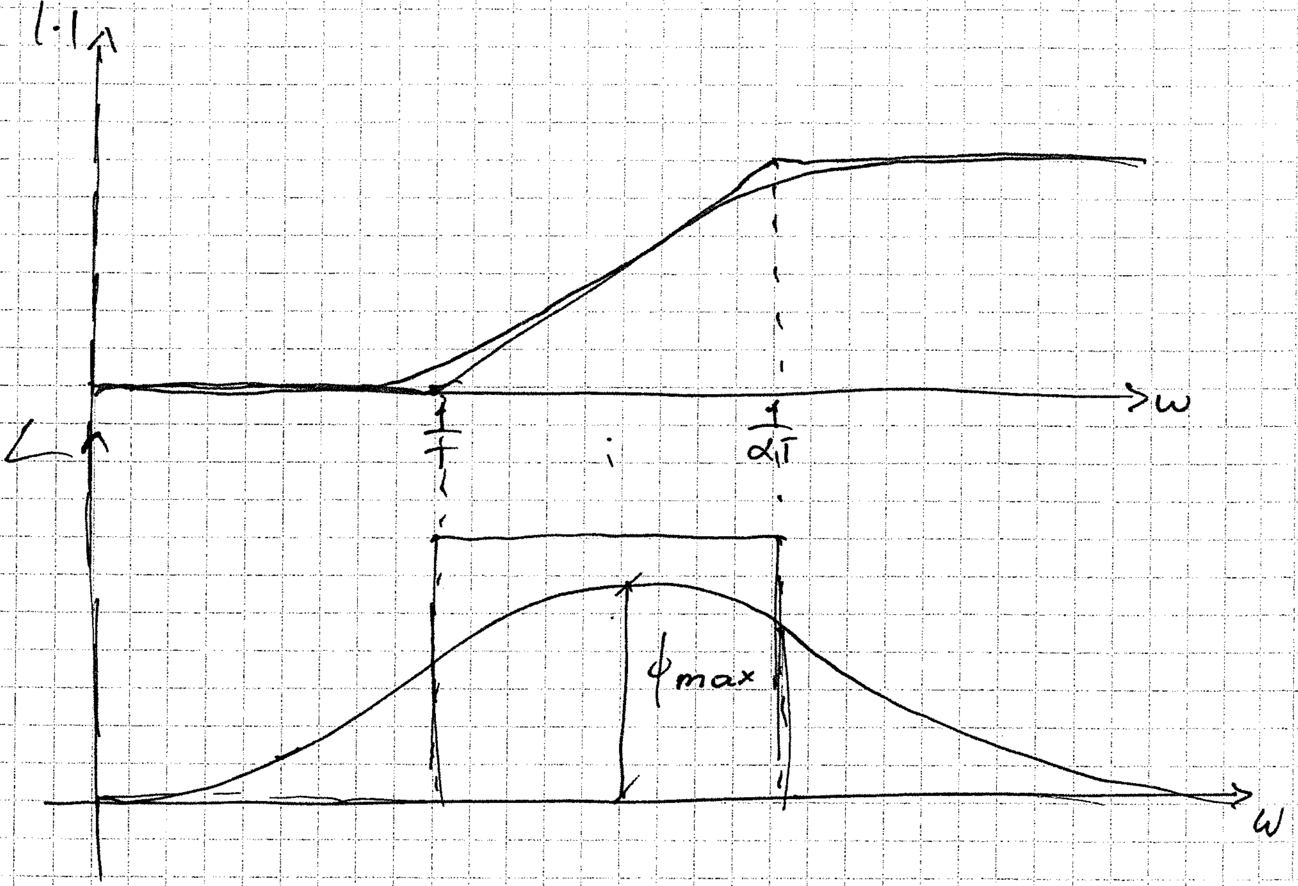
RETE ANTICIPATRICE

Funzione di trasferimento:

$$R(s) = \mu_R \frac{1+Ts}{1+\alpha Ts} \qquad 0<\alpha<1, \quad T>0, \quad \mu_R>0$$

Diagrammi di Bode



Massimo cade in corrispondenza di

$$\bar{\omega} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$$

per cui:

$$\varphi_{max} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) - \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\alpha}\right)$$

Consideriamo

$$tg(A-B) = \frac{\cancel{tagn}(A) - tg(B)}{1 + tg(A)\,tg(B)}$$

quindi:

$$tg(\phi_{max}) = \frac{\frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \sqrt{\alpha}}{1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot \sqrt{\alpha}} = \frac{1-\alpha}{2\sqrt{\alpha}}$$

