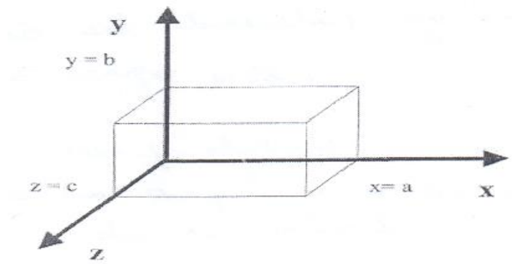
FIS1053 - Projeto de Apoio Eletromagnetismo

2ª Lista de Problemas
Tema: Lei de Gauss

1ª Questão:

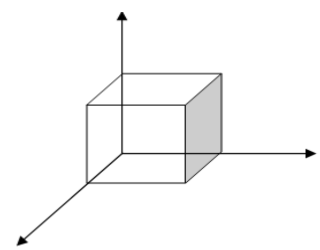
Considere a superfície **Gaussiana** ao lado (um paralelepípedo) com uma carga **+Q** colocada em seu centro geométrico (a/2, b/2, c/2).



a) Qual é o fluxo total através dessa superfície?

b) É possível calcular o campo elétrico $\vec{E}$ em qualquer ponto da superfície Gaussiana utilizando a Lei de Gauss?

Agora, utilizando um cubo de lado **a** como uma nova superfície **Gaussiana**. A carga **+Q** é deslocada para o centro do cubo (a/2, a/2, a/2), como na figura ao lado.



c) Qual o fluxo total através do cubo? Você pode calcular o fluxo em cada uma das faces? Qual o valor do fluxo em cada face?

d) Você pode calcular o Campo Elétrico $\vec{E}$ em qualquer ponto da superfície Gaussiana utilizando a Lei de Gauss?

e) Qual o módulo do Campo Elétrico $\vec{E}$ em cada um dos vértices do cubo?

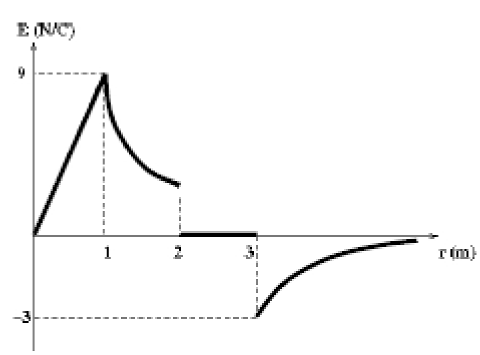
Justifique todas as respostas acima.

Respostas:

a) $\phi_{total} = Q/\varepsilon_0$
b) Não. A superfície gaussiana adotada (paralelepípedo) não é simétrica a distribuição de carga (pontual), logo calcular o campo elétrico através da Lei de Gauss fica muito difícil.
c) $\phi = Q/\varepsilon_0$; $\phi_{face} = Q/6\varepsilon_0$ d) Mesmo motivo da b) e) $E = Q/3\pi\varepsilon_0 a^2$

2ª Questão:

O gráfico abaixo mostra o valor do campo elétrico, em função da distância radial, de um conjunto formado por um condutor e um isolante concêntrico dispostos no vácuo, tal que suas distribuições de carga respeitam a simetria esférica. Observando o gráfico e <u>usando explicitamente a Lei de Gauss onde aplicável</u>, responda:



a) Em que região está o isolante?

b) Qual é a carga total do isolante?

c) A partir do gráfico, justifique por que se pode afirmar que a carga do isolante está distribuída uniformemente em seu volume e determine sua densidade volumétrica de carga.

d) Qual é a carga total do condutor? Como ela está distribuída?

(Sugestão: resolva o problema de uma distribuição esférica de carga uniforme)

Respostas:

a) Claramente o condutor é uma casca esférica de raios externo 3,0 m e interno 2,0 m (região onde o campo elétrico é nulo).O isolante se encontra na região r < 1,0 m, Porque somente com cargas o campo elétrico pode crescer linearmente com a distância radial.

