Розрахункова робота з теорії імовірностей
Варіант 51

Воробйов Георгій

5 квітня 2022 р.

Зміст

1 Задача 1

За таблицею розподілу координат дискретного випадкового вектора $\overrightarrow{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$

Знайти

1. ряди розподілу координат ξ_1 та ξ_2
2. Функції розподілу $F_{\xi_1}(x)$ та $F_{\xi_2}(y)$ відповідно та побудувати графіки цих функцій

3. Функцію розподілу $F_{\overrightarrow{\xi}}(x, y)$ випадкового вектора
4. Математичні сподівання координат та кореляційну матрицю
5. Умовні ряди розподілу для кожної координати
6. Умовні математичні сподівання для кожної координати з перевіркою

Дана таблиця:

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-6	-5	-4	-1
0	0,15	0,04	0,02	0,1
1	0,02	0,11	0,13	0,04
3	0,13	0,06	0,07	0,13

1.1 Ряди розподілу координат ξ_1 та ξ_2

Для отримання ряду розподілу відповідних координат вектора ξ_i треба додати елементи у кожному рядку/стовпці.

Тоді маємо

$$P(\xi_1 = 0) = 0,15 + 0,04 + 0,02 + 0,1 = 0,31;$$
$$P(\xi_1 = 1) = 0,02 + 0,11 + 0,13 + 0,04 = 0,3;$$
$$P(\xi_1 = 3) = 0,13 + 0,06 + 0,07 + 0,13 = 0,39;$$

Перевірка:

$$0,31 + 0,3 + 0,39 = 1$$

тоді ряд розподілу випадкової величини ξ_1

ξ_1	0	1	3
	0,31	0,3	0,39

Аналогічно даний ряд будується і для вектора ξ_2

ξ_2	-6	-5	-4	-1
	0,3	0,21	0,22	0,27

Перевірка:

$$0,3 + 0,21 + 0,22 + 0,27 = 1$$

1.2 Функції розподілу $F_{\xi_1}(x)$ та $F_{\xi_2}(x)$

За допомогою ряду розподілу та означенню $F_\xi(x)$ побудуємо функцію розподілу для ξ_1 та ξ_2

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = \sum_{i<x} p_i$$

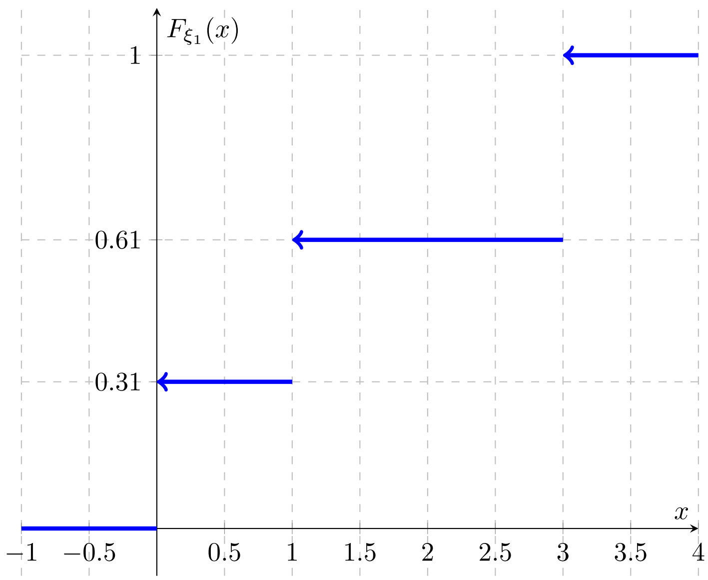
Тоді ми маємо наступне

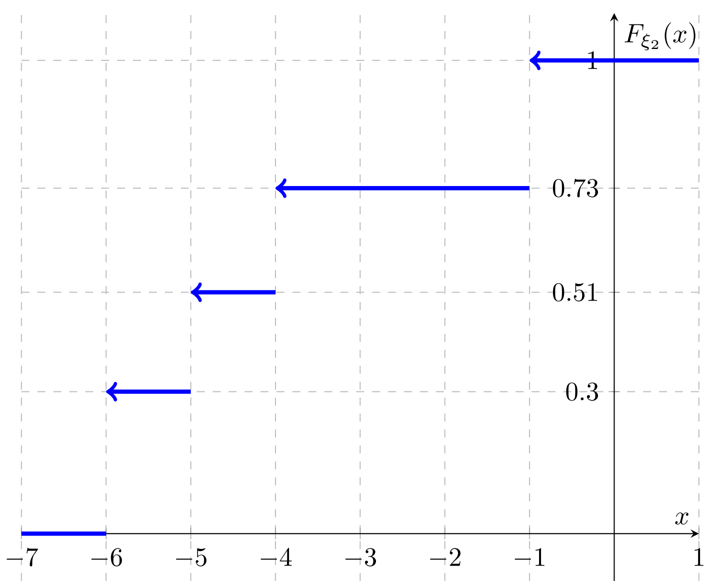
$$F_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0] \\ 0,31 & x \in (0, 1] \\ 0,61 & x \in (1, 3] \\ 1 & x \in (3, \infty) \end{cases}$$

Аналогічно розрахуємо функцію розподілу для ξ_2

$$F_{\xi_2}(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, -6] \\ 0,3 & x \in (-6, -5] \\ 0,51 & x \in (-5, -4] \\ 0,73 & x \in (-4, -1] \\ 1 & x \in (-1, \infty) \end{cases}$$

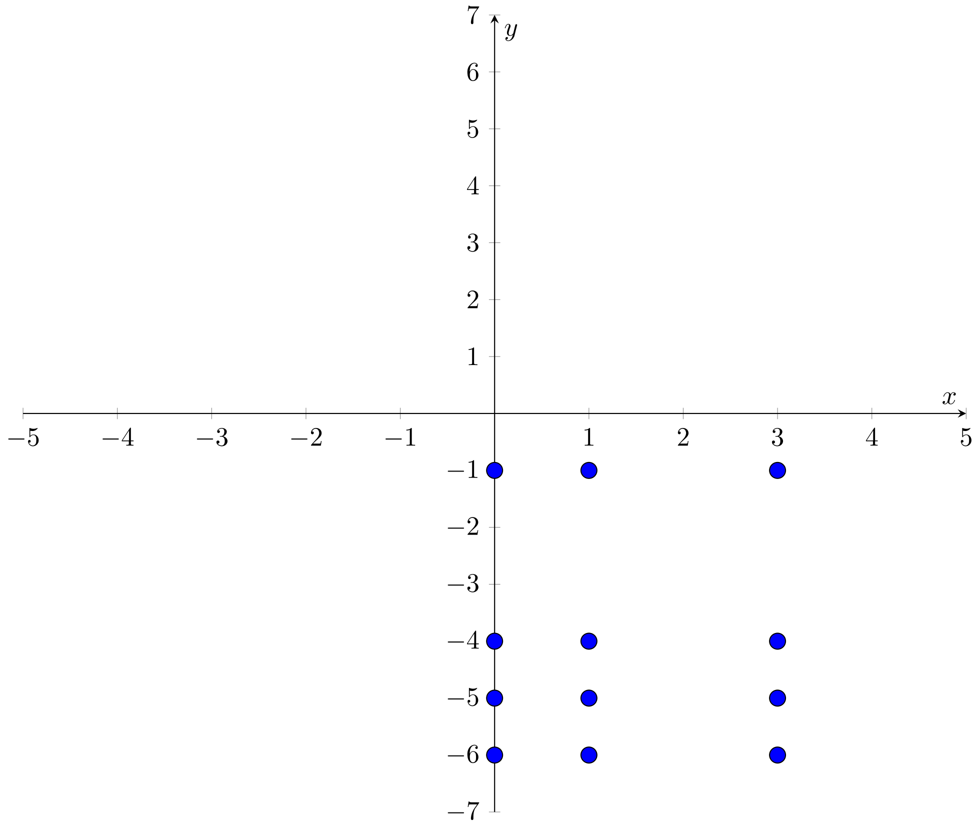
Графіки даних функцій приведені нижче:





