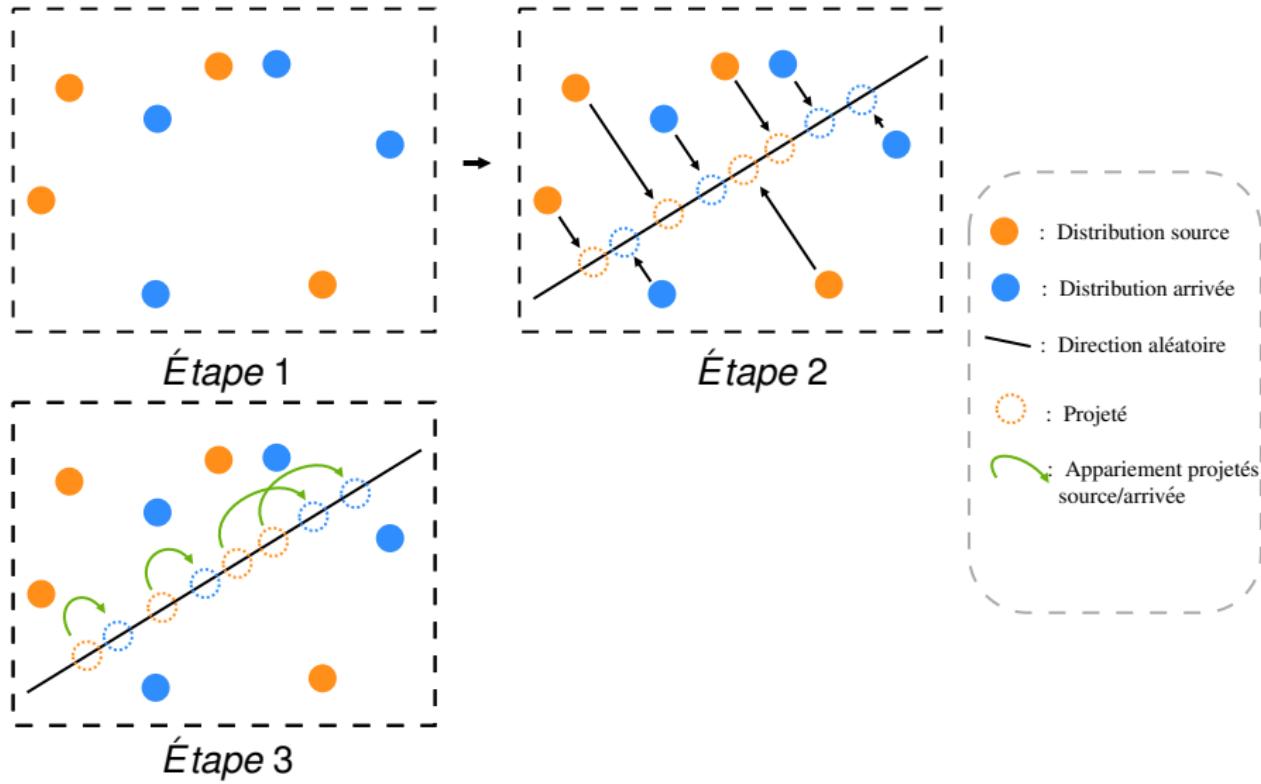
# Barycentre de Wasserstein en tranches



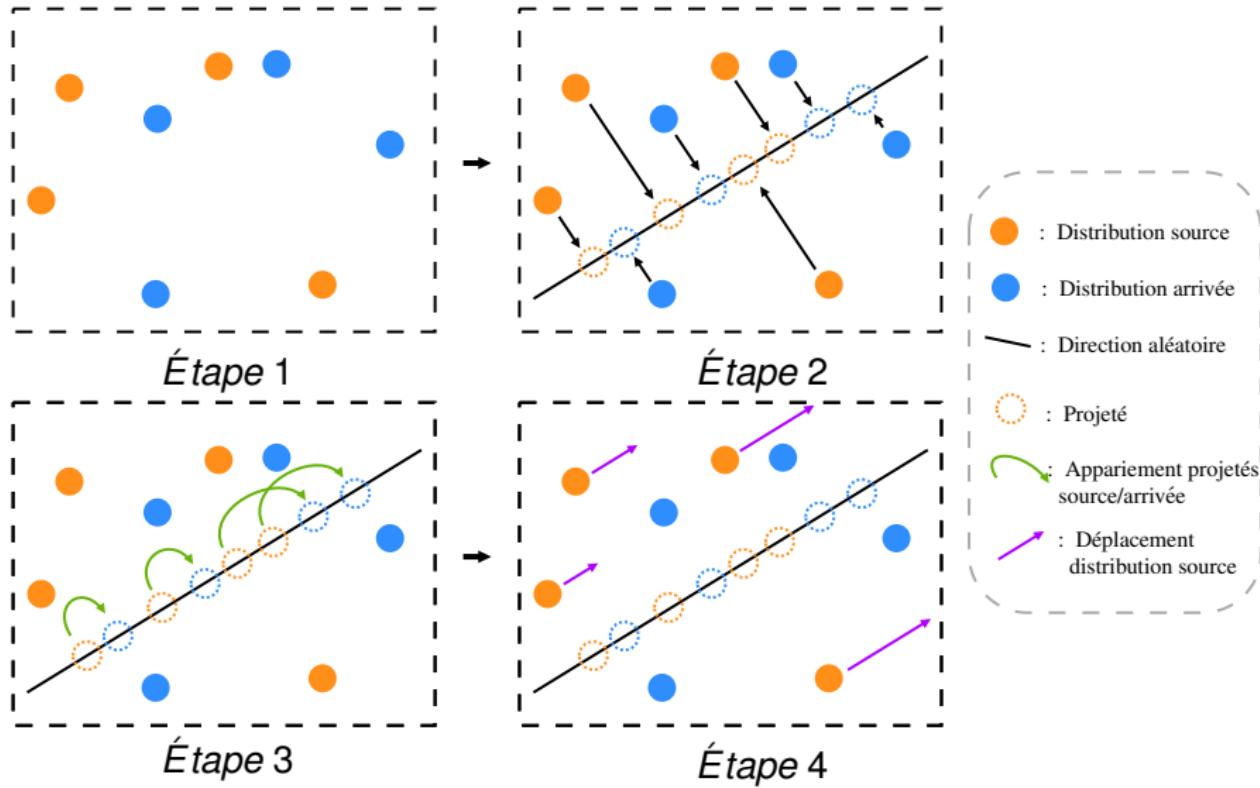
# Barycentre de Wasserstein en tranches



# Barycentre de Wasserstein en tranches



# Barycentre de Wasserstein en tranches



# Pseudo-code de l'algorithme du barycentre de Wasserstein en tranches

```
1  Barycentre de Wasserstein en tranches géométrique (ensemble A de taille n,
2  ensemble B de taille n, entier nombre_etapes) :
3
4  pour tous les entiers de 1 à nombre_etapes :
5      advection_vec ← liste de n vecteurs nuls de  $\mathbb{R}^2$ 
6
7      dir_alea ← vecteur aléatoire de la sphère unité de  $\mathbb{R}^2$ 
8
9      projA ← projections des points de A sur dir_alea
10     projB ← projections des points de B sur dir_alea
11
12    trier projA
13    trier projB
14
15    distanceAB ← distance entre les projections projA triée et projB triée
16
17    pour chaque point de A :
18        advection_vec.(index du point) ← dir_alea × distanceAB.(index du point)
19
20    A += advection_vec
21
22 retourner A
```

