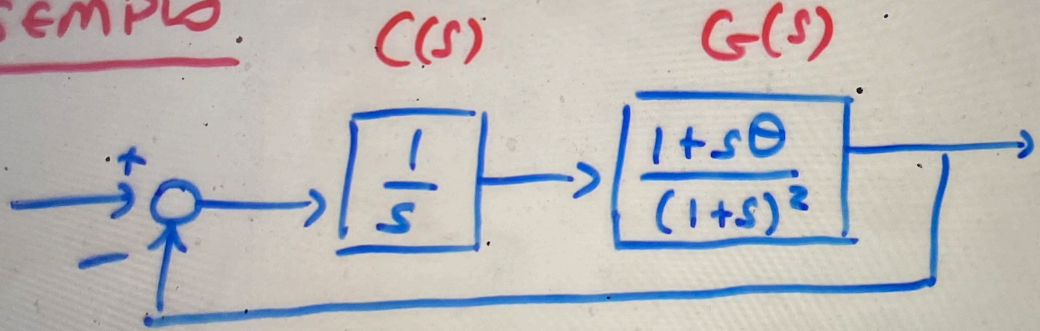
## ESEMPIO




Nell'ipotesi in cui $\Theta$ è un parametro incerto con valore nominale $\bar{\Theta} = 5$, si valuti l'effetto di tale incertezza sulla risposta in frequenza a c.a. e a c.c. del sistema in figura.

C.A.

$$E_G = ?$$

$$E_G(s,\theta,\bar\theta) = \frac{\Delta G}{G} = \left.\frac{\partial G}{\partial \theta}\right|_{\theta=\bar\theta} \Delta\theta \cdot \frac{1}{G}$$

dove :

$$G(s,\bar\theta) = \frac{1+s\bar\theta}{(1+s)^2} = \frac{1+5s}{(1+s)^2}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \theta} = \frac{s}{(1+s)^2}$$

quindi :

$$E_G(s,\theta,\bar\theta) = \frac{s}{\cancel{(1+s)^2}} \Delta\theta \frac{\cancel{(1+s)^2}}{1+s\bar\theta}$$

$$= \frac{s}{1+5s}\Delta\theta$$

$$\Rightarrow |E_G(j\omega,\theta,\bar\theta)| = \left|\frac{j\omega}{1+5j\omega}\right| |\Delta\theta|$$

Bode

A c.c.

$$E_F(j\omega,\theta,\bar{\theta}) = S(j\omega,\bar{\theta})\, E_G(j\omega,\theta,\bar{\theta}) \text{ ecc.}$$

ESERCIZIO valutare al matlab l'effetto in frequenza della variazione parametrica a c.c.

ESEMPIO

Un sistema di controllo è descritto dalle fdt

$$C(s) = k \quad ; \quad G(s) = \frac{1}{s+0.1}$$

Si valuti l'effetto sul guadagno della fdt a ciclo chiuso di variazioni percentuali del guadagno di controllo k inferiori al 10% rispetto al valore nominale $\bar{k} = 100$.

$$\left[\ \frac{\Delta k}{k} \leq 10\% \longrightarrow \frac{\Delta G_{cc}}{G_{cc}}\ ? \quad \frac{\Delta L}{L}\ ?\right.$$

CICLO APERTO

$$L(s) = \frac{k}{s+0.1} \Rightarrow \Delta L = \frac{\partial L}{\partial k} \Delta k$$

$$\frac{\partial L}{\partial k} = \frac{1}{s+0.1} \Longrightarrow \Delta L = \frac{1}{s+0.1}\Delta k$$

$$\Longrightarrow \frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{\cancel{s+0.1}}\Delta k \cdot \frac{\cancel{s+0.1}}{\bar{k}} = \frac{\Delta k}{\bar{k}} \leq 10\%$$

Quindi $E_L(s,k,\bar{k}) = \frac{\Delta L}{L}$ subirà una variazione pari a quella del parametro $k$ ovvero $\frac{\Delta k}{\bar{k}} \leq 10\% \Longrightarrow E_L \leq 10\%$.

A ciclo chiuso si ha:

$$E_F(s,k) = S(s,\bar{k})\,E_L(s,k)$$

$$= \frac{1}{1+L(s,\bar{k})}\,E_L(s,k)$$

$$\Longrightarrow E_F(s,k) = \frac{s+0.1}{s+0.1+\bar{k}}\,E_L(s,k)$$

Poiché siamo interessati alle variazioni relative del guadagno a ciclo chiuso, imponiamo $s=0$. Si ha:

$$E_F(0,k) = \frac{0.1}{0.1 + 100} \, E_L(0,k)$$

$$= \frac{1}{1 + 1000} \, E_L(0,k)$$

$\Rightarrow$ αν $E_L(0,k) = \dfrac{\Delta k}{k} \leq 10\%$ τότε:

$$E_F(0,k) \leq \frac{1}{1001} \cdot 0.1 \simeq 0.0001$$

# SINTESI NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA ($\omega$)

- Il primo passo per la sintesi di un controllore $C(j\omega)$ nel dominio delle frequenze è la TRADUZIONE DELLE SPECIFICHE in $\omega$.

- Le specifiche più comuni nel dominio della frequenza sono:

  - STABILITÀ IN CONDIZIONI NOMINALI (criterio di Nyquist o il criterio di Bode)

  - STABILITÀ IN CONDIZIONI PERTURBATE ($K_m$, $\varphi_m$, eventuale presenza di ritardi)

  - ROBUSTEZZA A DISTURBI $n(t)$ e/o $d(t)$ E ALLE VARIAZIONI PARAMETRICHE $\Delta\theta$ [proprietà delle fdt $F(s)$ e $S(s)$ o meglio di $S(j\omega)$ e $F(j\omega)$ che vanno tradotte in condizioni approx su $L(j\omega)$]

  - QUALITÀ DELLA RISPOSTA A C.C.

    → A REGIME (STATICHE) ($e_\infty$ ecc.)

    → TRANSITORIE (DINAMICHE) ($t_s$, $t_a$, $s\%$ ecc.)

- Tutte le specifiche possono essere tradotte in termini di vincoli sulla risposta frequenziale della funzione di anello $L(j\omega)$

- A questo proposito, è utile considerare alcune relazioni empiriche tra proprietà qualitative della risposta transitoria e grandezze caratterizzanti la risposta in frequenza di $L(j\omega)$. In particolare:

- $S_d\% \longrightarrow \zeta_d \approx \dfrac{\varphi_m}{100}$

- $t_s \approx \dfrac{5}{\omega_c}$

| $\zeta_d$ | $\varphi_{m_d}$ |
|---|---|
| 0.8 | 80° |
| 0.6 | 60 |
| 0.4 | 40° |
| 0.2 | 20° |
| ⋮ | ⋮ |

- Quindi tutte le specifiche si possono tradurre in termini di guadagno di $L(j\omega)$, margini di fase e di ampiezza, numero di poli nell'origine e quindi pendenze iniziali e finali del diagramma di $|L(j\omega)|_{dB}$.

