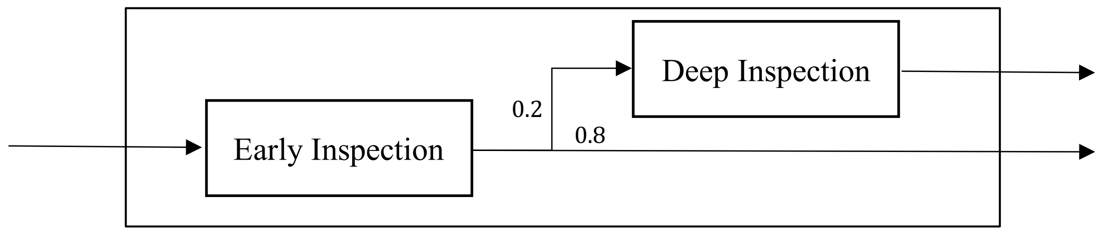
ES. 1 (Little's Law)

Si consideri un sistema di packet-inspection dove i pacchetti arrivano con un tasso di uno ogni 50 ms. Il tempo medio necessario ad ispezionare un pacchetto, incluso il tempo di attesa, è di 160 ms. Se il pacchetto è contrassegnato come sospetto viene inoltrato ad un'ulteriore sottosistema di deep-inspection, dove aspetta mediamente ulteriori 400 ms.

Nell'ipotesi che il 20% dei pacchetti siano contrassegnati come sospetti, qual'è il numero medio di pacchetti nell'intero sistema?

Soluzione:

Il sistema può essere schematizzato come in figura:



Applicando la legge di Little al primo sottosistema di inspection:
E[N1] = λ E[T1] = 160 ms / 50 ms = 3.2

Il throughput di ingresso al sistema di deep-inspection è: *0.2 λ*

Riapplicando la legge di Little al secondo sottosistema:
E[N2] = 0.2 λ E[T2] = 0.2 * 400 ms / 50 ms = 1.6

Il numero medio totale di pacchetti nell'intero sistema è:
E[N] = E[N1] + E[N2] = 3.2 + 1.6 = 4.8

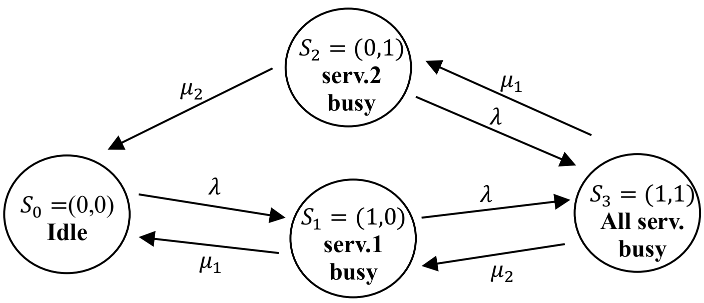
ES.2 (Modellazione e catene di Markov)

Si consideri un sistema con due serventi, in cui i job arrivano secondo un processo di Poisson con tasso $\lambda = 5/\text{min}$. Un job che arriva e trova il primo servente libero, occupa quel servente. Se il primo servente è occupato, viene occupato il secondo servente. Se entrambi i serventi sono occupati il job viene scartato. I tempi medi di servizio dei serventi sono distribuiti esponenzialmente con tassi $\mu_1 = 4/\text{min}$ e $\mu_2 = 2/\text{min}$.

a) Qual è la frazione di tempo che il server 2 è occupato?
b) Qual è il tempo medio che un job in ingresso trascorre all'interno del sistema?

Soluzione

Il sistema può essere modellato come un processo Markoviano con 4 stati.



La frazione di tempo che il server 2 è occupato è rappresentata dalla probabilità che a regime il sistema si trovi negli stati S_2 e S_3. Per calcolare tali probabilità, è necessario trovare la distribuzione stazionaria di probabilità **p** degli stati della catena a regime, risolvendo il sistema **pQ=0**, dove **Q** è la matrice dei tassi di transizione.

