Ejercicios práctica 2

2) Estudiar la continuidad, la diferenciabilidad y la continuidad de las derivadas parciales, del campo escalar $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definido por:

$$f(x,y)=\frac{x^3\cdot(y-1)^2}{x^2+|y-1|}\quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,1)\}\qquad f(0,1)=0$$

1º Estudiamos la continuidad de f:

☆ $\begin{cases} \bullet\ U=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,1)\} \text{ abierto} \\ \bullet\ f|_U \text{ continua por ser función racional} \\ \bullet\ \text{Caract. local continuidad} \Rightarrow f \text{ continua en todo } U \end{cases}$

☆ Límites parciales:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0} f(x,1)=\frac{x^3\cdot 0}{x^2}=0 \\ &\lim_{y\to 1} f(0,y)=\frac{0}{|y-1|}=0 \end{aligned}\right\}\text{ existe y coinciden}$$

☆ Límites direccionales:

$$\lim_{x\to 0} f(x,\lambda x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\cdot(\lambda x-1)^2}{x^2+|\lambda x-1|}=\frac{0}{-1}=0\Rightarrow \text{existe y coincide}$$

☆ Acotamos:

$$|f(x,y)|=\frac{|x^3|\cdot(y-1)^2}{x^2+|y-1|}\leq$$

$$\frac{(y-1)^2}{x^2+|y-1|}\leq 1\ ;\ (y-1)^2\leq x^2+|y-1|\ ;\quad 0\leq x^2+|y-1|-(y-1)^2$$

no tiene pq cumplirse

③ Probar que el campo escalar $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definido por:

$$f(x,y)=\frac{x^6(x^2+y^2)}{(y-x^2)^2+x^6}\quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\qquad f(0,0)=0$$

es diferenciable en $\mathbb{R}^2$.

1º Estudiamos la continuidad de f:

☆ $\begin{cases} \bullet\ U=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \text{ abierto} \\ \bullet\ f|_U \text{ continua por ser función racional} \\ \bullet\ \text{Caract. local continuidad} \Rightarrow f \text{ continua en todo } U \end{cases}$

☆ Límites parciales:

$$\lim_{x\to 0} f(x,0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^6\cdot(x^2)}{(-x^2)^2+x^6}=\lim_{x\to 0}\frac{x^8}{x^4+x^6}\overset{\text{L'Hôp}}{=}0$$

$$\lim_{y\to 0} f(0,y)=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2}=0$$

existen y coinciden

☆ Límites direccionales:

$$\lim_{x\to 0} f(x,\lambda x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^6(x^2+\lambda^2x^2)}{(\lambda x-x^2)^2+x^6}=$$