- Il processo di sintesi procede quindi con la fase di selezione del controllore $C(j\omega)$ che tipicamente si compone di due termini:

$$C(s) = C_1(s)\, C_2(s)$$

dove

$$C_1(s) = \frac{\mu_c}{s^g}, \quad g \geq 0 \quad (\text{STATICA})$$

e

$C_2(s)$ è una fdt che si prende cura di tutte le altre specifiche introducendo un opportuno numero di poli e zeri nelle locazioni necessarie al soddisfacimento delle specifiche.

- Tipicamente la sintesi procede per TENTATIVI (trial + error)

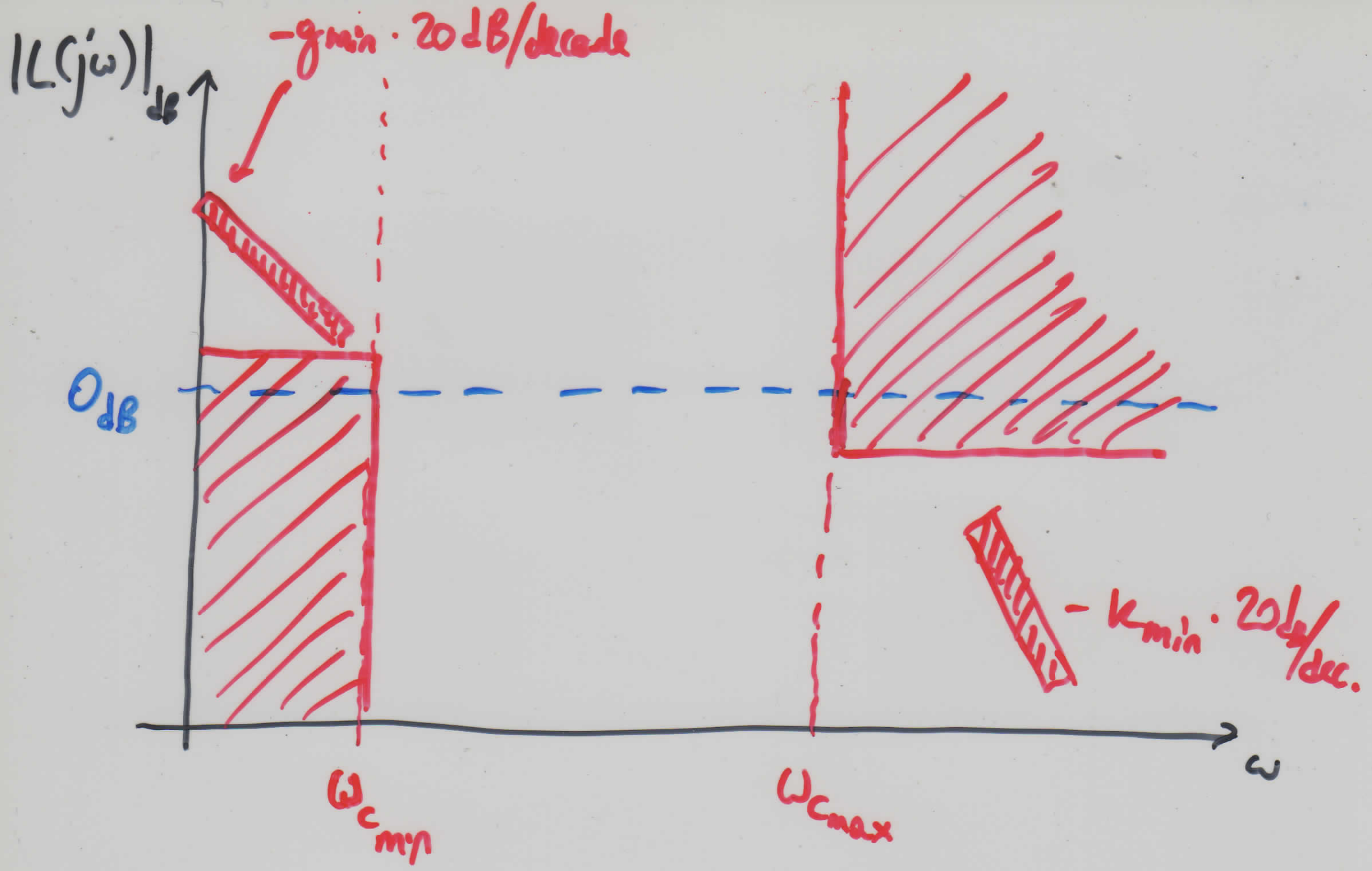
- Notiamo che le specifiche di controllo tradotte in $\omega$ definiscono una REGIONE AMMISSIBILE nei diagrammi di Bode della $L(j\omega)$ [TRADUZIONE GRAFICA DELLE SPECIFICHE]. In particolare:

i) $\omega_{c_{min}}$ : legata alla qualità della risposta e alle specifiche sull'attenuazione del disturbo $d(t)$.

ii) $\omega_{c_{max}}$ : legata all'attenuazione del disturbo $n(t)$

iii) $g_{min}$ : legata al numero di poli nell'origine necessari per soddisfare le specifiche a regime in termini di precisione statica ($e_\infty$)

iv) $k_{min}$ : pendenza minima ad alta frequenza legata alla fisica realizzabilità (ovvero all'eccesso poli-zeri)




## ESEMPIO

Dato il sistema $G(s) = \dfrac{1}{s^2+2s+2}$ si progetti un controllore tale da garantire:

- $e_\infty = 0$ quando $r(t) = A \cdot 1(t)$
- la risposta $y(t)$ presenti: $t_s \le 10s$ e $s\% \le 3\%$
- un disturbo di uscita $d(t)$ concentrato nella banda $\omega = [0, 0.1]$ risulti attenuato di almeno 20dB
- un disturbo di ingresso $n(t)$ concentrato nella banda $\omega = [10, 100]$ risulti attenuato di almeno 20dB.

## (A) TRADUZIONE DELLE SPECIFICHE

1) $e_\infty = 0$ per $R(s) = \frac{A}{s}$ $\Rightarrow$ $g_{min} = 1$
ovvero che $|L(j\omega)|_{dB}$ ha una pendenza minima di $-20$ dB/decade.

2) $S\% \leq 3\%$ $\Rightarrow$ $\zeta \geq 0.75$ $\Rightarrow$ $\varphi_m \geq 75°$

$t_s \leq 10\,s$ $\Rightarrow$ $\omega_c = \frac{5}{t_s}$ $\Rightarrow$ $\omega_c \geq \frac{1}{2}$

3) $d(j\omega)$, $\omega \in [0, 0.1]$ (bassa frequenza)