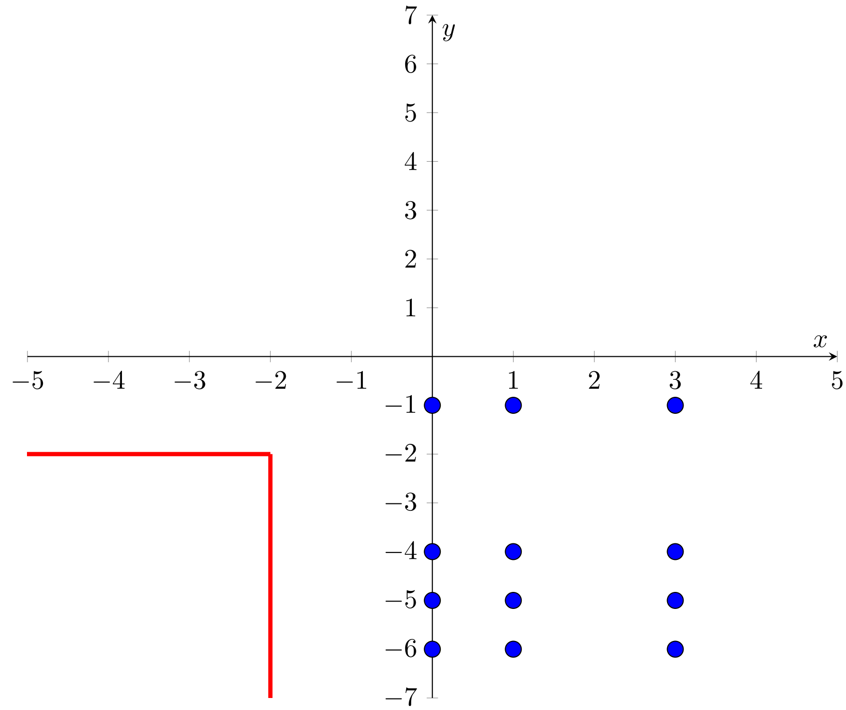
1.3 Функція розподілу випадкового вектора

Намалюємо точки на площині:

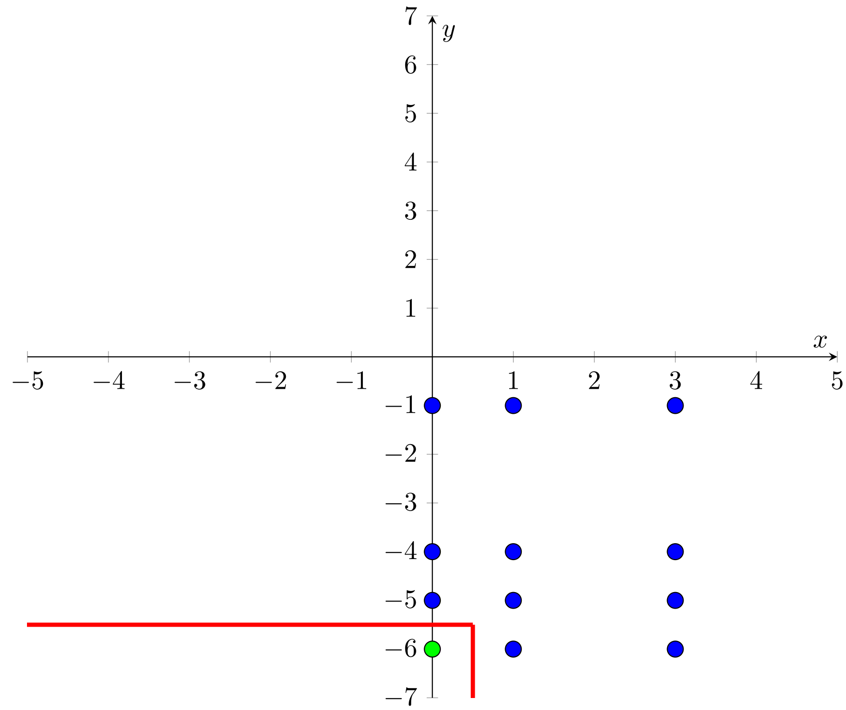


Розглянемо кожну область окремо

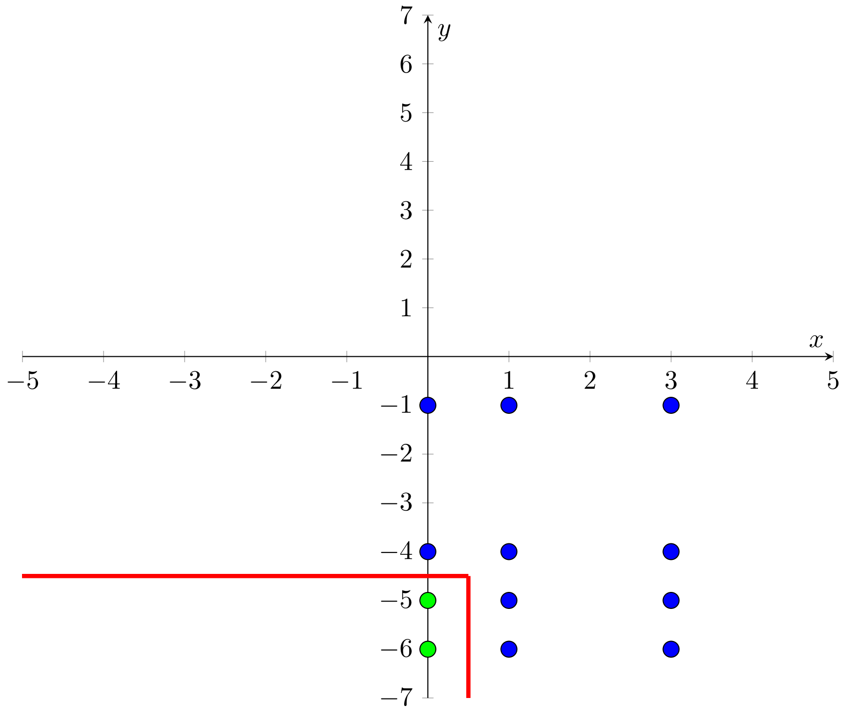
1. $(x \leq 0) \vee (y \leq -6)$
   $F_{\overrightarrow{\xi}}(x, y) = 0$



