MODELO NUMÉRICO DE PROPAGACIÓN DE ONDAS

1.1 Planteamiento Teórico del Problema

La propagación del oleaje sobre fondos de batimetría irregular y alrededor de cabos o islas incluye procesos de asomeramiento, refracción, disipación de energía y difracción. La complejidad de estos fenómenos ha sido causa de que hasta fechas recientes no existan modelos teóricos capaces de predecir el comportamiento del oleaje debido a estos efectos.

En este apartado se describe el modelo débilmente no lineal de refracción - difracción combinada presentado inicialmente por Kirby y Dalrymple (1983a, 1985a), el cual incorpora todos los efectos mencionados anteriormente.

La refracción del oleaje determinada mediante las técnicas del trazado de los rayos, utilizando el principio de Fermat y la ecuación de la conservación de la energía a lo largo de cada rayo no incluye la difracción de las ondas y, por lo tanto, resulta inadecuada cuando los efectos de la difracción son importantes. En efecto, frecuentemente, debido a las complejidades de la batimetría, los diagramas de rayos presentan múltiples intersecciones, lo que lleva a dificultades en la interpretación, dado que la teoría predice amplitud de onda infinita en los puntos de intersección.

La difracción del oleaje alrededor de estructuras simples tales como rompeolas se ha resuelto analíticamente para fondo de profundidad constante, Sommerfeld (1986). En el caso de estructuras cilíndricas, McCamy y Fuchs (1954) presentaron la solución para fondo plano horizontal. Estas soluciones no dan sólo la altura de onda en el área abrigada por la estructura, sino que con ellas se obtiene también el oleaje reflejado por ella. Versiones generalizadas de estos problemas de difracción, utilizando técnicas numéricas como el método de la función de Green, han dado lugar a potentes procedimientos de cálculo de fuerzas del oleaje sobre estructuras en aquellos casos en los que la fuerza de arrastre es mucho menor que la de inercia.

Una práctica generalizada para incorporar los efectos de la difracción ha sido el suspender los de la refracción en aquellas áreas donde la difracción es dominante y utilizar la solución analítica de Sommerfeld para fondo plano horizontal. Fuera del área de difracción predominante, se desprecian los efectos difractivos y sólo se considera la refracción. Esta metodología es claramente inexacta, pero permite la inclusión de la difracción de una manera aproximada.

Los modelos combinados de refracción/difracción incluyen ambos efectos explícitamente y, por lo tanto, permiten el modelado del oleaje en aquellas regiones donde la batimetría es irregular y/o donde los efectos de la difracción son importantes. Las situaciones en las que los rayos se cruzan debido a concentraciones locales, provocando cáusticos, se tratan adecuadamente por medio de estos modelos sin que se predigan amplitudes infinitas. Los modelos desarrollados en forma de una ecuación parabólica no tienen en cuenta el oleaje reflejado por las estructuras, lo que quiere decir que el fenómeno de la reflexión del oleaje no se reproduce correctamente.

Los modelos de refracción/difracción combinada son apropiados para el cálculo de las alturas de ola y su dirección en aquellas áreas donde están presentes ambos fenómenos. Como ejemplos, se puede indicar los casos del cálculo del oleaje que penetra en una bahía, o el abrigo producido por una isla cercana a la costa.

El modelo de refracción/difracción ligeramente no lineal que se presenta en este apartado, denominado OLUCA, se basa en un desarrollo de Stokes de las ecuaciones que definen el problema de las ondas sobre el agua e incluye una aproximación hasta el tercer orden de la velocidad de fase de onda o celeridad. La amplitud de la onda se aproxima hasta el segundo orden (Liu and Tsay (1984)). Es necesario indicar que el modelo no contiene todos los términos de tercer orden de un desarrollo de Stokes. El modelo permite determinar el efecto de corrientes dadas sobre la propagación del oleaje.