$\Rightarrow$ $|S(j\omega)|_{dB} \leq -20$ dB per $\omega \in [0, 0.1]$

$\Rightarrow$ $|L(j\omega)|_{dB} \geq 20$ dB per $\omega \in [0, 0.1]$

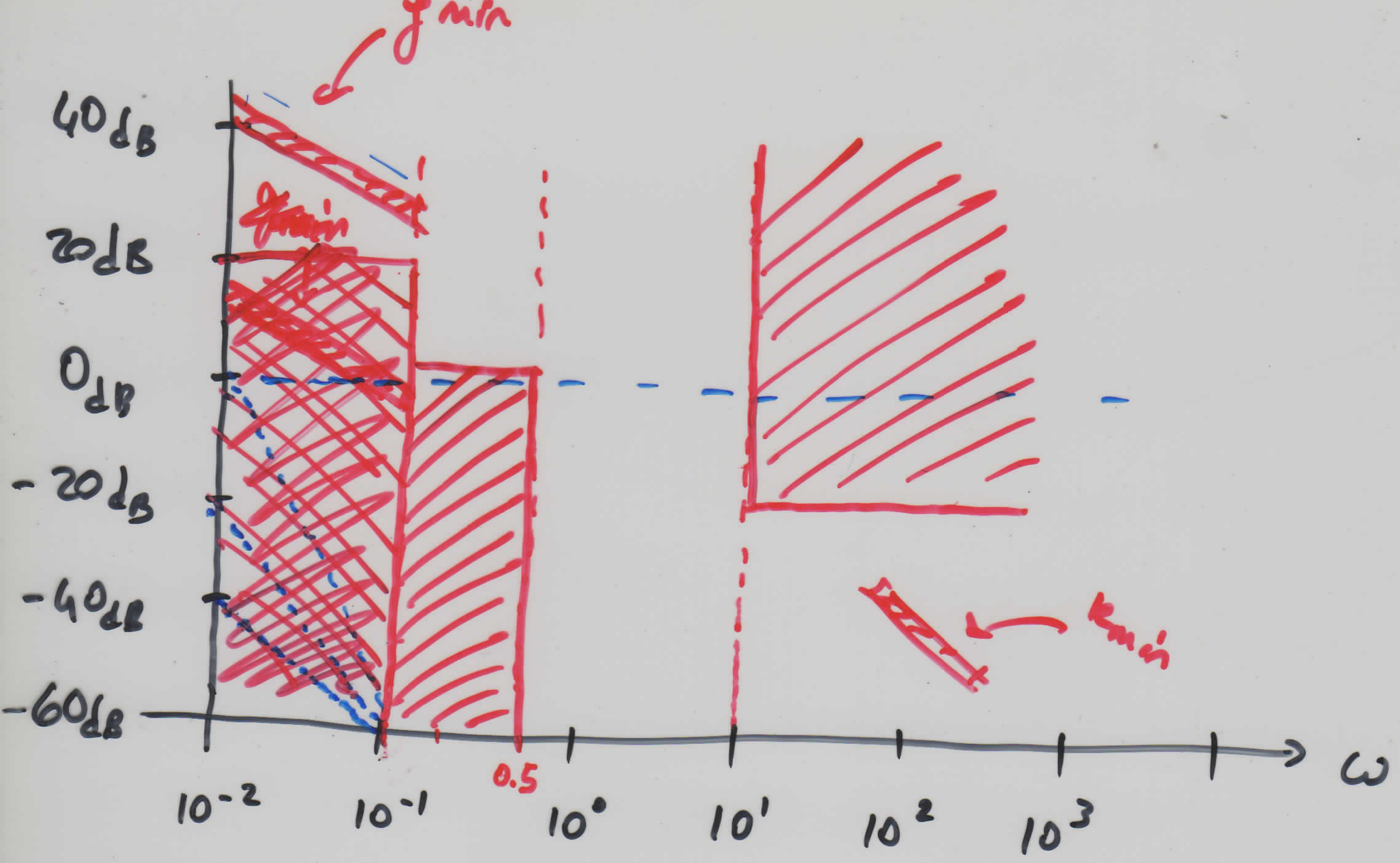
$\Rightarrow$ $\omega_c \geq 0.1$

4) $n(j\omega)$, $\omega \in [10, 100]$ (alta frequenza)

$\Rightarrow$ $|F(j\omega)|_{dB} \leq -20$ dB per $\omega \in [10, 100]$

$\Rightarrow$ $|L(j\omega)|_{dB} \leq -20$ dB per $\omega \in [10, 100]$

$\Rightarrow$ $\omega_c \leq 10$




<u>Esercizio</u>: provare a progettare il controllore e verificare le risposte date al MATLAB.

## <u>ESEMPIO</u> (SINTESI)

Si progetti un controllore per il sistema:

$$G(s) = \frac{10}{(1+10s)(1+5s)(1+s)}$$

tale da garantire:

STATICA 1) $e_\infty \leq 10\%$ per $r(t) = 1(t)$ e $d(t) = 5 \cdot 1(t)$

DINAM. E ROBUST.
2) $\omega_c \geq 0.2$
3) $\varphi_m \geq 60°$. ($\Rightarrow \zeta \geq 0.6$)

Per soddisfare la prima specifica abbiamo due opzioni:

A) ~~aggiungere un polo nell'origine ($g_{min} = 1$)~~

B) selezionare $C(s)$ in modo che la $L(s)$ abbia un guadagno in grado di soddisfare le specifiche.

Si ha:

$$e_\infty = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} s\, S(s) \left[ R(s) + D(s) \right] \leq 0.1$$

dove $R(s) = \frac{1}{s}$ e $D(s) = \frac{5}{s}$

$$\Rightarrow \quad e_\infty = \lim_{s \to 0} s \frac{1}{1 + C(s)G(s)} \left( \frac{1}{s} + \frac{5}{s} \right)$$

$$= \frac{6}{1 + C(0)G(0)}$$

Poiché $C(0) = \mu_c$ e $G(0) = 10$ si ha:

$$e_\infty = \frac{6}{1 + \mu_c \cdot 10} \leq 0.1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu_c \geq 5.9}$$