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \mu_1 & -(\lambda+\mu_1) & 0 & \lambda \\ \mu_2 & 0 & -(\lambda+\mu_2) & \lambda \\ 0 & \mu_2 & \mu_1 & -(\mu_1+\mu_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & -9 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & -7 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

Esplicitando le equazioni del sistema **pQ=0**, e sostituendo l'ultima equazione con la condizione di normalizzazione, il sistema diventa:

$$\begin{cases} -5p_0 + 4p_1 + 2p_2 = 0 \\ 5p_0 - 9p_1 + 2p_3 = 0 \\ -7p_2 + 4p_3 = 0 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} p_2 = \frac{5}{2}p_0 - 2p_1 \\ p_3 = -\frac{5}{2}p_0 + \frac{9}{2}p_1 \\ -\frac{35}{2}p_0 + 14p_1 - \frac{20}{2}p_0 + 18p_1 = 0 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} p_2 = \frac{5}{2}p_0 - 2p_1 \\ p_3 = -\frac{5}{2}p_0 + \frac{9}{2}p_1 \\ -\frac{55}{2}p_0 + 32p_1 = 0 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_2 = \dfrac{5}{2}p_0 - 2p_1 \\ p_3 = -\dfrac{5}{2}p_0 + \dfrac{9}{2}p_1 \\ p_1 = \dfrac{55}{64}p_0 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} p_2 = \dfrac{5}{2}p_0 - \dfrac{55}{32}p_0 = \dfrac{25}{32}p_0 \\ p_3 = -\dfrac{5}{2}p_0 + \dfrac{495}{128}p_0 = \dfrac{175}{128}p_0 \\ p_1 = \dfrac{55}{64}p_0 \\ p_0 = \dfrac{1}{1 + \frac{55}{64} + \frac{25}{32} + \frac{175}{128}} = \dfrac{1}{4} = 0.25 \end{cases} \qquad \begin{cases} p_3 = 0.34 \\ p_2 = 0.195 \\ p_1 = 0.215 \\ p_0 = 0.25 \end{cases}$$

La frazione di tempo che il server 2 è occupato è: $\boldsymbol{p_2 + p_3 = 0.34 + 0.195 = 53.5\%}$

Il **numero di job nel sistema** è 0 quando il sistema è idle, 1 quando il sistema si trova negli stati S_1 ed S_2, 2 quando il sistema è nello stato S_3. Pertanto il numero medio di job nel sistema è:

E[N] = 1 (0.215 + 0.195) + 2 (0.34) = 0.41 + 0.68 **= 1.09**

Il **throughput del sistema** è nullo quando il sistema è idle, è μ_1= 4/min quando il sistema si trova nello stato S1, μ_2= 4/min quando il sistema si trova nello stato S2, $\mu_1+\mu_2$= 6/min quando il sistema si trova nello stato S3. Pertanto il tasso di completamento (throughput) dei job accettati dal sistema è:

$\boldsymbol{\lambda_{out}} = \mu_1 p1 + \mu_2 p2 + (\mu_1 + \mu_2)p3$ = 4 (0.215)+2(0.195)+6(0.34) = **3.29/min**

Applicando la legge di Little, si ricava il tempo medio di permanenza di un job all'interno del sistema (tempo medio di risposta):

E[T] = E[N]/ $\boldsymbol{\lambda_{out}}$ = 1.09/3.29 min = 0.33 min **= 19.88 s.**

ES.3 (Modello di profitto)

Una compagnia vende i propri prodotti mediante ordini telefonici. Attualmente ha a disposizione 3 operatori con la mansione di accettare gli ordini telefonici. Le chiamate arrivano secondo un processo di Poisson con intensità di 1/min e la durata media di una chiamata è 2 min. Mediamente ogni ordine produce un ricavo di 20 €.

a) Qual'è la probabilità che una chiamata in ingresso sia bloccata a causa del fatto che tutti gli operatori sono occupati?
b) E' conveniente assumere un quarto operatore, se il costo totale per operatore è 100 €/h ?

Soluzione:
Il sistema può essere descritto da un modello a coda a capacità finita di tipo M/M/m/m.
L'intensità di traffico è **$a=\lambda/\mu = 2$**, il numero dei serventi è **m=3**.