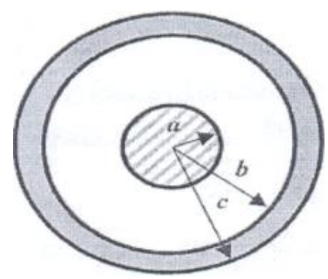
b) $q_{isolante} = 1{,}0x10^{-9}C = 1{,}0\, nC$

c) $\varrho = \dfrac{q_{isolante}}{V_{isolante}} = \dfrac{1{,}0\, nC}{\frac{4}{3}.\pi.1^3} = \dfrac{3}{4\pi} nC/m^3$

d) $q_{condutor} = -4\, nC$→A casca condutora tem carga de -1 nC na face de raio interno 2,0 m (para somar zero com a do isolante) e o restante da carga do condutor -3 nC está na face de raio externo (3,0 m).

3ª Questão:

Uma esfera **isolante** maciça, de raio *a*, tem uma carga **uniformemente** distribuída por todo seu Volume. Concêntrica a esfera, está uma casca esférica **condutora** onde seus raios interno e externo são, respectivamente, *b* e *c*, como mostrado na figura ao lado.



Suponha que o campo elétrico seja $\vec{E}$ = -2kQ/r² ($\hat{r}$) para a<r<b e zero para r>c.

Encontre com essas informações (justificando as suas respostas):

a) A carga total sobre a esfera interna isolante.

b) A carga líquida na casca esférica condutora.

c) O campo elétrico em r<a.

d) Considere agora que a esfera interna isolante é substituída por outra condutora oca de raio *a* e carga **+Q**. Determine o campo elétrico desta esfera.

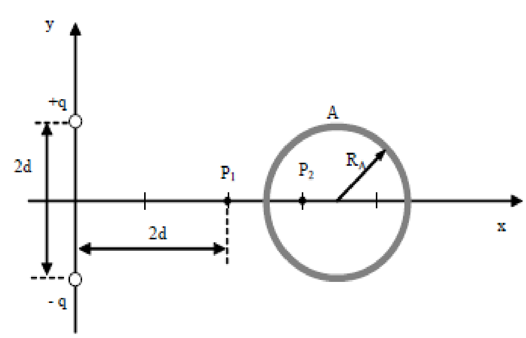
Respostas:

a) Q_i= -2Q [C] b) $Q_{líquido}$= +2Q [C] c) $\vec{E}$ =-k2Qr/a³ ($\hat{r}$) [N/C] d) $\vec{E}$ = kQ/R² ($\hat{r}$) [N/C]

4ª Questão:

Duas cargas +q e -q estão posicionadas no eixo y como mostrado na figura ao lado. Na mesma região existe uma <u>casca esférica delgada isolante</u> A de raio $R_a = d$ uniformemente carregada com uma carga $Q_a = +2q$.

Considere o ponto P_1 colocado no eixo x a uma distância 2d da origem. E a distância d/2 entre P_2 e a casca no eixo x.



a) Calcule o fluxo elétrico total Φ_T que atravessa a superfície gaussiana de raio r = 2d centrada na origem do sistema de coordenadas e que passa pelo ponto P_1. Justifique todos os seus cálculos e afirmações.

b) Calcule o vetor campo elétrico no ponto P_1.

c) Calcule o vetor campo elétrico no ponto P_2 a uma distância x = 3d como mostrado na figura. Justifique todos os seus cálculos e afirmações.

d) Caso a casca esférica fosse condutora, o resultado do item c) mudaria? Se sim, como. Se não, justifique.

