

# Sobre las Condiciones de Optimalidad para el problema del árbol generador de mínimo coste

*Sergio Alonso, Miguel Ángel Domínguez-Ríos, Marcos Colebrook y Antonio Sedeño-Noda*

Departamento de Estadística e Investigación Operativa,  
Universidad de La Laguna

## Resumen

Presentamos en esta comunicación, una iniciativa de estudio de las condiciones de optimalidad para el problema del árbol generador de mínimo coste, que tiene como objetivo distinguir las exigencias necesarias de las suficientes. El ánimo final es poder establecer qué generalizaciones del problema mantienen las condiciones y cómo éstas se adaptan y generalizan.

**Palabras Clave:** Optimality Conditions, Spanning Tree.

**AMS:** 90B10, 05C05

## 1. Introducción

Las *condiciones de optimalidad* de un problema de optimización combinatoria, establecen las propiedades que debe satisfacer un elemento del conjunto factible para convertirse en la solución óptima. En general son la llave para la demostración de la corrección de los algoritmos que resuelven estos problemas.

Dado un grafo no dirigido y conexo de orden  $n$ ,  $G=(V,A)$ , llamaremos a todo subgrafo que conecte los nodos de  $V$  sin ciclos, (conexo y acíclico), árbol generador de  $G$ . Sobre el conjunto de aristas del grafo se define una función peso  $w$  que indica el coste de introducirla en la solución. Decimos que un árbol generador es de mínimo coste si la suma de los costes de sus  $n - 1$  aristas es la menor de entre todos los árboles generadores de  $G$ . En general puede haber más de uno, por lo que hablaremos del conjunto de ellos, que denotaremos por  $MST(G)$ .

Para el problema del  $MST$  podemos elegir entre dos condiciones de optimalidad, ambas necesarias y suficientes (véase [2]). Éstas son:

1. Condición de optimalidad del *corte*,

para cualquier arista  $e \in T$ ,  $w(e) \leq w(f)$  para  
 $T \in MST(G)$  sii  
 cualquier arista  $f \in G$  que conecte el corte  $T - \{e\}$

2. Condición de optimalidad de la *ruta*,

$$T \in MST(G) \text{ sii } \begin{array}{l} \text{para cualquier arista fuera del árbol, } (i, j) \in A - T, \\ w(e) \leq w(f) \text{ para cualquier arista } f \\ \text{del único camino de } i \text{ a } j \text{ en } T \end{array}$$

## 2. Desarrollo

Para nuestro objetivo supondremos dos generalizaciones en la definición del problema. Básicamente, se trata de trabajar con un conjunto más general que a la hora de definir los costes sobre las aristas, incluso sin suponer necesario que exista una relación de orden total definida en él. Por lo tanto, la función objetivo a minimizar no ha de ser necesariamente la suma, siendo ésta la segunda generalización. En este entorno, el problema del árbol generador mínimo lexicográfico puede ser tratado, (véase [1]).

En este trabajo redefiniremos las condiciones de optimalidad anteriormente descritas para que contemplen este nuevo escenario, y restringiremos las generalizaciones para que el conjunto  $MST(G)$  quede determinado a través de las nuevas condiciones de optimalidad.

## 3. Contactar:

salonso@ull.es

## 4. Agradecimientos

Este trabajo ha sido desarrollado parcialmente bajo la convocatoria 2003 de proyectos para grupos precompetitivos de la Universidad de La Laguna.

## 5. Bibliografía

- [1] Volgenant, A. (2002) *Solving some lexicographic multi-objective combinatorial problems*, European Journal of Operational Research Vol. 139 No. 3 Pags. 578-584.
- [2] Ahuja, R. K.; Magnanti, T. L. y Orlin J. B. (1993) *Network flows: theory, algorithms, and applications*, Prentice-Hall Inc.