5.6 EXERCÍCIOS

1. Seja $T: V \to W$ uma função. Mostre que:

   a) Se T é uma transformação linear, então $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
   b) Se $T(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$, então T não é uma transformação linear.

2. Determine quais das seguintes funções são aplicações lineares:

   a) $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$
   $(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$
   b) $g: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$
   $(x, y) \mapsto xy$
   c) $h: M_2 \to \mathbf{R}$
   $$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longmapsto \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
   d) $k: P_2 \to P_3$
   $ax^2 + bx + c \longmapsto ax^3 + bx^2 + cx$
   e) $M: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$
   $$(x, y, z) \longmapsto (x, y, z) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
   f) $N: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$
   $x \mapsto |x|$

3. *a*) Ache a transformação linear $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ tal que $T(1, 0, 0) = (2, 0)$, $T(0, 1, 0) = (1, 1)$ e $T(0, 0, 1) = (0, -1)$.
   b) Encontre $\mathbf{v}$ de $\mathbf{R}^3$ tal que $T(\mathbf{v}) = (3, 2)$.

4. *a*) Qual é a transformação linear $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ tal que $T(1, 1) = (3, 2, 1)$ e $T(0, -2) = (0, 1, 0)$?
   b) Ache $T(1, 0)$ e $T(0, 1)$.
   c) Qual é a transformação linear $S: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ tal que $S(3, 2, 1) = (1, 1)$, $S(0, 1, 0) = (0, -2)$ e $S(0, 0, 1) = (0, 0)$?
   d) Ache a transformação linear $P: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tal que $P = S \circ T$.

5. *a*) Ache a transformação T do plano no plano que é uma reflexão em torno da reta $x = y$.
   b) Escreva-a em forma matricial.

6. No plano, uma rotação anti-horária de $45°$ é seguida por uma dilatação de $\sqrt{2}$. Ache a aplicação A que representa esta transformação do plano.

7. Qual é a aplicação A que representa uma contração de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ seguida por uma rotação horária de 45°?

8. Verifique qual o núcleo é imagem e suas respectivas dimensões das transformações dadas nos exemplos do parágrafo 5.1.

9. Dados $T: U \to V$ linear e injetora e $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_k$, vetores LI em U, mostre que $\{T(\mathbf{u}_1), ..., T(\mathbf{u}_k)\}$ é LI.

10. Sejam R, S e T três transformações lineares de $\mathbf{R}^3$ em $\mathbf{R}^3$.

Se $[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e

$[S] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, ache

T tal que $R = S \circ T$.

11. Sejam $\alpha = \{(1, -1), (0, 2)\}$ e $\beta = \{(1, 0, -1), (0, 1, 2), (1, 2, 0)\}$ bases de $\mathbf{R}^2$ e $\mathbf{R}^3$ respectivamente e

$$[T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Ache T.
b) Se $S(x, y) = (2y, x - y, x)$, ache $[S]^{\alpha}_{\beta}$.
c) Ache uma base γ de $\mathbf{R}^3$ tal que $[T]^{\alpha}_{\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

12. Se $[R] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $[S] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, ache $R \circ S$.

13. Se $R(x, y) = (2x, x - y, y)$ e $S(x, y, z) = (y - z, z - x)$,

a) Ache $[R \circ S]$.
b) Ache $[S \circ R]$.

14. Seja V o espaço vetorial de matrizes 2×2 com base

$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Se $T: V \to \mathbf{R}^2$ é dada por $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a + d, b + c)$,

a) Ache $[T]^\beta_\alpha$ onde α é a base canônica de $\mathbf{R}^2$.

Se $S: \mathbf{R}^2 \to V$ e $[S]^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) Ache S e, se for possível, (a, b) tal que $S(a, b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

15. Seja $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tal que $[T] = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ache os vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ tal que

a) $T(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$
b) $T(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$

16. Mostre que se $T: V \to W$ é uma transformação linear,

a) $Im(T)$ é um subespaço de W.
b) $ker(T)$ é um subespaço de V.

