Projet : Introduction à l'Égalisation
Télécommunications

Comparetto Matthieu
1ère année Sciences du Numérique

Mai – Juin 2025

Table des matières

1 Introduction

Ce projet consiste à implémenter sous Matlab différentes chaînes de transmission : avec et sans canal multi-trajets, afin d'en étudier les différences. Puis, deux égaliseurs seront implémentés pour comprendre comment corriger les effets du canal multi-trajets, et analyser leurs avantages et inconvénients.

2 Étude théorique

2.1 Expression de $y_e(t)$

Le canal est défini par deux trajets :

— Trajet direct : α_0, τ_0

— Trajet réfléchi : α_1, τ_1

La réponse impulsionnelle est :

$$h_c(t) = \alpha_0 \delta(t - \tau_0) + \alpha_1 \delta(t - \tau_1)$$

Par convolution :

$$y_e(t) = x_e(t) * h_c(t) = \alpha_0 x_e(t - \tau_0) + \alpha_1 x_e(t - \tau_1)$$

2.2 Réponse impulsionnelle du canal

Avec les paramètres :

$$\tau_0 = 0, \quad \tau_1 = T_s, \quad \alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = 0.5$$

Alors :

$$h_c(t) = \delta(t) + 0.5 \cdot \delta(t - T_s)$$

2.3 Signal en sortie du filtre de réception

La séquence binaire 011001 est modulée en BPSK :

$$a = [-1, +1, +1, -1, -1, +1]$$

Chaque symbole est perturbé par l'écho du précédent :

$$y_k = a_k + 0.5 \cdot a_{k-1}$$

Calculs :

$$\begin{aligned}
&y_1 = -1 \\
&y_2 = 1 + 0.5 \cdot (-1) = 0.5 \\
&y_3 = 1 + 0.5 \cdot (1) = 1.5 \\
&y_4 = -1 + 0.5 \cdot (1) = -0.5 \\
&y_5 = -1 + 0.5 \cdot (-1) = -1.5 \\
&y_6 = 1 + 0.5 \cdot (-1) = 0.5
\end{aligned}$$

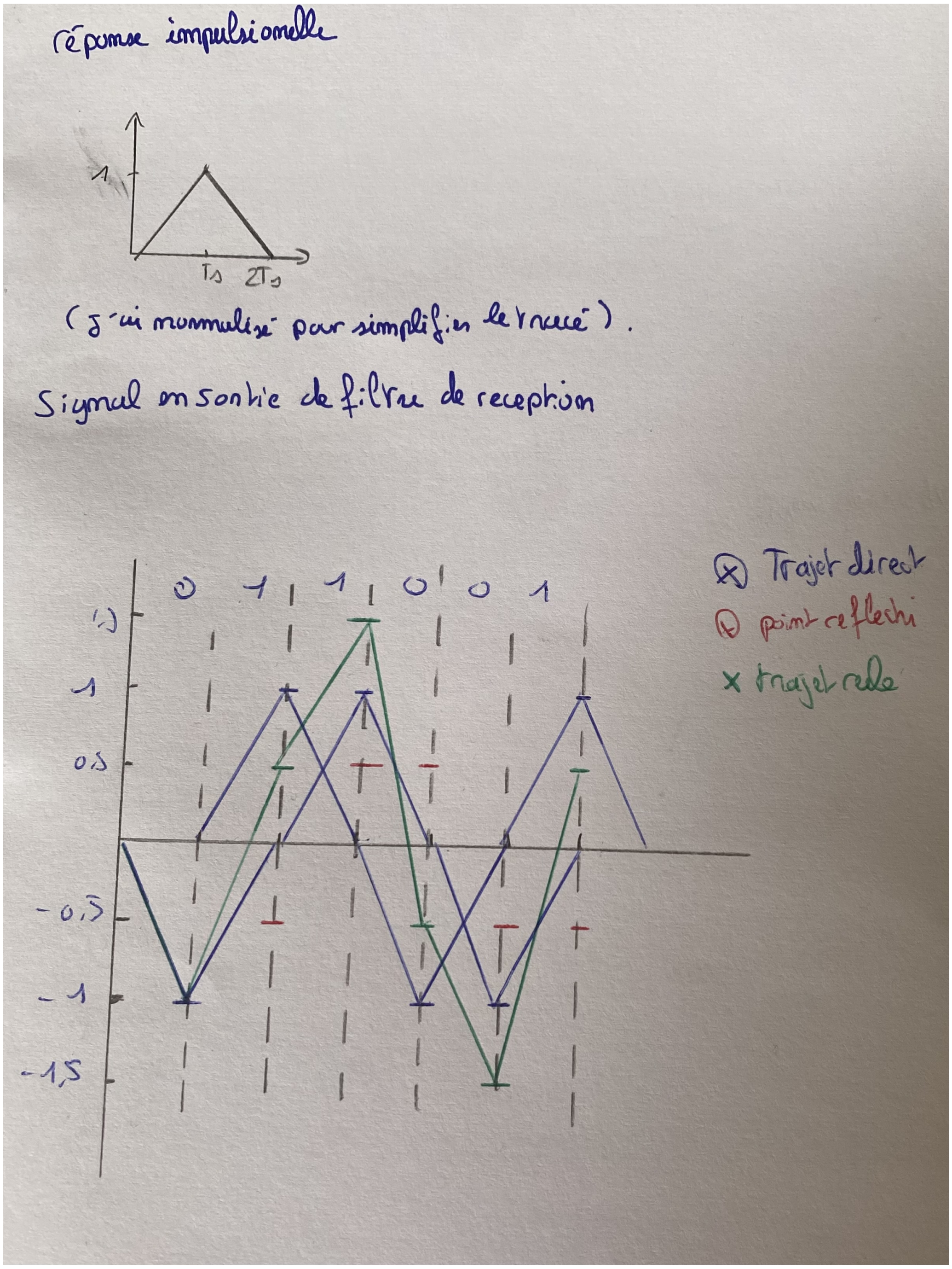

FIGURE 1 – Tracé théorique de la sortie du filtre de réception

2.4 Diagramme de l'œil

En l'absence de bruit, le diagramme de l'œil montre une superposition des symboles (ISI). L'œil est partiellement fermé :