Si consideri adesso:

$$tg(\phi) = \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} \longrightarrow tg^2(\phi) = \frac{\sin^2(\phi)}{\cos^2(\phi)}$$

$$tg^2(\phi) = \frac{\sin^2(\phi)}{1 - \sin^2(\phi)}$$

$$\longrightarrow tg^2(\phi) - tg^2(\phi)\sin^2(\phi) = \sin^2(\phi)$$

Risolvere rispetto al seno:

$$\sin^2(\phi)\left(1 + tg^2(\phi)\right) = tg^2(\phi)$$

$$\longrightarrow \sin^2(\phi) = \frac{tg^2(\phi)}{1 + tg^2(\phi)}$$

Da cui:

$$\sin(\phi) = \sqrt{\frac{tg^2(\phi)}{1 + tg^2(\phi)}}$$

Ponendo $\frac{d\sin(\phi)}{d\omega} > 0 \longrightarrow \omega_{max} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$

Per ω_{max}: $\quad tg(\phi_{max}) = \frac{1-\alpha}{2\sqrt{\alpha}}$

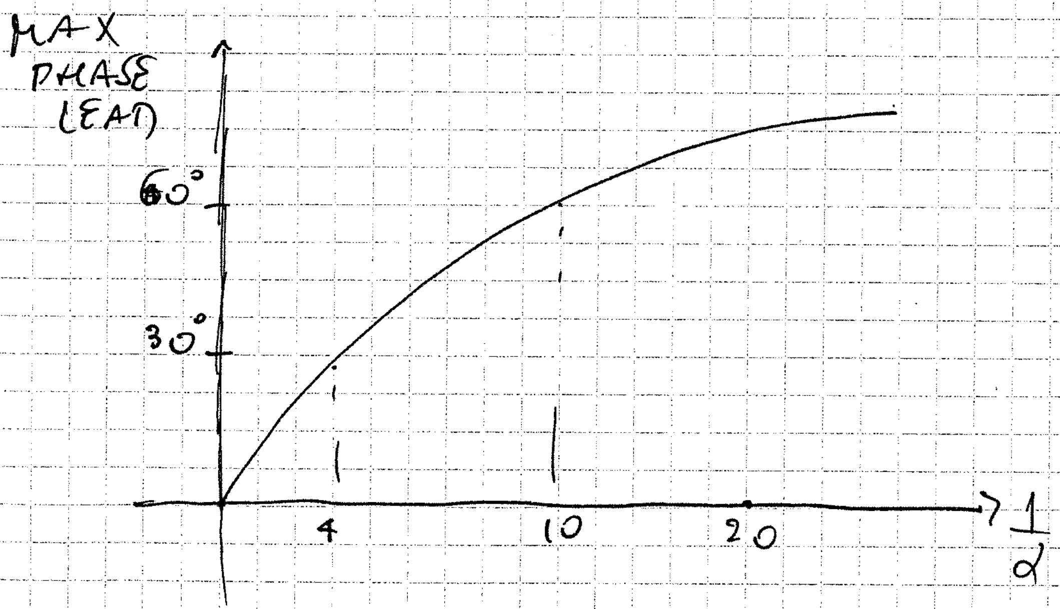
$$\longrightarrow \sin^2(\phi) = \frac{\frac{(1-\alpha)^2}{4\alpha}}{1+\frac{(1-\alpha)^2}{4\alpha}} = \frac{(1-\alpha)^2}{4\alpha+1+\alpha^2-2\alpha}$$

$$= \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha^2+2\alpha+1} = \frac{(1-\alpha)^2}{(1+\alpha)^2}$$

$$\longrightarrow \sin(\phi) = \frac{(1-\alpha)}{1+\alpha}$$

Che porta:

$$\alpha = \frac{1-\sin(\phi_{max})}{1+\sin(\phi_{max})} \qquad (1)$$



PROCEDIMENTO

1) Definire guadagno a ciclo aperto k per le specifiche statiche.

2) Valutare φ_m con k al passo precedente del sistema non compensato

3) Aggiungere un ulteriore margine ($\simeq 10°$) e determinare l'anticipo di fase φ_{max} richiesto

4) Determinare α dalla (1) o dal grafico

5) Definire ω_{max} alla pulsazione ω_c richiesta quindi lo zero sarà posto:

$$\frac{1}{T} = \sqrt{\alpha}\, \omega_{max}$$

e il polo:

$$\frac{1}{\alpha T} = \sqrt{\alpha}\, \omega_{max}$$

6) Tracciare il diagramma di Bode per il sistema compensato e valutare φ_m.