# Résultats géométriques



Figure – Interpolation colorimétrique entre deux images

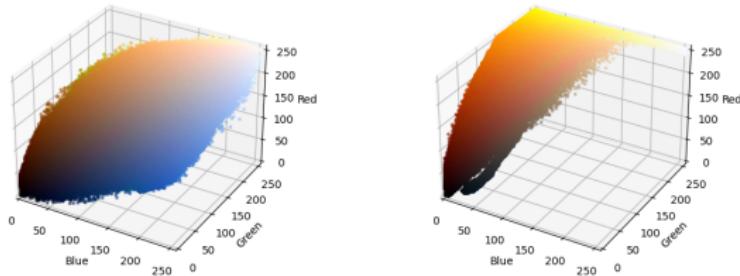


Figure – Représentation des couleurs des deux images dans l'espace RGB

# Résultats géométriques

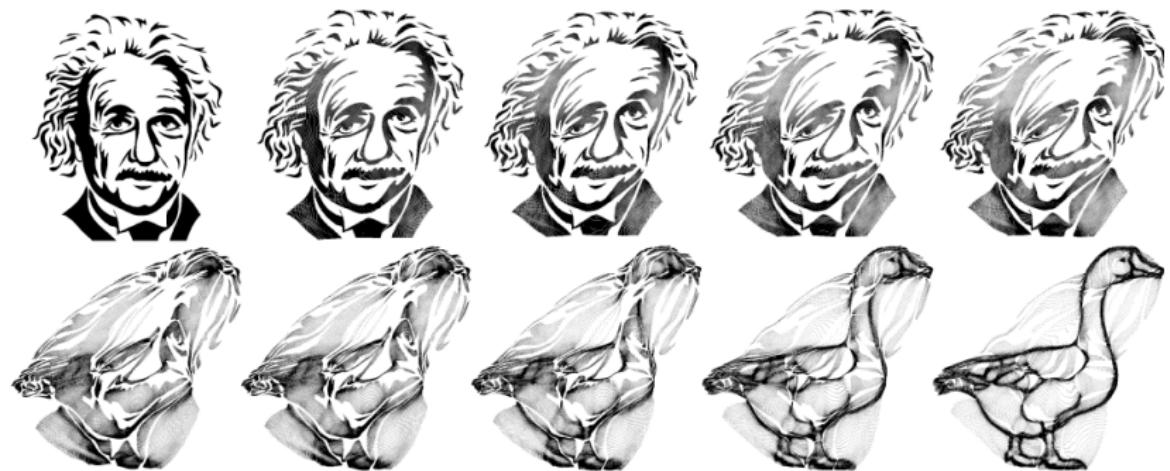


Figure – Interpolation géométrique de Monge à Villani



Figure – Interpolation géométrique de Villani à Monge

# Résultats géométriques



**Figure –** Interpolation géométrique entre deux images d'une oie et d'Einstein

# Conclusion

Objectifs atteints :

- Interpolation géométrique : image conservant les caractéristiques des images sources avec l'algorithme des enchères et le barycentre de Wasserstein
- Interpolation colorimétrique : transfert de style en appliquant les couleurs d'une image à une autre avec le barycentre de Wasserstein

# Annexe : Correction de l'algorithme des enchères I

Soit  $n$  le nombre d'acheteurs (et donc de propriétés). On appelle  $X_i$  les personnes et  $Y_j$  les objets à apprécier,  $\forall i \in [1, n]$ . Soit  $a_{i,j}$  le gain associé à un déplacement de  $X_i$  vers  $Y_j$  (par exemple l'opposé de la distance de  $X_i$  à  $Y_j$ ).

À chacun des objets  $Y_j$ , on associe le prix  $p_j$ . Comme chacun des objets est d'importance égale

$$\forall j \in [1, n], p_j = 0$$

au début de l'algorithme.

On définit le bénéfice associé à un déplacement de  $X_i$  vers  $Y_j$  par

$$b_{i,j} = a_{i,j} - p_j$$

On appelle **assignement**  $S$  un ensemble de couples  $(i, j)$ , représentant le fait que l'on associe l'objet  $Y_j$  à la personne  $X_i$ . De plus

- $\forall i \in [1, n]$ , il existe au plus un  $j$  tel que  $(i, j) \in S$
- $\forall j \in [1, n]$ , il existe au plus un  $i$  tel que  $(i, j) \in S$

C'est-à-dire qu'à une personne est associé un seul objet et vice-versa.

De plus, on pose  $S_i$  l'ensemble des  $i$  tels que  $\exists j \in [1, n]$  avec  $(i, j) \in S$  et  $S_j$  l'ensemble des  $j$  tels que  $\exists i \in [1, n]$  avec  $(i, j) \in S$

On pose ainsi

$$T_S : \begin{array}{c|cc} & [1, n] & [1, n] \\ i & \mapsto & \mapsto \\ & \mapsto j \text{ tel que } (i, j) \in S & \end{array}$$

On dit que cet assignement est **complet** si  $\text{card } S = n$

On note  $\delta_n$  l'ensemble des assignements complets.

A  $S$  on associe sa **valeur** :  $V(S) = \sum_{i \in S_j} a_{i, T_S(i)}$

Ainsi, plus la valeur du transport est élevée, plus il est proche d'être optimal.

# Annexe : Correction de l'algorithme des enchères II

On appelle  $S^*$  l'**assignement complet optimal**, c'est-à-dire que

$$\begin{cases} \text{card } S^* = n \\ V(S^*) = \min_{S \in \delta_n} V(S) \end{cases}$$

On note  $T^* = T_{S^*}$

On définit maintenant la **condition des écarts complémentaires (EC)**. Un assignement  $S$  respecte (EC) si :

$$(EC) : \max_{j \in [1, n]} \{a_{i,j} - p_j\} = a_{i, T_S(i)} - p_{T_S(i)}, \forall i \in S_i$$

De même, on définit la **condition des  $\varepsilon$  écarts complémentaires ( $\varepsilon$ -EC)**, ( $\varepsilon > 0$ ) :

$$(\varepsilon - EC) : \max_{j \in [1, n]} \{a_{i,j} - p_j\} - \varepsilon \leq a_{i, T_S(i)} - p_{T_S(i)}, \forall i \in S_i$$

Pour montrer l'intérêt qu'un assignement respecte ( $\varepsilon - EC$ ), on montre que pour  $S$  un assignement complet,

$$(S \text{ réalise } (\varepsilon - EC)) \implies (V(S) + n\varepsilon \geq V(S^*))$$