La probabilità di blocco è data dalla probabilità che il sistema si trovi nello stato con tutti i serventi occupati. E' rappresentata dalla formula di Erlang:

$$P_{block} = E(m,a) = \frac{\frac{a^m}{m!}}{1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^m}{m!}}$$

Per il sistema con 3 operatori:
$Pb_3 = E(3, 2) = (2\text{^}3/3!)/(1 + 2/1! + 4/2! + 8/3!) = 21\ \%$.

Il throughput del sistema è:
$\lambda\,(1- Pb_3) = 1/\text{min} * (1 – 0.21) = 0.79/\text{min} = 47.4/\text{h}$
Il ricavo orario è:
47.4 /h * 20 € = 948 €/h
Il costo orario del personale è:
3 * 100 €/h = 300 €/h
Il guadagno orario totale è:
(948 – 300) €/h = 648 €/h

Aggiungendo un nuovo operatore, la probabilità di blocco diventa:
$Pb_4 = E(4,2) = (2\text{^}4/4!)\ /\ (1 + 2/1!+ 4/2! + 8/3! + 16/4!) = 9.5\ \%$

Il throughput del sistema diventa:
$\lambda\,(1- Pb_4) = 1/\text{min} * (1 – 0.095) = 0.905/\text{min} = 54.3/\text{h}$
Il ricavo orario è:
54.3/h * 20 € = 1086 €/h
Il costo orario del personale è:
4 * 100 €/h = 400 €/h
Il guadagno orario totale è:
(1086 – 400) €/h = 686 €/h

Risulta quindi conveniente assumere un quarto operatore.

ES.4 (Coda M/M/1)

In una piccola clinica c'è sempre un dottore disponibile (24 ore al giorno) ed i pazienti arrivano secondo un processo di Poisson con intensità $\boldsymbol{\lambda}$. Il tempo necessario alla visita di ogni paziente è distribuito esponenzialmente con media 30 minuti. I pazienti vengono visitati nell'ordine in cui arrivano.

Determinare quale è la massima intensità degli arrivi $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{MAX}}$ tale che il 95% dei pazienti non debba aspettare più di 72 ore dal loro arrivo prima di poter essere dimessi.

Soluzione

Il sistema può essere modellato come una coda M/M/1, con tasso di servizio **μ=1/(30 min)=2/h**

In un sistema M/M/1 FIFO, la distribuzione dei tempi di servizio è esponenziale ed è:

$$\boldsymbol{f_T(t) = (\mu - \lambda)e^{-(\mu-\lambda)t}}$$

La probabilità che il tempo di attesa sia maggiore di $t_{MAX} = 72h$ è:

$$P(T > t_{MAX}) = \int_{t_{MAX}}^{+\infty} f_T(t)dt = \int_{t_{MAX}}^{+\infty} (\boldsymbol{\mu - \lambda})\mathbf{e}^{-(\mu-\lambda)\mathbf{t}}dt = \left[e^{-(\mu-\lambda)t}\right]_{t_{MAX}}^{+\infty} = e^{-(\mu-\lambda)\boldsymbol{t_{MAX}}}$$

Imponendo che tale probabilità deve essere inferiore al 5%, si ottiene la seguente disequazione:

$$e^{-(\mu-\lambda)\boldsymbol{t_{MAX}}} < 0.05$$

$$-(\mu - \lambda)t_{MAX} < \ln(0.05)$$

$$\lambda t_{MAX} < \ln(0.05) + \mu t_{MAX}$$

$$\boldsymbol{\lambda} < \frac{\ln(0.05) + \mu t_{MAX}}{t_{MAX}} = \frac{-3 + 2 * 72}{72\ h} = \frac{141}{72h} = \boldsymbol{1.96/h}$$

ES. 5 (Modelli con tempo di servizio non esponenziale)

In un piccolo ufficio c'è soltanto una fotocopiatrice. Gli impiegati arrivano alla macchina secondo un processo di Poisson, con tasso 1/min. Il numero di fotocopie che ogni impiegato deve effettuare è distribuito uniformemente tra 1 e 10. Ogni copia richiede 3s. L'accesso alla fotocopiatrice è disciplinato in maniera FIFO.

Qual è il tempo medio di attesa di ogni impiegato in coda?