7) Iterare il procedimento modificando i parametri di rete: polo, zero, guadagno

ESERCIZIO 1:

Considerare:

$$G(s) = \frac{50}{s(s/5+1)}$$

1) $e_\infty \leq 0.1$ per $r(t) = t$

2) $S\% < 20\%$

3) $\omega_c \geq \omega_{ol}$ (ω_{ol} pulsazione di att. in open-loop)

MATLAB:

$\omega_{ol} \simeq 15.4$ rad/s

Controllore posto come:

$$C(s) = C_1(s)\, C_2(s)$$

quindi progettiamo $C_1(s)$ considerando $C_2(s)=1$. $C_1(s)$ quindi per le prestazioni statiche:

Valutiamo: $S(s)$ tra $e(t)$ e $r(t)$

$$e_\infty = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{1}{1+KG(s)} \cdot \frac{1}{s^2}$$

Consideriamo $C_1(s)=K$ perché un polo è già posto nell'origine del processo:

$$S(s) = \frac{1}{1+\frac{k50}{s(s/5+1)}} = \frac{s(s/5+1)}{s(s/5+1)+50k}$$

$$e_\infty = \lim_{s\to 0} \frac{s^2(s/5+1)}{s(s/5+1)+50k} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{50k} \leq 0.1$$

$$\longrightarrow k \geq \frac{1}{5} = 0.2$$

Poniamo $\boxed{k=1}$

Specifiche sulla sovraelongazione:

$S\% < 20\% \longrightarrow \xi > 0.5$ quindi

$$\xi \simeq \frac{\varphi_m}{100} > 0.5 \longrightarrow \boxed{\varphi_m \geq 50^\circ}$$

Poniamo:

$$\alpha = \frac{1-\sin(50)}{1+\sin(50)} \simeq 0.1325$$

mentre:

$$\omega_{max} \simeq \omega_c = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} = 15$$ quindi pongo pari al valore ω_c.

$$\longrightarrow \frac{1}{T} = \sqrt{\alpha}\cdot 15 \simeq 5.46$$

per cui $T \simeq 0.18 \longrightarrow \frac{1}{\alpha T} \simeq 41$

poniamo: $$\boxed{C_2(s) = 0.4 \cdot \frac{1+\frac{s}{5.46}}{1+\frac{s}{41}}}$$

$$C(s) = C_1(s)G(s) = 1 \cdot 0.4 \frac{1+\frac{s}{5.46}}{1+\frac{s}{41.}}$$

Verificare in Matlab/Simulink.

ESERCIZIO 2:

Considerare:

$$G(s) = \frac{10}{(1+0.1s)(1+0.01s)}$$

1) $e_\infty = 0$ per $r(t) = 1(t)$
2) $e_\infty < 0.01$ per $r(t) = t$
3) $\varphi_m \geq 20°$
4) $\omega_c \geq 80$ rad/s

Definiamo il controllore come:

$$C(s) = C_1(s)\, C_2(s)$$

quindi considero $C_2(s) = 1$

$$C_1(s) = \frac{K}{s}$$

pertanto le specifica 1) è soddisfatta mentre per 2) devo agire sul guadagno

Si ha $G(0) = 10$

quindi:

$$e_\infty = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{1+\frac{K}{s}G(s)} \frac{1}{s^2} = \lim_{s\to 0} \frac{s^2}{s+KG(s)} \frac{1}{s^2}$$

$$\frac{1}{10k} \leq 0.01 \Rightarrow k \geq 10$$

poniamo pertanto $\boxed{k=15}$ e otteniamo:

$$\boxed{G_1(s) = \frac{15}{s}}$$

Volendo $\varphi_m \geq 20°$, poniamo $\varphi_{max} = 35°$

$$\alpha = \frac{1-\sin(35)}{1+\sin(35)} \simeq 0.27$$

quindi pongo:

$$\omega_c \simeq \omega_{max} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} = 35 \text{ , volendo } \omega_c > 30$$

$$\longrightarrow \frac{1}{T} = 35\sqrt{\alpha} \simeq 18.2 \longrightarrow T \simeq 0.05.$$

mentre:

$$\frac{1}{\alpha T} \simeq \frac{1}{0.27 \cdot 0.05} \simeq 67$$

pertanto proviamo:

$$G_2(s) = \mu_c \frac{1+\frac{s}{18.2}}{1+\frac{s}{67}}$$

Se ponessimo $\mu_c = 1 \rightarrow$ non rispetteremmo 3)
(verificare in Matlab).
Dopo delle iterazioni, troviamo $\mu_c = 0.72$.

