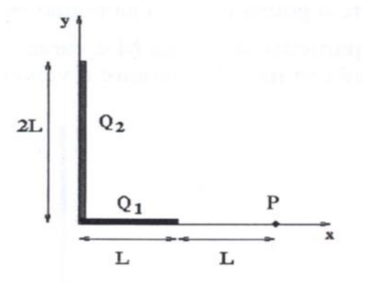
FIS1053 - Projeto de Apoio Eletromagnetismo

4ª Lista de Problemas
Tema: Revisão P1.

1ª Questão:

Duas barras não-condutoras são dispostas como mostrado na figura. A barra horizontal, de tamanho L, tem carga total Q_1. A barra vertical, de tamanho 2L, tem uma carga total Q_2. As cargas em ambas as barras são positivas e estão distribuídas uniformemente.



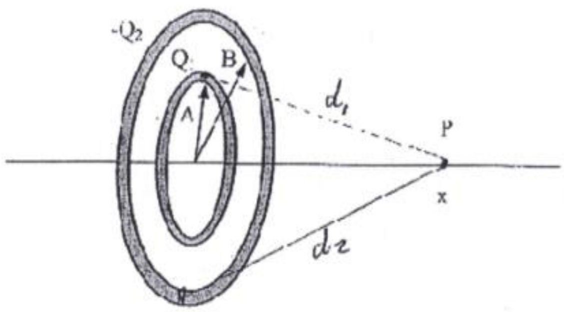
a) Calcule o campo elétrico E_1, devido à barra horizontal, no ponto P situado a uma distância 2L da origem. $\boxed{\vec{E} = \dfrac{Q_1}{8\pi\varepsilon_o L^2}\,\hat{i}}$

b) Calcule o campo elétrico E_2, devido à barra vertical, no mesmo ponto P.

$$\boxed{\mathrm{E}_{2x} = \frac{Q_2}{16\pi\varepsilon_o L^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}\ \boxed{\mathrm{E}_{2y} = -\frac{Q_2}{16\pi\varepsilon_o L^2}\cdot\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\ \boxed{\mathrm{E}_2 = \mathrm{E}_{2x} + \mathrm{E}_{2y} = \frac{Q_2}{16\pi\varepsilon_o L^2}\cdot\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} - \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\hat{j}\right]}$$

2ª Questão:

Dois anéis concêntricos delgados de raios A e B são uniformemente carregados respectivamente com cargas Q_1 e $-Q_2$. (com Q1 e Q2 >0) como mostrado na figura.



a) Calcule o potencial eletrostático **V** no ponto **P** a distância **x** do centro dos anéis.

$$\boxed{V(x) = V_1(x) + V_2(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{Q_1}{\left(x^2+A^2\right)^{1/2}} - \frac{Q_2}{\left(x^2+B^2\right)^{1/2}}\right]}$$

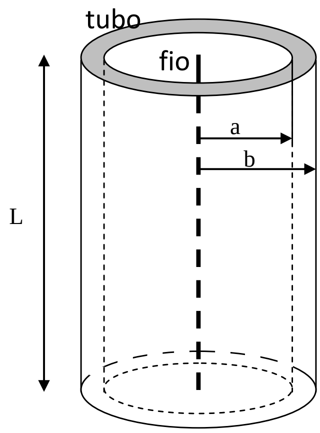
b) A partir deste potencial encontre o valor do campo elétrico **E** (módulo, direção e sentido).

$$\boxed{\vec{\mathrm{E}} = \frac{x}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{Q_1}{\left(x^2+A^2\right)^{3/2}} - \frac{Q_2}{\left(x^2+B^2\right)^{3/2}}\right]\hat{x}}$$

c) Supondo $Q_2 = 2Q_1$, obtenha a relação dos raios **A** e **B** para que o potencial **V** seja nulo no centro dos anéis (x=0)? $\boxed{B = 2A}$

3ª Questão:

A figura ao lado representa um fio reto muito longo, com comprimento L e raio desprezível, onde há uma carga total +Q uniformemente distribuída. Ao redor do fio, há um tubo condutor, com eixo coincidente ao fio, com mesmo comprimento L, com raio interno a e raio externo b, e carga total -2Q.