Per esempio scegliamo $\mu_c = 8$

## SINTESI

## TENTATIVO n. 1

$$C(s) = \mu_c = 8$$

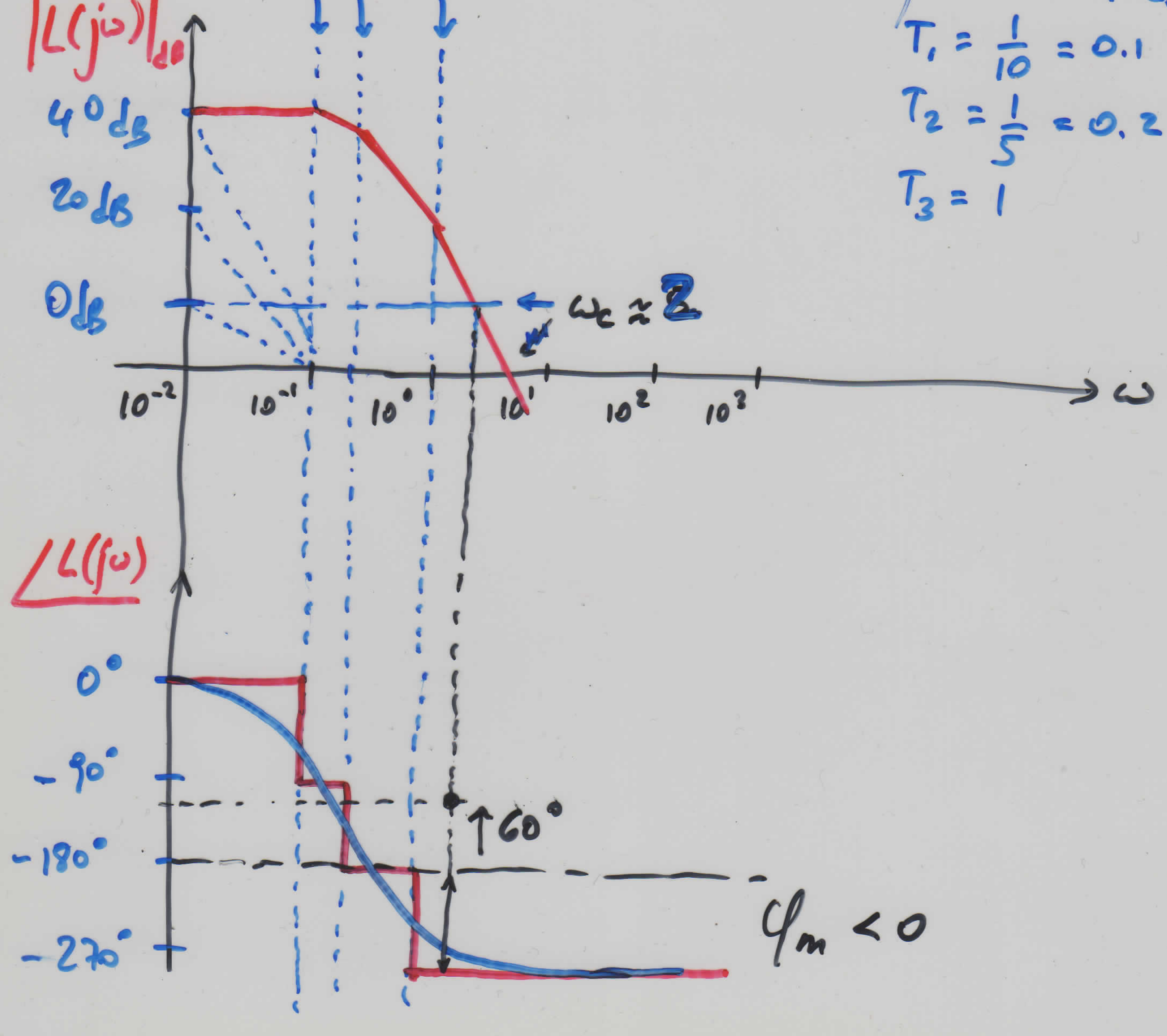
$$\Longrightarrow \quad L(j\omega) = \frac{80}{(1+j\omega 10)(1+j\omega 5)(1+j\omega)}$$

$\mu = 80 \approx 40_{dB}$

$T_1 = \frac{1}{10} = 0.1$

$T_2 = \frac{1}{5} = 0.2$

$T_3 = 1$



## ESEMPIO (SINTESI)

Si progetti un controllore per il sistema

$$G(s) = \frac{10}{(1+10s)(1+5s)(1+s)}$$

tale da garantire:

1) $e_\infty \leq 0.1$ per $r(t) = 1(t)$
e $|d(t)| = 5 \cdot 1(t)$

2) $\omega_c \geq 0.2$ rad/s

3) $\varphi_m \geq 60°$

---

Si ha

$$e_\infty = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot S(s)\left[R(s) + D(s)\right] =$$

$$= \lim_{s \to 0} \cancel{s}\, S(s)\left[\frac{1}{\cancel{s}} + \frac{5}{\cancel{s}}\right] = 6\, S(0) =$$

$$= 6 \cdot \frac{1}{1 + C(0)G(0)} = \frac{6}{1 + 10\mu_c}$$

TENTATIVO 1

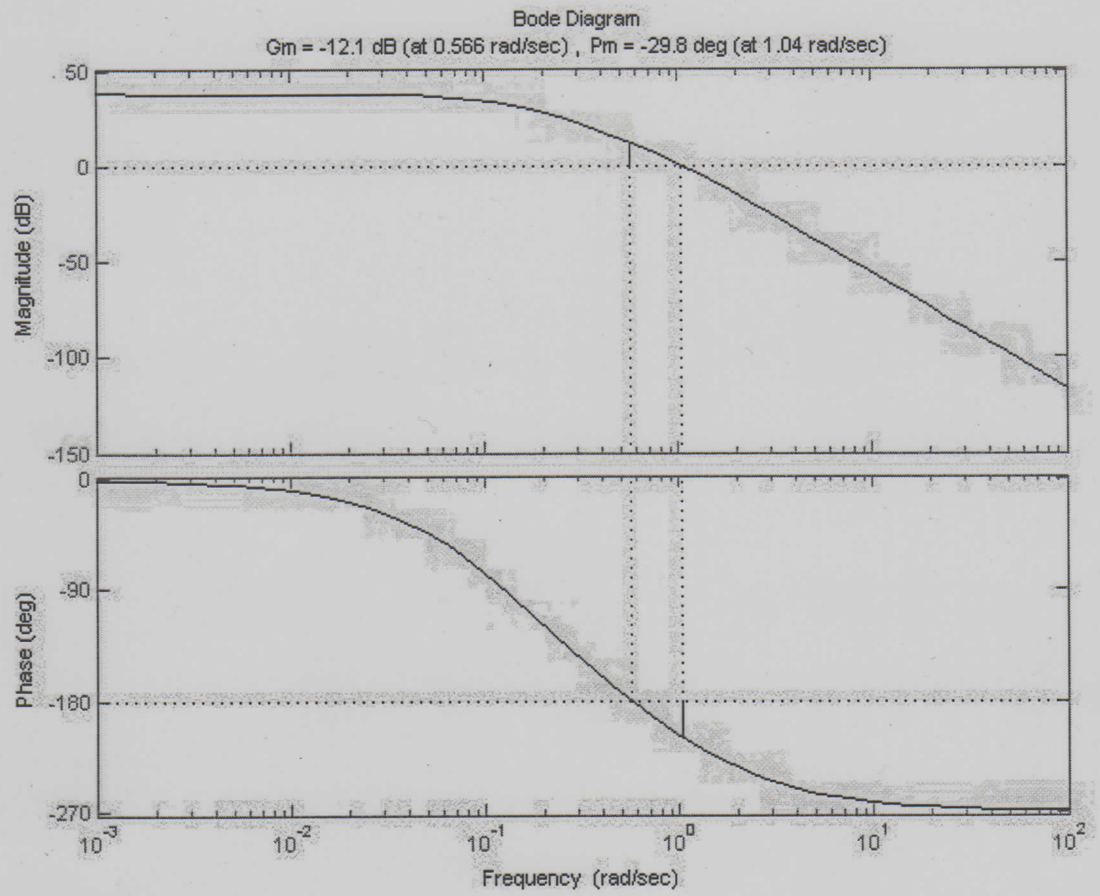
$C(s) = \mu_c$

$$\frac{6}{1+10\mu_c} \leq 0.1 \Rightarrow \boxed{\mu_c \geq 5.9}$$

Per esempio $\mu_c = 8$

2

$$L_1(s) = \frac{80}{(1+10s)(1+5s)(1+s)}$$



(3)