$$\Rightarrow \text{le critère de Nyquist n'est pas respecté.}$$

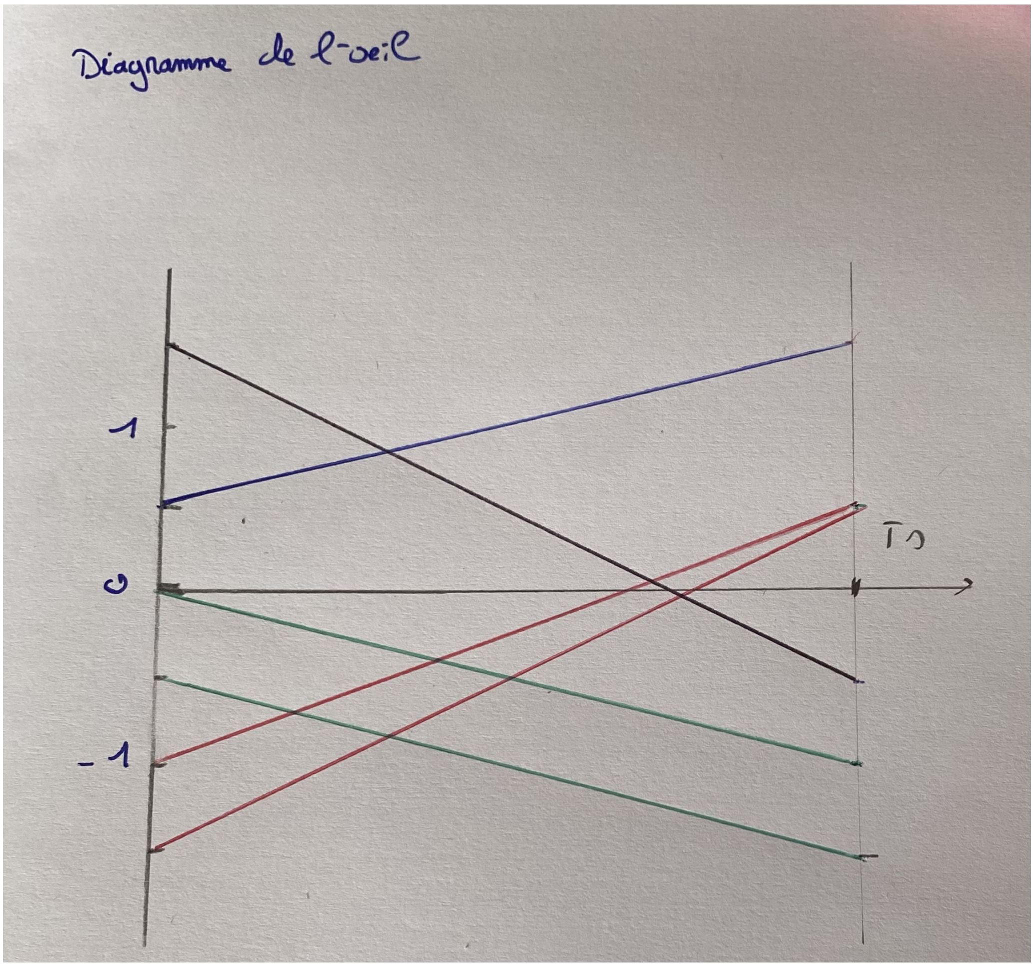

Figure 2 – Tracé théorique du diagramme de l'œil

2.5 Taux d'erreur binaire (TEB)

2.5.1 Expression du TEB en fonction de T_s et σ_w^2

À l'instant $t = t_0 + mT_s$, avec $t_0 = T_s$:

$$y_m = \alpha_0 a_m T_s + \alpha_1 a_{m-1} T_s + w_m$$

où $w_m \sim \mathcal{N}(0, \sigma_w^2)$. Détecteur à seuil 0 :

$$\text{TEB} = \frac{1}{2} Q\left(\frac{(1+0.5)T_s}{\sigma_w}\right) + \frac{1}{2} Q\left(\frac{(1-0.5)T_s}{\sigma_w}\right)$$

2.5.2 Puissance du bruit en sortie du filtre

Filtre : porte rectangulaire de largeur T_s, hauteur 1 :

$$\sigma_w^2 = \frac{N_0}{2} \cdot T_s$$

2.5.3 Énergie des symboles

Modulation BPSK avec shaping rectangulaire :

$$E_b = E_s = \int_0^{T_s} 1^2 dt = T_s$$

2.5.4 TEB en fonction de E_b/N_0

Avec $\sigma_w^2 = \frac{N_0}{2} T_s$, alors :

$$\frac{T_s}{\sigma_w} = \sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}$$

D'où :

$$\text{TEB} = \frac{1}{2} Q \left(1.5 \sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \right) + \frac{1}{2} Q \left(0.5 \sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \right)$$

3 Implémentation Matlab

3.1 Chaîne de transmission sans bruit

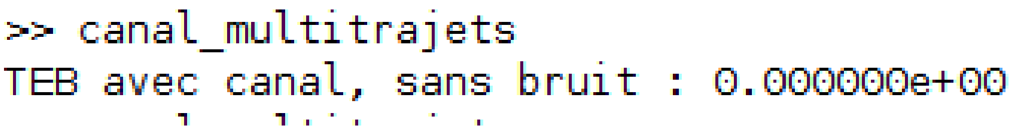

FIGURE 3 – Calcul du TEB via Matlab, sans canal ni bruit : TEB nul attendu.

3.2 Chaîne de transmission avec canal

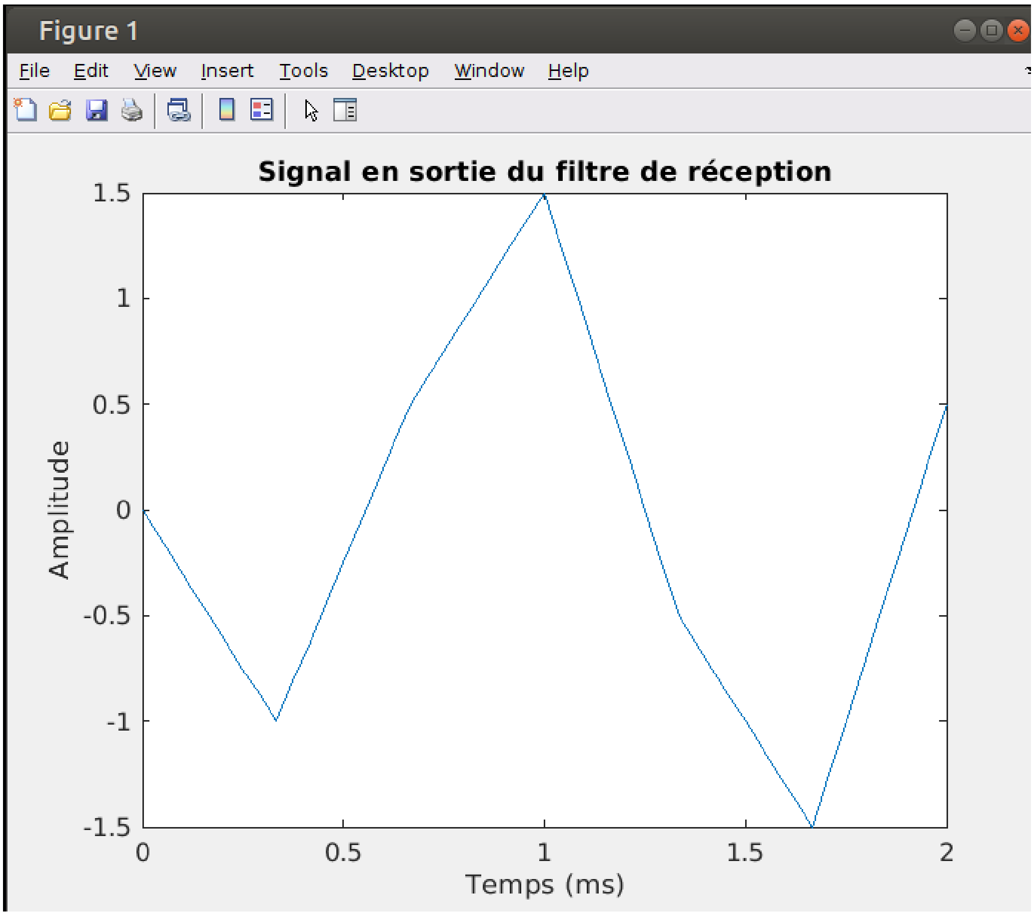

FIGURE 4 – Sortie du filtre de réception : on observe l'effet de l'écho.