$$G_2(s) = 0.72 \frac{1+\frac{s}{18.2}}{1+\frac{s}{67}}$$

Controllore completo:

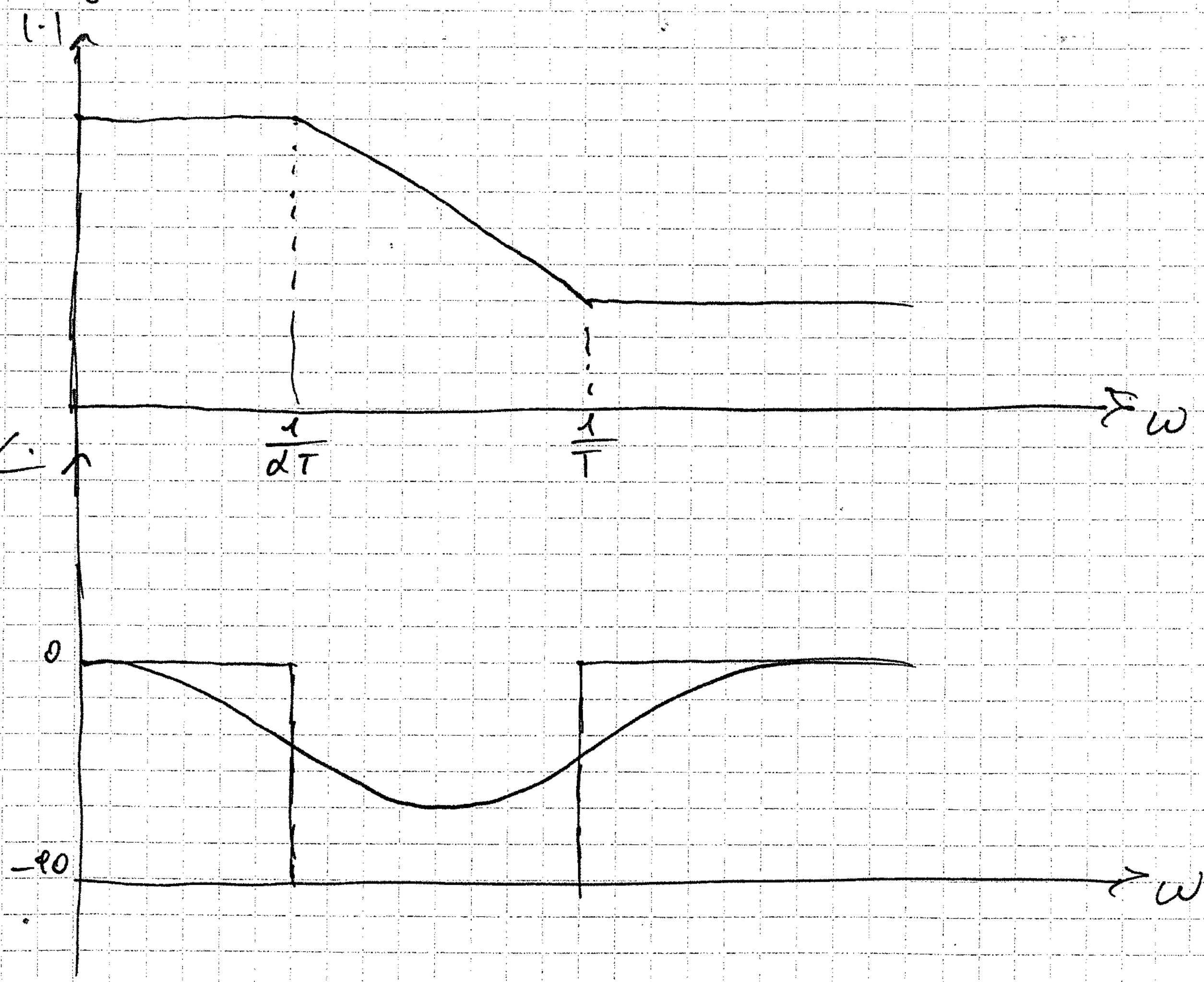
$$C(s) = C_1(s)\,C_2(s) = \frac{15}{s} \cdot 0.7 \,\frac{1+\frac{s}{18.2}}{1+\frac{s}{67}}$$

RETE RITARDATRICE

Funzione di trasferimento

$$R(s) = \mu_R \frac{1+Ts}{1+\alpha Ts} \qquad \alpha > 1,\ T>0,\ \mu_R > 0$$

Diagrammi di Bode:



Anche qui il minimo cade in $\bar{\omega} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$

Procedimento:

1) Determinare il guadagno k ad anello aperto che assicura le specifiche sul margine di fase senza compensazione.