**Preuve :**

On pose  $T = T_S$ . Notons tous d'abord que

$$V(S) = \sum_{i=1}^n a_{i, T(i)} \leq \sum_{j=1}^n p_j + \sum_{i=1}^n \max_{j \in [1, n]} \{a_{i,j} - p_j\}$$

# Annexe : Correction de l'algorithme des enchères III

En effet,

$$\sum_{i=1}^n \max_{j \in [1, n]} \{a_{i,j} - p_j\} \geq \sum_{i=1}^n [a_{i,T(i)} - p_{T(i)}]$$

et directement  $\sum_{j=1}^n p_j \geq \sum_{j=1}^n p_{T(i)}$  car  $T$  est bijective. En additionnant les deux inégalités, on obtient l'inégalité annoncée :

$$V(S^*) \leq V(S) \leq \sum_{j=1}^n p_j + \sum_{i=1}^n \max_{j \in [1, n]} \{a_{i,j} - p_j\} := D$$

Comme on a ( $\varepsilon$ -EC) sur  $S$  :

$$(\varepsilon - EC) : \max_{j \in [1, n]} \{a_{i,j} - p_j\} + p_{T(i)} \leq a_{i,T(i)} + \varepsilon, \quad \forall i \in [1, n]$$

En sommant la condition de ( $\varepsilon$ -EC) pour  $i$  variant de 1 à  $n$ , il vient :

$$D = \sum_{i=1}^n \left[ \max_{j \in [1, n]} \{a_{i,j} - p_j\} + p_{T(i)} \right] \leq \sum_{i=1}^n [a_{i,T(i)} + \varepsilon] = V(S) + n\varepsilon$$

Ainsi, avec  $V(S^*) \leq D$ :

$$V(S^*) \leq V(S) + n\varepsilon$$

Montrons désormais que l'algorithme des enchères vérifie et préserve la condition ( $\varepsilon$ -EC). **Preuve :**

# Annexe : Correction de l'algorithme des enchères IV

## Initialisation :

Au début de l'algorithme,  $S = \emptyset$  et  $p_j = 0$ ,  $\forall j \in [1, n]$ . Ainsi, l'inégalité de ( $\varepsilon$ -EC) est vérifiée.

## Héritéité :

Supposons ( $\varepsilon$ -EC) vérifiée à l'itération précédente de l'algorithme. Soit  $(p_j)_{j \in [1, n]}$  les prix de l'itération précédente et  $(\tilde{p}_j)_{j \in [1, n]}$  les prix de l'itération actuelle. Clairement,

$$\forall j \in [1, n] \ , \ \tilde{p}_j \geq p_j$$

Ainsi, on a :

$$(\varepsilon - EC) : \max_{j \in [1, n]} \{a_{i,j} - p_j\} - \varepsilon \leq a_{i, T(i)} - p_{T(i)} \quad \forall i \in [1, n] \in S_i$$

Soit  $(i, T(i))$  un élément de  $S$  à la fin de l'itération actuelle.

## Cas 1 : $(i, T(i))$ vient d'être ajouté à $S$

Ainsi, le nouveau prix associé à  $Y_j$  est

$$\begin{aligned}\widetilde{p}_{T(i)} &= p_{T(i)} + (a_{i, T(i)} - p_{T(i)}) - \omega_i + \varepsilon \\ &= a_{i, T(i)} - \omega_i + \varepsilon\end{aligned}$$

avec  $\omega_i = \max_{\substack{j \neq T(i) \\ j \in S_i}} (\{a_{i,j} - p_j\})$ , le deuxième bénéfice maximum.

# Annexe : Correction de l'algorithme des enchères V

Montrons que  $(\varepsilon - EC)$  est préservée.

On a

$$\begin{aligned} a_{i,T(i)} - \widetilde{p}_{T(i)} &= \overline{a}_{i,T(i)} - \overline{a}_{i,T(i)} + \omega_{i,T(i)} - \varepsilon \\ &= \max_{\substack{j \neq T(i) \\ j \in S_j}} (\{a_{i,j} - p_j\}) - \varepsilon \\ &\geq \max_{\substack{j \neq T(i) \\ j \in S_j}} (\{a_{i,j} - \tilde{p}_j\}) - \varepsilon \end{aligned}$$

Car  $\forall j \in [1, n]$  ,  $\tilde{p}_j \geq p_j$ .

Ainsi, on a  $(\varepsilon - EC)$   $\forall j \in S_j \setminus \{T(i)\}$ .

Pour  $j = T(i)$  on a :

$$a_{i,T(i)} - \widetilde{p}_{T(i)} \geq a_{i,T(i)} - \widetilde{p}_{T(i)} - \varepsilon$$

Ainsi, on a bien la condition de  $(\varepsilon - EC)$  à l'itération suivante.

Cas 2 :  $(i, T(i))$  étais déjà dans  $S$  à l'itération précédente

Ainsi,  $\widetilde{p}_{T(i)} = p_{T(i)}$ . Or

$$\max_{j \in [1, n]} \{a_{i,j} - p_j\} - \varepsilon \leq a_{i,T(i)} - p_{T(i)} \quad \forall i \in S_i$$

Donc

$$\max_{j \in [1, n]} \{a_{i,j} - \tilde{p}_j\} - \varepsilon \leq a_{i,T(i)} - \widetilde{p}_{T(i)} \quad \forall i \in S_i$$

Ainsi, on a bien la condition de  $(\varepsilon - EC)$  à l'itération suivante.

Conclusion :

# Annexe : Correction de l'algorithme des enchères VI

La condition  $(\varepsilon - EC)$  est respectée au début de l'algorithme et préservée à chaque itération, elle est donc vérifiée à la fin de l'algorithme. Ainsi, si  $S$  est l'assignement renvoyé par l'algorithme, on a

$$V(S^*) \leq V(S) + n\varepsilon$$

# Annexe : Terminaison de l'algorithme des enchères I

## Preuve :

On rappelle en premier lieu que l'algorithme se termine dès que l'assignement  $S$  qu'il construit est complet et que le cardinal de  $S$  ne peut pas baisser (on peut seulement ajouter ou modifier des couples, pas en retirer). Supposons que l'algorithme ne se termine jamais. Ainsi, si l'algorithme ne se termine pas, un objet n'est jamais apparié après un nombre quelconque d'itérations. Appelons  $Y_{j-}$  cet objet. Ainsi, aucun acheteur ne fait d'enchères sur  $Y_{j-}$ , c'est-à-dire que pour chaque acheteur, à chaque itération, il existe un objet  $Y_j$  tel que  $b_{i,j} \geq b_{i,j-}$ . Donc à chaque itération,

$$p_{j-} = 0$$

Ainsi, au moins un objet  $Y_{j+}$  recevra un nombre quelconque d'offres. Comme à chaque offre,  $p_{j+}$  augmente au moins de  $\epsilon$ ,  $\epsilon > 0$  et que  $p_{j+}$  reçoit un nombre quelconque d'offres,