Soluzione:
Dato che il numero di copie varia da impiegato ad impiegato, secondo una distribuzione U(1,10), anche il tempo di servizio **S** è distribuito uniformemente tra 3 e 30 secondi.

$$E[S] = \frac{a+b}{2} = \frac{33}{2} = 16.5\ s$$
$$VAR[S] = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{27^2}{12} = 60.75\ s$$

$$E[S^2] = VAR[S] + E[S]^2 = 60.75 + 272.25 = 333\ s^2$$

Il Sistema può essere descritto come una coda M/G/1. Per ottenere il tempo medio di attesa è possibile applicare la formula di Pollaczek-Khinchin (PK):

$$\boldsymbol{E[W] = \frac{\lambda E[S^2]}{2(1-\rho)}}$$

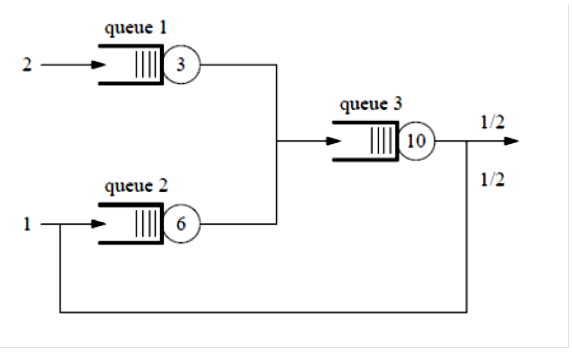
Sostituendo i parametri:
$\lambda = 1/\text{min} = 1/60\ s$
$\rho = \lambda\, E[S] = 16.5/60 = 0.275$
$E[S^2] = 333\ s^2$

Si ottiene:

$$\boldsymbol{E[W]} = \frac{\frac{333}{60} s}{2(1-0.275)} = \frac{5.55}{2(0.725)}\ s = \frac{5.55}{1.45}\ s = \mathbf{3.828}\ \boldsymbol{s}$$

ES. 6 (Reti di code aperte – Reti di Jackson)

Le code 1 e 2 della rete di Jackson in figura, ricevono flussi di arrivo poissoniani con tassi rispettivamente di 2 e 1 job/s. I tempi di servizio sono distribuiti esponenzialmente con i tassi in figura.



Calcolare:

a) Il flusso di job in ogni sottosistema
b) Il numero medio di job in ogni sottosistema ed il numero medio di job nella rete.
c) Il tempo medio di risposta di un generico utente che entra nella rete.

Soluzione:

Per trovare il flusso di job che attraversa ogni sottosistema, bisogna tenere conto della topologia stocastica, ed applicare le equazioni di conservazione dei flussi:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 1 + \frac{\lambda_3}{2} \\ \lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 1 + 1 + \frac{\lambda_2}{2} \\ \lambda_3 = 2 + \lambda_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{\lambda_1 = 2} \\ \boldsymbol{\lambda_2 = 4} \\ \boldsymbol{\lambda_3 = 6} \end{cases}$$

Per verificare la stabilità della rete, bisogna verificare la stabilità di ognuno dei sottosistemi. Essendo la rete composta da code M/M/1, bisogna verificare $\rho_i < 1$

$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{2}{3} < 1$	$\rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} < 1$	$\rho_3 = \frac{\lambda_3}{\mu_3} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} < 1$

In ogni sottosistema, il medio numero di job è $N_i = \frac{\rho_i}{1-\rho_i}$.

$N_1 = \frac{2/3}{1/3} = 2$	$N_2 = \frac{2/3}{1/3} = 2$	$N_3 = \frac{3/5}{2/5} = \frac{3}{2} = 1.5$

Il numero medio totale di job presenti nella rete è $N = N_1 + N_2 + N_3 = 5.5$

Il tempo di risposta di ogni sottosistema è $T_i = \frac{1}{\mu_i - \lambda_i}$.

$T_1 = \frac{1}{3-2} = 1\ s$	$T_2 = \frac{1}{6-4} = \frac{1}{2} = 0.5\ s$	$T_3 = \frac{1}{10-6} = \frac{1}{4} = 0.25\ s$

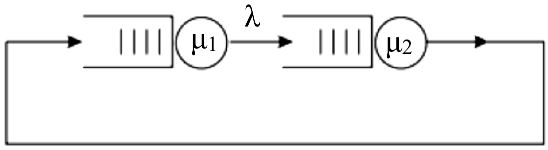
Infine, il tempo medio di risposta di un generico utente che entra in uno qualsiasi dei nodi di ingresso della rete, si ottiene applicando la legge di Little all'intera rete:

$$T = \frac{N}{\lambda_{TOT}} = \frac{N}{\lambda_{s,1} + \lambda_{s,2}} = \frac{5.5}{2+1} = 1.8\ s$$

Dove $\lambda_{s,i}$ rappresenta il flusso proveniente dall'esterno e diretto al nodo i.