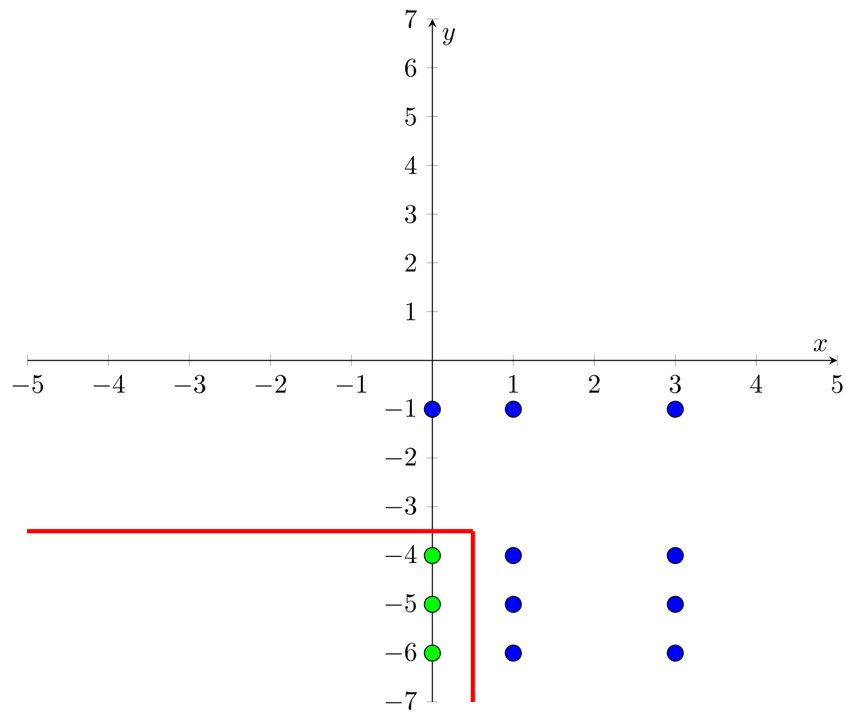
2. $(0 < x \leq 1) \wedge (-6 < y \leq -5)$
$F_{\overrightarrow{\xi}}(x, y) = P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -6\} = 0,15$



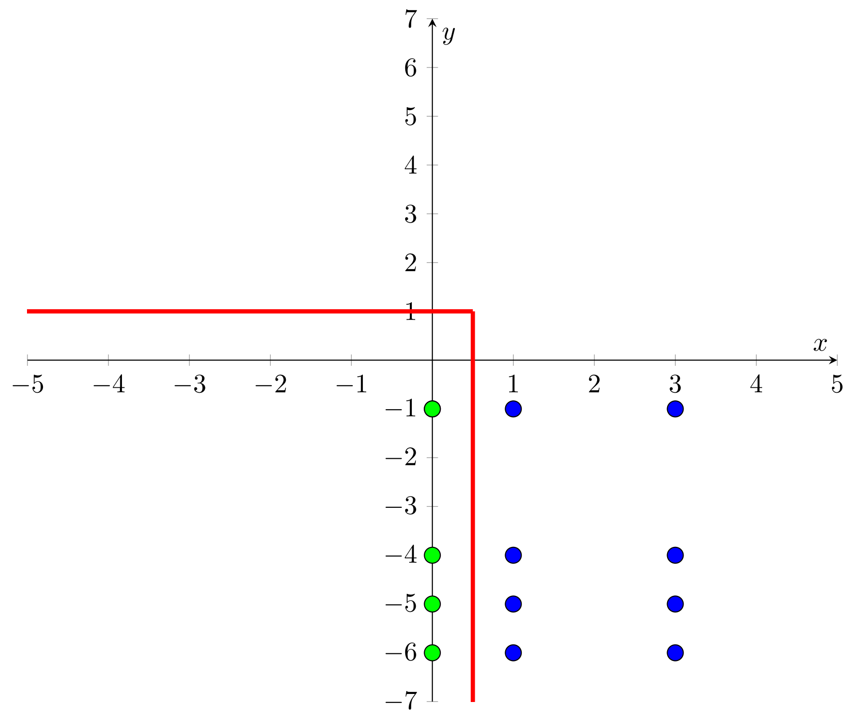
3. $(0 < x \leq 1) \wedge (-5 < y \leq -4)$
$F_{\overrightarrow{\xi}}(x, y) = P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -6\} + P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -5\} = 0,19$



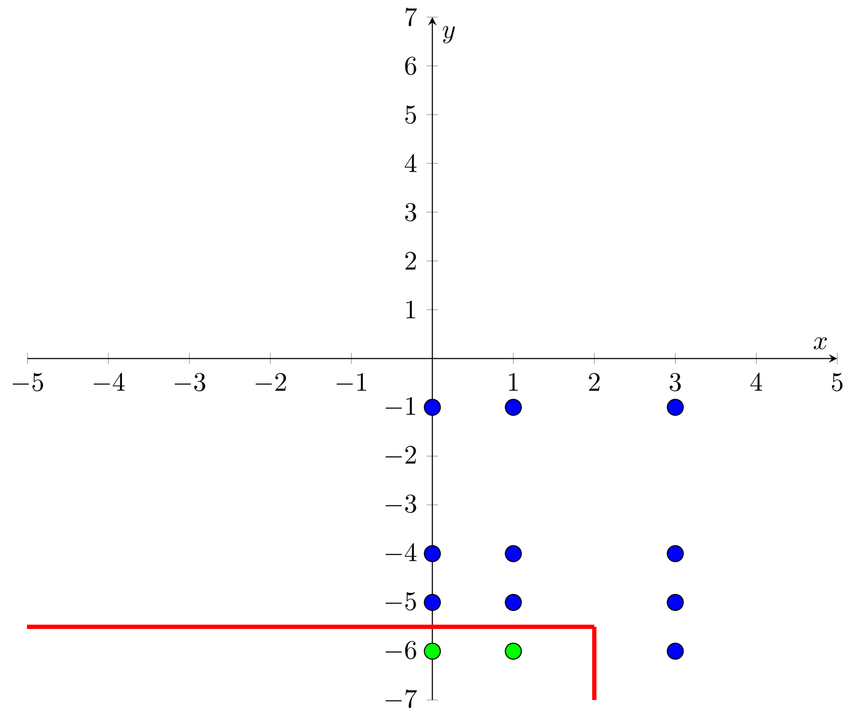
4. $(0 < x \leq 1) \wedge (-4 < y \leq -1)$
$F_{\overrightarrow{\xi}}(x, y) = P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -6\} + P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -5\} + P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -5\} = 0,21$



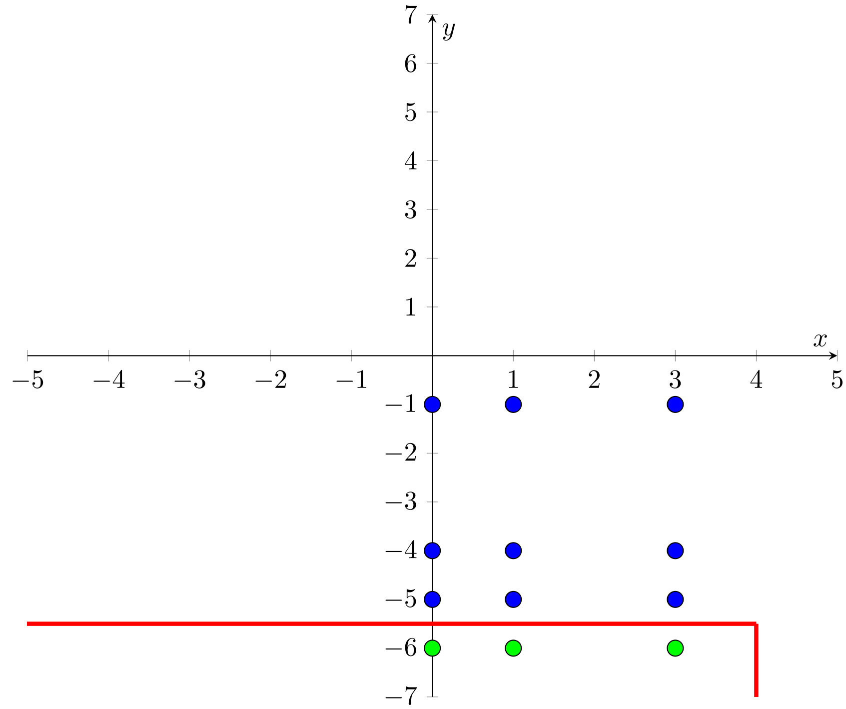
5. $(0 < x \leq 1) \wedge (y > -1)$
$F_{\overrightarrow{\xi}}(x, y) = P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -6\} + P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -5\} + P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -5\} + P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -1\} = 0,31$