2) Tracciare il diagramma di Bode del sistema non compensato con la pulsazione di attraversamento data al punto 1). Calcolare guadagno e fase freq

3) Definire α in modo che sia garantito il richiesto errore a regime.

4) Posizionare la pulsazione dello zero da una ottava ad una decade sotto la pulsazione ω_c nuova.

5) La pulsazione dello zero è $\omega = 1/\alpha T$

6) Iterare la procedura agendo sui parametri quali polo, zero e guadagno

Spesso si pone $\boxed{\mu_R = \alpha.}$

EJERCIZIO 3

$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{1}{0.5}s+1\right)(s+1)\left(\frac{1}{2}s+1\right)}$$

quindi

$$KG(s) = \frac{k}{\left(\frac{1}{0.5}s+1\right)(s+1)\left(\frac{1}{2}s+1\right)}$$

Vogliamo $\varphi_m \geq 40°$ e $\omega_c \simeq 1$ rad/s

Veduto i valori a ciclo aperto. Verificare in Matlab.

$\boxed{K=3.} \longrightarrow \boxed{\alpha=3}$ con $\omega_c \simeq 0.9$

Poniamo $\omega_c \simeq 0.9$ quindi ~~lo polo~~ lo zero

$$\frac{1}{T} = 0.09 \longrightarrow \boxed{T = 11.11.}$$

mentre il polo:

$$\frac{1}{\alpha T} = \frac{1}{3 \cdot 11.111} = \frac{1}{33.33.}$$

pertanto:

$$\boxed{C(s) = 9 \cdot \frac{(11.11s+1)}{(33.33s+1)}}$$

Si può risolvere anche pensando.

$\omega_c \simeq 1$ rad/sec quindi:

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega_c}{5} = 0.2 \longrightarrow \boxed{T = 5}$$

mentre $\alpha = 3 \longrightarrow \alpha T = 15$ e si pone:

$$\boxed{C(s) = 9 \cdot \frac{5s+1}{15s+1}.}$$

Verificare in Matlab.

ESERCIZIO 4:

Definiamo:

$$G(s) = \frac{50}{(s+5)(s+10)}$$

1) $\varphi_m \geq 60°$

2) $\omega_c \geq 10$ rad/s

Definiamo $kG(s)$ quindi

$$kG(s) = \frac{k\,50}{(s+5)(s+10)}$$

In Matlab si può verificare che un guadagno k in open-loop adeguato è $\boxed{k=4}$

Verificare il margine di fase di $kG(s)$ per $k=4$.

$\rightarrow \varphi_m \simeq 63°$ e $\omega_c \simeq 11.9$ rad/sec

Possiamo porre

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega_c}{10} \simeq 1.2 \Rightarrow \boxed{T \simeq 0.83.}$$

mentre:

$$\alpha T = 4 \cdot 0.83 \simeq 3.33$$

Avendo posto quindi un guadagno ~~$k = \alpha$~~. $\alpha = k = 4$.

$$C(s) = 4 \cdot \frac{0.83s+1}{3.33s+1}$$

Bisogna iterare il procedimento agendo sul guadagno perché questo regolatore fornisce un elevato margine di fase ma un basso $\omega_c \simeq 2.24$ rad/sec.

Dopo delle iterazioni, si è trovato:

$$C(s) = (4 \cdot 3.5)\,\frac{0.83s+1}{3.33s+1} = 14 \cdot \frac{0.83s+1}{3.33s+1}$$

che ha posto $\varphi_m = 62.8°$ con $\omega_c = 10.8$ rad/sec

REGOLATORI PID

Progettare un PID per il sistema ritardato:

$$G(s) = 0.1 \frac{e^{-3s}}{(1+5s)(1+20s)}$$

tale che:

1) $e_\infty = 0$ per $r(t) = 1(t)$

2) $\varphi_m \geq 60°$

3) ω_c massima possibile

Usare quindi tutte le azioni (P I D).