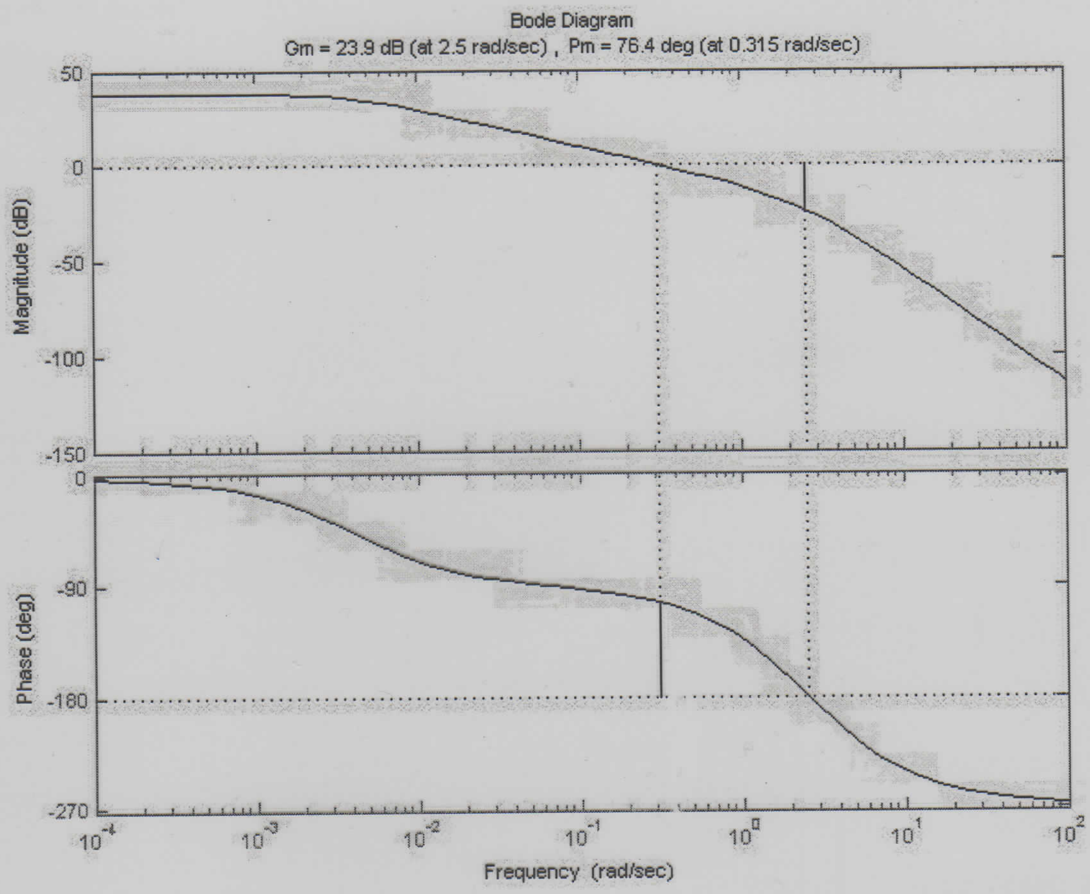
# TENTATIVO 2

PROVIAMO A CANCELLARE I POLI DEL SISTEMA SOSTITUENDOLI CON ALTRI IN GRADO DI SODDISFARE LE SPECIFICHE RICHIESTE:

$$C(s) = 8 \cdot \frac{(1+10s)(1+5s)(1+s)}{(1+250s)(1+0.4s)^2}$$

0.04 rad/s    2.5 rad/s

$$L_2(s) = \frac{80}{(1+250s)(1+0.4s)^2}$$



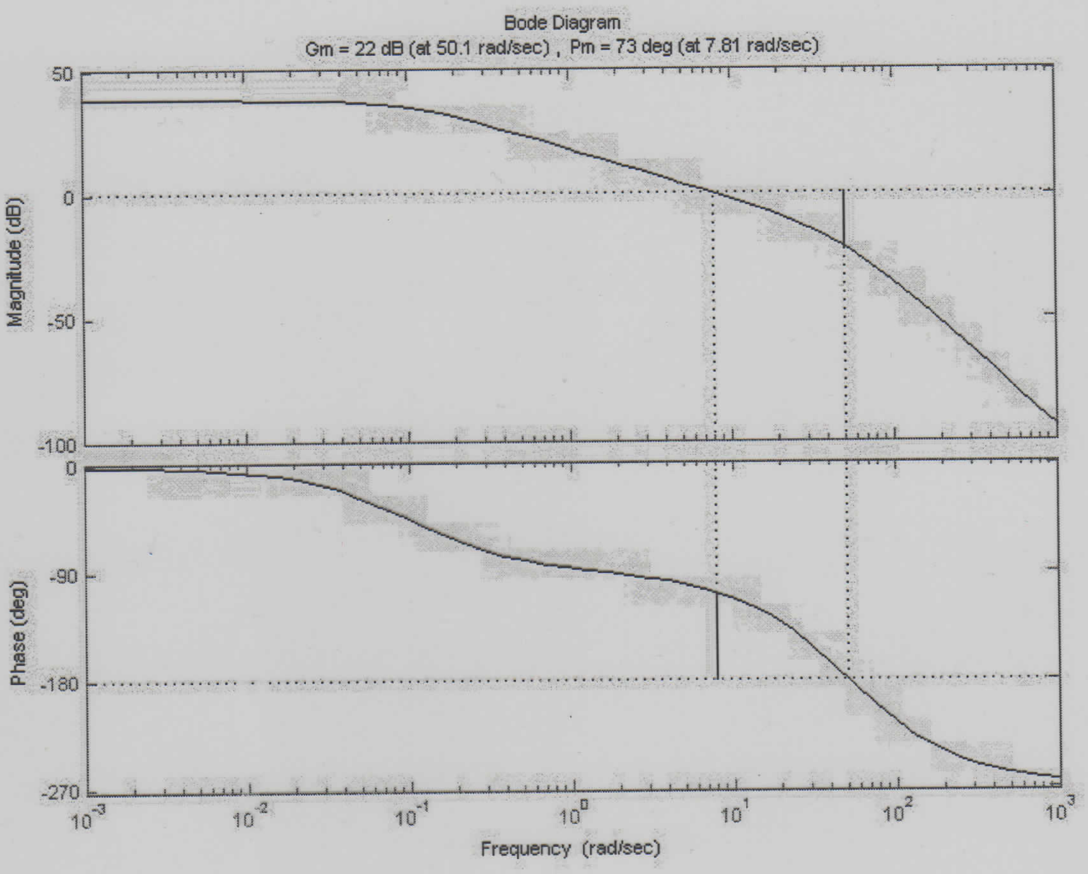
5

## TENTATIVO 3

Per evitare la cancellazione di tutti i poli del sistema e risparmiare così energia evitando possibili oscillazioni, scegliamo come alternativa:

$$C(s) = 8 \cdot \frac{(1+s)(1+5s)}{(1+0{,}02s)^2}$$

$$L_3(s) = \frac{80}{(1+10s)(1+0.02s)^2}$$



IN GENERALE $C(s)$ DEVE AGIRE OPPORTUNAMENTE SU $|L(j\omega)|$ E $\angle L(j\omega)$ IN MODO DA SODDISFARE LE SPECIFICHE.