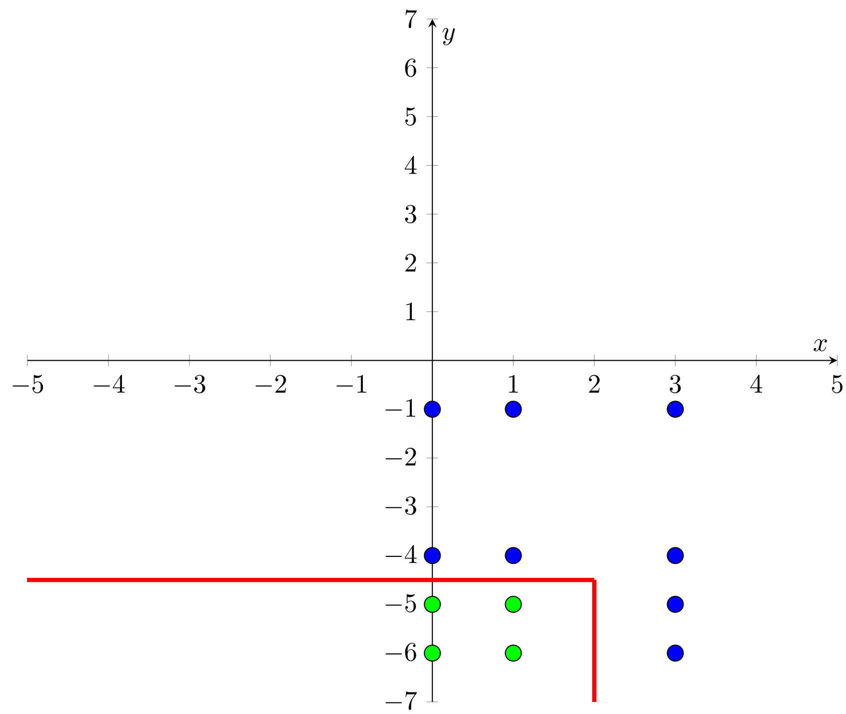
6. $(1 < x \leq 3) \wedge (-6 < y \leq -5)$
   $F_{\overrightarrow{\xi}}(x, y) = P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -6\} + P\{\xi_1 = 1, \xi_2 = -6\} = 0,17$



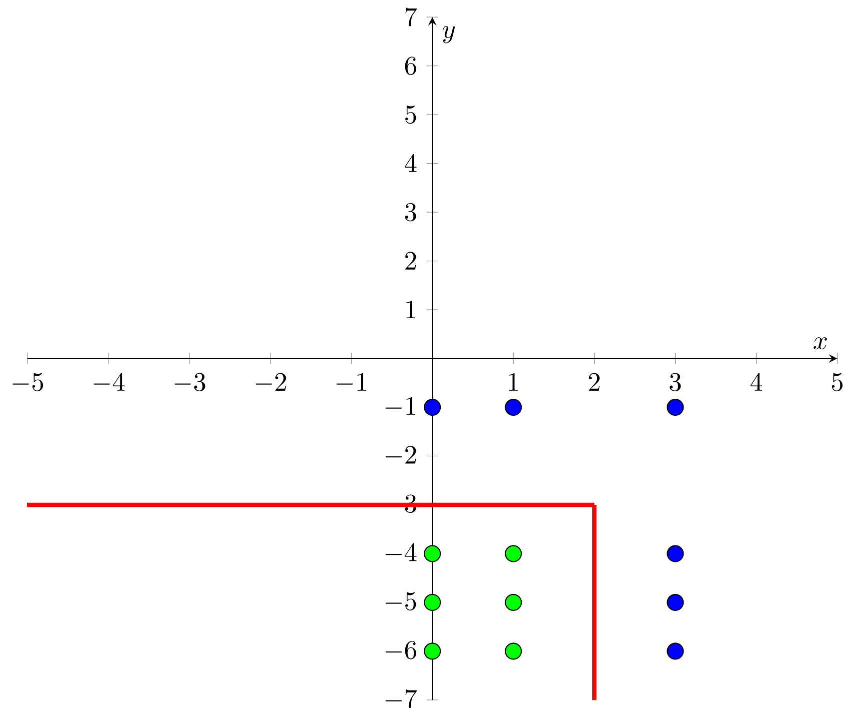
7. $(x > 3) \wedge (-6 < y \leq -5)$
$F_{\overrightarrow{\xi}}(x, y) = P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -6\} + P\{\xi_1 = 1, \xi_2 = -6\} + P\{\xi_1 = 3, \xi_2 = -6\} = 0,3$



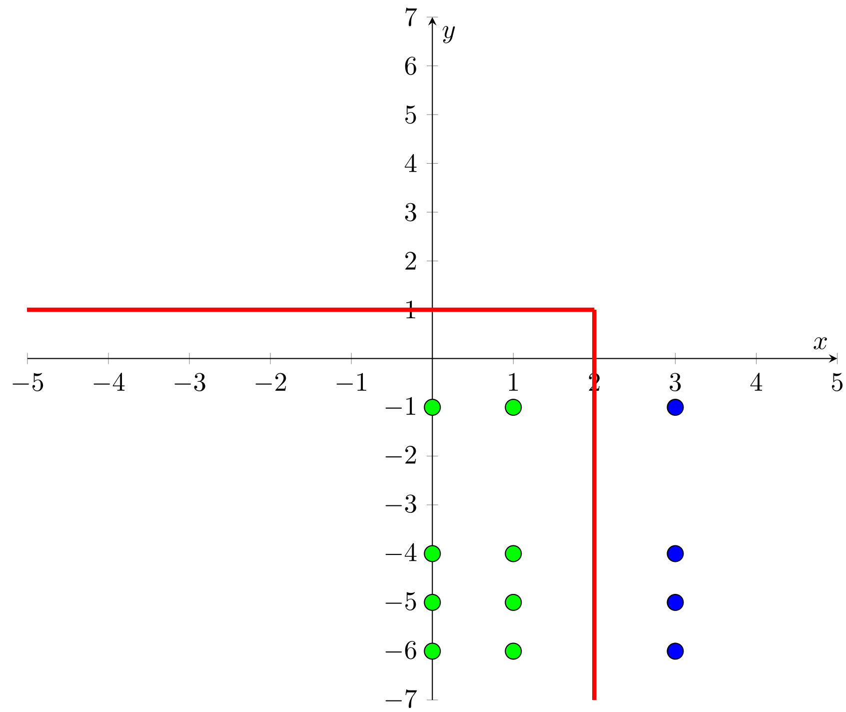
8. $(1 < x \leq 3) \wedge (-5 < y \leq -4)$
$F_{\overrightarrow{\xi}}(x,y) = P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -6\} + P\{\xi_1 = 1, \xi_2 = -6\} + P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -5\} + P\{\xi_1 = 1, \xi_2 = -5\} = 0,32$



