공대생을 위해 적은 복소수에 대한 토막글

mcpark

2014년 3월 31일

1 복소수에 대한 간략한 소개

알다시피 복소수는 실수부와 허수부 두 부분으로 나뉘어 있다. 즉 임의의 복소수 z는 두 실수 a, b와 단위 허수 i를 이용해 언제나 $z = a + bi$꼴로 표현이 가능하다 (여기서 $i = \sqrt{-1}$). 사실 허수라는 표현은 상당히 받아들이기 거북스러운 표현이라고 생각하는데, 이 이름으로 인해 마치 복소수가 실수와는 달리 어떠한 가상의 수, 꾸며낸 수라는 잘못된 느낌을 주기 쉽다. 하지만 이는 음수가 처음 발견되었을 때 이를 부정하던 사람들이, 무리수가 처음 발견되었을 때 이를 부정하던 사람들이 보였던 태도와 다를 바 없다고 생각한다. 초등학교 때 음수를 자연스럽게 받아들였듯이, 중학교 때 무리수를 자연스럽게 받아들였듯이 복소수도 자연스럽게 받아들이자.

복소수의 실수부와 허수부를 나타내는 표현으로 $\mathbf{Re}\{z\}$와 $\mathbf{Im}\{z\}$가 있다. 즉 **Re**는 중괄호 안에 들어있는 복소수의 실수부를 의미하고 **Im**은 허수부를 의미한다.

Example 1. 다음을 구하시오.
$\mathbf{Re}\{3+2i\}$, $\mathbf{Im}\{2-7i\}$, $\mathbf{Re}\{3i^2+2-i\}$, $\mathbf{Im}\{9i^3+2i^2-i\}$

Solution. 3, −7, −1, −10. □

2 복소수의 계산

복소수의 덧셈과 뺄셈의 규칙은 간단하다. 실수부는 실수부끼리 더하고 빼고, 허수부는 허수부끼리 더하고 뺀다! 예를 들어 두 개의 복소수 $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$의 덧셈과 뺄셈을 하면

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i,$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i.$$

어디선가 많이 본 듯한 내용이다. 바로 벡터의 덧셈, 뺄셈의 경우와 유사함을 알 수 있다. 따라서 복소수를 벡터와 같이 평면상에 나타내면 그림 1과 같다. 만약

$b=0$이면 복소수는 실수부만이 존재하고 그림에서 $\Re$축(실수축) 위에 존재하므로 이제까지 실수를 수직선 위의 한 점으로 표현해 왔던 것이 평면상에 복소수를 나타내는 표현의 특수한 경우임을 알 수 있다. 이렇게 복소수를 나타낸 평면을 복소평면이라 한다.

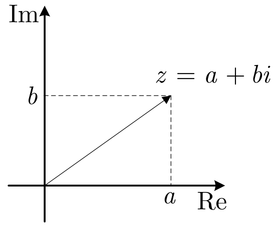

그림 1: complex plane

Example 2. $a+2+2bi=3b+(a-1)i$일 때 a와 b를 구하시오.

Solution. $a+2=3b$, $2b=a-1$을 연립해 풀면 $a=7$, $b=3$. □

복소수의 덧셈, 뺄셈이 평면에서 벡터의 덧셈, 뺄셈과 같은 표현임을 알았다. 그렇다면 이번에는 복소수의 곱셈이 갖는 의미는 무엇인지 생각해 볼 필요가 있다. 우선 실수의 곱셈을 복소평면 상에서 생각해 보자 실수 1은 복소평면 상에서 $(1,0)$의 위치에 찍힌 점으로 표현된다. 여기에 -1을 곱하면 $(-1,0)$의 위치로 점이 이동하게 된다. 만약 -1을 곱하는 과정을 i를 두 번 곱하는 과정으로 생각한다면 $(1,0)$에 위치한 점이 반시계방향으로 90°씩 두 번 회전한 것으로 생각할 수 있지 않을까? 이러한 생각이 맞는지 확인해 보자 1에 i를 한 번 곱하면 $1\cdot i=i$이고 이는 그림 1에서 $a=0$, $b=1$을 대입한 결과 이므로 $(0,1)$에 위치함을 알 수 있다. 앞서 생각했던 내용이 옳음을 직관적으로 알 수 있다.