QUESTO PUÒ ESSERE FATTO ATTRAVERSO TRE STRATEGIE FONDAMENTALI:

1) VARIARE IL GUADAGNO ED EVENTUALE AGGIUNTA DI POLI NELL'ORIGINE (SE NECESSARIO)

2) CANCELLARE POLI A PARTE REALE NEGATIVA E AGGIUNGERNE NUOVI (AD ALTA FREQUENZA, O ANCHE IN BASSA PER GARANTIRE CHE $L(s)$ ~~ORA~~ SOMIGLI AD UN FILTRO PASSA BASSO)

3) UTILIZZARE UNA O PIÙ RETI CORRETTRICI OVVERO STRUTTURE FONDAMENTALI DI $C(s)$

→ RETE ANTICIPATRICE

→ RETE RITARDATRICE

→ RETE A SELLA

→ COMPOSIZIONE DI PIÙ RETI ELEMENTARI

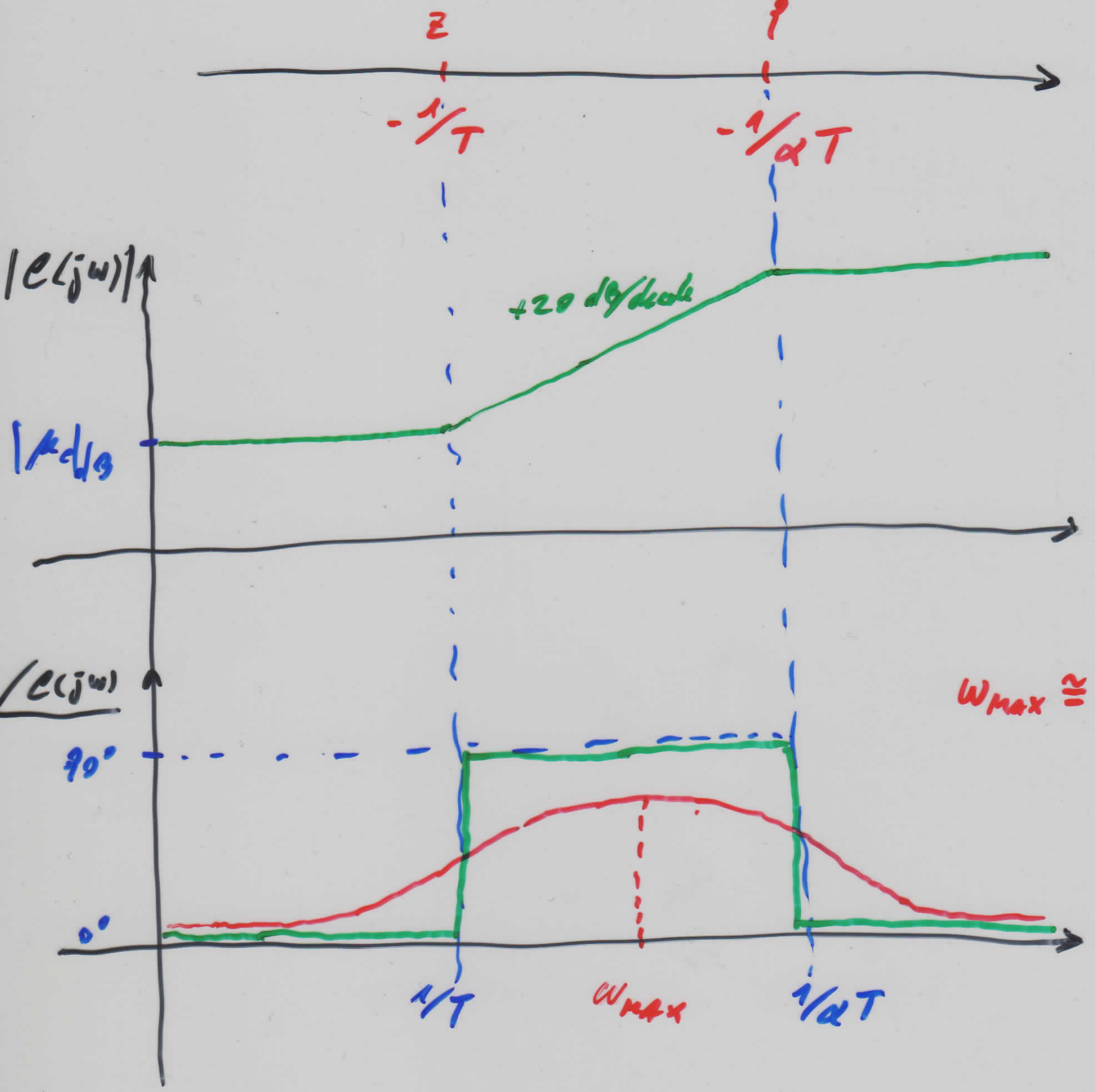
# RETE ANTICIPATRICE (LEAD)