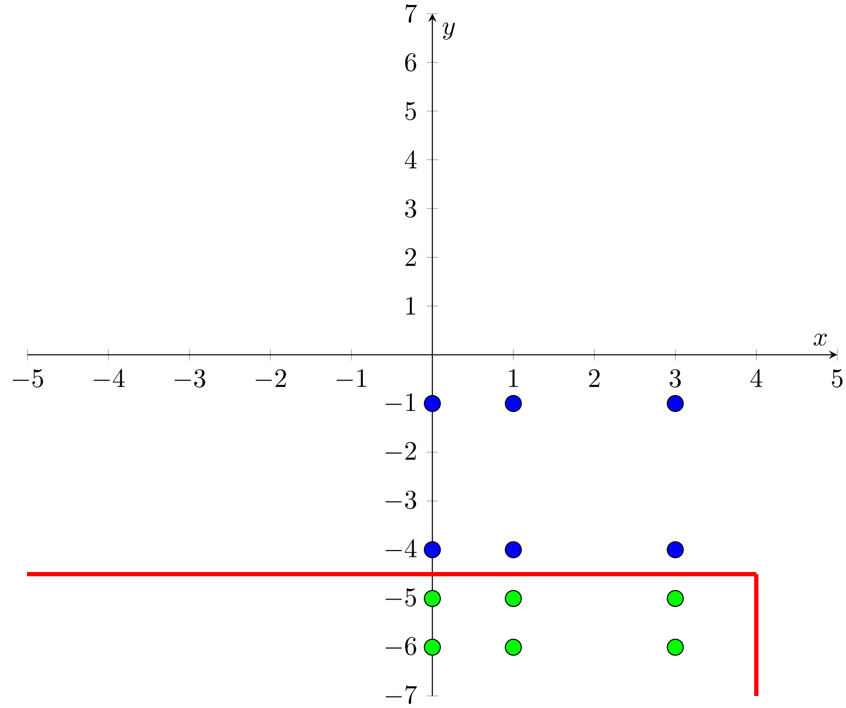
9. $(1 < x \leq 3) \wedge (-4 < y \leq -1)$
$F_{\overrightarrow{\xi}}(x, y) = P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -6\} + P\{\xi_1 = 1, \xi_2 = -6\} + P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -5\} + P\{\xi_1 = 1, \xi_2 = -5\} + P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -4\} + P\{\xi_1 = 1, \xi_2 = -4\} = 0,47$



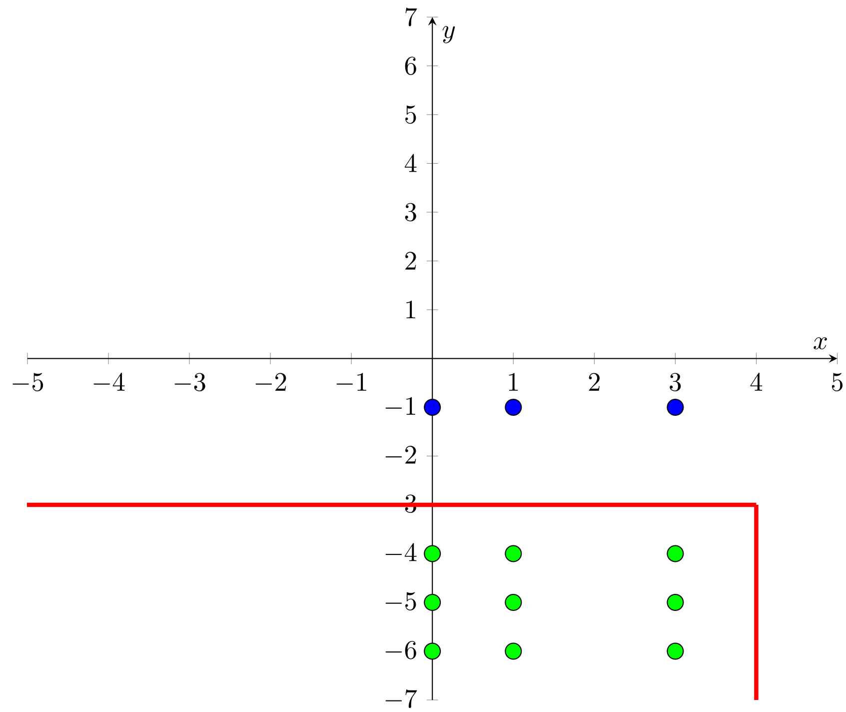
10. $(1 < x \leq 3) \wedge (y > -1)$
$F_{\overrightarrow{\xi}}(x,y) = P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -6\} + P\{\xi_1 = 1, \xi_2 = -6\} + P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -5\} + P\{\xi_1 = 1, \xi_2 = -5\} + P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -4\} + P\{\xi_1 = 1, \xi_2 = -4\} + P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -1\} + P\{\xi_1 = 1, \xi_2 = -1\} = 0{,}61$



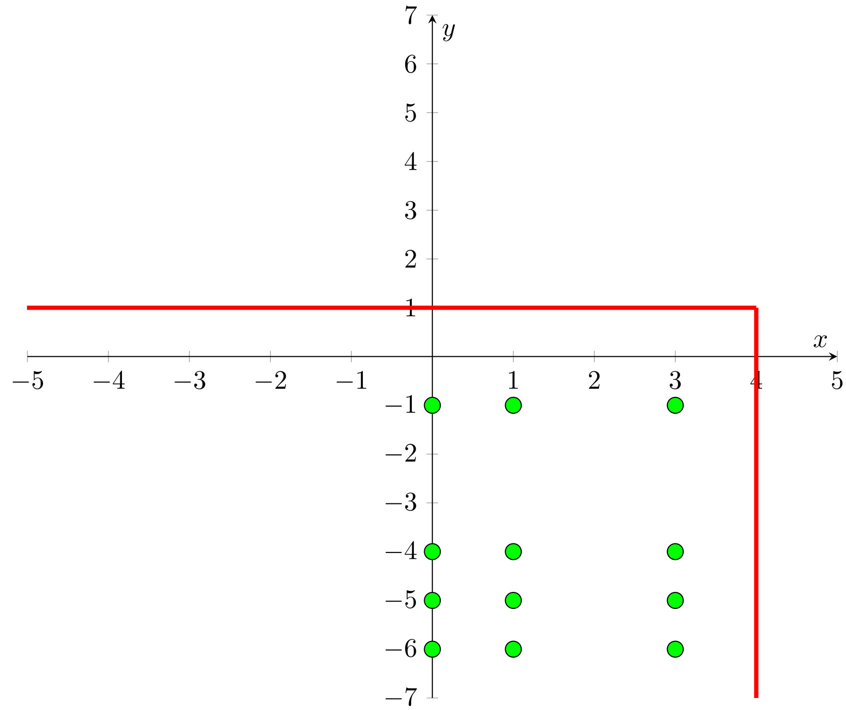
11. $(x > 3) \wedge (-5 < y \leq -4)$
$F_{\overrightarrow{\xi}}(x, y) = P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -6\} + P\{\xi_1 = 1, \xi_2 = -6\} + P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -5\} + P\{\xi_1 = 1, \xi_2 = -5\} + P\{\xi_1 = 3, \xi_2 = -6\} + P\{\xi_1 = 3, \xi_2 = -5\} = 0,51$



12. $(x > 3) \wedge (-4 < y \leq -1)$
$F_{\overrightarrow{\xi}}(x,y) = P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -6\} + P\{\xi_1 = 1, \xi_2 = -6\} + P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -5\} + P\{\xi_1 = 1, \xi_2 = -5\} + P\{\xi_1 = 3, \xi_2 = -6\} + P\{\xi_1 = 3, \xi_2 = -5\} + P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -4\} + P\{\xi_1 = 1, \xi_2 = -4\} + P\{\xi_1 = 3, \xi_2 = -4\} = 0,73$