La aplicación del modelo teórico a situaciones prácticas incluye el uso de una aproximación parabólica, lo que restringe el uso del modelo a los casos donde la dirección de propagación del oleaje está dentro de $\pm$ 60° alrededor de una dirección de propagación dominante. Esta aproximación parabólica se resuelve por medio de una técnica de diferencias finitas para la amplitud de la onda, resultando un sistema en matrices tridiagonales que son, desde el punto de vista de la computación, muy rápidas de invertir.

1.1.1 Modelos de Propagación de Oleaje

· *Ecuación de la pendiente suave.*

El problema de la propagación de ondas sobre batimetría irregular es tridimensional e involucra complicadas condiciones de contorno no lineales. Por este motivo, existen muy pocas soluciones al problema tridimensional y todas ellas lo son para fondo plano horizontal. En dos dimensiones, los sofisticados modelos de Chu and Mei (1970) y Djordjevic and Redekopp (1978) predicen el comportamiento de ondas de Stokes sobre batimetría con variación suave. Para la simplificación del problema tridimensional, Berkhoff (1972), entre otros, hizo notar que la mayor parte de las propiedades de las ondas progresivas lineales podrían ser predichas mediante un modelo ponderado integrado verticalmente.

La ecuación a la que llegó Berkhoff se conoce con el nombre de "mild slope equation" es decir, ecuación de pendiente suave. La ecuación está escrita en términos de la amplitud de la onda, $A(x,y)$, que es una cantidad compleja que aporta información sobre la amplitud y la fase de la onda.

La ecuación se puede escribir en términos de un operador de gradiente horizontal como:

$$\nabla . C . C_g . \nabla . A + \sigma^2 (C_g/C) . A = 0 \qquad (1)$$

Donde:

$\nabla = \partial / \partial x_j \qquad j = 1,2$
$C^2 = (g/k) \tanh kh$: Celeridad de la onda.
$C_g = C(1 + 2kh/\sinh 2kh)/2$: Celeridad de grupo.

La profundidad local, $h(x,y)$ y la aceleración de la gravedad, g, están relacionadas con la frecuencia angular s mediante la relación de dispersión lineal:

$\sigma^2 = g.k.tankh$

El perfil de la onda viene dado por:

$$h = A.e^{i\sigma t}$$

Numerosos autores han aplicado la ecuación de la pendiente suave a diversos casos, principalmente utilizando técnicas de diferencias finitas, ver por ejemplo Jonsson and Skovgaard (1979), Bettes and Zienkiewitz (1977) y Houston (1981).

Radder (1979) desarrolló para la ecuación de la pendiente suave una aproximación parabólica que tiene varias ventajas sobre la forma elíptica presentada por Berkhoff. Primero, no son necesarias las condiciones de contorno en el extremo inferior del recinto de integración y, segundo, permite técnicas de resolución muy eficientes por medio de un modelo en diferencias finitas. Radder utilizó una técnica de partición de matrices, que implica la separación del campo de oleaje en una onda propagándose hacia adelante y otra hacia atrás, despreciándose posteriormente esta segunda (lo que se justifica porque en la mayoría de las aplicaciones sólo tiene interés la onda que se propaga hacia adelante). La aproximación de Radder para las derivadas transversales en la dirección normal a la de propagación impone una restricción a su modelo parabólico: las ondas deben propagarse dentro de los $\pm$ 45° alrededor de la dirección supuesta del oleaje. Booij (1981) desarrolló también un método para la partición de la matriz de la ecuación elíptica, pero su procedimiento incluye más términos en la aproximación de las derivadas transversales y, por lo tanto, su método permite al modelo parabólico manejar ondas dentro del rango de $\pm$ 60° alrededor de la dirección supuesta. Este procedimiento de Booij es el que se utiliza en el modelo OLUCA.