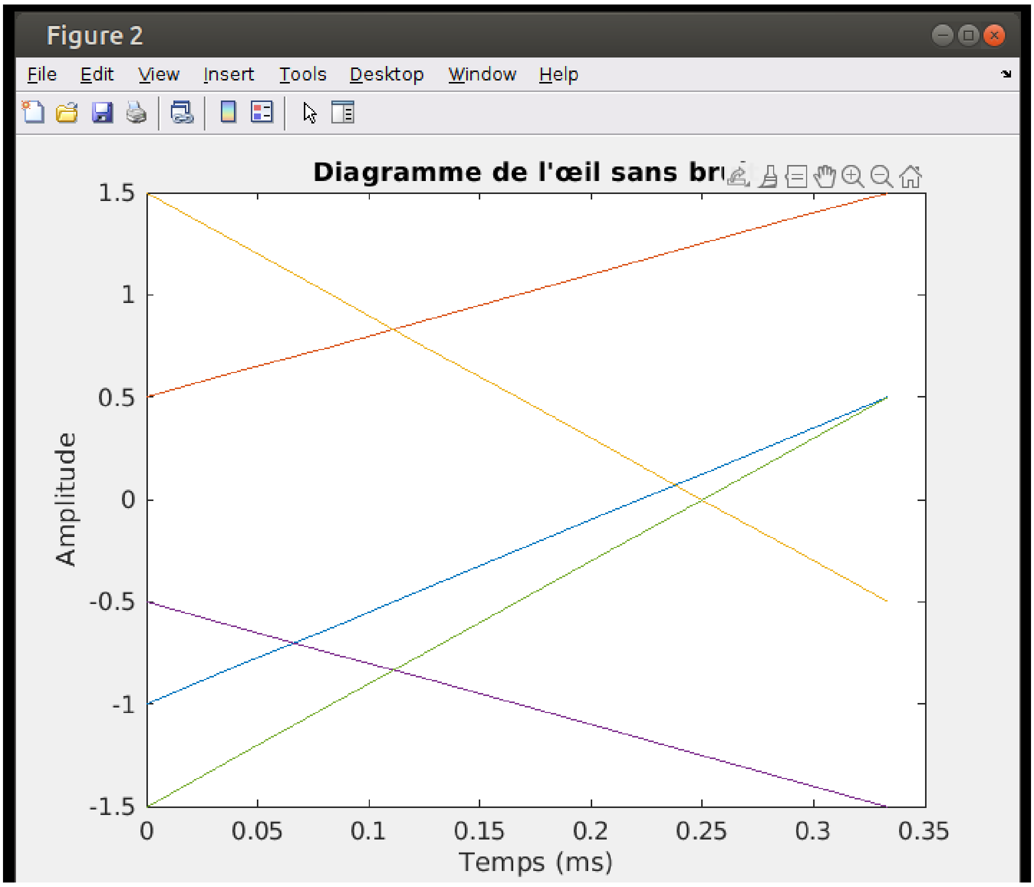

FIGURE 5 – Diagramme de l'œil perturbé par l'ISI, œil partiellement fermé.

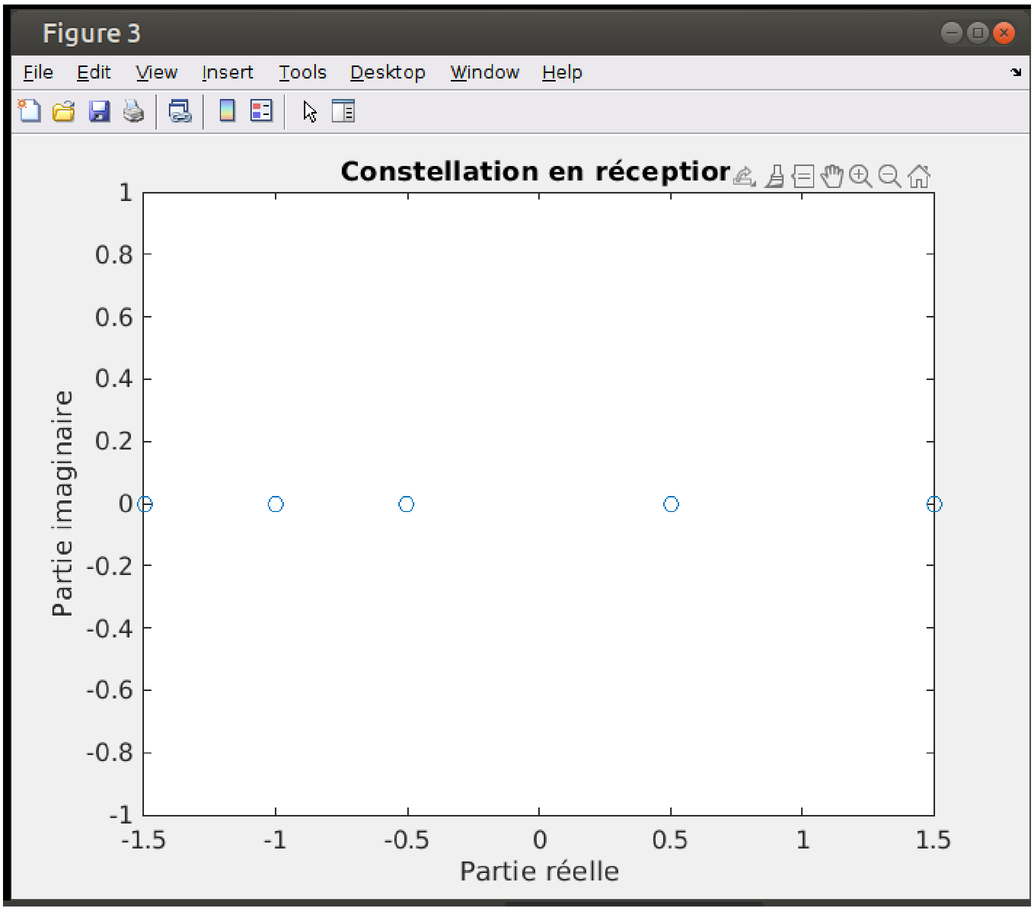

FIGURE 6 – Constellation en sortie : les symboles sont déformés par le canal.