13. $(x > 3) \wedge (-4 < y \leq -1)$
$F_{\overrightarrow{\xi}}(x, y) = 1$



Отримали сумісну функцію розподілу, яку можна записати у вигляді таблиці

$y \backslash x$	$x \leq 0$	$0 < x \leq 1$	$1 < x \leq 3$	$x > 3$
$y \leq -6$	0	0	0	0
$-6 < y \leq -5$	0	0,15	0,17	0,3
$-5 < y \leq -4$	0	0,19	0,32	0,51
$-4 < y \leq -1$	0	0,21	0,47	0,73
$y > -1$	0	0,31	0,61	1

Або:

$$F_{\overrightarrow{\xi}}(x,y)=\begin{cases}0 & (x\le 0)\vee(y\le -6)\\ 0,15 & (0<x\le 1)\wedge(-6<y\le -5)\\ 0,17 & (1<x\le 3)\wedge(-6<y\le -5)\\ 0,3 & (x>3)\wedge(-6<y\le -5)\\ 0,19 & (0<x\le 1)\wedge(-5<y\le -4)\\ 0,32 & (1<x\le 3)\wedge(-5<y\le -4)\\ 0,51 & (x>3)\wedge(-5<y\le -4)\\ 0,21 & (0<x\le 1)\wedge(-4<y\le -1)\\ 0,47 & (1<x\le 3)\wedge(-4<y\le -1)\\ 0,73 & (x>3)\wedge(-4<y\le -1)\\ 0,31 & (0<x\le 1)\wedge(y>1)\\ 0,61 & (1<x\le 3)\wedge(y>1)\\ 1 & (x>1)\wedge(y>1)\end{cases}$$

1.4 Математичні сподівання координат та кореляційна матрицю

Знаючи маргінальні ряди розподілу знайдемо математичні сподівання за означенням:

$$\mathbb{E}\xi_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 1 * 0,3 + 3 * 0,39 = 1,47$$

$$\mathbb{E}\xi_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = -6 * 0,3 - 5 * 0,21 - 4 * 0,22 - 1 * 0,27 = -4$$

Тепер порахуємо дисперсії та коваріації для даного розподілу:

$$\mathbb{E}\xi_1^2 = 3,81$$

$$\mathbb{E}\xi_2^2 = 19,84$$

$$\mathbb{D}\xi_1 = \mathbb{E}\xi_1^2 - (\mathbb{E}\xi_1)^2 = 1,6491$$

$$\mathbb{D}\xi_2 = \mathbb{E}\xi_2^2 - (\mathbb{E}\xi_2)^2 = 3,84$$

$$cov(\xi_1, \xi_2) = \mathbb{E}(\xi_1\xi_2) - \mathbb{E}\xi_1\mathbb{E}\xi_2 = (\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} x_i y_j p_{ij}) - \mathbb{E}\xi_1\mathbb{E}\xi_2 = -5,7 + 5,88 = 0,18$$

Тоді коваріаційна матриця має вид:

$$\mathcal{C}_{\overrightarrow{\xi}} = \begin{pmatrix} 1,6491 & 0,18 \\ 0,18 & 3,84 \end{pmatrix}$$

1.5 Умовні ряди розподілу для кожної координати

Порахуємо умовні імовірності за формулами

$$P\left\{\xi_1 = x_k | \xi_2 = y_j\right\} = \frac{P\left\{\xi_1 = x_k, \xi_2 = y_j\right\}}{P\{\xi_2 = y_j\}}$$

$$P\left\{\xi_2 = y_j | \xi_1 = x_k\right\} = \frac{P\left\{\xi_1 = x_k, \xi_2 = y_j\right\}}{P\{\xi_1 = x_k\}}$$

Розглянемо приклад розрахунку для $\xi_2 = -6$:

$$P\{\xi_1 = 0 | \xi_2 = -6\} = \frac{0.15}{0.3} = 0.5$$

$$P\{\xi_1 = 1 | \xi_2 = -6\} = \frac{0.02}{0.3} = \frac{1}{15}$$

$$\{\xi_1 = 3 | \xi_2 = -6\} = \frac{0.13}{0.3} = \frac{13}{30}$$

тоді маємо наступні таблиці умовного розподілу

ξ_1	0	1	3
$P\{\xi_1 = x_k \vert \xi_2 = -6\}$	0.5	$\frac{1}{15}$	$\frac{13}{30}$
$P\{\xi_1 = x_k \vert \xi_2 = -5\}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{11}{21}$	$\frac{6}{21}$
$P\{\xi_1 = x_k \vert \xi_2 = -4\}$	$\frac{2}{22}$	$\frac{13}{22}$	$\frac{7}{22}$
$P\{\xi_1 = x_k \vert \xi_2 = -1\}$	$\frac{10}{27}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{13}{27}$

ξ_2	-6	-5	-4	-1
$P\{\xi_2 = y_j \vert \xi_1 = 0\}$	$\frac{15}{31}$	$\frac{4}{31}$	$\frac{2}{31}$	$\frac{10}{31}$
$P\{\xi_2 = y_j \vert \xi_1 = 1\}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{13}{30}$	$\frac{4}{30}$
$P\{\xi_2 = y_j \vert \xi_1 = 3\}$	$\frac{13}{39}$	$\frac{6}{39}$	$\frac{7}{39}$	$\frac{13}{39}$

1.6 Умовні математичні сподівання для кожної координати з перевіркою

Розрахуємо умовне математичне сподівання через формули

$$\mathbb{E}(\xi_1|\xi_2 = y_j) = \sum_{k=1}^{3} x_k P\{xi_1 = x_k|\xi_2 = y_j\}$$

Аналогічна формула для $\xi_2|\xi_1$ Маємо наступні ряди розподілу:

ξ_2	-6	-5	-4	-1
$\mathbb{E}(\xi_1 \vert \xi_2)$	$\frac{41}{30}$	$\frac{29}{21}$	$\frac{34}{22}$	$\frac{43}{27}$
P	0.3	0.21	0.22	0.27

$$\mathbb{E}(\xi_1|\xi_2 = -6) = 0 + \frac{1}{15} + 3 * \frac{13}{30} = \frac{41}{30}$$

$$\mathbb{E}(\xi_1|\xi_2 = -5) = 0 + \frac{11}{21} + \frac{18}{21} = \frac{29}{21}$$

$$\mathbb{E}(\xi_1|\xi_2 = -4) = 0 + \frac{13}{22} + \frac{21}{22} = \frac{34}{22}$$

$$\mathbb{E}(\xi_1|\xi_2 = 1) = 0 + \frac{4}{27} + \frac{39}{27} = \frac{43}{27}$$

зробимо перевірку:

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi_1|\xi_2)) = 1.47 = \mathbb{E}\xi_1$$

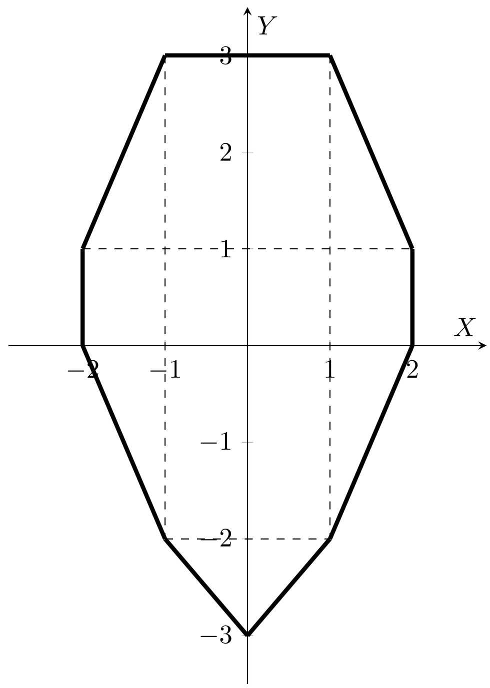
Тепер аналогічно порахуємо $\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1)$:

ξ_1	0	1	3
$\mathbb{E}(\xi_1 \vert \xi_2)$	$-\frac{128}{31}$	$-\frac{41}{10}$	$-\frac{149}{39}$
P	0.31	0.3	0.39

Зробимо перевірку:

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi_1|\xi_2)) = -0.31 * \frac{128}{31} - 0.3 * \frac{41}{10} - 0.39 * \frac{149}{39} = -4 = \mathbb{E}(\xi_2)$$

2 Задача 2



Знайти:

1. Щільності розподілу координат ξ_1 та ξ_2
2. Функції розподілу $F_{\xi_1}(x)$ та $F_{\xi_2}(y)$ координат ξ_1 та ξ_2 відповідно
3. Функцію розподілу $F_{\overrightarrow{\xi}}(x, y)$ випадкового вектора
4. Математичні сподівання координат та кореляційну матрицю
5. Умовні щільності розподілу для кожної координати
6. Умовні математичні сподівання для кожної координати з перевіркою

2.1 Щільності розподілу координат ξ_1 та ξ_2

Область D можна подати у вигляді множини

$$D = \left\{ (x, y) \middle| \begin{matrix} ((-2 \le x \le -1) \land (-2x - 4 \le y \le 2x + 5))\lor \\ ((-1 \le x \le 0) \land (-x - 3 \le y \le 3))\lor \\ ((0 \le x \le 1) \land (x - 3 \le y \le 3))\lor \\ ((1 \le x \le 2) \land (2x - 4 \le y \le -2x + 5)) \end{matrix} \right\}$$

Спочатку розрахуємо $f_{\overrightarrow{\xi}}(x,y)$. Для цього розрахуємо площу даної фігури. Вона складається із нижнього трикутнику площі 1 $\left(\frac{2*1}{2}\right)$, чотирьох трикутників розміру 1 по боках, 2х квадратів площі по 1 та прямокутника площі 10. у сумі маємо площу

$$S(D) = 1 + 4*1 + 2*1 + 10 = 17$$

Отже, функція щільності має вигляд

$$f_{\overrightarrow{\xi}}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{S(D)} & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \notin D \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{17} & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \notin D \end{cases}$$

Використовуючи означення

$$f_{\xi_1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\overrightarrow{\xi}}(x,y)dy$$

$$f_{\xi_2}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\overrightarrow{\xi}}(x,y)dx$$

отримуємо

$$f_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0 & x \le -2 \\ \frac{1}{17}\int_{-2x-4}^{2x+5} dy = \frac{1}{17}(4x+9) & -2 < x \le -1 \\ \frac{1}{17}\int_{-x-3}^{3} dy = \frac{1}{17}(x+6) & -1 < x \le 0 \\ \frac{1}{17}\int_{-3+x}^{3} dy = \frac{1}{17}(6-x) & 0 < x \le 1 \\ \frac{1}{17}\int_{2x-4}^{-2x+5} dy = \frac{1}{17}(9-4x) & 1 < x \le 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$

$$f_{\xi_2}(y) = \begin{cases} 0 & y \le -3 \\ \frac{1}{17}\int_{-3-y}^{3+y} dx = \frac{1}{17}(6+2y) & -3 < y \le -2 \\ \frac{1}{17}\int_{-2-\frac{y}{2}}^{2+\frac{y}{2}} dx = \frac{1}{17}(y+4) & -2 < y \le 0 \\ \frac{1}{17}\int_{-2}^{2} dx = \frac{4}{17} & 0 < y \le 1 \\ \frac{1}{17}\int_{\frac{y}{2}-2.5}^{-\frac{y}{2}+2.5} dx = \frac{1}{17}(5-y) & 1 < y \le 3 \\ 0 & y > 3 \end{cases}$$

Перевірка умови нормування

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(x)dx = \frac{1}{17}\int_{-2}^{-1}(4x+9)dx + \frac{1}{17}\int_{-1}^{0}(x+6)dx + \frac{1}{17}\int_{0}^{1}(6-x)dx + \frac{1}{17}\int_{1}^{2}(9-4x)dx =$$

$$\frac{1}{17}((2x^2+9x)\Big|_{-2}^{-1} + (\frac{x^2}{2}+6x)\Big|_{-1}^{0} + (-\frac{x^2}{2}+6x)\Big|_{0}^{1}) + (-2x^2+9x)\Big|_{1}^{2} = \frac{1}{17}(3+5.5+5.5+3) = \frac{17}{17} = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_2}(y)dy = \frac{1}{17}\int_{-3}^{-2}(6+2y)dy + \frac{1}{17}\int_{-2}^{0}(y+4)dy + \frac{1}{17}\int_{0}^{1} 4dy + \frac{1}{17}\int_{1}^{3}(5-y)dy =$$

$$\frac{1}{17}((6y+y^2)\Big|_{-3}^{-2} + (\frac{y^2}{2}+4y)\Big|_{-2}^{0} + 4y\Big|_{0}^{1} + (5y-\frac{y^2}{2})\Big|_{1}^{3}) = \frac{1}{17}(1+6+4+6) = \frac{17}{17} = 1$$

Умова виконується.

2.2 Функції розподілу $F_{\xi_1}(x)$ та $F_{\xi_2}(y)$ координат ξ_1 та ξ_2 відповідно

Маємо

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} \xi(t)\,dt$$

Тоді ми маємо

$$F_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0 & x \le -2 \\ \frac{1}{17}\int_{-2}^{x}(4t+9)dt = \frac{2x^2+9x+10}{17} & -2 < x \le -1 \\ \frac{1}{17}(\int_{-2}^{-1}(4t+9)dt + \int_{-1}^{x}(t+6)dt) = \frac{8.5+\frac{x^2}{2}+6x}{17} & -1 < x \le 0 \\ F_{\xi_1}(0) + \frac{1}{17}(\int_{0}^{x}(6-t)dt) = \frac{8.5+6x-\frac{x^2}{2}}{17} & 0 < x \le 1 \\ F_{\xi_1}(1) + \frac{1}{17}(\int_{1}^{x}(9-4t)dt) = \frac{7+9x-2x^2}{17} & 1 < x \le 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

$$F_{\xi_2}(y) = \begin{cases} 0 & y \le -3 \\ \frac{1}{17}\int_{-3}^{y}(6+2t)dt = \frac{6y+y^2+9}{17} & -3 < y \le -2 \\ \frac{1}{17}(\int_{-3}^{-2}(6+2t)dt + \int_{-2}^{y}(t+4)dt) = \frac{7+\frac{y^2}{2}+4y}{17} & -2 < y \le 0 \\ F_{\xi_2}(0) + \frac{1}{17}\int_{0}^{y}4dt = \frac{7+4y}{17} & 0 < y \le 1 \\ F_{\xi_2}(1) + \frac{1}{17}\int_{1}^{y}(5-t)dt = \frac{6.5+5y-\frac{y^2}{2}}{17} & 1 < y \le 3 \\ 1 & y > 3 \end{cases}$$