La aproximación parabólica a la ecuación de pendiente suave viene dada por:

$$C_g A_x + A_y + i(\bar{k} - k) C_g A + \sigma A [C_g/\sigma]_x/2 -$$
$$i [pA_y]_y /2\sigma - \sigma k^2 D |A|^2 A/2 = 0$$

donde:

$p = C\ C_g$
$\bar{k}$ = Número de onda de referencia, tomado como la media a lo largo del eje y.
D = Forma parte del término no lineal y es:
D = $(cos\ 4kh + 8 - 2\ tanh2kh)\ /\ 8\ senh4kh$

· *Modelos combinados de refracción/difracción.*

Los predecesores del OLUCA fueron desarrollados por Kirby (1983) y Kirby and Dalrymple (1983a), el primero mediante una aproximación Lagrangiana y los segundos mediante una técnica de escalas múltiples.

Estos modelos rellenaron el hueco entre los modelos no lineales de difracción y la ecuación lineal de la pendiente suave. Este modelo se puede escribir de diferentes maneras dependiendo de la aplicación. Para aplicaciones dependientes del tiempo se utiliza la forma hiperbólica y para problemas estacionarios, la forma elíptica. Ambas requieren del uso de condiciones de contorno en todos los laterales del dominio del modelo.

Estas condiciones son difíciles de establecer, puesto que la reflexión no es conocida a priori. Estos modelos tienen, sin embargo, la ventaja de que no tienen restricciones para la dirección del oleaje.

Kirby and Dalrymple (1984) presentan una comparación entre su modelo ligeramente no lineal de (1983a) y datos de laboratorio. Los ensayos de laboratorio, realizados en el Delft Hydraulics Laboratory por Berkhoff, Booij and Radder (1982), consistieron en la determinación de la amplitud de las ondas sobre un bajo en un fondo en pendiente. Mientras los resultados predichos por Berkhoff, Booij and Radder mediante el trazado de los rayos resultaron ser una muy pobre aproximación a los ensayos, la predicción obtenida con el modelo de Kirby and Dalrymple fue excelente.

Las comparaciones entre los modelos parabólicos lineales y no lineales demostraron la importancia de los términos no lineales dispersivos en las ecuaciones.

1.1.2 Hipótesis del modelo

El modelo OLUCA, en su forma parabólica, tiene un número de hipótesis inherentes que es necesario conocer. Estas hipótesis son:

· *Fondo de pendiente suave*.

El desarrollo matemático de las ecuaciones del modelo se hace con la hipótesis de que las variaciones del fondo con las coordenadas horizontales son pequeñas en comparación con la longitud de onda. Para el modelo lineal, Booij (1983) realizó una comparación entre un modelo numérico exacto y el de la ecuación de pendiente suave para ondas propagándose sobre una playa. Encontró que hasta pendientes del fondo de 1:3 el modelo de la pendiente suave es exacto y que para pendientes mayores predice adecuadamente las tendencias.

· *No linealidad débil.*

Estrictamente hablando, el modelo OLUCA se basa en un desarrollo de Stokes y, por lo tanto, está restringido a aquellas aplicaciones donde son válidas las ondas de Stokes. Una medida de la no linealidad es el parámetro de Ursell que viene dado por:

$$U = HL^2 / h^3 \qquad (3)$$

Cuando este parámetro excede de 40, la solución de Stokes deja de ser válida. Para lograr que el modelo sea válido en profundidades mucho menores, se le implementa como opción una relación de dispersión empírica del tipo de la dada por Hedges (1976). Esta relación entre la frecuencia y la profundidad del agua es:

$$\sigma^2 = g\ k\ tanh\ [kh(1 + |A|/h)] \qquad (4)$$

En profundidades reducidas, esta ecuación converge con la de la onda solitaria, mientras que en profundidades indefinidas se aproxima asintóticamente a los resultados de la onda lineal, despreciando los efectos dispersivos. Por esta razón, se utiliza un modelo, con una relación de dispersión que da una transición suave entre la forma de Hedges (válida en profundidades reducidas) y la de Stokes (válida en profundidades indefinidas).