3.3 Ajout du bruit

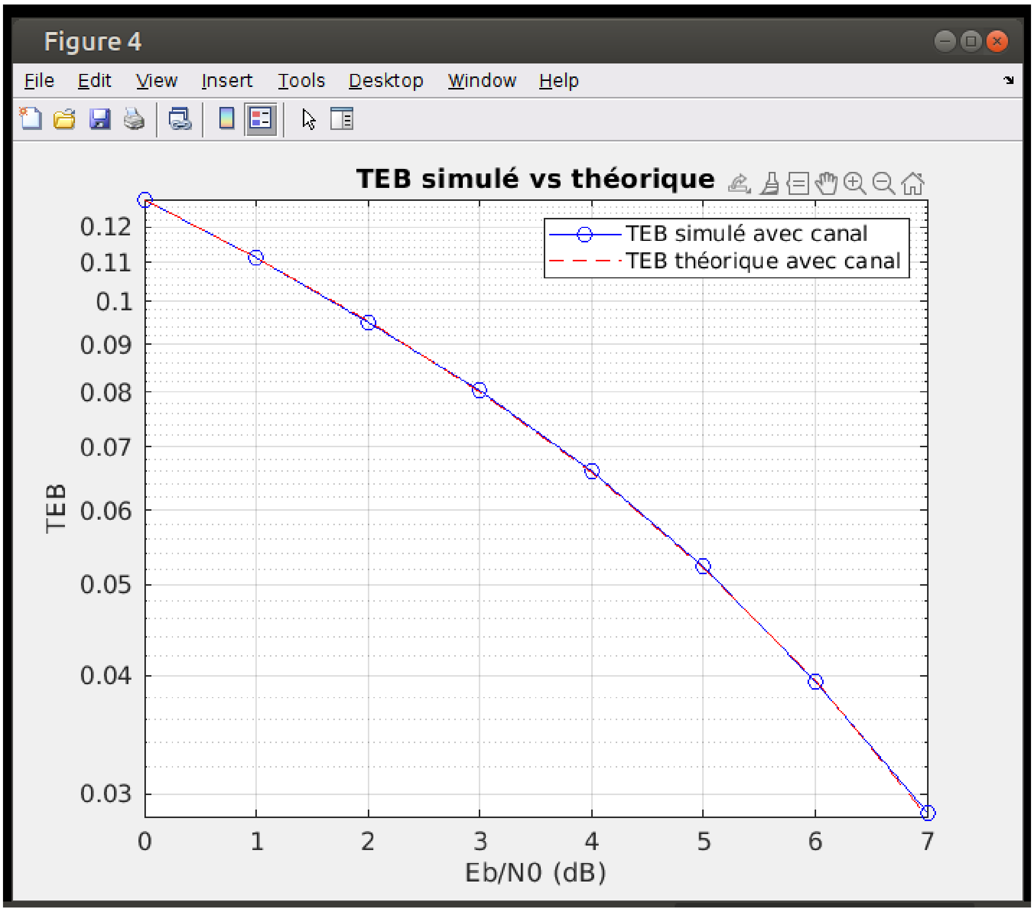

FIGURE 7 – Comparaison TEB simulé vs théorique en fonction de E_b/N_0.

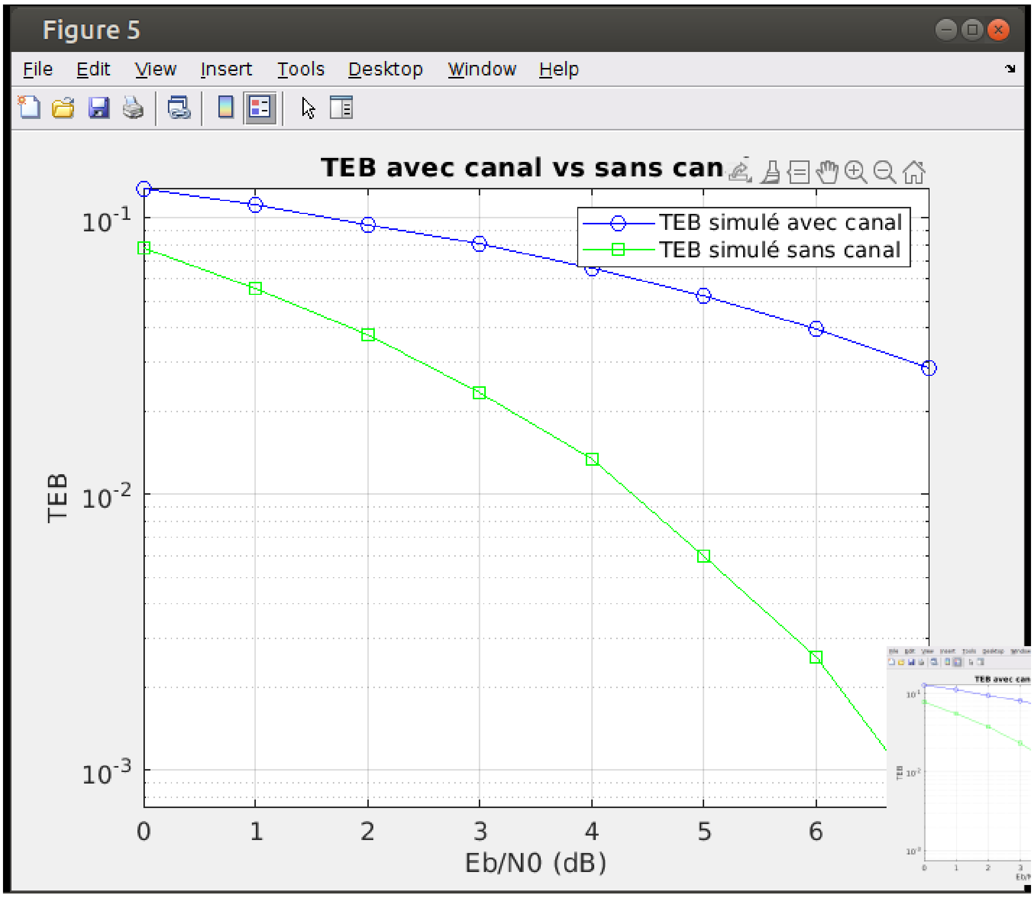

FIGURE 8 – TEB avec et sans canal multi-trajets : dégradation claire due à l'ISI.

4 Égaliseur ZFE

4.1 Détermination des coefficients

Nous souhaitons déterminer les coefficients $C = [c_0, c_1, \ldots, c_N]^T$ d'un égaliseur Zero-Forcing (ZFE) à Réponse Impulsionnelle Finie (RIF) d'ordre N. Cet égaliseur est destiné à compenser les effets du canal multitrajets avec les paramètres :

— $\tau_0 = 0$
— $\tau_1 = \tau_0 + T_s = T_s$ (où T_s est la durée d'un symbole)
— $\alpha_0 = 1$
— $\alpha_1 = 0,5$

L'égaliseur $h_{eg}(t)$ (dont les coefficients discrets sont c_k) est placé après le filtre de réception.

L'entrée de l'égaliseur, notée $z(t)$, est obtenue en plaçant une impulsion de Dirac $\delta(t)$ à l'entrée de la chaîne de transmission (avant le filtre d'émission). Ainsi, $z(t)$ est le résultat de la convolution $h(t) * h_c(t) * h_r(t)$.

La réponse impulsionnelle du canal $h_c(t)$ est :

$$h_c(t) = \alpha_0 \delta(t - \tau_0) + \alpha_1 \delta(t - \tau_1) = \delta(t) + 0,5\delta(t - T_s)$$

Les filtres d'émission et de réception sont $h(t) = h_r(t) = \mathrm{rect}_{T_s}(t)$, où $\mathrm{rect}_{T_s}(t) = 1$ pour $0 \leq t < T_s$ et 0 ailleurs.