$$p_{j+} \longrightarrow +\infty$$

Posons

$$A = \max_{\substack{i \in S_i \\ j, k \in S_j}} (\{a_{i,j} - a_{i,k}\})$$

Comme  $p_{j+} \longrightarrow +\infty$ , il existe une itération à laquelle  $p_{j+} > A$ . Supposons que dans une itération suivante, il existe une personne  $X_i$  désirant faire une offre sur  $Y_{j+}$ . Ainsi,

$$b_{i,j+} = \max_{j \in S_j} (\{a_{i,j} - p_j\})$$

# Annexe : Terminaison de l'algorithme des enchères

## II

Calculons la différence entre  $b_{i,j+}$  et  $b_{i,j-}$  avec  $b_{i,j}$  le bénéfice associé à (i,j) :

$$\begin{aligned} b_{i,j+} - b_{i,j-} &= (a_{i,j+} - p_{j+}) - (a_{i,j-} - p_{j-}) \\ &= (a_{i,j+} - a_{i,j-}) - p_{j+} \\ &< A - A = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, personne ne fera jamais plus d'offres sur  $Y_{j+}$ , car son prix ne peut qu'augmenter et qu'il ne maximise le bénéfice daucun  $X_i$  avec  $p_{j+} > A$ . Or, on a supposé que  $Y_{j+}$  recevait un nombre quelconque d'offres, on a une contradiction.

On en déduit que l'algorithme se termine.

# Annexe : Code python - L'algorithme des enchères I

```
1 def max_snd_max(l):
2     '''Renvoie le premier et second élément maximal d'une liste, ainsi que
3         l'index de l'élément maximal'''
4     mx = max(l[0],l[1])
5     mxid = int(mx == l[1])
6     sndmx = min(l[0],l[1])
7     n = len(l)
8     for i in range(2,n):
9         if l[i] > mx:
10             sndmx = mx
11             mx = l[i]
12             mxid = i
13         elif l[i] > sndmx and mx != l[i]:
14             sndmx = l[i]
15     return (mx,sndmx, mxid)
16
17 def max_id(l):
18     '''Renvoie l'élément maximal d'une liste ainsi que son index'''
19     mx = max(l[0],l[1])
20     mxid = int(mx == l[1])
21     for i in range(len(l)):
22         if l[i] > mx:
23             mx = l[i]
24             mxid = i
25             continue
26     return (mx, mxid)
27
28 def matrice_gain(A, B):
```

# Annexe : Code python - L'algorithme des enchères II

```
30         '''A et B sont des distributions de points du plan euclidien de même
31         ↪ cardinal'''
32         n = len(A)
33         # Initialisation de la matrice de gain
34         gmat = np.zeros((n,n))
35         # Valeurs de coût maximal de chaque colonne
36         max_cout_col = np.zeros(n)
37         for i in range(n):
38             for j in range(n):
39                 # Coût entre le point i de A et j de B : c'est l'opposé de la
39                 ↪ distance euclidienne
40                 gmat[i , j] = -np.sqrt( (A[i][0] - B[j][0])**2 + (A[i][1] -
41                 ↪ B[j][1])**2 )
42
43     return gmat
44
45
46 def encheres_algo(A, B, eps):
47     '''Trouve un plan de transport optimal entre A et B en utilisant l'algorithme des
48     ↪ enchères /
49     A et B : ensembles de points de même cardinal ; A : les acheteurs, B les
50     ↪ propriétés'''
51     # Obtention de la matrice de bénéfice
52     gmat = matrice_gain(A, B)
53     counter = 0 # Compte le nombre d'objets appariés
54     n = len(gmat)
55     appariement = np.array([-1 for i in range(n)]) # Plan de transport
56     prix = np.zeros(n) # Prix de chaque objet
57     encheres = np.zeros((n,n)) # Encheres faites par la ième personne pour le jème objet
58     while counter < n: # On s'arrête quand tous les objets ont été appariés
```

# Annexe : Code python - L'algorithme des enchères

## III

```
54     for i in range(n): # Enchères :
55         if i in appairment: # Une personne possédant déjà un objet n'enchérit pas
56             continue
57         benefices = gmat[i] - prix
58         m, sm, mid = max_snd_max(benefices) # Obtention des valeurs max et leurs index
59         # L'agent i enchérit sur l'objet mid
60         enchere[mid, i] = prix[mid] + (m - sm) + eps
61     for j in range(n): # Assignement :
62         mb, mbid = max_id(enchere[j]) # Obtention de l'enchère maximale
63         if mb == 0: # On ne fait rien si personne n'a enchéri pour l'objet
64             continue
65         # On augmente le prix de l'objet j et on le donne au plus offrant
66         prix[j] = mb
67         if appairment[j] == -1:
68             counter += 1
69         appairment[j] = mbid
70     # On remet les enchères à 0
71     encheres = np.zeros((n,n))
72     return appairment
73
74
75 def lerp(a,b,t):
76     '''Renvoie le point c = a + (b-a)t'''
77     return [b[0]*t + a[0]*(1-t) , b[1] * t + a[1] * (1-t)]
78
79
80 def melange_dist(A, B, app, t):
```

# Annexe : Code python - L'algorithme des enchères

## IV

```
81     '''Renvoie l' "ensemble moyen" de A et B /  
82     A et B les ensembles d'origine et d'arrivée app le plan de transport de A  
83     ↵ vers B t le coefficient d'interpolation entre A et B'''  
84     n = len(app)  
85     res = []  
86     for i in range(n):  
87         m = lerp(B[i], A[app[i]], t)  
88         res += [m]  
89     return res  
90  
91 def plot_transport(A, B, app=[], title=""):  
92     '''Affiche une représentation d'un assignement'''  
93     n = max(len(A),len(B))  
94     for i in range(len(app)):  
95         # if len(app) < i:  
96             X = [ B[i][0] , A[app[i]][0] ]  
97             Y = [ B[i][1] , A[app[i]][1] ]  
98             plt.plot(X,Y, 'g')  
99  
100    for i in range(n):  
101        if i == 0:  
102            plt.plot(A[i][0], A[i][1], 'xr', label="acheteurs")  
103            plt.plot(B[i][0], B[i][1], '+b', label="objets")  
104        else:  
105            if i < len(A):  
106                plt.plot(A[i][0], A[i][1], 'xr')
```

# Annexe : Code python - L'algorithme des enchères V

```
107             if i < len(B):
108                 plt.plot(B[i][0], B[i][1], '+b')
109         plt.legend(loc=0)
110         plt.title("Plan de transport optimal avec l'algorithme des enchères")
111
112
113     def equalize(A,B):
114         '''Duplique des points au hasard de A et de B pour obtenir deux ensembles de
115         ↪ même cardinal'''
116         res = []
117         if len(B) > len(A):
118             indexs = [random.randint(0, len(A)-1) for k in range(len(B) -
119             ↪ len(A))]
120             for i in indexs:
121                 res += [[A[i][0], A[i][1]]]
122             A = np.vstack((A, res))
123         if len(A) > len(B):
124             indexs = [random.randint(0, len(B)-1) for k in range(len(A) -
125             ↪ len(B))]
126             for i in indexs:
127                 res += [[B[i][0], B[i][1]]]
128             B = np.vstack((B, res))
129     return A,B
130
131
132     def dist_to_img(A, L):
133         '''Renvoie une image en noir et blanc à partir d'un ensemble de points'''
134         tab = np.full((L,L,3), 255 )
135         for p in A:
```