Cominciamo con il valutare un regolatore posto come:

$$R(s) = \mu_R \frac{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}{s}$$

quindi il polo nell'origine assicura la specifica 1). Il sistema è un PID ideale quindi improprio. Valutiamo dopo la presenza del polo in alta frequenza e la sottointendiamo:

Un metodo semplice potrebbe essere però definendo:

$T_1 = 5$; $T_2 = 20$ quindi il controllore elimina i poli del processo.

ATTENZIONE: questo si può fare perché i poli sono a parte reale negativa

$$L(s) = R(s)G(s) = 0.1\,\mu_R \frac{e^{-3s}}{s}.$$

Veduto $s = j\omega$:

$$L(j\omega) = 0.1\,\mu_R \cdot \frac{e^{-3j\omega}}{j\omega}$$

quindi MODULO E FASE:

$$|L(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}(|0.1\,\mu_R|) - 20\log_{10}(|j\omega|) +$$
$$+ 20\log_{10}(|e^{-3j\omega}|)$$

dove: $\mu_R > 0 \Rightarrow |0.1\,\mu_R| = 0.1\,\mu_R$

Inoltre $|j\omega| = \sqrt{\omega^2} = \omega$

Ritardo di tempo: si usa la formula di Eulero:

$$e^{jx} = \cos(x) + j\sin(x)$$
$$e^{-jx} = \cos(-x) + j\sin(-x) =$$
$$= \cos(x) - j\sin(x) \qquad (1)$$

Sfruttando la parità e disparità delle funzione coseno e seno, rispettivamente. Quindi:

$$|e^{-3j\omega}| = |\cos(3\omega) - j\sin(3\omega)| =$$
$$= \sqrt{\cos^2(3\omega) + \sin^2(3\omega)} = \sqrt{1} = 1$$

quindi $|e^{-j3\omega}|_{dB} = 0$. Il ritardo di tempo non da nessun contributo sul modulo.

$$|L(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}(0.1\mu_R) - 20\log_{10}(\omega) \quad (2)$$

quindi ho una retta che discende sempre.

Valutiamo la fase:

$$\underline{/L(j\omega)} = \arg(0.1\mu_R) - \arg(j\omega) + \arg(e^{-3j\omega})$$

Con $\mu_R \geq 0 \Rightarrow \arg(0.1\mu_R) = 0$.

$$= -90° + \arg(e^{-3j\omega})$$

Consideriamo ancora (1):

$$\underline{/e^{-3j\omega}} = \arctg\left(-\frac{\sin(3\omega)}{\cos(3\omega)}\right) = \arctg(-\tg(3\omega))$$

$$= -3\omega \cdot \frac{180°}{\pi} \quad \left(\text{riporto quindi in gradi}\right)$$

$$\underline{/L(j\omega)} = -90° - 3\omega \frac{180°}{\pi}$$

Consideriamo di nuovo il modulo e la relazione (2):

$$|L(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}(0.1\mu_R) - 20\log_{10}(\omega)$$

Si ho l'intersezione con l'asse orizzontale a 0 dB quando:

$$\omega = 0.1\mu_R \Rightarrow \boxed{\omega_c = 0.1\mu_R}$$

Valutiamo quindi la FASE CRITICA φ_c

$$\varphi_c = -\left(90° + 3\omega_c \frac{180°}{\pi}\right) = -\left(90° + 0.3\,\mu_R \frac{180°}{\pi}\right)$$

pertanto il margine di fase sarà:

$$\varphi_m = 180° - |\varphi_c| =$$

$$= 180° - 90° - 0.3\,\mu_R \frac{180°}{\pi} =$$

$$= 90° - 0.3\,\mu_R \frac{180°}{\pi}$$

Poniamo quindi le specifiche:

$$\varphi_m = 90 - 0.3\,\mu_R \cdot \frac{180°}{\pi} \geq 60°$$

$$\Rightarrow \mu_R \leq \frac{30° \cdot \pi}{0.3 \cdot 180°} = \frac{30\pi}{0.3 \cdot 180} \cong 1.74$$

Avendo $\omega_c = 0.1\,\mu_R$ come funzione di μ_R il massimo valore posso ottenerlo quando $\mu_R = 1.74$. Poniamo:

$$\mu_R = 1.74 \longrightarrow \boxed{\omega_c = 0.174 \text{ rad/s}}$$

MASSIMO VALORE

Il nostro controllore IDEALE, sarà:

$$R(s) = 1.74\,\frac{(1+5s)(1+20s)}{s} = \frac{174s^2 + 43.5s + 1.74}{s}$$

Il PID ideale sarà invece:

$$R_{PID}(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s = \frac{K_P s + K_I + K_D s^2}{s}$$

Applicando il principio di identità dei polinomi, si avrà:

$$K_P = 43.5$$
$$K_I = 1.74$$
$$K_D = 174.$$

Su MATLAB però andiamo ad implementare un PID reale, che si pone come:

$$R_{PID} = K_P + \frac{K_I}{s} + \frac{K_D s}{1 + \frac{K_D}{K_P N} s}$$

Con $N \to \infty$ approssima PID ideale.