17. Sejam S e T aplicações lineares de V em W. Definimos $S + T$ como $(S + T)\mathbf{v} = S(\mathbf{v}) + T(\mathbf{v})$ para todo $\mathbf{v} \in V$ e definimos αS como $(\alpha S)\mathbf{v} = \alpha \cdot S(\mathbf{v})$ para todo $\alpha \in \mathbf{R}$ e $\mathbf{v} \in V$.

a) Mostre que $S + T$ é uma transformação linear de V em W.
b) Mostre que αS é uma transformação linear de V em W.
c) Mostre que $X = \{T \mid T: V \to W\}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbf{R}$.
d) Suponha que $\dim V = 2$ e $\dim W = 3$. Tente procurar $\dim X$.

18. No Exercício 11 determine $ker\ T$, $Im\ T$, $Im\ S$, $ker\ S$ e comprove a validade dos teoremas 5.3.9 e 5.4.5 para estas transformações.

19. Considere a transformação linear

$T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (z, x - y, -z)$.

a) Determine uma base do núcleo de T.
b) Dê a dimensão da imagem de T.
c) T é sobrejetora? Justifique.
d) Faça um esboço de $ker\ T$ e $Im\ T$.

20. Dê, quando possível, exemplos de transformações lineares T, S, L, M e H satisfazendo:

   a) $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ sobrejetora
   b) $S : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, com $ker\, S = \{(0, 0, 0)\}$
   c) $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, com $Im\, L = \{(0, 0)\}$
   d) $M : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, com $ker\, M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 ; x = y\}$
   e) $H : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, com $ker\, H = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 ; z = -x\}$

21. Seja P_3 = conjunto dos polinômios com grau menor ou igual a 3, e

$$T: P_3 \to P_3$$
$$f \to f' \text{ (derivada)}$$

   a) Mostre que P_3 é um espaço vetorial de dimensão 4.
   b) Mostre que T é uma transformação linear.
   c) Determine $ker\, T$ e $Im\, T$ e encontre uma base para cada um destes subespaços vetoriais.

22. Seja $D : P_3 \to P_3$
$$f \mapsto f'' \text{ (derivada segunda)}$$
Mostre que D é linear e determine uma base para $ker\, D$.

23. Sejam $\alpha = \{(0, 2), (2, -1)\}$ e $\beta = \{(1, 1, 0), (0, 0, -1), (1, 0, 1)\}$ bases de $\mathbf{R}^2$ e $\mathbf{R}^3$.

$$[S]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Dê a expressão para $S(x, y)$.

24. Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Encontre $ker\, T_A$, $Im\, T_A$, $ker\, T_B$, $Im\, T_B$, $ker\, (T_B \circ T_A)$ $Im(T_B \circ T_A)$. Determine bases para estes seis subespaços.

25. Seja $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ uma reflexão, através da reta $y = 3x$.

a) Encontre $T(x, y)$.

b) Encontre a base α de $\mathbf{R}^2$, tal que $[T]^{\alpha}_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

26. Seja $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ onde $T(\mathbf{v})$ é a projeção do vetor $\mathbf{v}$ no plano $3x + 2y + z = 0$.

a) Encontre $T(x, y, z)$.

b) Encontre uma base ordenada β de $\mathbf{R}^3$, tal que

$$[T]^{\beta}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

27. Seja $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ onde L é a reflexão através do plano $3x + 2y + z = 0$.

a) Encontre $L(x, y, z)$.

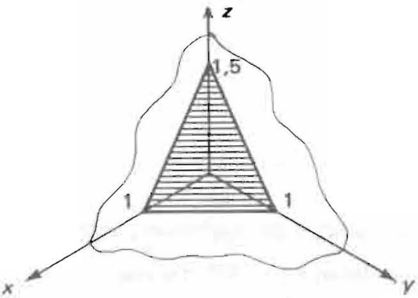
b) Encontre uma base ordenada γ de $\mathbf{R}^3$, tal que

$$[T]^{\gamma}_{\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

28. Encontre a expressão da transformação linear $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ que é uma rotação de $\pi/3$ em torno da reta que passa pela origem e tem a direção do vetor $(1, 1, 0)$.