Respostas:

a) $\Phi_T = 0$

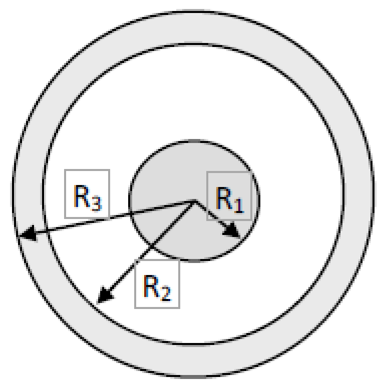
b) $\vec{E} = \frac{-8\text{Kq}}{9d^2}(\hat{x}) - \frac{2Kq}{5\sqrt{5}d^2}(\hat{y})$[N/C]

c) $\vec{E} = \overrightarrow{E_{+q}} + \overrightarrow{E_{-q}} + \overrightarrow{E_{casca}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{5\sqrt{10}d^2}(-\hat{y})$[N/C]

d) Mudaria, o campo passaria a ter módulo igual a zero. Mesmo princípio da gaiola de Faraday, as cargas na esfera condutora iriam se reorganizar de maneira a isolar o interior do campo externo. Como já mostramos que a própria casca não contribuí para o campo interno, concluímos que o campo elétrico total interno é igual a zero.

5ª Questão:

Uma esfera metálica maciça de raio R_1 = 1m é concentricamente circundada por uma casca esférica metálica com raios interno R_2 = 3m e externo R_3 = 4m, como mostrado na figura ao lado.

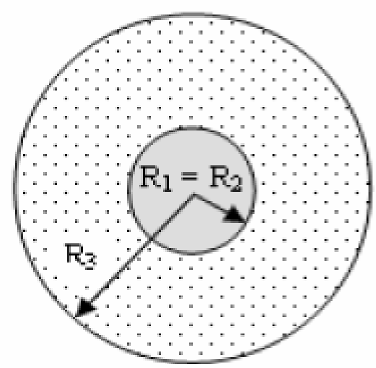


O fluxo elétrico φ através de uma superfície esférica gaussiana de raio r =6m vale φ =6 x 10^2 Nm^2/C. Sabendo que a esfera maciça possui uma carga Q_1 = 4 nC e considerando que ε_0 = 1 x 10^{-11} C^2/Nm^2 e k = 9 x 10^9 Nm^2/C^2:

a) Calcule, utilizando a Lei de Gauss, a distribuição das cargas nas superfícies externa e interna da casca esférica. Qual é o valor da carga líquida da casca? Justifique as afirmações e os cálculos.

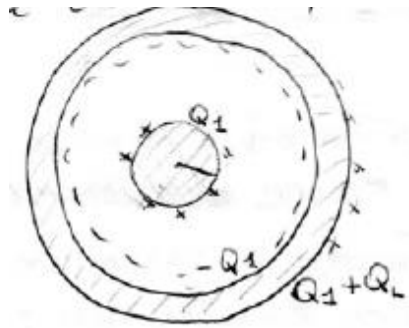
b) Calcule o valor do módulo do campo elétrico na superfície da esfera maciça e na superfície externa da casca.

Considere agora que a casca esférica metálica é substituída por uma casca esférica isolante com R_2 = R_1 = 1m e R_3= 4m (desenho ao lado). A casca isolante é carregada uniformemente com uma carga Q igual ao valor da carga líquida da casca metálica anterior.



c) Calcule o valor do fluxo elétrico φ através de uma superfície gaussiana esférica de raio r = R_3/2.