Sendo r a distância radial de um ponto genérico ao fio, calcule o vetor campo elétrico nas regiões:

a) $r < a$
b) $a < r < b$
c) $r > b$

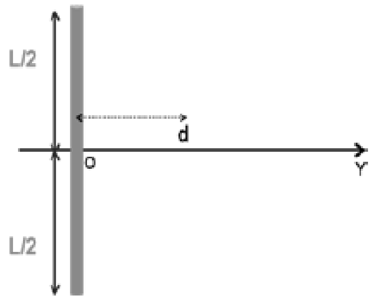
Suponha agora que uma carga pontual de valor +Q seja colocada em $r = 2b$. Calcule o trabalho realizado pelo campo elétrico do conjunto "tubo+fio" ao mover a carga de uma distância total b nos seguintes casos:

d) A carga se move paralela ao eixo do fio.
e) A carga se move radialmente em direção ao tubo.

Respostas:
a) $\vec{E} = \frac{2\text{KQ}}{r.L}\hat{\text{r}}$ [N/C]   b) $\vec{E} = \vec{0}$[N/C]   c) $\vec{E} = -\frac{2\text{KQ}}{r.L}\hat{\text{r}}$ [N/C]   d) $W = 0$ [J]
e) $W = \frac{2\text{KQ}^2}{L}.\ln 2$ [J]

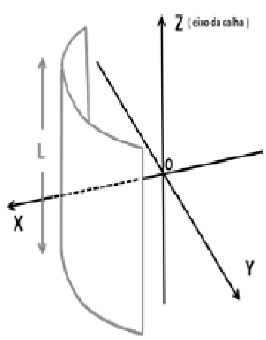
4ª Questão:

Uma linha uniforme de cargas de comprimento L e carga total q (figura ao lado) produz um campo elétrico $\vec{E}_y$ a uma distância d da linha ao longo de sua mediatriz que é dado pela equação: $\vec{E}_y = \frac{Kq}{d\sqrt{d^2+\frac{L^2}{4}}}\hat{y}$.

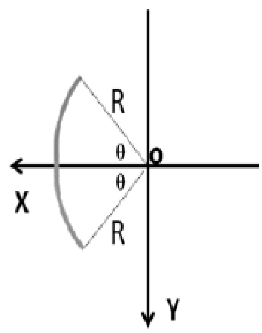


Considere agora um sistema constituído por uma calha cilíndrica isolante de comprimento L, raio de curvatura R, carregada uniformemente com uma carga total Q positiva. A origem do eixo x está situada sobre o eixo da calha, a uma distância R da superfície lateral da mesma e no plano mediano que corta a calha em duas partes idênticas de comprimento L/2. A interseção da calha com o plano XY descreve um arco de circunferência de ângulo igual a 2θ, com $\theta = \frac{\pi}{4}$, conforme representado na figura.

a) Considere a calha constituída por fios de carga infinitesimal dQ, largura dL e comprimento L. Calcule a carga infinitesimal dQ de cada fio. (A densidade superficial de carga na calha é $\sigma = \frac{2Q}{\pi RL}$.



Vista 3D



Vista de cima

b) Considerando que L >> R, obtenha o módulo, direção e sentido do campo elétrico gerado pela calha carregada na origem O dos eixos.

Um plano infinito carregado uniformemente é agora colocado paralelamente ao plano YZ cortando o eixo X na coordenada - R. Nesta condição, nota-se que o campo elétrico resultante na origem O é nulo.

c) Calcule a densidade superficial de carga σ do plano infinito carregado.