이제 임의의 복소수끼리 곱했을 경우 어떠한 결과를 얻을 수 있는지 알아볼 차례이다. 그전에 $z=a+bi$의 다른 표현법을 알아보자. 그림 1에서 원점으로부터 z까지 거리를 r이라 하고 실수축으로부터의 각을 θ라 하면 $a=r\cos\theta$, $b=r\sin\theta$이므로 z를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta).$$

이제 또 다른 복소수를 z'이라 하고 원점으로부터의 거리를 r', $\Re$축으로부터의 각을 θ'이라 하면 $z=r'(\cos\theta'+i\sin\theta')$으로 나타낼 수 있다. 이제 z와 z'을 곱해보면

$$\begin{aligned} zz' &= rr'\left[\cos\theta\cos\theta'+i(\sin\theta\cos\theta'+\cos\theta\sin\theta')-\sin\theta\sin\theta'\right] \\ &= rr'\left[\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')\right]. \end{aligned}$$

이 결과를 해석해 보면 두 복소수를 곱한 결과는 크기는 각각의 크기를 곱한 것과 같고 각은 각각의 각을 더한 것과 같음을 알 수 있다. 조금 전 1에 i를 곱하던 과정을

생각해 보면 i는 크기는 1이고 각은 $90°$ 이므로 우리의 예상이 옳은 결과임을 알 수 있다. 복소수와 복소수 자신의 켤레복소수를 곱하면 어떻게 될까? $z = a+bi$와 z의 켤레복소수 $z^* = a-bi$를 곱하면 $zz^* = a^2+b^2 = r^2$ 임을 알 수 있다. 즉 $\sqrt{zz^*} = r$이고 이를 $|z|$로 나타낸다. 즉,

$$|z| = \sqrt{zz^*}.$$

복소수의 실수부와 허수부가 정해지면 그 복소수는 유일하게 하나로 결정된다. 마찬가지로 복소수의 크기와 각이 정해지면 그 복소수는 유일하게 하나로 결정된다. 따라서 복소수를 실수부와 허수부로 표현하는 대신 크기와 각으로 다음과 같이 표현하기도 한다.

$$z = |z|\angle\theta.$$

$z = a+bi$와 같은 표현을 직각좌표형식이라 하고 $z = |z|\angle\theta$와 같은 표현을 극좌표형식이라 한다. 직관적으로 $z^* = |z|\angle-\theta$ 임을 알 수 있다.

Example 3. $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$를 극좌표형식으로 나타내시오.

Solution. $1\angle 60°$. □

Example 4. $z_1 = 3\angle 22.5°$, $z_2 = 5\angle 75°$ 일 때 z_1z_2를 구하시오.

Solution. 두 복소수를 곱한 결과는 크기끼리는 곱하고 각끼리는 더해주면 되므로 $z_1z_2 = 3\cdot 5\angle(25.5°+75°) = 15\angle 100.5°$. □

Example 5. $x^3 = -1$ 의 모든 근을 구하시오.

Solution. $x = r\angle\theta$ 라 하면 주어진 방정식은 $r^3\angle 3\theta = 1\angle\pi+2\pi n$, $(n = 1,2,3,\cdots)$이 된다.(평면상의 점을 $360°$ 회전시켜 보라 그 점의 위치가 바뀌는가...) r은 거리이므로 항상 양수이고 따라서 $r = 1$이다. $3\theta = \pi+2\pi n$, $\theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}$ 이므로 가능한 θ의 값은 $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$, $\theta_2 = \pi$, $\theta_3 = \frac{5\pi}{3}$ 이다.($n = 3$인 경우부터는 결국 $\frac{\pi}{3}$, π, $\frac{5\pi}{3}$의 반복이므로...) 따라서 답은 $1\angle\frac{\pi}{3}$, $1\angle\pi$, $1\angle\frac{5\pi}{3}$ 이다. 이를 직각좌표형식으로 표현하면 각각 $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, -1, $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 이고 이는 주어진 방정식을 $(x+1)(x^2-x+1) = 0$로 인수분해 하고 근의 공식을 이용하여 구한 결과와 일치함을 알 수 있다. □

앞서 복소수의 덧셈에서 벡터와의 유사성을 보았다. 이러한 유사성을 또 하나 들어보려 한다. 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 내적은 다음과 같이 정의한다.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta$$