# Annexe : Code python - L'algorithme des enchères

## VI

```
133                 tab[L - int(p[1]) - 1][int(p[0])] = [0, 0, 0]
134             return tab
135
136
137     def create_anim(A, B, app, L, k=10, title="plt", reverse=False):
138         '''Crée une séquence de k images décrivant le déplacement optimal de A vers
139         ↪ B'''
140         for i in range(0, k+1):
141             t = i/k if i != 0 else 0
142             im = dist_to_img(melange_dist(A, B, app, t), len(A))
143             cv2.imwrite(f'{title}_{i}.png', im)
144             if reverse:
145                 cv2.imwrite(f'{title}_{2*k-i}.png', im)
```

# Annexe : Code python - Complexité de l'algorithme des enchères I

```
1  def random_dist(n, L):
2      ''' Crée un ensemble de points de R^2 disposés dans une grille de taille L
3          ↪ selon une probabilité uniforme'''
4      res = []
5      for i in range(n):
6          res += [(random.randint(0,L), random.randint(0,L))]
7
8
9  #####
10
11 Création des données
12
13 #####
14
15 def generate_complexity():
16     ''' Écrit dans un fichier le temps d'exécution et le nombre de passages dans
17         la boucle tant que de l'algorithme des enchères pour des ensembles de
18         cardinal différents générés selon une probabilité uniforme'''
19     t = 10
20     values = [2, 5, 10, 50, 100, 200, 300, 400, 700, 1000, 1500, 2000]
21     DATA = [[ ] for i in values]
22
23     for i in range(t):
24         for n in values:
25             A,B = random_dist(n,n*2), random_dist(n,n*2)
26             k = time.time()
```

# Annexe : Code python - Complexité de l'algorithme des enchères II

```
25             nb = encheres_algo(A, B, 2, debug=True)
26             w = time.time() - k
27             f = open("comp2.txt", 'a')
28             f.write(f"\n{n}:{nb}")
29             f.write(f"\n{n}-{w}")
30             f.close()
31
32
33     #####
34
35     Analyse de la complexité
36
37     #####
38
39     avr = []
40     minerr = []
41     maxerr = []
42     values = [2, 5, 10, 50, 100, 200, 300, 400, 700, 1000, 1500, 2000]
43     DATA = [[for i in values]
44     f = open("comp2.txt", 'r')
45
46     lines = f.readlines()
47     f.close()
48
49     for line in lines:
50         if ':' in line:
51             n, nb = int(line.split(":")[0]), int(line.split(":")[1][:-1])
```

# Annexe : Code python - Complexité de l'algorithme des enchères III

```
52         try:
53             DATA[values.index(n)] += [nb]
54     except:
55         pass
56
57     for v in values:
58         avr += [np.average(DATA[values.index(v)])]
59         minerr += [avr[-1] - min(DATA[values.index(v)])]
60         maxerr += [max(DATA[values.index(v)]) - avr[-1]]
61
62
63
64 def plot_complexity_raw():
65     ''' Affiche à l'aide de matplotlib le nombre de passages dans la boucle
66     tant que avec des barres d'erreurs'''
67
68     plt.title("Distribution empirique du nombre de passages dans la boucle",
69               fontsize=13)
70     plt.scatter(values, avr)
71     plt.xlabel("n")
72     plt.ylabel("Nombre d'itérations")
73     plt.errorbar(values, avr, yerr=(minerr, maxerr))
74
75     plt.show()
76
77
```

# Annexe : Code python - Complexité de l'algorithme des enchères IV

```
78
79 def plot_complexity_log():
80     ''' Réalise une régression linéaire et affiche à l'aide de matplotlib le
81         nombre de passages logarithmique dans la boucle tant que de l'algorithme des
82         ↪  enchères'''
83     k = 8
84     plt.title("Distribution empirique du log du nombre de passages dans la
85     ↪  boucle", fontsize=12)
86     plt.scatter(np.log(values[k:]), np.log(avr[k:]), label="Log de la
87     ↪  distribution empirique du nombre de passages dans la boucle")
88     a,b = np.polyfit( np.log(values[k:]), np.log(avr[k:]), 1)
89     plt.plot(np.log(values[k:]), np.log(values[k:]) * a + b, label=f"Régression
90     ↪  linéaire : {round(a,2)}*x - {abs(round(b,2))}", color="red")
91     plt.xlabel("log(n)")
92     plt.ylabel("log(Nombre d'itérations)")
93     plt.legend(loc="lower left")
94
95     #####
96     Analyse du temps d'exécution
97
98     #####
99
100
```

# Annexe : Code python - Complexité de l'algorithme des enchères V

```
101     avr = []
102     minerr = []
103     maxerr = []
104     values = [2, 5, 10, 50, 100, 200, 300, 400, 700, 1000, 1500, 2000]
105     DATA = [[] for i in values]
106     f = open("comp2.txt", 'r')
107
108     lines = f.readlines()
109     f.close()
110
111     for line in lines:
112         if '-' in line:
113             n,nb = float(line.split("-")[0]), float(line.split("-")[1][:-1])
114             try:
115                 DATA[values.index(n)] += [nb]
116             except:
117                 pass
118
119     for v in values:
120         avr += [np.average(DATA[values.index(v)])]
121         minerr += [avr[-1] - min(DATA[values.index(v)])]
122         maxerr += [max(DATA[values.index(v)]) - avr[-1]]
123
124
125     def plot_time_raw():
126         ''' Affiche à l'aide de matplotlib le nombre de passages dans la boucle
127         tant que avec des barres d'erreurs'''
```

# Annexe : Code python - Complexité de l'algorithme des enchères VI

```
128
129     plt.title("Distribution empirique de la complexité temporelle de l'algorithme
130             des enchères", fontsize=10)
131     plt.scatter(values, avr)
132     plt.errorbar(values, avr, yerr=(minerr, maxerr))
133     plt.xlabel("n")
134     plt.ylabel("Temps en seconde")
135
136
137
138 def plot_time_log():
139     ''' Réalise une régression linéaire et affiche à l'aide de matplotlib le
140         temps d'exécution de l'algorithme des enchères'''
141     k = 8
142     plt.title("Distribution empirique du log de la complexité temporelle de
143             l'algorithme des enchères", fontsize=10)
144     plt.scatter(np.log(values[k:]), np.log(avr[k:]), label="Log de la
145             distribution empirique du nombre de passages dans la boucle")
146     a,b = np.polyfit( np.log(values[k:]), np.log(avr[k:]), 1)
147     print(a)
148     plt.plot(np.log(values[k:]), np.log(values[k:]) * a + b, label=f"Régression
149             linéaire : {round(a,2)}*x - {abs(round(b,2))}", color="red")  
plt.legend(loc="lower left")
plt.xlabel("n")
plt.ylabel("Temps en seconde")
```