MATLAB: verificare: $\boxed{\begin{aligned} \varphi_m &= 60.1^\circ \\ \omega_c &= 0.174. \end{aligned}}$

ESERCIZIO 5:

$$G(s) = \frac{10}{s(s+10)}$$

Velocità:

1) $e_\infty < 0.1$ $r(t) = t$

2) $\omega_c > 10^2$ rad/s

3) $\varphi_m > 45°$

Poniamo un controllore come:

$$C(s) = C_1(s)\, C_2(s)$$

e definiamo $C_1(s)$ per le specifiche 1) supponendo $C_2(s) = 1$

Poniamo $C_1(s) = k$

$L(s) = k \cdot G(s)$ e quindi

$$S(s) = \frac{1}{1 + \frac{k \cdot 10}{s(s+10)}} = \frac{s(s+10)}{s(s+10) + 10k}$$

pertanto:

$$e_\infty = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{s(s+10)}{s(s+10) + 10k} \cdot \frac{1}{s^2} =$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{10}{10k} \cdot 1 \leq 0.1 \Rightarrow \frac{1}{k} \leq 0.1$$

$$\Rightarrow \boxed{k \geq 10}$$

Poniamo quindi $k=10$.

VERIFICA IN MATLAB: con solo C_1 si ha un margine di fase pari a 84.3°, ma $\omega_c \simeq 1$ rad/s.

Progettiamo $C_2(s)$ con una azione anticipatrice.

$$\varphi_m = 45° \longrightarrow \varphi_{max} = 55°$$

quindi $\alpha = \dfrac{1-\sin(\varphi_{max})}{1+\sin(\varphi_{max})} \simeq 0.099$

Volendo $\omega_c \gtrsim 100$ rad/s, poniamo:

$$\omega_c \simeq \omega_{max} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} = 100 \Rightarrow \frac{1}{T} = 100\sqrt{\alpha} \simeq 31.5$$

quindi $T \simeq 0.0317$

Da qui $\dfrac{1}{\alpha T} \simeq 317.2$

La rete sarà:

$$C_2(s) = \mu_c \frac{1+\frac{s}{31.5}}{1+\frac{s}{317.2}}$$

In Matlab si vede chiaramente come bisogna aumentare il guadagno μ_c per raggiungere l'anticipo di fase intorno a $\omega_{max} \simeq 100$ rad/sec. Ponendo $\mu_c = 320$ si ha:

$$\varphi_m = 60.2° \quad e \quad \omega_c \simeq 109 \text{ rad/s}.$$

Questa amplificazione porta dei benefici anche sulle prestazioni statiche abbassando di molto l'errore a regime per riferimenti a rampa.

ESERCIZIO 7:

Definire un processo con f.d.t.

$$G(s) = \frac{10}{s(s+20)}$$

tale che:

1) $e_\infty = 0$ per $r(t) = 1(t)$
2) $e_\infty = 0$ per $r(t) = t$
3) $t_s \leq 10s$ ~~per~~
4) $S\% < 45\%$
5) poli dominanti complessi e coniugati con polo in alte frequenze posto in $p = 5a$

dove la posizione dei poli complessi e coniugati:

$$a + jb$$

è

$$a = -\xi\omega_n \quad ; \quad b = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

Definisco un controllore PID:

$$C(s) = k_P + \frac{k_I}{s} + k_D s = \frac{k_P s + k_I + k_D s^2}{s} + \text{polo in alta freq}$$

Ragioniamo sul PID ideale, poi aggiungeremo un polo al di fuori dell'intervallo di frequenze d'interesse

..

Funzione d'anello:

$$L(s) = C(s)G(s) = \frac{10k_P s + 10k_I + 10k_D s^2}{s^2(s+20)}$$

Avendo una funzione d'anello con tipo 2, polo nell'origine del processo e quello del PID, le specifiche 1) e 2) sono verificate.