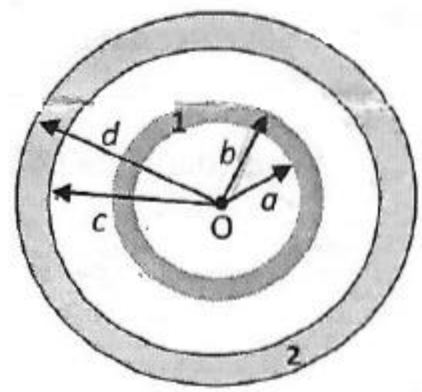
Respostas:



a) ; Q_{liq} = 2 nC
b) E_1 = 36 [N/C] ; E_2 = 27/8 [N/C]
c) φ = $38\text{x}10^2/9$ [Nm^2/C]

6ª Questão:

Duas cascas esféricas condutoras concêntricas, 1 e 2, têm a disposição indicada na figura ao lado. A casca um tem raio interno a, raio externo b e está carregada com uma carga liquida Q_{1L} = +3 μC. A casca 2 tem raio interno c, raio externo d e está carregada com uma carga liquida desconhecida Q_{2L}.



Medidas realizadas no sistema mostram que:

- o fluxo elétrico através de uma superfície gaussiana esférica de raio r = 2d é igual a φ = 7,5 x 10^5 Nm^2/C.
- a densidade de carga na superfície externa da casca 1 é igual a $\sigma_{1ext} = \frac{3}{4\pi b^2} 10^{-6}$ Cm^{-2}
- $\varepsilon_0 = 1 \times 10^{-11}$ C^2/Nm^2

Com estas informações responda aos itens abaixo **(justificando as suas respostas e cálculos):**

a) Qual é o valor da carga líquida Q_{2L} na casca 2?

b) Encontre o campo elétrico E nas regiões r < a e b < r < c. Justifique todos os seus cálculos e afirmações.

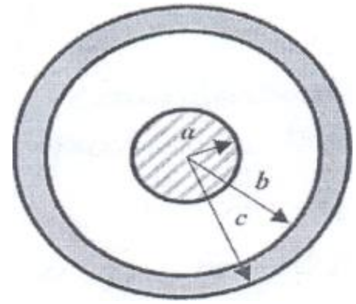
c) Desenhe as cascas concêntricas e calcule (indicando também no desenho) as distribuições de carga σ nas superfícies internas e externas das duas cascas esféricas.

d) Considere agora que no centro do sistema das cascas (ponto O) seja colocada uma carga puntiforme negativa de valor q = -1,5μC. Calcule o novo valor da densidade de carga na superfície externa da casca 2.

Respostas:

a) $Q_{2L} = 4{,}5\text{x}10^{-6}$ [C]
b) $\vec{E}$ = 0 [N/C] ; $\vec{E} = 3\text{K}\text{x}10^{-6}/r^2\ (\hat{r})$ [N/C]
c) σ_{1int}= 0 [C/m^2]; σ1ext (dado); $\sigma_{2int} = -3\text{x}10^{-6}/4\pi c^2$ [C/m^2];$\sigma_{2ext} = 7{,}5\text{x}10^{-6}/4\pi d^2$ [C/m^2]
d) $\sigma_{2ext} = 6{,}0\text{x}10^{-6}/4\pi d^2$ [C/m^2]

7ª Questão:



A figura mostra o esquema da secção reta de um cabo coaxial muito longo de comprimento **L**. Imagine que o cilindro interno da figura seja não condutor (isolante), tenha raio a e uma densidade volumétrica de carga **não** uniforme dada por $\rho(r)= B/r$ onde B é uma constante positiva. O cilindro externo é metálico (condutor).

a) Calcule a carga total no cilindro interno.

b) Quais são as unidades de medida de B?

Se o cilindro externo possui uma carga líquida $q=-\pi BaL$, calcule:

c) A carga na superfície externa do cilindro metálico (externo). Justifique os seus cálculos.

d) O vetor campo elétrico nas seguintes regiões:
   i) $b < r < c$.
   ii) $r > c$.