여기서 $|\vec{a}| = a$, $|\vec{b}| = b$이고 θ는 두 벡터의 사이 각이다. 복소수에서도 이와 유사한 것을 나타낼 수 있다. $z_1 = |z_1|\angle\theta_1$, $z_2 = |z_2|\angle\theta_2$ 라 하면

$$\begin{aligned}\mathbf{Re}\{z_1z_2^*\} &= \mathbf{Re}\{|z_1||z_2|\angle(\theta_1-\theta_2)\} \\ &= |z_1||z_2|\cos\theta, \quad (\theta = \theta_1-\theta_2).\end{aligned}$$

실수부 대신 허수부를 취하면 결과가 어떻게 될지 생각해 보고 이것은 어떤 것과 연관 지어 볼 수 있을지 생각해 보자.

3 복소수와 삼각함수의 관계

이 내용에 관해서는 고등학교 수학의 범위를 벗어나지 않는 수준에서 어떻게 설명해야 할 지 모르겠다. 수학적으로 체계 있는 설명은 못하더라도 복소수와 삼각함수 간의 관계를 그럴듯하게라도 받아들이도록 설명하고자 한다.

$y = e^{ax}$ 를 생각해 보자 $\frac{dy}{dx} = ae^{ax} = ay$ 임은 이과생이라면 누구나 알 것이다. 그렇다면 이번에는 $z = \cos\theta + i\sin\theta$ 를 생각해 보자. z를 θ 에 관해 미분하면

$$\frac{dz}{d\theta} = -\sin\theta + i\cos\theta = i(\cos\theta + i\sin\theta) = iz.$$

그렇다면 $y = e^{ax}$ 의 경우에 비추어 볼 때 $z = e^{i\theta}$ 가 아닐까? 여기서 이를 증명할 수는 없지만 이는 맞는 생각이다. 이로부터 복소수의 또 다른 표현을 얻었다.[1]

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}. \tag{1}$$

이제 우리는 복소수를 세 가지 형태로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{직각좌표 형식 :}\quad & z = a + bi \\ \text{극좌표 형식 :}\quad & z = |z|\angle\theta \\ \text{지수함수 형식 :}\quad & z = re^{i\theta} \end{aligned}$$

이 세 가지 모두 복소수를 표현하는데 자주 사용된다.

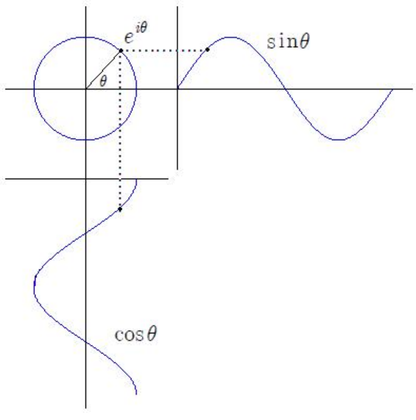

그림 2: 복소 지수함수와 삼각함수의 관계 도시

[1] 오일러의 항등식이라 한다.

식 (1)에 i 대신 $-i$를 대입하면 $\cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$ 이다. 이제 둘을 더하거나 빼서 정리하면

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}, \tag{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}. \tag{3}$$

이를 통해 지수함수와 삼각함수 사이의 관계를 얻었다. 식 (3)의 우변을 θ에 대해 미분해 식 (2)의 우변이 됨을 확인해 보고 마찬가지로 식 (2)를 미분해 식 (3)에 -1을 곱한 결과가 됨을 확인해 보자 이는 $\cos\theta$, $\sin\theta$에 대한 식 (2), 식 (3)의 표현이 옳다는 간접적인 증거가 된다.

Example 6. 다음 복소수들을 각각 극좌표 형식, 지수함수 형식으로 나타내시오.

$$2i,\ 1+i,\ 1-i,\ -1$$

Solution. $2\angle 90°$, $2e^{i\frac{\pi}{2}}$ // $\sqrt{2}\angle 45°$, $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ // $\sqrt{2}\angle -45°$, $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ // $1\angle 180°$, $e^{i\pi}$.[2] □

[2] $e^{i\pi}=-1$을 정리하면 $e^{i\pi}+1=0$이다. 이 식에는 수학에서 중요한 다섯 가지의 상수 e, i, π, 1, 0가 모두 들어있다.