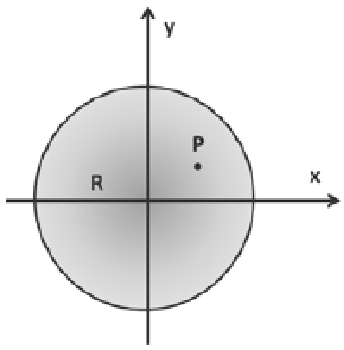
Respostas:

a) $dQ = \frac{2Q}{\pi} d\varphi$. Pela simetria o campo elétrico na origem será paralelo ao eixo X com sentido negativo.

b) $\vec{E}_{total}(0) = -\frac{Q\sqrt{2}}{R.L.\epsilon_0.\pi^2}\hat{x}$ [N/C]   c) $\sigma = +\frac{Q.2\sqrt{2}}{R.L..\pi^2}$[C/m^2]

<u>5ª Questão:</u>

Uma esfera isolante de raio R = 1,0 m possui densidade volumétrica de carga não uniforme dada pela função ρ (r) = A r, onde a constante vale A = + 36 nC/m^4. O sistema de coordenadas está indicado na figura (o eixo z sai do plano da figura). Use ε = 9 x 10^{-12} C^2/Nm^2.



a) Adote uma superfície gaussiana esférica centrada na origem e de raio r = 50 cm. Use-a para calcular o módulo do campo elétrico produzido em todos os pontos a 50 cm da origem.

b) Calcule, utilizando o resultado do item anterior, o vetor campo elétrico E_P no ponto P de coordenadas (40 cm; 30 cm; 0).

Suponha agora que uma caixa cúbica condutora de paredes espessas, carregada com carga líquida $Q_{LÍQ}$= – 30 nC, seja colocada de forma a envolver totalmente nossa esfera isolante e eventualmente outras cargas. Suponha que a carga total da esfera isolante seja Q_{ESF} = + 100 nC. Medindo-se toda a quantidade de carga presente na superfície externa da caixa metálica encontrou-se Q_{EXT} = + 30 nC.

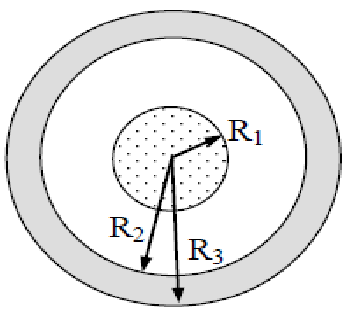
c) Existem outras cargas, além da esfera isolante, na caixa metálica? <u>Justifique a sua afirmação</u> e, em caso de resposta afirmativa, calcule o valor total destas outras cargas.

Respostas:

a) E = 250 [N/C]   b) $\vec{E}_p$ = 200 ($\hat{x}$) [N/C] + 150 ($\hat{y}$) [N/C]   c) Q_{outras} = - 40 nC

<u>6ª Questão:</u>

Uma esfera isolante maciça de raio R_1= 2m possui uma densidade de carga não uniforme dada pela expressão: ρ(r) = B·r onde a constante B é desconhecida. Esta esfera isolante é concentricamente circundada por uma fina casca esférica condutora com raios interno R_2 = 4m e externo R_3 = 6m, como mostrado na figura ao lado.



O fluxo elétrico através de uma superfície esférica gaussiana de raio r > R3 vale $\varphi_3 = 4 \times 10^6$ Nm^2/C. Sabendo que a carga líquida depositada na casca esférica vale $Q_{Liq} = 12$ μC:

a) Calcule o valor da carga total Q_1 da esfera maciça interna.

b) Calcule o valor da constante B com as unidades.

c) Calcule a razão $\sigma_{ext}/\sigma_{int}$ entre as densidades de carga interna e externa da casca esférica condutora.

d) Utilizando a lei de Gauss, calcule o vetor campo elétrico na região $R_1 < r < R_2$.

e) Calcule a diferença de potencial ($V_{R1} - V_{R2}$), com sinal, entre a esfera interna e a casca esférica.