$$C(s) = \mu_c \frac{1+Ts}{1+\alpha Ts}$$

CON $\boxed{0<\alpha<1}$, $T>0$, QUINDI

HA UN POLO IN $p = -\frac{1}{\alpha T}$

E UNO ZERO IN $z = -\frac{1}{T}$



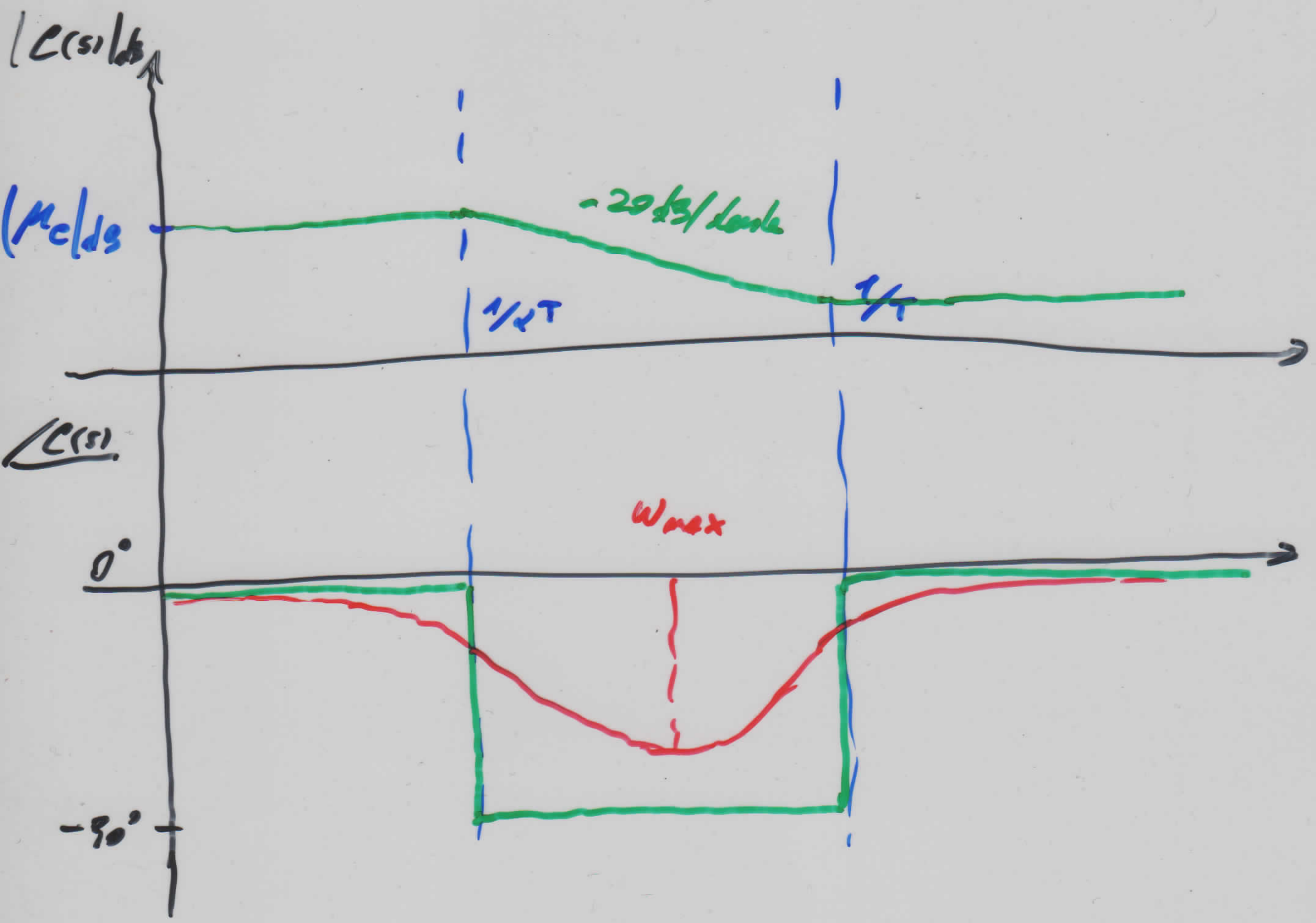

$$\omega_{max} \cong \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$$

# RETE RITARDATRICE (LAG)

$$C(s) = \mu_c \frac{1+sT}{1+\alpha T s}$$

$T > 0$

$\boxed{\alpha > 1}$

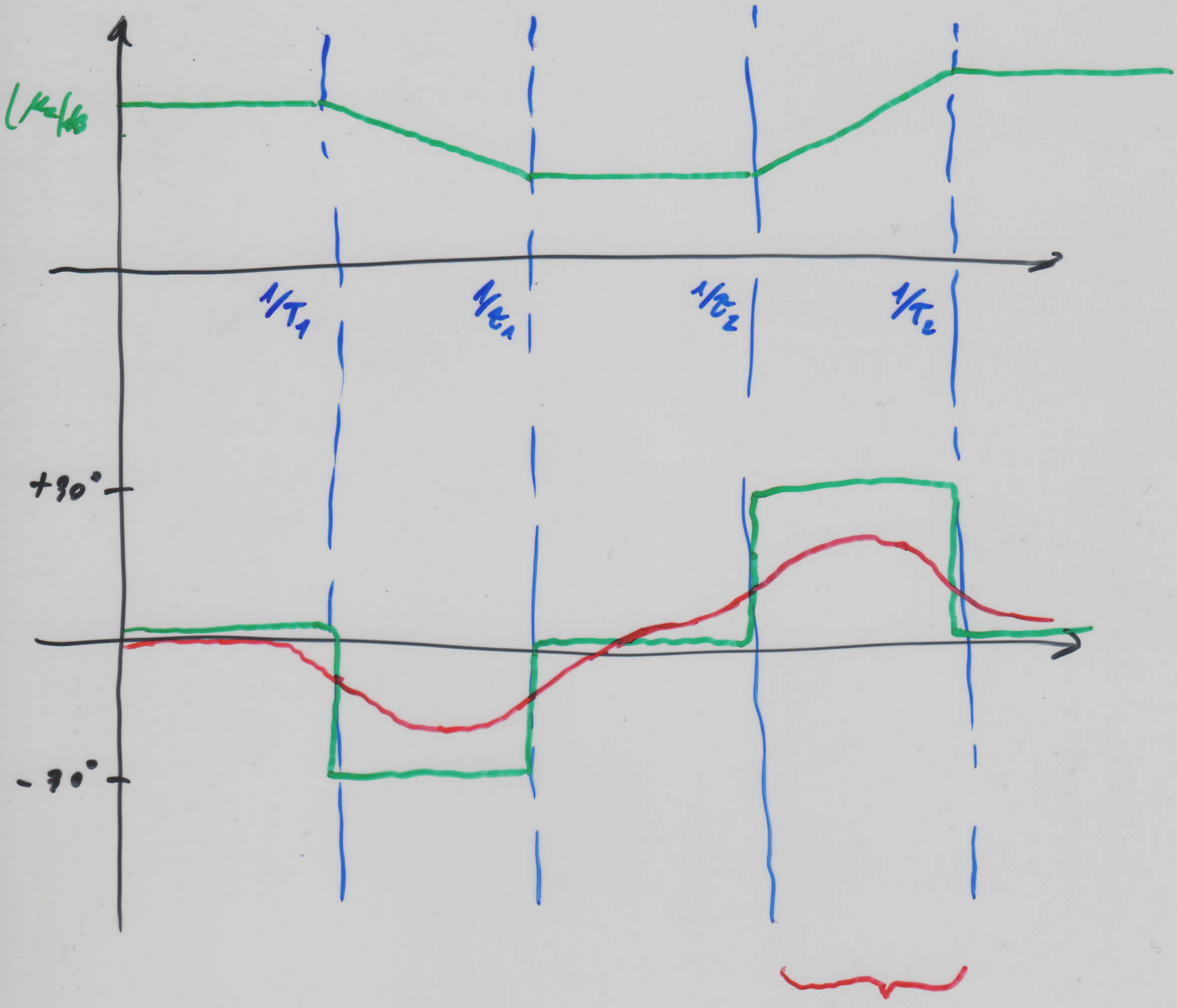



SI USA PRINCIPALMENTE PER SODDISFARE SPECIFICHE A BASSA FREQUENZA

# RETE LEAD-LAG (SELLA)

$$C(s) = \mu_c \frac{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$$

CASCATA DI UNA RETE LAG E DI UNA LEAD
(O VICEVERSA)




PER SFRUTTARE L'ANTICIPO DI FASE È OPPORTUNO CHE $\omega_c$ SIA INCLUSO IN QUESTO INTERVALLO

ESEMPIO

Un motore a c.c. é descritto da

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Progettare un controllore tale da garantire:

a) $e_\infty \leq 10\%$ quando $r(t) = t \cdot 1(t)$ (RAMPA)

b) $\varphi_m \geq 45°$

a) $e_\infty = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot S(s) \cdot R(s) =$

$$= \lim_{s \to 0} s \frac{1}{1 + C(s)G(s)} \cdot \frac{1}{s^2} =$$

$$= \lim_{s \to 0} \cancel{s} \cdot \frac{\cancel{s}(s+1)}{s(s+1) + C(s)} \cdot \frac{1}{\cancel{s^2}} = \frac{1}{C(0)}$$