Polinomio caratteristico:

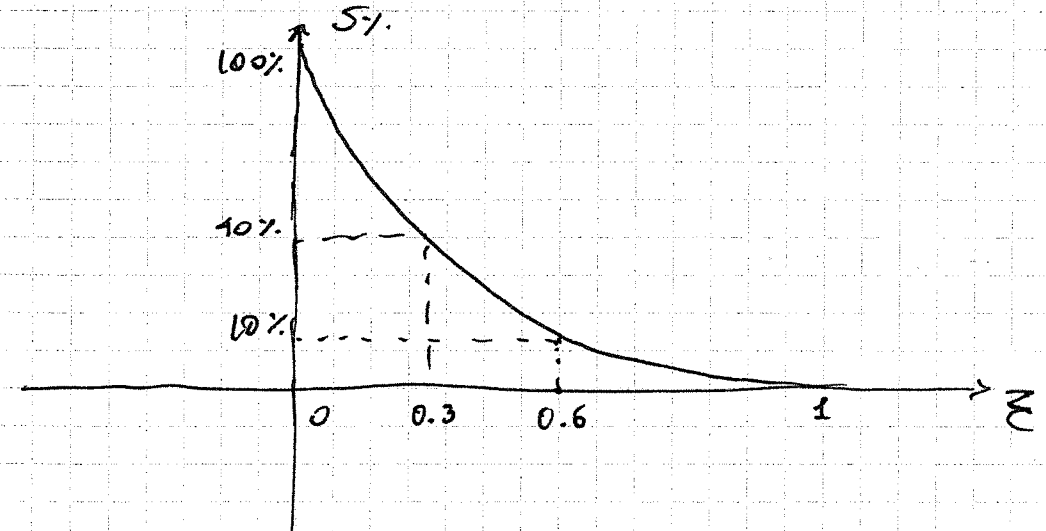
$$1 + L(s) = 0 \longrightarrow s^2(s+20) + 10k_P s + 10k_I + 10k_D s^2$$

$$= s^3 + (20 + 10k_D)s^2 + 10k_P s + 10k_I \qquad (1)$$

Definiamo un polinomio desiderato:

$$(s+p)(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)$$

La specifica 4) pone $S\% < 45\%$. Stando alla relazione $S\%$ e ξ



Poniamo: $\xi = 0.6$. La relazione posta pone:

$$\xi \approx \frac{\varphi_m}{100} = 0.60 \Rightarrow \boxed{\varphi_m \geq 60^\circ}$$

Quindi:

$\cancel{s^3 + (p + 1.2\omega_n}$

$(s+p)(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2) =$

$= (s+p)(s^2 + 1.2\,\omega_n s + \omega_n^2) =$

$= s^3 + (p + 1.2\omega_n)s^2 + (\omega_n^2 + 1.2\,p\,\omega_n)s + \omega_n^2 p \quad (2)$

Applichiamo il principio di identità dei polinomi tra (1) e (2):

$$20 + 10k_D = p + 1.2\omega_n$$
$$10K_P = \omega_n^2 + 1.2\,p\,\omega_n$$
$$\omega_n^2 p = 10k_I.$$

Che porta:

$$\begin{cases} k_D = \dfrac{p - 20 + 1.2\omega_n}{10} \\[2ex] k_I = \dfrac{\omega_n^2 p}{10} \\[2ex] k_P = \dfrac{\omega_n^2 + 1.2\,p\,\omega_n}{10} \end{cases}$$

Avendo anche le specifiche 3) avremo:

$t_s \leq 10\,s \longrightarrow 5\tau \leq 10 \longleftrightarrow \tau \leq 2$

$\longrightarrow \mathrm{Re}\{P_1, P_2, P_3\} \leq -\dfrac{1}{2}$

La parte reale:

$$a = -\xi\omega_n = -0.6\,\omega_n < -0.5$$ quindi pongo $\boxed{\omega_n = 5}$

$a = -3$, $b = 4$ quindi i poli dominanti

$$s = -3 \pm 4j$$

mentre il polo $p = 5a$ viene posto in $\boxed{p = -15}$

Pertanto:

$$\boxed{\begin{array}{l} \cdot\ k_D = 0.1 \\ \cdot\ k_I = 37.5 \\ \cdot\ k_P = 11.5 \end{array}}$$

In Matlab implementiamo un PID reale con $N = 100$.

POLI: alte frequenze

-15

$-3 \pm 4j$

Valutiamo la risposta a gradino del processo controllato. Le specifiche sono rispettate, anche se la presenza di uno zero vicino all'asse immaginario aumenta la sovraelongazione