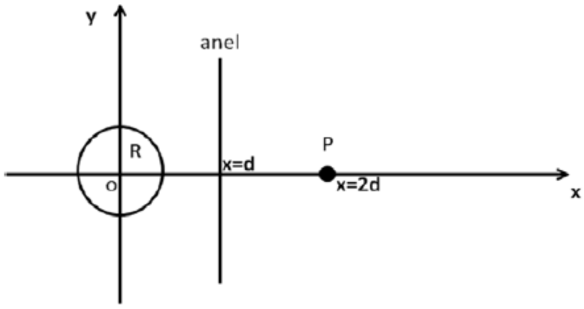
Respostas:

a) Q1 = 24 μC   b) $B = 3 \cdot 10^{-6}/2\pi [C/m^4]$ c) $\sigma_{ext}/\sigma_{int} = -\frac{2}{3}$

d) $\vec{E}(r) = Q_1/4\varepsilon_0\pi r^2(\hat{r})$ [N/C]   e) $V_{R1} - V_{R2} = -(Q_1/4\pi\varepsilon_0)\left[\frac{1}{R2} - \frac{1}{R1}\right]$ [V]

8ª Questão:

O valor do módulo do campo elétrico presente na superfície de uma esfera condutora de raio R = 5 cm, mostrada na figura abaixo, é igual a 100 N/C. O campo elétrico aponta para o interior da esfera.



a) Calcule a carga resultante Q na superfície da esfera (deixe o resultado em função de π e ε_0).

Considere agora que um anel isolante uniformemente carregado com carga total igual a -Q é colocado numa distância d (d > R) do centro da esfera como indicado na figura acima (o anel é visto de perfil).

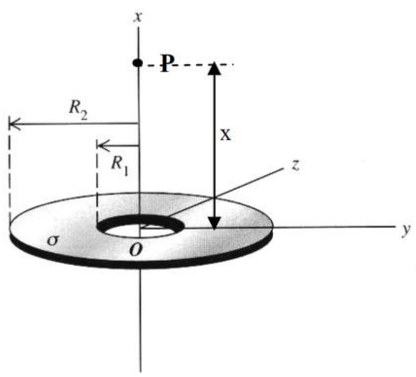
b) Sabendo que o raio do anel é r = 3 d, calcule o vetor campo elétrico resultante no ponto P de coordenada x = 2d (deixe o resultado em função de d).

Respostas:

a) $Q = -\pi\varepsilon_0 [C]$ b) $\vec{E} = 1/32d^2(-\hat{x})$ [N/C]

9ª Questão:

Denomina-se coroa anular um disco fino de raio externo R_2 com um buraco circular concêntrico de raio interno R_1 como mostrado em figura. Uma coroa anular possui uma densidade superficial de carga σ sobre sua superfície (σ < 0).



a) Determine a carga total Q sobre a coroa anular.

b) A coroa anular está sobre o plano yz com seu centro na origem. Para um ponto arbitrário P sobre o eixo Ox (eixo de simetria da coroa anular), determine o potencial V(P) (Sugestão: calcule o potencial devido a um anel de raio r e espessura dr compreso entre R_1 e R_2 e depois extenda o resultado para a coroa anular).

c) Calcule agora o campo elétrico $\vec{E}$ (módulo, direção e sentido) no ponto P.

d) Uma carga positiva puntiforme q é inicialmente colocada a repouso no ponto P e a seguir liberada. Qual será a energia cinética T desta carga quando passa no centro O da coroa anular? (Considere neste item R_1=a; R_2=4a; x=3a)

Respostas:

a) $Q = \sigma\pi(R_2^2 - R_1^2)$ [C]

b) $V(x) = 2k\sigma\pi\left[\sqrt{R_2^2+x^2} - \sqrt{R_1^2+x^2}\right]$ [V]

c) $\vec{E}(x) = 2k\sigma\pi x\left[\frac{1}{\sqrt{R_2^2+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_1^2+x^2}}\right](-\hat{x})$ [N/C]

d) $T = 2k\sigma\pi qa(2 - \sqrt{10})$ [J]

10ª Questão:

Um bastão cilíndrico isolante, de comprimento L e raio R (com L >> R), foi carregado uniformemente em sua superfície com carga negativa desconhecida (Figura 1). Mediu-se o campo elétrico gerado a uma distância 3R do eixo de simetria e encontrou-se o valor E_1 (em módulo).