Este modelo híbrido se describe en Kirby and Dalrymple (1986b).

Como resultado de las diferentes relaciones de dispersión posibles, se dispone de tres opciones en el OLUCA: (1) modelo lineal, (2) un modelo Stokes-Hedges no lineal, y (3) un modelo de Stokes. De estas opciones, la (2) cubre un rango mayor de profundidades de agua y alturas de ola que las otras.

· *Ángulo con la dirección principal de propagación.*

En el modelo OLUCA, y debido al uso de la aproximación parabólica, la dirección del oleaje debe estar confinada en un sector de $\pm$ 60° con la dirección principal de propagación.

1.1.3 Modelización de la Disipación de Energía

· *Forma general*

La disipación de energía se introduce en el modelo de diferentes maneras, que dependen de la situación que se modeliza. El tratamiento de las pérdidas por fricción por fondos rugosos, porosos o viscosos, películas de superficie y rotura, se realiza mediante un término de pérdida de energía dado por Booij (1981) y desarrollado por Dalrymple et al. (1984). La forma lineal de la ecuación de la pendiente suave con disipación es:

$$dA/dx = ((i/2k)\ (d^2A/dy^2)) + wA \qquad (5)$$

donde el factor de disipación, w, viene dado por un número de formas diferentes que dependen de la naturaleza de la disipación de energía. El factor w representa la disipación de energía dividida por la energía y sus unidades son de tiempo^{-1}.

· *Capa límite de fondo turbulenta.*

En el campo, las condiciones de oleaje son tales que la capa límite de fondo es siempre turbulenta. En este caso, la disipación de energía se puede obtener utilizando el factor de fricción de Darcy-Weisbach, f. Se puede demostrar, ver Dean and Dalrymple (1984), que la disipación de energía por capa límite de fondo turbulenta viene dada por la expresión:

$$w = \frac{2\sigma k f\,|A|\,(1 - i)}{3\pi \sin h\,(2kh) \sin h\,(kh)}$$

Para implementar en el modelo este término de amortiguación, se utiliza el valor de $f = 0.01$.

· *Rotura del oleaje.*

Para la rotura del oleaje, el modelo es más complicado. Dally et al. (1984) demostraron que la razón de pérdida de flujo de energía del oleaje dependía del exceso de flujo de energía sobre un valor determinado. Este modelo ha sido probado en laboratorio para un determinado número de diferentes valores de la pendiente del fondo y predice muy bien la altura de ola en la zona de rotura. Kirby and Dalrymple (1985b) demostraron que la disipación debida a la rotura del oleaje se puede expresar mediante:

$$w = (KC_g(1-(\gamma\ h/H^2))/h \qquad (7)$$

donde $K = 0.15$ y $\gamma = 0.4$ son constantes empíricas determinadas por Dally et al.. Aquí, la altura de ola viene dada por $H = 2\,|A\,|$. Utilizando este modelo de disipación y un índice de rotura ($H > 0.78h$) para determinar el inicio de la rotura, el OLUCA es capaz de determinar el oleaje tanto fuera como dentro del área de rotura. El algoritmo de rotura del oleaje siempre es activo en el modelo.

1.1.4 Modelización del Oleaje

· *Ondas monocromáticas.*

A pesar de que el OLUCA se aplica típicamente con trenes de ondas monocromáticos, no existe una restricción intrínseca a este caso. Como ejemplo, para una frecuencia dada, la dirección del oleaje viene determinada por la distribución de la altura de ola inicial impuesta por el usuario sobre la línea de mar abierto de la malla, correspondiente a $x = 0$. Como esta línea es paralela al eje y, la onda se define generalmente por:

$$A(0,y) = A_0\, e^{ily} \qquad (8)$$

donde A_0 es la amplitud dada y l es el número de onda en la dirección y. La l está relacionada con el número de onda k por la relación $l = k\ sen(q)$, donde q es el ángulo que forma la onda con el eje x.