Respostas:

a) $Q=2\pi aLB$ [C]   b) $[B]= [C/m^2]$ c) $Q_e=Q+q=\pi aLB$ [C]

d) i) $\vec{E} = 0$ [N/C]   ii) $\vec{E} = \frac{2K\pi Ba}{r}\hat{r}$ [N/C]

8ª Questão:

Uma esfera de raio R contém uma carga elétrica $Q > 0$ no seu interior, que está distribuída de tal modo que a densidade volumétrica de carga $\rho(r)$ é dada por:

$$\rho(r)=\begin{cases} \alpha, \ r \leq \frac{R}{2} \\ 2\alpha\left(1-\frac{r}{R}\right), \ \frac{R}{2} \leq r \leq R \\ 0, \ r \geq R \end{cases}$$

Nessas relações α é uma constante positiva com unidade de C/m^3.

a) Determine α em função de Q e de R.

b) Utilizando a lei de Gauss calcule o módulo do campo elétrico em cada uma das três regiões ($r \leq R/2$, $R/2 \leq r \leq R$, $r \geq R$). Deixe as respostas em função da carga total Q.

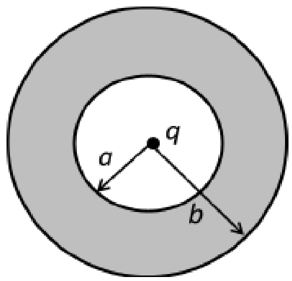
c) Que fração da carga total está contida no interior da região $r \leq R/2$?

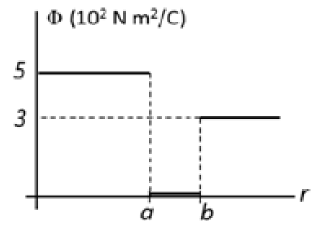
Respostas:

a) $\alpha = 8Q/5\pi R^3$ [C/m^3]
b) $E = 8Qr/15\pi\varepsilon_0 R^3$ [N/C]; $E = \frac{Q}{60\pi\varepsilon_0}\left[64\left(\frac{r}{R}\right)^3 - 48\left(\frac{r}{R}\right)^4 - 1\right]$ [N/C]; $E = Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$ [N/C]
c) 4/15

9ª Questão:

Uma partícula com carga q foi depositada bem no centro da cavidade de uma casca esférica condutora de raio interno a = 30 cm e raio externo b = 40 cm (figura abaixo). O gráfico ao lado da figura mostra o fluxo Φ através de uma esfera gaussiana com centro na partícula em função do raio r da esfera.

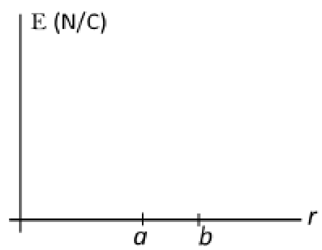




(Considere $\varepsilon_0 = 1 \times 10^{-11}$ $C^2/N\ m^2$ ou $K = 9 \times 10^9$ $N\ m^2/C^2$.)

a) Determine a carga q da partícula central e a carga líquida $Q_{LÍQ}$ presente na casca condutora.

b) Considere agora que: q = +5 nC e $Q_{LÍQ}$ = -2 nC. Encontre a dependência do campo elétrico E(r) como função de r, para as três regiões: r < a, a < r < b, e r > b. Depois, copie na folha de respostas o par de eixos a seguir e esboce nele a função E(r) encontrada, calculando os valores importantes e explicitando-os no gráfico.



c) Remove-se a partícula e a cavidade é preenchida com um material isolante. A carga no isolante apresenta simetria esférica e densidade volumétrica dada pela função ρ(r) = A/r, onde A é uma constante. Esta distribuição de carga provoca um campo elétrico radial e de módulo constante e igual a E = 500 N/C dentro da cavidade. Calcule o valor da constante A com sua respectiva unidade SI.

Respostas:

a) Q_{liq} = -2 nC
b) $E(r) = KQ/r^2$[N/C]; E(a) = 500 [N/C] ; $E_{condutor}$ = 0 [N/C] ; $E(r) = KQeng/r^2$[N/C]; E(b) = 168,75 [N/C]
c) A = 1×10^{-8} [C/m^2]