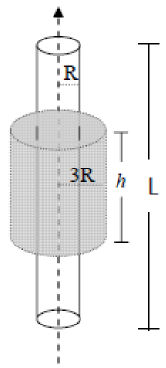
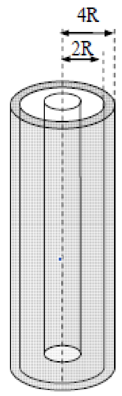


Fig.1

a) Calcule o fluxo do campo elétrico através da superfície indicada (sombreada) na Figura 1 (altura h e raio 3R).

b) Obtenha o vetor campo elétrico em função da distância r ao eixo do bastão, para r > R.

Suponha agora que uma casca cilíndrica condutora descarregada (neutra) de comprimento L e raios interno 2R e externo 4R é colocada em volta do bastão carregado utilizando-se luva de borracha. Posiciona-se a casca com o eixo de simetria coincidindo com o eixo do bastão (concêntrico), conforme a Figura 2. Responda, justificando:



c) Obtenha o valor (módulo) do campo elétrico à distância 3R do eixo.

d) Quanto vale a carga na superfície interna e na superfície externa da casca cilíndrica?

Fig.2

Agora suponha que a casca cilíndrica condutora seja aterrada. Responda, justificando:

e) Quanto vale a carga na superfície interna e na superfície externa da casca cilíndrica?

f) Calcule o fluxo elétrico que atravessa uma superfície cilíndrica concêntrica ao sistema e de raio r = 9R/2.

Respostas:

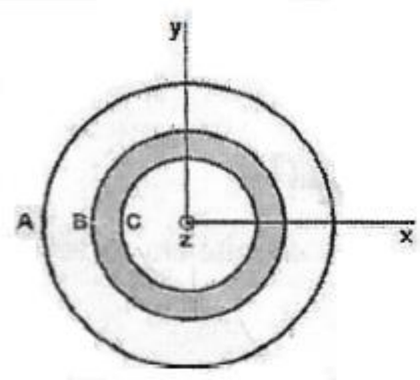
a) $\varphi_{tampas} = 0$; $\varphi_{lateral} = -6\pi RhE_1$ b) $\vec{E} = E_1 3R/r\ (-\hat{r})$ [N/C] c) $\vec{E} = 0$ [N/C]

d) $Q_{supinterna} = +\varepsilon_0 6\pi RE_1 L$ [C] ; $Q_{supexterna} = -\varepsilon_0 6\pi RE_1 L$ [C]

e) $Q_{supinterna} = +\varepsilon_0 6\pi RE_1 L$ [C] ; $Q_{supexterna} = 0$ [C] f) $\varphi = 0$

11ª Questão:

Um anel circular de raio A e uma casca esférica de raios B e C têm centro comum, situado na origem de um sistema de coordenadas. Uma carga total Q > O está uniformemente distribuída no anel. Uma carga total -Q está uniformemente distribuída na casca esférica. Sabe-se que A > B > C > 0 e que o anel está contido no plano xy, conforme mostra o corte da configuração representado na figura.



a) Determine o vetor campo elétrico devido à casca esférica em um ponto arbitrário z_0 do eixo z tal que $z_0 > A$.

b) A partir do resultado do item a, determine o potencial elétrico devido à casca esférica no mesmo ponto.

c) Determine o potencial elétrico devido ao anel no mesmo ponto.

d) A partir do resultado do item c, determine o vetor campo elétrico devido ao anel no mesmo ponto.

e) Indique, justificando, o sinal do potencial elétrico e o sentido do vetor campo elétrico devidos à configuração total (anel e casca) no ponto arbitrário z_0 do eixo z tal que $z_0 > A$.