La convolution de ces deux filtres rectangulaires est un filtre triangulaire $p(t) = (h * h_r)(t)$:

$$p(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t < T_s \\ 2T_s - t & T_s \leq t < 2T_s \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Normalisé pour que l'aire soit T_s^2, si la hauteur est 1, la base T_s, alors $(h * h_r)(t)$ est un triangle de base $2T_s$ et de hauteur T_s :

$$p(t) = (T_s - |t - T_s|) \cdot \mathbf{1}_{[0,2T_s]}(t)$$

où $\mathbf{1}_{[0,2T_s]}(t)$ est la fonction indicatrice sur l'intervalle $[0, 2T_s]$.

L'entrée de l'égaliseur est donc $z(t) = (p * h_c)(t) = p(t) + 0,5p(t - T_s)$.

L'égaliseur est implanté au rythme symbole, donc nous échantillonnons $z(t)$ à des multiples de $N_s = T_s$. Notons $z_m = z(mT_s)$.

— $p(0 \cdot T_s) = 0$
— $p(1 \cdot T_s) = T_s$
— $p(2 \cdot T_s) = 0$

Calculons les échantillons z_m :

— $z_0 = z(0 \cdot T_s) = p(0) + 0,5p(-T_s) = 0 + 0,5 \cdot 0 = 0$
— $z_1 = z(1 \cdot T_s) = p(T_s) + 0,5p(0) = T_s + 0,5 \cdot 0 = T_s$
— $z_2 = z(2 \cdot T_s) = p(2T_s) + 0,5p(T_s) = 0 + 0,5 \cdot T_s = 0,5T_s$
— $z_3 = z(3 \cdot T_s) = p(3T_s) + 0,5p(2T_s) = 0 + 0,5 \cdot 0 = 0$

La séquence des échantillons à l'entrée de l'égaliseur est donc $[0, T_s, 0,5T_s, 0, \dots]$.

En choisissant l'instant de référence n_0 pour que $z(n_0)$ soit le premier échantillon non nul, nous avons la séquence effective du canal vue par l'égaliseur (appelons-la z'_k pour simplifier la notation) :

$$z'_0 = T_s, \quad z'_1 = 0,5T_s, \quad z'_k = 0 \text{ pour } k \geq 2$$

Nous choisissons $N = 1$ (donc deux coefficients), ainsi que $K = N$ pour obtenir une matrice carrée.

Pour un égaliseur ZFE d'ordre $N = 1$ (ayant $N + 1 = 2$ coefficients c_0 et c_1), nous voulons que la sortie $y(n_0 + mN_s)$ soit 1 pour $m = 0$ et 0 pour $m = 1$. Ceci mène au système matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z'_0 & 0 \\ z'_1 & z'_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}$$

Notons $Y_0 = [1, 0]^T$, Z la matrice de Toeplitz (ici 2×2) et $c = [c_0, c_1]^T$. Alors $Zc = Y_0$.

Avec $z'_0 = T_s$ et $z'_1 = 0,5T_s$:

$$Z = \begin{pmatrix} T_s & 0 \\ 0,5T_s & T_s \end{pmatrix}$$

Le système d'équations est donc :

$$\begin{pmatrix} T_s & 0 \\ 0,5T_s & T_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Résolvons ce système :

1. À partir de la première ligne :

$$T_s \cdot c_0 + 0 \cdot c_1 = 1 \implies T_s c_0 = 1 \implies \boxed{c_0 = \frac{1}{T_s}}$$

2. À partir de la deuxième ligne, en substituant c_0 :

$$\begin{aligned} (0,5T_s) \cdot c_0 + T_s \cdot c_1 &= 0 \\ 0,5 + T_s c_1 &= 0 \\ T_s c_1 &= -0,5 \implies \boxed{c_1 = -\frac{0,5}{T_s}} \end{aligned}$$

Les coefficients de l'égaliseur ZFE d'ordre $N = 1$ sont donc :

$$c_0 = \frac{1}{T_s}, \qquad c_1 = -\frac{0,5}{T_s}$$

Ces coefficients suivent la formule générale :

$$c_k = \frac{1}{T_s}(-0,5)^k \quad \text{pour } k = 0, 1$$

Pour un égaliseur d'ordre N plus élevé, on continuerait à appliquer cette formule pour $k = 0, 1, \ldots, N$.

4.2 Implémentation Matlab

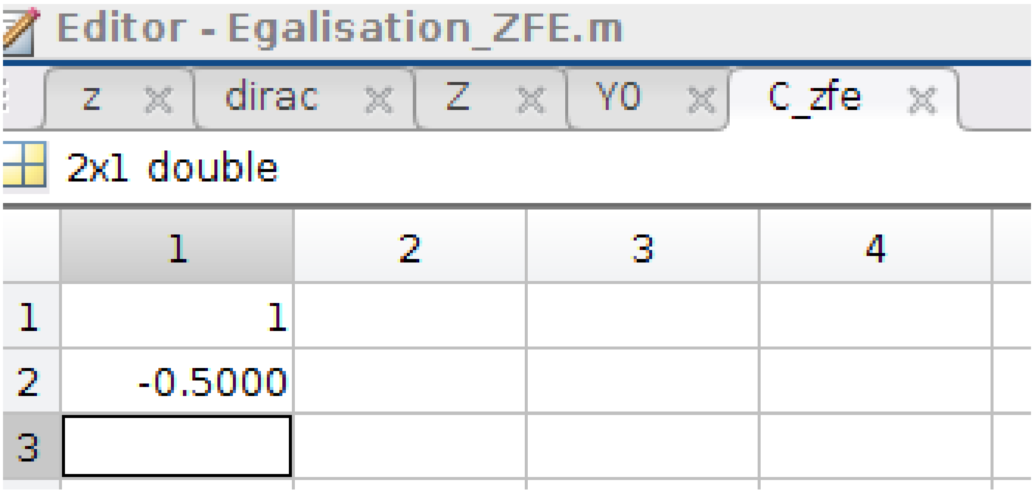

FIGURE 9 – Implémentation de l'égaliseur ZFE d'ordre 1 sous Matlab : coefficients retrouvés.