# Annexe : Code python - Complexité de l'algorithme des enchères VII

150  
151

```
    plt.show()
```

# Annexe : Code python - Barycentre de Wasserstein en tranches I

```
1 def rnd_direction(c):
2     ''' Renvoie un vecteur aléatoire de la sphère unité de  $R^c$  selon une loi normale'''
3     d = np.random.normal(size=c)
4     return d / np.linalg.norm(d)
5
6
7 def wasserstein_barycenter(src, trg, steps=10 , batch=3):
8     ''' Fais converger les points de src vers les points de trg pour trouver une
9         ↪ approximation du barycentre de Wasserstein /
10        src et trg sont des ensembles de points de  $R^c$  de même cardinal'''
11    h,w,c = src.shape
12    nsrc = src.copy()
13
14    for s in range(steps):
15        # On crée le vecteur d'advection
16        adv = np.zeros((h*w,c))
17
18        for b in range(batch):
19            # On choisit la direction de  $R^d$  sur laquelle opérer
20            direction = rnd_direction(c)
21            # On projette les points des deux ensembles sur la direction
22            projs = np.sum(nsrc * direction , axis = -1).reshape(h*w)
23            projet = np.sum(trg * direction , axis = -1).reshape(h*w)
24            # On trie les points selon leurs projections
25            ids = np.argsort(projs)
26            idt = np.argsort(projet)
            # On calcule les déplacements
```