*29. Um espelho plano está apoiado em uma parede vertical formando um ângulo de $30°$ com ela. Se um feixe de luz de raios paralelos for emitido verticalmente (do teto para o chão) determine a direção dos raios refletidos.

*30. Um espelho plano triangular é apoiado no canto de uma sala da forma descrita na figura abaixo.



Em que direção será refletido um feixe de luz de raios paralelos emitidos verticalmente de cima para baixo?

5.6.1 Respostas

3. *a*) $T(x, y, z) = (2x + y, y - z)$
   b) $\mathbf{v} = (x, 3 - 2x, 1 - 2x)$

5. *a*) $T(x, y) = (y, x)$ *b*) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

7. $A(x, y) = \left(\dfrac{x + y}{2}, \dfrac{x - y}{2}\right)$

11. $T(x, y) = \left(\dfrac{x - y}{2}, \dfrac{x - y}{2}, 2x + y\right)$

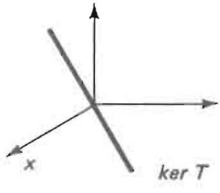
13. *a*) $[R \circ S] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *b*) $[S \circ R] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

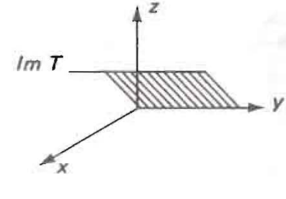
15. *a*) $\mathbf{v} = (x, -x)$ *b*) $\mathbf{v} = (x, 0)$

17. *d*) $\dim X = 3 \times 2 = 6$

19. *a*) $ker\, T = [(1, 1, 0)]$ base $= \{(1, 1, 0)\}$
   b) $\dim Im\, T = 3 - \dim ker\, T = 2$ Veja (5.3.9).
   c) Não. $\dim Im\, T = 2$.

d)





21. *a*) (Veja Exemplo 4 de 4.2.2) base deste espaço: $\{1, x, x^2, x^3\}$
b) (Veja Exemplo 5 de 5.1.2)
c) $ker\ T = \{P(x) = k \text{ (constante)}\}$ base: $\{1\}$
$Im\ T = \{P(x) = ax^2 + bx + c,\ a,\ b,\ c \in \mathbb{R}\}$ base: $\{1, x, x^2\}$

23. $S(x, y) = (y - \frac{3}{2}x,\ y + \frac{x}{2},\ -3x - 2y)$.

24. $ker\ T_B = \{x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x = 0 \text{ e } z = 2y\}$ base: $\{0, 1, -2)\}$
$Im\ T_B = [(0, 1, 0), (0, 1, -1)]$ base: $\{(0, 1, 0), (0, 1, -1)\}$
$ker\ T_A = [(1, 0)]$ $Im\ T_A = [(1, 2, 1)]$
$ker\ T_B \circ T_A = [(1, 0)]$ $Im\ T_B \circ T_A = [(0, 0, 1)]$

25. *a*) $T(x, y) = \frac{1}{5}(-4x + 3y,\ 3x - 4y)$

b) α pode ser qualquer base $\{v_1, v_2\}$ tal que v_1 pertença à reta e v_1 e v_2 sejam perpendiculares, por exemplo, $\alpha = \{(1, 3), (-3, 1)\}$

27. *a*) $T(x, y, z) = \frac{1}{7}(-2x - 6y - 3z,\ -6x + 3y - 2z,\ -3x - 2y + 6z)$

b) γ pode ser qualquer base $\{v_1, v_2, v_3\}$ do $\mathbb{R}^3$ tal que v_1 e v_2 pertençam ao plano e v_3 seja normal ao plano dado. Por exemplo, $\gamma = \{(1, 0, -3), (0, 1, -2), (3, 2, 1)\}$.