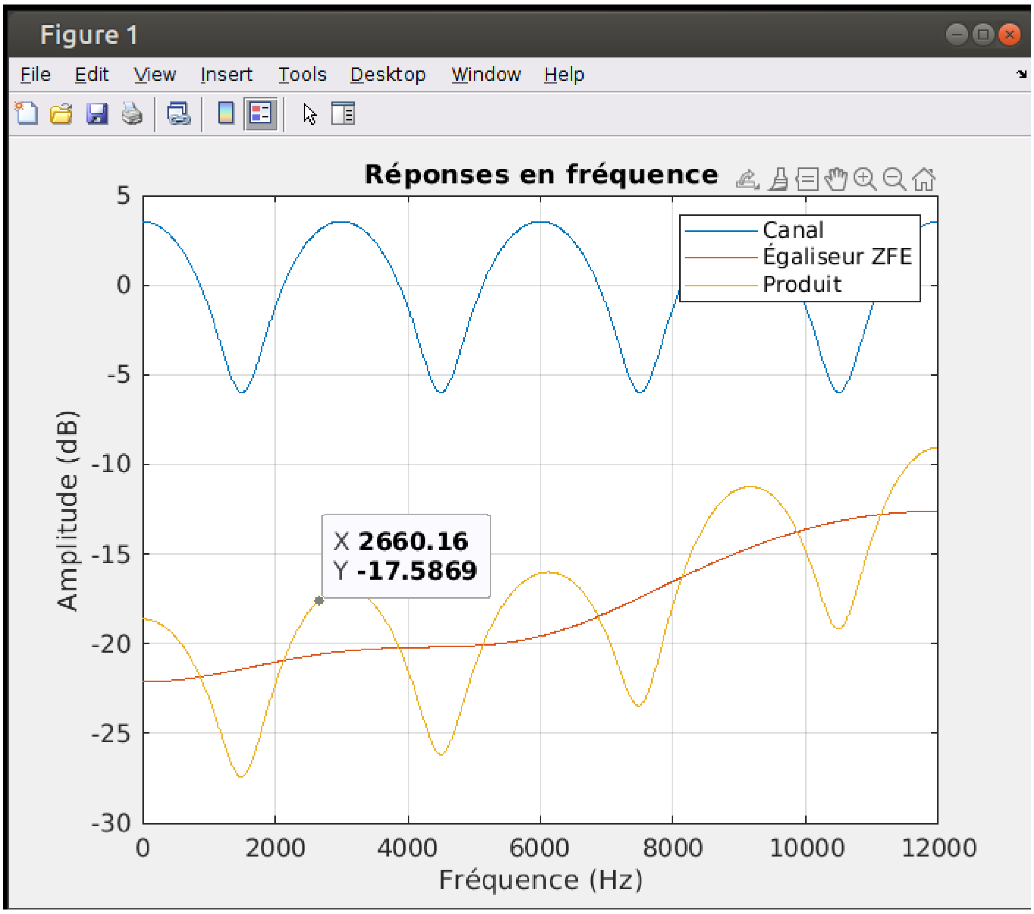

FIGURE 10 – Réponse fréquentielle : l'égaliseur ZFE compense partiellement certaines fréquences.

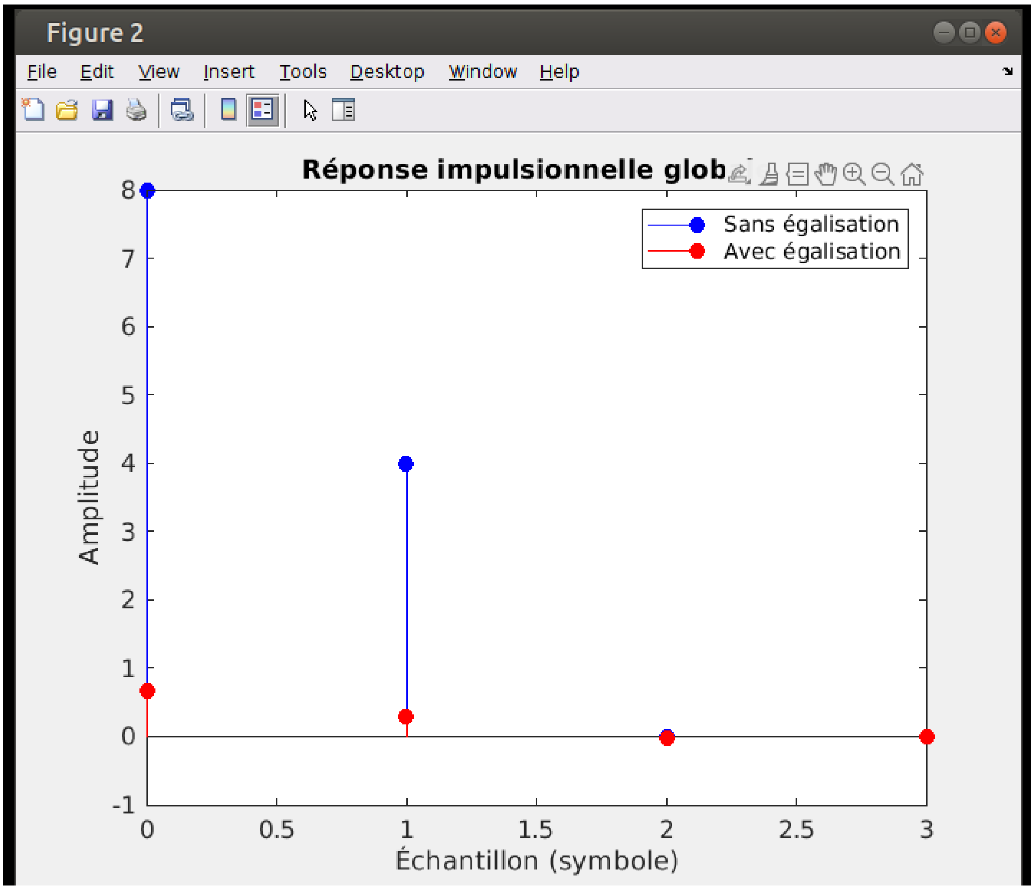

FIGURE 11 – Réponse impulsionnelle après égalisation ZFE : le pic unique montre que le critère de Nyquist est approché.

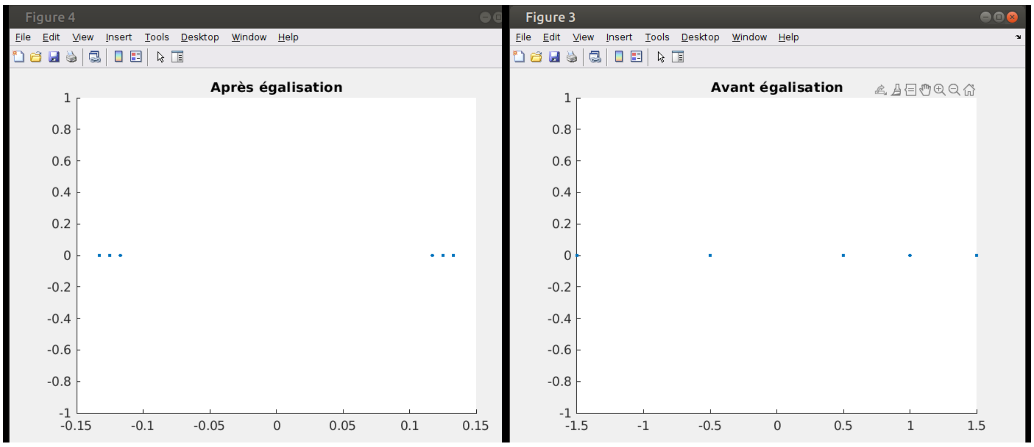

FIGURE 12 – Constellation avant/après ZFE : les symboles sont mieux regroupés, l'ISI est atténuée.

