Université catholique de Louvain | École de Physique
Faculté des Sciences | 12 December 2024

LPHYS2114 Dynamique non-linéaire
Série 11 – Non linear maps in the plane

1. Hénon map. The Hénon map is defined by a function f by

$$f(x, y) = (a - x^2 + by, x). \tag{1}$$

We are interested in the 2-periodic points of this map.

(a) Show that the map has points which are 2-periodic if and only if $4a > 3(1 - b)^2$. Calculate the 2-periodic orbits in this case.

(b) We consider the case $a = 27/25,\ b = 2/5$. Do the 2-periodic orbits exist in this case ? Are these orits hyperbolic ? If so, de quel type d'orbites hyperboliques s'agit-il ?

The 2-periodic points for $a = 27/25, b = 2/5$ are shown in Figure 1(a). To illustrate the behaviour of the corresponding periodic orbits, the figure shows la figure montre également les images d'un disque centré en un des points (bord bleu) sous une, deux et trois itérations (bords vert, rouge et violet).

2. Calcul perturbatif des variétés stable-instable. On considère une itération du plan définie par la fonction f avec

$$f(x, y) = (x/2 - x^2/4 + 7y^2, 2y + xy - 7x^2/4). \tag{2}$$

(a) Montrer que $p = (0, 0)$ est un point fixe de type selle.

(b) Calculer le développement en série de Taylor jusqu'à l'ordre 3 des fonctions s et u qui déterminent les variétés stable et instable locales de p.

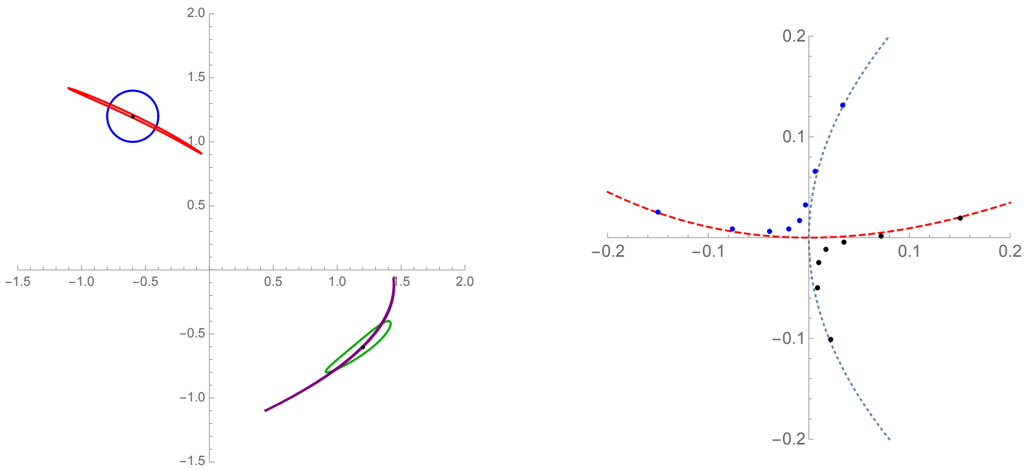
La figure 1(b) montre les variétés stable et instable au voisinage de $p = (0, 0)$, ainsi que quelques itérés de deux points proches de ces variétés.

3. A physical map. In classical physics, des itérations apparaissent souvent dans la description de systèmes soumis à des chocs instantanés périodiques. In this exersize, we condiser Dans cet exercice, nous consiérons un tel système. Il s'agit d'une particule ponctuelle classique en une dimension. Elle est subit une force de friction fluide et des chocs aux temps $t = nT$, $n \geqslant 0$ pour un certain $T > 0$ fixé. L'équation du mouvement est donnée par

$$\ddot{x} = -\gamma\dot{x} + f(x)\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t - nT). \tag{3}$$

Here, $\gamma > 0$ is the coefficient of friction and $\delta(t)$ is the Dirac delta. The goal of this exercise is to analyse the movement of the particle described by the map in two dimensions.

(a) Write the differential equation as a system of order 1 for x and $y = \dot{x}$. Sketch the phase portrait in absence of Dessiner son portrait de phase en l'absence des chocs, i.e. for $f = 0$.



(a) (b)

FIGURE 1 – (a) Les points 2-périodiques de l'application de Hénon avec $a = 27/25, b = 2/5$ (exercice 1). (b) Les variétés stable (rouge) et instable (bleu) locales de $p = (0, 0)$ pour le voisinage $B = [-\delta, \delta] \times [-\delta, \delta]$ avec $\delta = 0.2$ (exercice 2). Les points indiqués sur l'illustration sont les premiers itérés de $x = (0.15, 0.01925)$ (noir) et $x = (-0.15, 0.02575)$ (bleu).

(b) In the series, we assume that f is non zero. Show that for $nT < t < (n+1)T$, $n \geqslant 0$, the solution of hte system is given by

$$x(t) = A_n + B_n e^{-\gamma t}, \quad y(t) = -\gamma B_n e^{-\gamma t} \tag{4}$$

where A_n, B_n are the constants of integration.

(c) The function $x = x(t)$ i est-elle continue ? Qu'en est-il de sa dérivée $y = y(t)$? Montrer que le chocs conduisent à des sauts de vitesse que l'on calculera par l'intégration de son équation différentielle pour $nT - \epsilon \leqslant t \leqslant nT + \epsilon$ dans la limite $\epsilon \to 0^+$.

(d) En déduire des relations entre les coefficients A_n, B_n et A_{n+1}, B_{n+1} pour tout $n \geqslant 0$.

(e) On note par

$$x_n = \lim_{\epsilon \to 0^+} x(nT - \epsilon), \quad y_n = \lim_{\epsilon \to 0^+} y(nT - \epsilon) \tag{5}$$

la position et vitesse de la particule juste avant le n-ième choc. Établier la relation de récurrence

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1 - \mathrm{e}^{-\gamma T}}{\gamma}(y_n + f(x_n)), \tag{6a}$$

$$y_{n+1} = \mathrm{e}^{-\gamma T}(y_n + f(x_n)). \tag{6b}$$

(f) On suppose maintenant que $f(x) = f_0$ où f_0 est une constante. Trouver la solution de l'itération en déduire le comportement du mouvement de la particule à grand temps.

For certain Pour certains choix non-linéaires de f, the la dynamique de l'itération (6) est très riche. Figure **??** is given by one en donnent une idée pour le choix $f(x) = -\sin x$.

,û,

,û,,û,