# Annexe : Code python - Barycentre de Wasserstein en tranches II

```
27         dis = projt[idt] - proj[sids]
28         # On rajoute au vecteur d'advection les déplacements de chaque
29         # points selon la direction choisie précédemment
30         for i in range(c):
31             adv[sids,i] += dis * direction[i]
32
33         # On déplace les points de l'ensemble
34         # source selon le vecteur d'advection
35         nsrc += adv.reshape((h,w,c)) / batch
36
37     return nsrc
38
39
40 def vec_color_to_vec_pos(vec, rows, cols, targcol):
41     """ Convertit une image en couleurs en points de N^2 en retournant les coordonnées
42     ↪ de tous les pixels de la couleur targcol"""
43     length, d = vec.shape
44     nvec = []
45     for k in range(length):
46         if tuple(vec[k]) == tuple(targcol):
47             continue
48         nvec.append((float(k % rows), float(k // rows)))
49
50     return np.array(nvec)
51
52 def vec_pos_to_tab_color(vec, rows, cols, targcol):
53     """ Convertit un ensemble de points de N^2 en image en couleur en retournant une
54     ↪ image dont chaque pixel ayant ses coordonnées dans vec a été coloré en la
55     ↪ couleur targcol"""
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121
122
123
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142
143
144
145
146
147
148
149
150
151
152
153
154
155
156
157
158
159
160
161
162
163
164
165
166
167
168
169
170
171
172
173
174
175
176
177
178
179
180
181
182
183
184
185
186
187
188
189
190
191
192
193
194
195
196
197
198
199
200
201
202
203
204
205
206
207
208
209
210
211
212
213
214
215
216
217
218
219
220
221
222
223
224
225
226
227
228
229
230
231
232
233
234
235
236
237
238
239
240
241
242
243
244
245
246
247
248
249
250
251
252
253
254
255
256
257
258
259
260
261
262
263
264
265
266
267
268
269
270
271
272
273
274
275
276
277
278
279
280
281
282
283
284
285
286
287
288
289
290
291
292
293
294
295
296
297
298
299
300
301
302
303
304
305
306
307
308
309
310
311
312
313
314
315
316
317
318
319
320
321
322
323
324
325
326
327
328
329
330
331
332
333
334
335
336
337
338
339
340
341
342
343
344
345
346
347
348
349
350
351
352
353
354
355
356
357
358
359
360
361
362
363
364
365
366
367
368
369
370
371
372
373
374
375
376
377
378
379
380
381
382
383
384
385
386
387
388
389
390
391
392
393
394
395
396
397
398
399
400
401
402
403
404
405
406
407
408
409
410
411
412
413
414
415
416
417
418
419
420
421
422
423
424
425
426
427
428
429
430
431
432
433
434
435
436
437
438
439
440
441
442
443
444
445
446
447
448
449
450
451
452
453
454
455
456
457
458
459
460
461
462
463
464
465
466
467
468
469
470
471
472
473
474
475
476
477
478
479
480
481
482
483
484
485
486
487
488
489
490
491
492
493
494
495
496
497
498
499
500
501
502
503
504
505
506
507
508
509
510
511
512
513
514
515
516
517
518
519
520
521
522
523
524
525
526
527
528
529
530
531
532
533
534
535
536
537
538
539
540
541
542
543
544
545
546
547
548
549
550
551
552
553
554
555
556
557
558
559
560
561
562
563
564
565
566
567
568
569
570
571
572
573
574
575
576
577
578
579
580
581
582
583
584
585
586
587
588
589
589
590
591
592
593
594
595
596
597
598
599
600
601
602
603
604
605
606
607
608
609
610
611
612
613
614
615
616
617
618
619
620
621
622
623
624
625
626
627
628
629
630
631
632
633
634
635
636
637
638
639
639
640
641
642
643
644
645
646
647
648
649
649
650
651
652
653
654
655
656
657
658
659
659
660
661
662
663
664
665
666
667
668
669
669
670
671
672
673
674
675
676
677
678
679
679
680
681
682
683
684
685
686
687
687
688
689
689
690
691
692
693
694
695
696
697
697
698
699
699
700
701
702
703
704
705
706
707
708
709
709
710
711
712
713
714
715
716
717
718
719
719
720
721
722
723
724
725
726
727
728
729
729
730
731
732
733
734
735
736
737
738
739
739
740
741
742
743
744
745
746
747
748
749
749
750
751
752
753
754
755
756
757
758
759
759
760
761
762
763
764
765
766
767
768
769
769
770
771
772
773
774
775
776
777
778
779
779
780
781
782
783
784
785
786
787
787
788
789
789
790
791
792
793
794
795
796
797
797
798
799
799
800
801
802
803
804
805
806
807
808
809
809
810
811
812
813
814
815
816
817
817
818
819
819
820
821
822
823
824
825
826
827
827
828
829
829
830
831
832
833
834
835
836
837
837
838
839
839
840
841
842
843
844
845
845
846
847
847
848
849
849
850
851
852
853
854
855
856
856
857
858
858
859
859
860
861
862
863
864
865
865
866
867
867
868
868
869
869
870
871
872
873
874
875
875
876
877
877
878
878
879
879
880
881
882
883
884
885
885
886
887
887
888
888
889
889
890
891
892
893
894
894
895
895
896
896
897
897
898
898
899
899
900
901
902
903
903
904
904
905
905
906
906
907
907
908
908
909
909
910
910
911
911
912
912
913
913
914
914
915
915
916
916
917
917
918
918
919
919
920
920
921
921
922
922
923
923
924
924
925
925
926
926
927
927
928
928
929
929
930
930
931
931
932
932
933
933
934
934
935
935
936
936
937
937
938
938
939
939
940
940
941
941
942
942
943
943
944
944
945
945
946
946
947
947
948
948
949
949
950
950
951
951
952
952
953
953
954
954
955
955
956
956
957
957
958
958
959
959
960
960
961
961
962
962
963
963
964
964
965
965
966
966
967
967
968
968
969
969
970
970
971
971
972
972
973
973
974
974
975
975
976
976
977
977
978
978
979
979
980
980
981
981
982
982
983
983
984
984
985
985
986
986
987
987
988
988
989
989
990
990
991
991
992
992
993
993
994
994
995
995
996
996
997
997
998
998
999
999
1000
1000
1001
1001
1002
1002
1003
1003
1004
1004
1005
1005
1006
1006
1007
1007
1008
1008
1009
1009
1010
1010
1011
1011
1012
1012
1013
1013
1014
1014
1015
1015
1016
1016
1017
1017
1018
1018
1019
1019
1020
1020
1021
1021
1022
1022
1023
1023
1024
1024
1025
1025
1026
1026
1027
1027
1028
1028
1029
1029
1030
1030
1031
1031
1032
1032
1033
1033
1034
1034
1035
1035
1036
1036
1037
1037
1038
1038
1039
1039
1040
1040
1041
1041
1042
1042
1043
1043
1044
1044
1045
1045
1046
1046
1047
1047
1048
1048
1049
1049
1050
1050
1051
1051
1052
1052
1053
1053
1054
1054
1055
1055
1056
1056
1057
1057
1058
1058
1059
1059
1060
1060
1061
1061
1062
1062
1063
1063
1064
1064
1065
1065
1066
1066
1067
1067
1068
1068
1069
1069
1070
1070
1071
1071
1072
1072
1073
1073
1074
1074
1075
1075
1076
1076
1077
1077
1078
1078
1079
1079
1080
1080
1081
1081
1082
1082
1083
1083
1084
1084
1085
1085
1086
1086
1087
1087
1088
1088
1089
1089
1090
1090
1091
1091
1092
1092
1093
1093
1094
1094
1095
1095
1096
1096
1097
1097
1098
1098
1099
1099
1100
1100
1101
1101
1102
1102
1103
1103
1104
1104
1105
1105
1106
1106
1107
1107
1108
1108
1109
1109
1110
1110
1111
1111
1112
1112
1113
1113
1114
1114
1115
1115
1116
1116
1117
1117
1118
1118
1119
1119
1120
1120
1121
1121
1122
1122
1123
1123
1124
1124
1125
1125
1126
1126
1127
1127
1128
1128
1129
1129
1130
1130
1131
1131
1132
1132
1133
1133
1134
1134
1135
1135
1136
1136
1137
1137
1138
1138
1139
1139
1140
1140
1141
1141
1142
1142
1143
1143
1144
1144
1145
1145
1146
1146
1147
1147
1148
1148
1149
1149
1150
1150
1151
1151
1152
1152
1153
1153
1154
1154
1155
1155
1156
1156
1157
1157
1158
1158
1159
1159
1160
1160
1161
1161
1162
1162
1163
1163
1164
1164
1165
1165
1166
1166
1167
1167
1168
1168
1169
1169
1170
1170
1171
1171
1172
1172
1173
1173
1174
1174
1175
1175
1176
1176
1177
1177
1178
1178
1179
1179
1180
1180
1181
1181
1182
1182
1183
1183
1184
1184
1185
1185
1186
1186
1187
1187
1188
1188
1189
1189
1190
1190
1191
1191
1192
1192
1193
1193
1194
1194
1195
1195
1196
1196
1197
1197
1198
1198
1199
1199
1200
1200
1201
1201
1202
1202
1203
1203
1204
1204
1205
1205
1206
1206
1207
1207
1208
1208
1209
1209
1210
1210
1211
1211
1212
1212
1213
1213
1214
1214
1215
1215
1216
1216
1217
1217
1218
1218
1219
1219
1220
1220
1221
1221
1222
1222
1223
1223
1224
1224
1225
1225
1226
1226
1227
1227
1228
1228
1229
1229
1230
1230
1231
1231
1232
1232
1233
1233
1234
1234
1235
1235
1236
1236
1237
1237
1238
1238
1239
1239
1240
1240
1241
1241
1242
1242
1243
1243
1244
1244
1245
1245
1246
1246
1247
1247
1248
1248
1249
1249
1250
1250
1251
1251
1252
1252
1253
1253
1254
1254
1255
1255
1256
1256
1257
1257
1258
1258
1259
1259
1260
1260
1261
1261
1262
1262
1263
1263
1264
1264
1265
1265
1266
1266
1267
1267
1268
1268
1269
1269
1270
1270
1271
1271
1272
1272
1273
1273
1274
1274
1275
1275
1276
1276
1277
1277
1278
1278
1279
1279
1280
1280
1281
1281
1282
1282
1283
1283
1284
1284
1285
1285
1286
1286
1287
1287
1288
1288
1289
1289
1290
1290
1291
1291
1292
1292
1293
1293
1294
1294
1295
1295
1296
1296
1297
1297
1298
1298
1299
1299
1300
1300
1301
1301
1302
1302
1303
1303
1304
1304
1305
1305
1306
1306
1307
1307
1308
1308
1309
1309
1310
1310
1311
1311
1312
1312
1313
1313
1314
1314
1315
1315
1316
1316
1317
1317
1318
1318
1319
1319
1320
1320
1321
1321
1322
1322
1323
1323
1324
1324
1325
1325
1326
1326
1327
1327
1328
1328
1329
1329
1330
1330
1331
1331
1332
1332
1333
1333
1334
1334
1335
1335
1336
1336
1337
1337
1338
1338
1339
1339
1340
1340
1341
1341
1342
1342
1343
1343
1344
1344
1345
1345
1346
1346
1347
1347
1348
1348
1349
1349
1350
1350
1351
1351
1352
1352
1353
1353
1354
1354
1355
1355
1356
1356
1357
1357
1358
1358
1359
1359
1360
1360
1361
1361
1362
1362
1363
1363
1364
1364
1365
1365
1366
1366
1367
1367
1368
1368
1369
1369
1370
1370
1371
1371
1372
1372
1373
1373
1374
1374
1375
1375
1376
1376
1377
1377
1378
1378
1379
1379
1380
1380
1381
1381
1382
1382
1383
1383
1384
1384
1385
1385
1386
1386
1387
1387
1388
1388
1389
1389
1390
1390
1391
1391
1392
1392
1393
1393
1394
1394
1395
1395
1396
1396
1397
1397
1398
1398
1399
1399
1400
1400
1401
1401
1402
1402
1403
1403
1404
1404
1405
1405
1406
1406
1407
1407
1408
1408
1409
1409
1410
1410
1411
1411
1412
1412
1413
1413
1414
1414
1415
1415
1416
1416
1417
1417
1418
1418
1419
1419
1420
1420
1421
1421
1422
1422
1423
1423
1424
1424
1425
1425
1426
1426
1427
1427
1428
1428
1429
1429
1430
1430
1431
1431
1432
1432
1433
1433
1434
1434
1435
1435
1436
1436
1437
1437
1438
1438
1439
1439
1440
1440
1441
1441
1442
1442
1443
1443
1444
1444
1445
1445
1446
1446
1447
1447
1448
1448
1449
1449
1450
1450
1451
1451
1452
1452
1453
1453
1454
1454
1455
1455
1456
1456
1457
1457
1458
1458
1459
1459
1460
1460
1461
1461
1462
1462
1463
1463
1464
1464
1465
1465
1466
1466
1467
1467
1468
1468
1469
1469
1470
1470
1471
1471
1472
1472
1473
1473
1474
1474
1475
1475
1476
1476
1477
1477
1478
1478
1479
1479
1480
1480
1481
1481
1482
1482
1483
1483
1484
1484
1485
1485
1486
1486
1487
1487
1488
1488
1489
1489
1490
1490
1491
1491
1492
1492
1493
1493
1494
1494
1495
1495
1496
1496
1497
1497
1498
1498
1499
1499
1500
1500
1501
1501
1502
1502
1503
1503
1504
1504
1505
1505
1506
1506
1507
1507
1508
1508
1509
1509
1510
1510
1511
1511
1512
1512
1513
1513
1514
1514
1515
1515
1516
1516
1517
1517
1518
1518
1519
1519
1520
1520
1521
1521
1522
1522
1523
1523
1524
1524
1525
1525
1526
1526
1527
1527
1528
1528
1529
1529
1530
1530
1531
1531
1532
1532
1533
1533
1534
1534
1535
1535
1536
1536
1537
1537
1538
1538
1539
1539
1540
1540
1541
1541
1542
1542
1543
1543
1544
1544
1545
1545
1546
1546
1547
1547
1548
1548
1549
1549
1550
1550
1551
1551
1552
1552
1553
1553
1554
1554
1555
1555
1556
1556
1557
1557
1558
1558
1559
1559
1560
1560
1561
1561
1562
1562
1563
1563
1564
1564
1565
1565
1566
1566
1567
1567
1568
1568
1569
1569
1570
1570
1571
1571
1572
1572
1573
1573
1574
1574
1575
1575
1576
1576
1577
1577
1578
1578
1579
1579
1580
1580
1581
1581
1582
1582
1583
1583
1584
1584
1585
1585
1586
1586
1587
1587
1588
1588
1589
1589
1590
1590
1591
1591
1592
1592
1593
1593
1594
1594
1595
1595
1596
1596
1597
1597
1598
1598
1599
1599
1600
1600
1601
1601
1602
1602
1603
1603
1604
1604
1605
1605
1606
1606
1607
1607
1608
1608
1609
1609
1610
1610
1611
1611
1612
1612
1613
1613
1614
1614
1615
1615
1616
1616
1617
1617
1618
1618
1619
1619
1620
1620
1621
1621
1622
1622
1623
1623
1624
1624
1625
1625
1626
1626
1627
1627
1628
1628
1629
1629
1630
1630
1631
1631
1632
1632
1633
1633
1634
1634
1635
1635
1636
1636
1637
1637
1638
1638
1639
1639
1640
1640
1641
1641
1642
1642
1643
1643
1644
1644
1645
1645
1646
1646
1647
1647
1648
1648
1649
1649
1650
1650
1651
1651
1652
1652
1653
1653
1654
1654
1655
1655
1656
1656
1657
1657
1658
1658
1659
1659
1660
1660
1661
1661
1662
1662
1663
1663
1664
1664
1665
1665
1666
1666
1667
1667
1668
1668
1669
1669
1670
1670
1671
1671
1672
1672
1673
1673
1674
1674
1675
1675
1676
1676
1677
1677
1678
1678
1679
1679
1680
1680
1681
1681
1682
1682
1683
1683
1684
1684
1685
1685
1686
1686
1687
1687
1688
1688
1689
1689
1690
1690
1691
1691
1692
1692
1693
1693
1694
1694
1695
1695
1696
1696
1697
1697
1698
1698
1699
1699
1700
1700
1701
1701
1702
1702
1703
1703
1704
1704
1705
1705
1706
1706
1707
1707
1708
1708
1709
1709
1710
1710
1711
1711
1712
1712
1713
1713
1714
1714
1715
1715
1716
1716
1717
1717
1718
1718
1719
1719
1720
1720
1721
1721
1722
1722
1723
1723
1724
1724
1725
1725
1726
1726
1727
1727
1728
1728
1729
1729
1730
1730
1731
1731
1732
1732
1733
1733
1734
1734
1735
1735
1736
1736
1737
1737
1738
1738
1739
1739
1740
1740
1741
1741
1742
1742
1743
1743
1744
1744
1745
1745
1746
1746
1747
1747
1748
1748
1749
1749
1750
1750
1751
1751
1752
1752
1753
1753
1754
1754
1755
1755
1756
1756
1757
1757
1758
1758
1759
1759
1760
1760
1761
1761
1762
1762
1
```