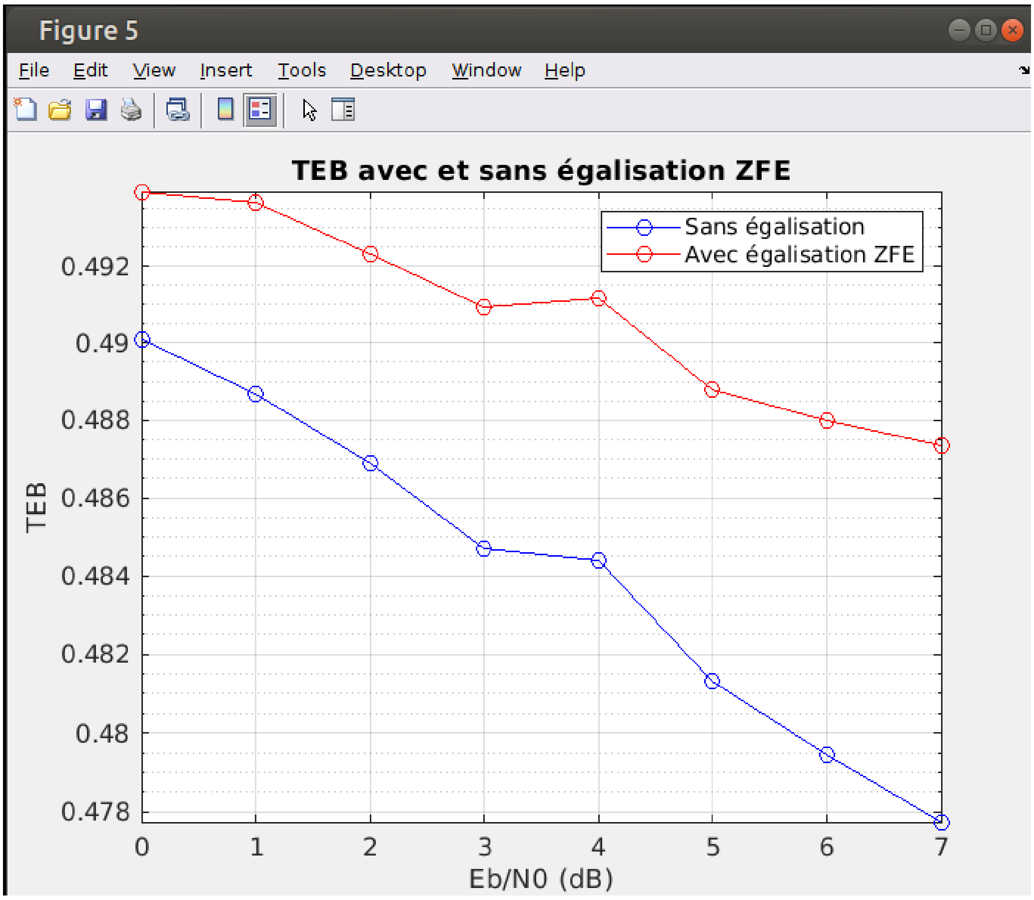

FIGURE 13 – Réduction du TEB grâce à l'égaliseur ZFE : amélioration significative.

5 Égaliseur MMSE

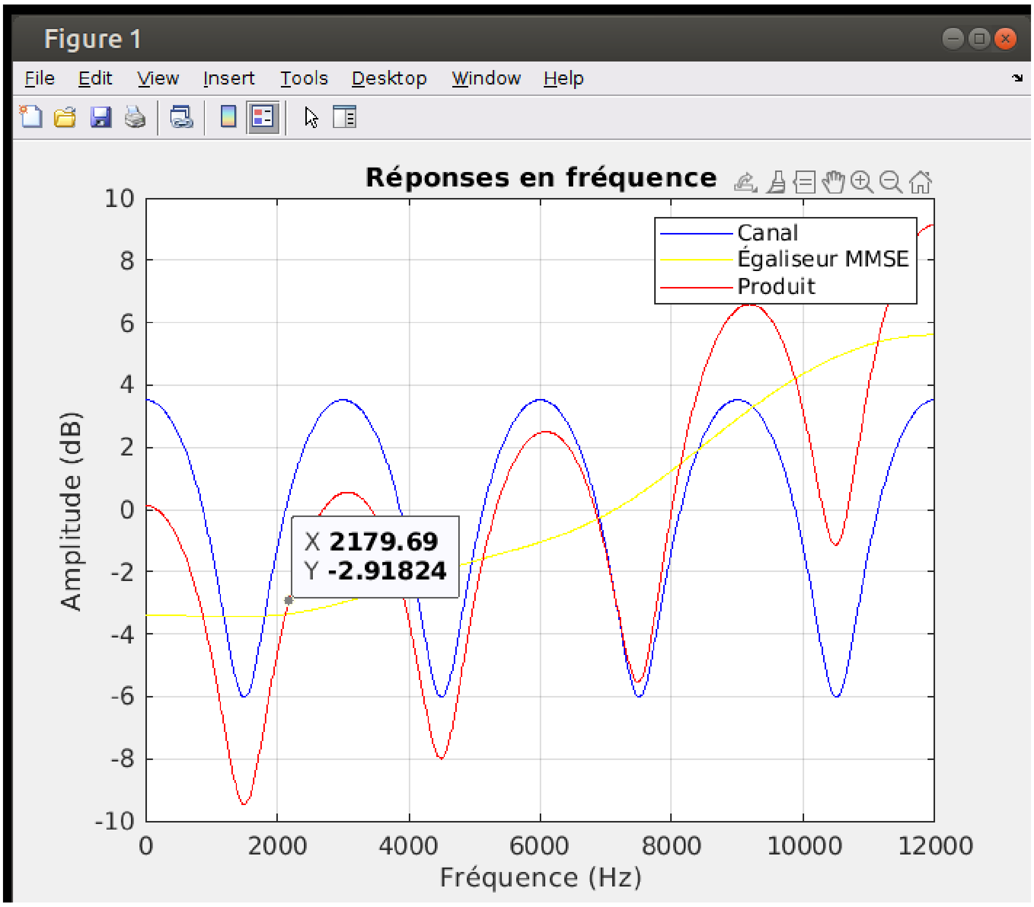

FIGURE 14 – Réponse en fréquence : le MMSE (jaune) corrige mieux l'ensemble du spectre mais reste imparfait (oscillations).

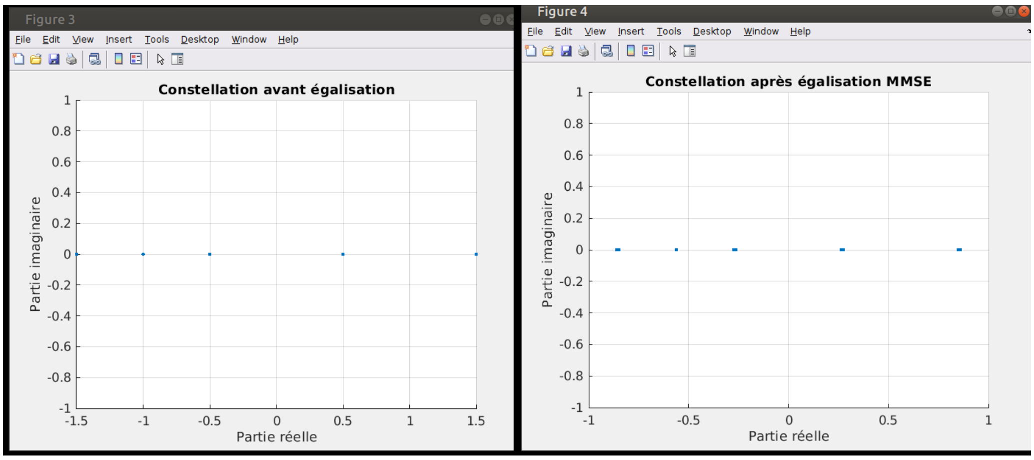

FIGURE 15 – Constellations avant (gauche) et après (droite) MMSE : les symboles sont resserrés, amélioration nette.