· *Ondas direccionales discretas.*

Para el caso de varias ondas con diferentes direcciones y con una sola frecuencia dada, se puede utilizar la siguiente expresión para la condición inicial:

$$A(0,y) = \sum_{n=1}^{NWAVS} A_n e^{(i l_n y)}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

El modelo OLUCA está equipado para calcular el campo de oleaje producido por esta condición de contorno para un gran número de A_{ns} y q_{ns} (hasta 50).

· *Espectro direccional.*

Frecuentemente, se utiliza una dispersión direccional para una determinada componente del tipo a $cos^{2n}((q-q_0)/2)$, Mitsuyasu et al. (1975). El ángulo q_0 es la dirección principal de propagación de las ondas.

1.2. Método de Resolución

1.2.1 Técnica de Crank-Nicolson

El modelo parabólico se resuelve adecuadamente mediante la técnica de diferencias finitas. Para lograrlo, la batimetría del área de estudio debe ser introducida en los nodos de una malla (x,y) rectangular, de lados D_x, D_y. Las coordenadas de un nodo se definen mediante los índices i, j de manera que $x = (i-1)D_x$ e $y = (j-1)D_y$. Los valores de la amplitud compleja $A(i,j)$ se determinan de manera que satisfagan la ecuación parabólica para todo i entre 1 y M y para todo j entre 1 y N. El procedimiento incluye el expresar todas las derivadas en las direcciones (x,y) en términos de la amplitud compleja en varios puntos de la malla.

Debido a la no-linealidad de la ecuación de diferencias finitas, los términos no lineales se aproximan en una primera pasada utilizando los valores $A_{i,j}$. Una vez se han calculado los términos $A_{i+1,j}$, la ecuación se resuelve de nuevo para $A_{i+1,j}$, utilizando ahora los valores bien calculados de los términos no lineales. Este proceso iterativo de doble pasada asegura que las no-linealidades del modelo se tratan con exactitud (Kirby and Dalrymple (1983a)).

La solución progresa moviendo una fila de la malla en la dirección x (incrementando i en uno) y utilizando la técnica implícita-implícita de doble pasada se determina la amplitud compleja $A_{i+1,j}$ para todos los valores j de esa fila. Progresando en la dirección del oleaje, se repiten los cálculos hasta determinar los $A_{i,j}$ en todos los puntos i,j. Aunque parezca que el método de Crank-Nicolson pueda ser costoso en tiempo de ordenador, debido a que se realiza una inversión de matriz para cada fila de la malla, las matrices son 3xN y el procedimiento de inversión es, de hecho, muy rápido. El procedimiento es económico en requerimientos de memoria, dado que sólo son necesarios los valores en las filas i e $i+1$ en cada cálculo.

1.2.2 Condiciones Iniciales y de Contorno

La condición inicial es vital para el modelo parabólico. La primera fila del lado del mar, correspondiente a $i = 1$, se toma como de profundidad constante y en ella se define las ondas incidentes. Estas ondas se propagan entonces sobre la batimetría del modelo. En la sección de Oleaje se ha descrito las diferentes condiciones iniciales que se pueden implementar en el modelo.

Como en la solución de cualquier ecuación diferencial, las condiciones de contorno lateral son importantes. Existen varias maneras de tratar los contornos; sin embargo, ninguna de las condiciones de contorno existentes hasta el presente logran la transmisión total del oleaje radiado. Por lo tanto, en el modelo OLUCA se utiliza generalmente una condición lateral de contorno totalmente reflejante en cada lado $j = 1$ y $j = N$. Esto requiere que la especificación de la malla del modelo se realice con cuidado, debido a que la reflexión en los laterales de la onda incidente se puede propagar rápidamente hacia el área de interés, dando resultados erróneos. En general, la anchura del modelo debería ser tal que las reflexiones en los laterales no alcancen el área de interés.