ES.7 (Reti di code chiuse – Reti di Gordon Newell)

Una rete di code chiusa è composta da due code. I tempi di servizio di ciascuna coda sono distribuiti esponenzialmente con tassi di servizio medi $\mu_1=3$ e $\mu_2=8$.



Sapendo che nella rete ci sono 3 utenti,

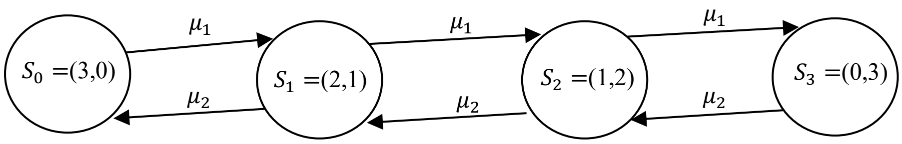
a) Quanti sono i possibili stati del sistema?
b) Disegnare il grafo di transizione degli stati della rete
c) Determinare la distribuzione di probabilità di regime e calcolare il numero medio di utenti presenti in ciascuna coda.
d) Verificare il risultato del punto c) e calcolare il tempo medio di riposta in ogni coda ed il flusso dei job nella rete, utilizzando la tecnica della mean value analysis (MVA).

Soluzione:

Il sistema è composto da due sottosistemi (M=2) e tre utenti (K=3). Il numero di possibili stati è pari al numero di modi di distribuire K job in M sottosistemi.

$$\binom{K+M-1}{M-1} = \binom{4}{1} = 4$$

L'evoluzione della rete può essere descritta tramite il grafo della catena di Markov associata alla rete, rappresentando i 4 stati con il numero di utenti presenti in ciascun sottosistema.



I job nel sistema passano dalla coda 1 alla coda 2 con tasso pari al tasso di completamento del nodo 1 (μ_1). Viceversa passano dalla coda 2 alla coda 1 con tasso pari al tasso di completamento del nodo 2 (μ_2). Il sistema può quindi essere descritto come un processo di nascita-morte.

Per determinare la distribuzione di probabilità a regime è possibile procedere in due modi:

- Risolvendo il sistema di equazioni di bilanciamento locale, imponendo la condizione di normalizzazione.
- Applicando il teorema di Gordon-Newell che consente di studiare separatamente le due code, in forma prodotto.

In questo caso vediamo un esempio di applicazione della seconda strategia. Il primo passo è calcolare il valore dei tassi di visita $\widehat{\lambda_\iota}$ in ciascun sottosistema.
Per il sistema in esame, la legge di conservazione del flusso impone:

$$\lambda_1 = \lambda_2$$

Una generica soluzione è quindi $\widehat{\lambda_\iota} = 1$.

I fattori di utilizzo nei singoli sistemi valgono:

$$\widehat{\rho_1} = \frac{\widehat{\lambda_1}}{\mu_1} = \frac{1}{3}$$

$$\widehat{\rho_2} = \frac{\widehat{\lambda_2}}{\mu_2} = \frac{1}{8}$$

Applicando il teorema di Gordon-Newell, si ottengono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} p_{3,0} = \frac{1}{G} \ \ \widehat{\rho_1}^3 \\ p_{2,1} = \frac{1}{G} \ \ \widehat{\rho_1}^2 \, \widehat{\rho_2} \\ p_{1,2} = \frac{1}{G} \ \ \widehat{\rho_1} \, \widehat{\rho_2}^2 \\ p_{0,3} = \frac{1}{G} \ \ \widehat{\rho_2}^3 \end{cases}$$