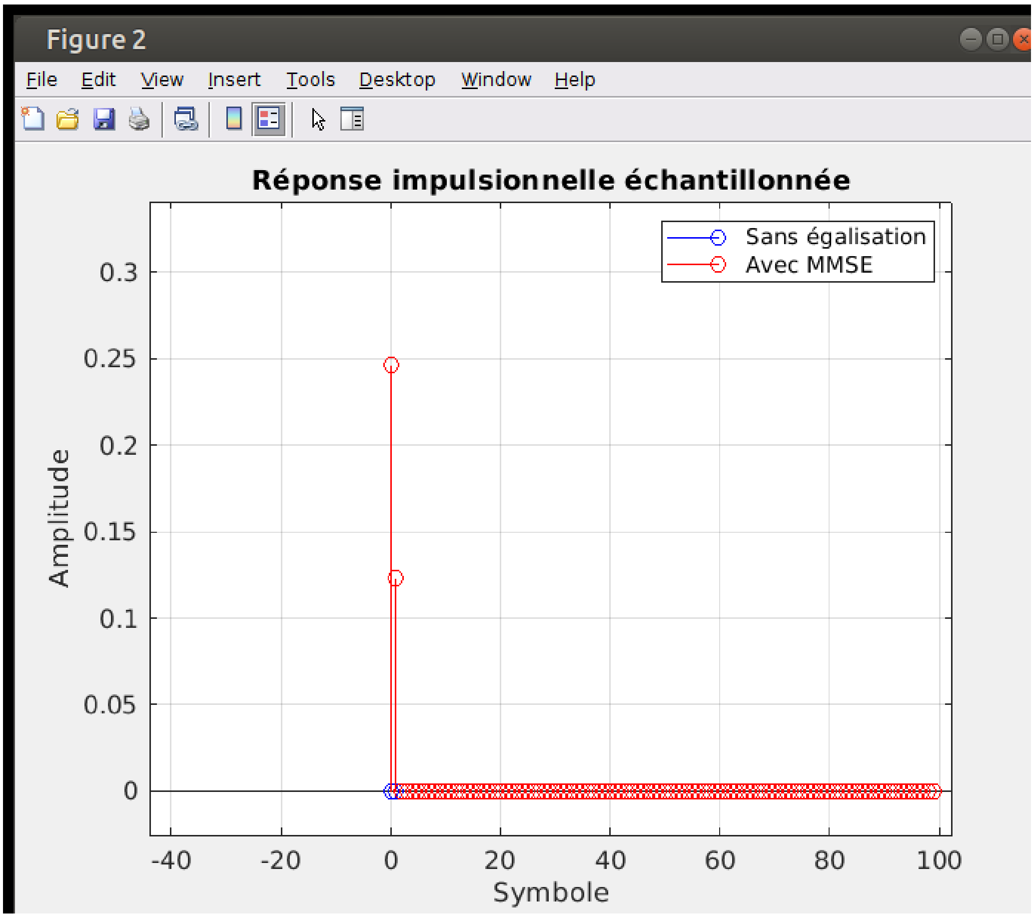

FIGURE 16 – Réponse impulsionnelle avec MMSE : les échos sont partiellement annulés, bien que le pic soit décalé.

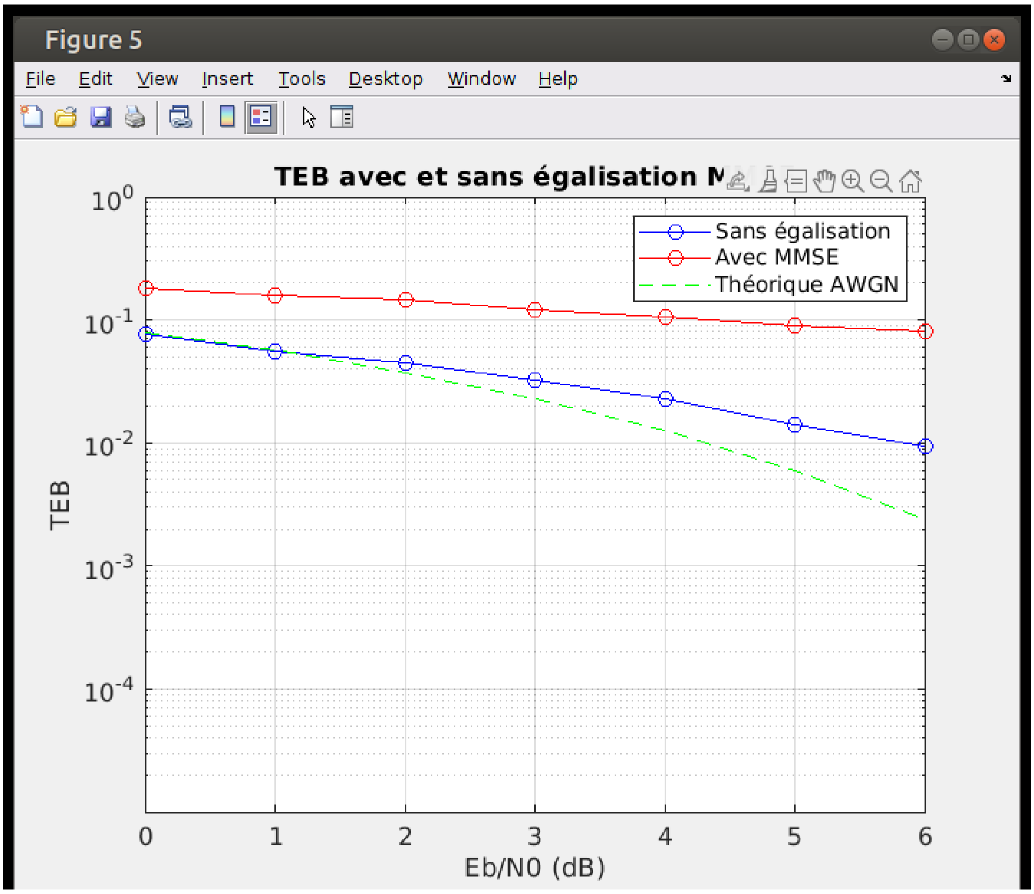

FIGURE 17 – TEB incohérent avec MMSE : l'erreur est due à un bug dans l'implémentation (non résolu).

6 Conclusion

Ce projet a permis de mettre en œuvre une chaîne de transmission complète, en introduisant progressivement les éléments perturbateurs (canal, bruit) pour observer leur impact sur les performances (TEB, constellation, œil). Les égaliseurs ZFE et MMSE ont chacun montré leur capacité à atténuer l'ISI, bien que le ZFE soit plus simple à implémenter, tandis que le MMSE offre une solution plus robuste au bruit.

L'égalisation MMSE n'a pas atteint les résultats attendus dans notre cas en raison d'une erreur de codage non identifiée. Malgré cela, les résultats obtenus illustrent bien l'importance de la compensation du canal dans les systèmes de télécommunications.

Les figures et graphiques intégrés dans ce rapport ont été générés à l'aide des fichiers Matlab suivants :

- `<canal_multitrajets.m>`
- `<Egalisation_ZFE>`
- `<Egalisation_mmse>`

Attention à bien lancer canal_multitrajets avant les autres !