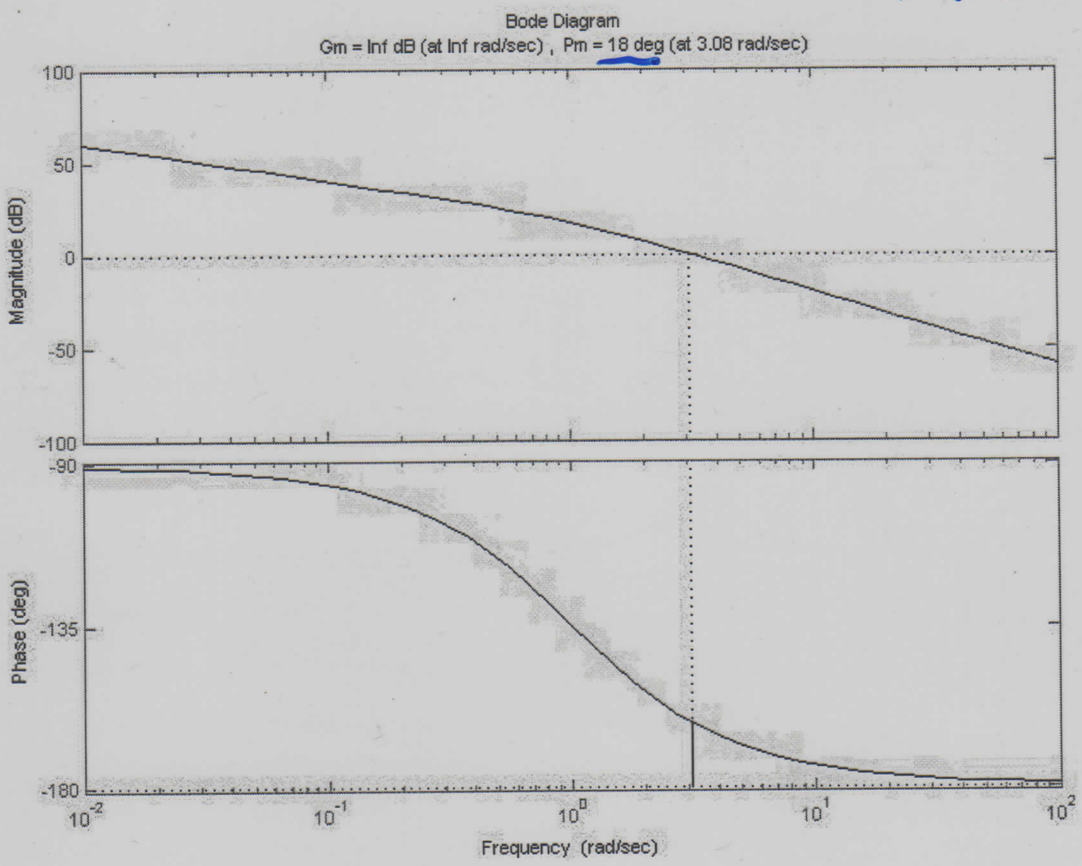
$$\Rightarrow \frac{1}{\mu_c} \leq 0.1 \Rightarrow \boxed{\mu_c \geq 10}$$

TENTATIVO 1

$$C(s) = 10$$

$$L_1(s) = \frac{10}{s(1+s)}$$

b) $\varphi_m \geq 45^\circ$



# TENTATIVO 2

$$C(s) = \mu_c \frac{1+Ts}{1+\alpha Ts}, \quad 0<\alpha<1, \quad T>0$$

per es.: $T=1 \Rightarrow z=1$

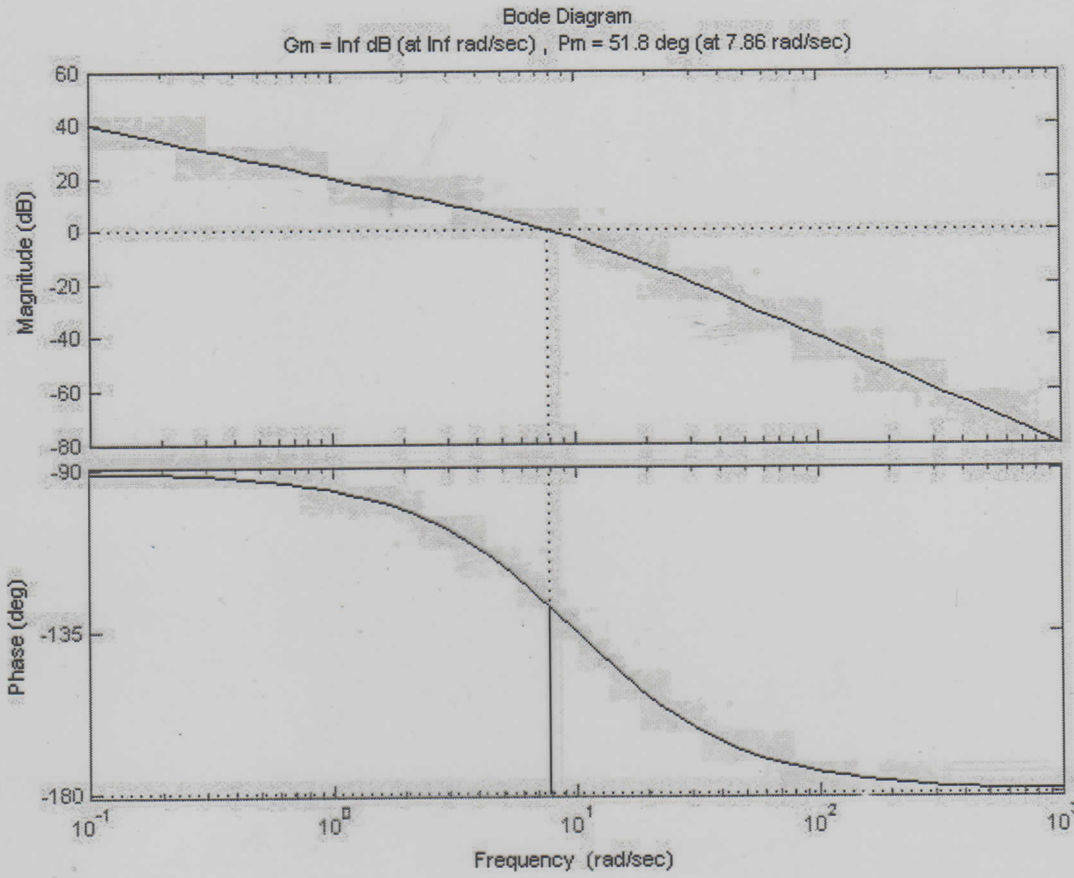
e per $\alpha=0.1 \Rightarrow p=10$

$\omega_{MAX} \cong \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} = 3.16$ rad/s

$\Rightarrow C(s) = 10 \cdot \frac{1+s}{1+0.1s}$

$$L(s) = C(s) \cdot G(s) = 10 \frac{\cancel{1+s}}{1+0.1s} \cdot \frac{1}{s\cancel{(1+s)}} =$$

$$= L_2(s) = \frac{10}{s(1+0.1s)}$$



# ESERCIZI

Da leggere [B.S.S.] cap. 10 sez. 10.1, 10.2, 10.3, 10.4
10.6.4

esercizi p. 294, N° 10.1 → 10.5

cap. 11 sez. 11.1 → 11.5

esercizi 11.1, 11.2, 11.3, 11.4

Da [A.M.] cap. 11 sez. 11.1, 11.3, 11.4, 11.6

esercizi 11.5, 11.8, 11.12

## A casa

1) Dato il sistema $G(s) = \dfrac{10}{s\left(\frac{s}{2.5}+1\right)\left(\frac{s}{6}+1\right)}$

progettare $C(s)$ in modo tale che:

- $e_\infty \leq 10\%$ con $r(t) = 3 \cdot 1(t)$
- $\varphi_m \geq 45°$

2) $G(s) = \dfrac{10}{\left(\frac{s}{0.5}+1\right)(s+1)\left(\frac{1}{2}s+1\right)}$

specifiche: $\varphi_m \geq 40°$