La costante G è ottenuta imponendo la condizione di normalizzazione (la somma di tutte le probabilità deve essere pari ad 1), ed è pari a:

$$G = \ \widehat{\rho_1}^3 + \ \widehat{\rho_1}^2 \ \widehat{\rho_2} \ + \ \widehat{\rho_1} \ \ \widehat{\rho_1}^2 + \ \widehat{\rho_2}^3 = \frac{1}{27} + \frac{1}{72} + \frac{1}{192} + \frac{1}{512} = 0.0581$$

$$\frac{1}{G} = 17.212$$

Per cui la distribuzione di regime del sistema è:

$$\begin{cases} p_{3,0} = \frac{1}{G} \ \ \widehat{\rho_1}^3 = 17.212 * 0.037 = 63.7\ \% \\ p_{2,1} = \frac{1}{G} \ \ \widehat{\rho_1}^2 \, \widehat{\rho_2} = 17.212 * 0.0139 = 23.9\ \% \\ p_{1,2} = \frac{1}{G} \ \ \widehat{\rho_1} \, \widehat{\rho_2}^2 = 17.212 * 0.052 = 9\% \\ p_{0,3} = \frac{1}{G} \ \ \widehat{\rho_2}^3 = 17.212 * 0.002 = 3.4\ \% \end{cases}$$

Il numero di utenti nel primo sottosistema è 0 nello stato (0,3), è 1 nello stato (1,2), è 2 nello stato (2,1), 3 nello stato (3,0). Pertanto il numero medio degli utenti nel primo sottosistema è la somma degli utenti in ogni stato, pesata per la probabilità di trovarsi a regime in quello stato:

$$N_1 = 1p_{1,2} + 2p_{2,1} + 3p_{3,0} = 0.09 + 2(0.239) + 3(0.637) = 2.48$$

Allo stesso modo, il numero medio di utenti presenti nel secondo sottosistema è:

$$N_2 = 1p_{2,1} + 2p_{1,2} + 3p_{0,3} = 0.239 + 2(0.09) + 3(0.034) = 0.52$$

Agli stessi risultati si poteva giungere mediante la tecnica della mean value analysis (MVA), partendo da una rete con K=0 utenti (dove $N_1=N_2=0$), seguendo il seguente algoritmo ricorsivo:

1. STEP: calcolo del tempo di risposta in ogni nodo
   $T_i[K] = (1 + N_i[K-1]) * \frac{1}{\mu_i}$
2. STEP: calcolo del numero medio di utenti in ogni nodo
   $N_i[K] = K * \frac{\hat{\lambda}_i T_i[K]}{\sum_{j=1}^{M} \hat{\lambda}_j T_j[K]}$
3. STEP: calcolo dei flussi di job in ogni nodo.
   $\lambda_i[K] = \frac{N_i[K]}{T_i[K]}$

Nel caso della rete di esempio:

K=1

$T_1[1] = 1/3$	$T_2[1] = 1/8$
$N_1[1] = 1 * \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{8}} = \frac{8}{11}$	$N_2[1] = 1 * \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{8}} = \frac{3}{11}$
$\lambda_1[1] = \frac{8/11}{1/3} = \frac{24}{11}$	$\lambda_2[1] = \frac{3/11}{1/8} = \frac{24}{11}$

K=2

$T_1[2] = \left(1 + \frac{8}{11}\right)\frac{1}{3} = 0.578$	$T_2[2] = \left(1 + \frac{3}{11}\right)\frac{1}{8} = 0.159$
$N_1[2] = 2 * \frac{0.578}{0.578 + 0.159} = 1.569$	$N_2[2] = 2 * \frac{0.159}{0.578 + 0.159} = 0.431$
$\lambda_1[2] = \frac{1.569}{0.578} = 2.71$	$\lambda_2[2] = \frac{0.431}{0.159} = 2.71$

K=3 (step finale)

$T_1[3] = (1 + 1.569)\frac{1}{3} = 0.85$	$T_2[3] = (1 + 0.431)\frac{1}{8} = 0.179$
$N_1[3] = 3 * \frac{0.85}{0.85 + 0.179} = 2.48$	$N_2[3] = 3 * \frac{0.179}{0.85 + 0.179} = 0.52$
$\lambda_1[3] = \frac{2.48}{0.85} = 2.91$	$\lambda_2[3] = \frac{0.52}{0.179} = 2.91$