Respostas:

a) $\vec{E}_c(z_0) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z_0^2}(-\hat{z})$ [N/C] b) $V_c(z_0) = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 z_0}$ [V] c) $V_a(z_0) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{A^2+z_0^2}}$ [V]

d) $\vec{E}a(z_0) = \frac{Qz_0}{4\pi\varepsilon_0(A^2+z_0^2)^{\frac{3}{2}}}(\hat{z})$ [N/C]

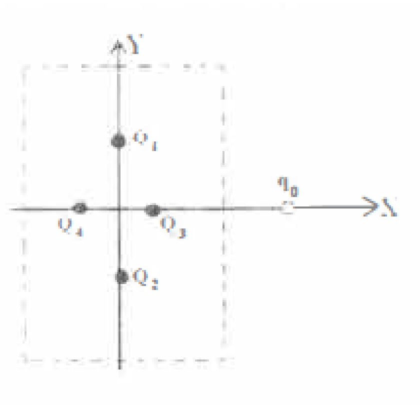
e) A partir dos itens anteriores temos que:

$V(z_0) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{A^2+z_0^2}} - \frac{1}{z_0}\right)$ [V] e $\vec{E}(z_0) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{z_0}{(A^2+z_0^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{z_0^2}\right)(\hat{z})$ [N/C]

As expressões acima mostram que o potencial elétrico é negativo e que o vetor campo elétrico tem o sentido $(-\hat{z})$ no ponto arbitrário z_0 (> A).

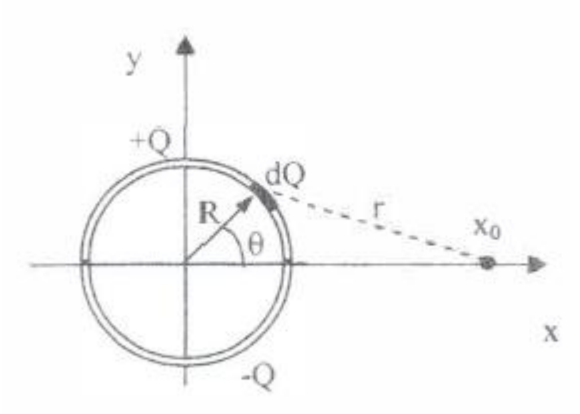
Desafio:

No desenho temos 4 cargas. $Q_1 = 3Q$, $Q_2 = -3Q$, $Q_3 = Q$ e $Q_4 = -Q$. com posições $r_1 = 2d\,(\hat{y})$, $r_2 = -2d\,(\hat{y})$, $r_3 = d\,(\hat{x})$, $r_4 = -d\,(\hat{x})$. O pontilhado na figura representa uma caixa preta, com as 4 cargas no seu interior. Uma carga de prova q_0 se encontra no exterior da caixa, na posição $r_0 = 4d\,(\hat{x})$.



a) Qual é o valor do fluxo elétrico total através da caixa preta?
b) Se a carga de prova q_0 for largada a partir do repouso na posição indicada na figura, ela irá sentir uma força resultante?

Na figura a seguir, na metade superior de um círculo está distribuída uniformemente uma carga elétrica +Q e na metade inferior está distribuída uma carga elétrica -Q.



c) Calcule o vetor diferencial de campo elétrico dE no ponto x_o indicado na figura, gerado por um par de cargas diferenciais +dQ e -dQ, com posições simétricas em relação ao eixo X.

d) Mostre que o campo elétrico total no ponto X_o está na direção $-\hat{\jmath}$ e que o modulo pode ser escrito como:

$$E = \frac{2R^2\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\pi}\frac{sen\theta d\theta}{[x_0^2 + R^2 - 2x_0 R\cos\theta]^{3/2}}$$

Respostas:

a) 0 b) Sim c) $\frac{dQ}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(-2R\,sen\theta)\,\hat{\jmath}}{\left[(x_0 - R\cos\theta)^2 + (R\,sen\theta)^2\right]^{3/2}}$