# Annexe : Code python - Barycentre de Wasserstein en tranches III

```
53     length , d = vec.shape
54     tab = np.full((rows, cols, 3), 255)
55     for k in range(length):
56         w,h = int(vec[k][0]), int(vec[k][1])
57         if w >= 0 and w < cols and h > 0 and h < cols:
58             tab[int(vec[k][1]), int(vec[k][0])] = targcol
59     return tab
60
61
62 def export_points(src, dim, title):
63     ''' Exporte en png un ensemble de points de N^2 représentant les coordonnées des
64     ↪ pixels colorés en noir'''
65     t = vec_pos_to_tab_color(src, dim[0], dim[1], [0, 0, 0])
66     cv2.imwrite(title, t)
```

-  Dimitri P. Bertsekas, *A distributed algorithm for the assignment problem*, [https://www.mit.edu/~dimitrib/Orig\\_Auction.pdf](https://www.mit.edu/~dimitrib/Orig_Auction.pdf), 1979.
-  \_\_\_\_\_, *The auction algorithm for assignment and other network flow problems*,  
<https://dspace.mit.edu/bitstream/handle/1721.1/3154/P-1908-20783037.pdf?sequence=1>, 1989.
-  Julie Delon, Gabriel Peyré, Julien Rabin, and Marc Bernot, *Wasserstein barycenter and its application to texture mixing*, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00476064/document>, 2011.

- Brittany Hamfeldt, *Optimal transport - discrete optimal transport*, <https://www.youtube.com/watch?v=7MZoLsXXyvA&t>, 2019.
- \_\_\_\_\_, *Optimal transport - the auction algorithm*, <https://www.youtube.com/watch?v=cONEfprs514>, 2019.
- Gaspard Monge, *Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais*, 1784.
- Gabriel Peyré and Marco Cuturi, *Computational optimal transport*, <https://optimaltransport.github.io/pdf/ComputationalOT.pdf>, 2018.