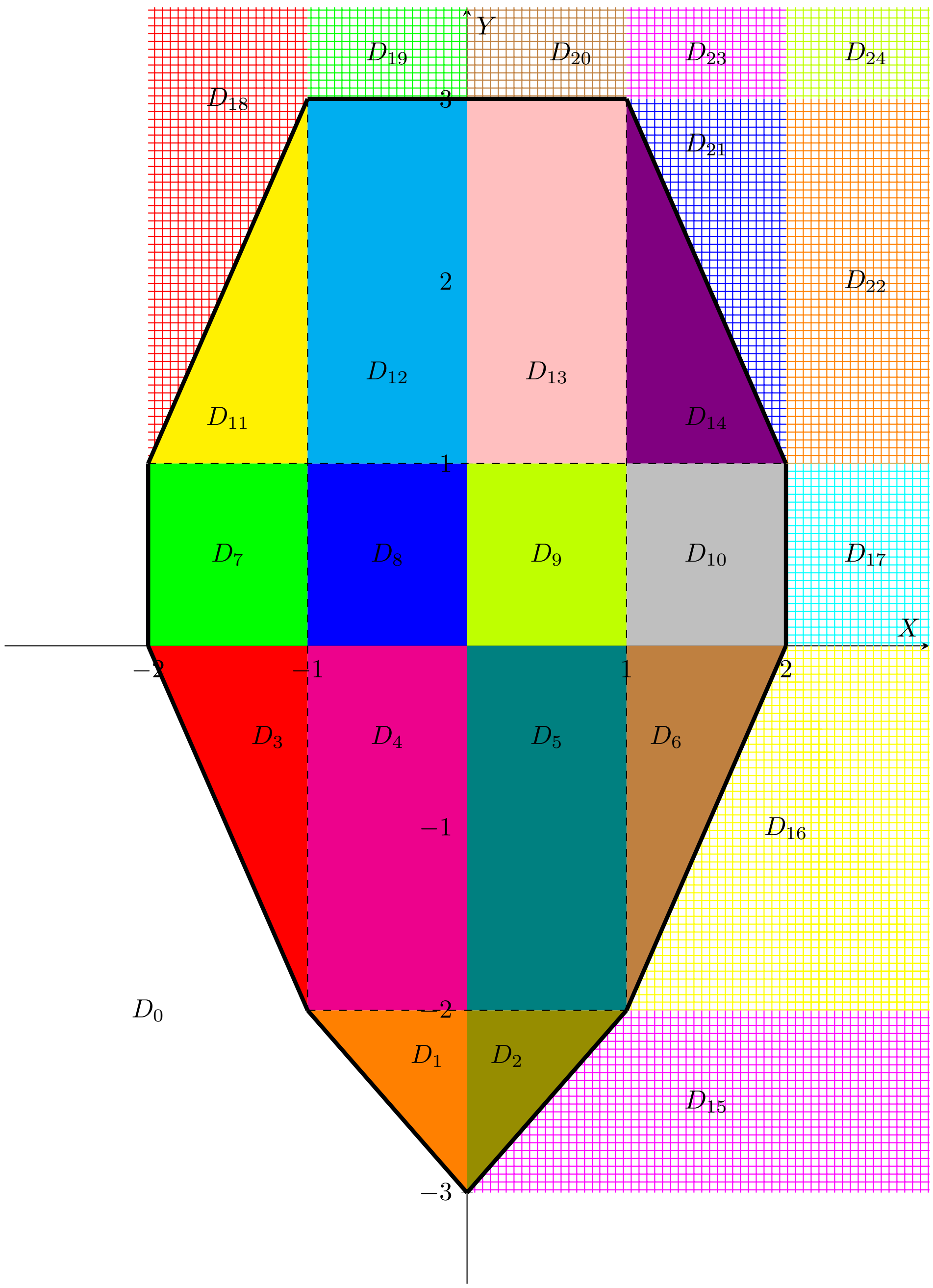
Зробимо перевірку

$$F_{\xi_1}(-2-0) = F_{\xi_1}(-2+0) = 0;$$
$$F_{\xi_1}(-1-0) = F_{\xi_1}(-1+0) = \frac{3}{17};$$
$$F_{\xi_1}(0-0) = F_{\xi_1}(0+0) = \frac{8.5}{17};$$
$$F_{\xi_1}(1-0) = F_{\xi_1}(1+0) = \frac{14}{17};$$
$$F_{\xi_1}(2-0) = F_{\xi_1}(2+0) = 1;$$

$$F_{\xi_2}(-3-0) = F_{\xi_2}(-3+0) = 0;$$
$$F_{\xi_2}(-2-0) = F_{\xi_2}(-2+0) = \frac{1}{17};$$
$$F_{\xi_2}(0-0) = F_{\xi_2}(0+0) = \frac{7}{17};$$
$$F_{\xi_2}(1-0) = F_{\xi_2}(1+0) = \frac{11}{17};$$
$$F_{\xi_2}(3-0) = F_{\xi_2}(3+0) = 1;$$

2.3 Функцію розподілу $F_{\vec{\xi}}(x, y)$ випадкового вектора

Розіб'ємо область на наступні частини

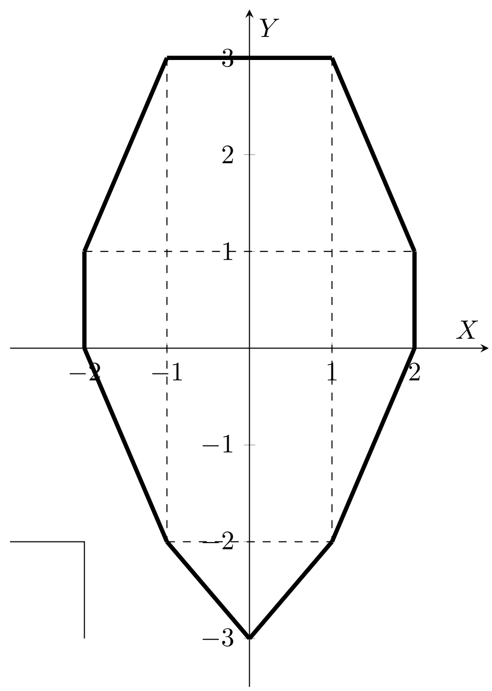


А тепер ми порахуємо кожну область. Насолоджуйтесь.

0.

$$D_0 = \left\{ (x,y) \middle| \begin{array}{c} (x \le -2) \vee \\ (y \le -3) \vee \\ (-2 < x \le -1) \wedge (y \le -2x-5) \vee \\ (-1 < x \le 0) \wedge (y \le -x-3) \end{array} \right\}$$

$$G_0 = \emptyset$$

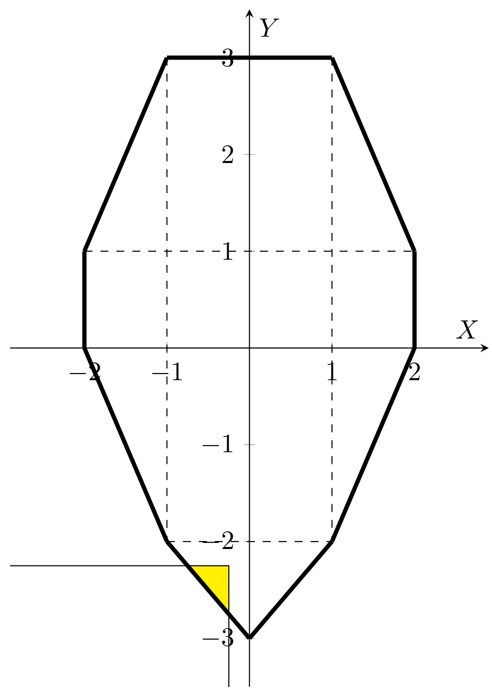


$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = 0$$

1.

$$D_1 = \{(x,y)|(-1 < x \leq 0) \wedge (-3 - x < y \leq -2)\}$$

$$G_1 = \{(t,s)|(-3 - y \leq t < x) \wedge (-3 - t \leq s < y)\}$$



$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{1}{17}\left(\int_{-3-y}^{x} dt \int_{-3-t}^{y} ds\right) = \frac{1}{17}\int_{-3-y}^{x} (3+t+y) dt = \frac{(x+y+3)^2}{34}$$

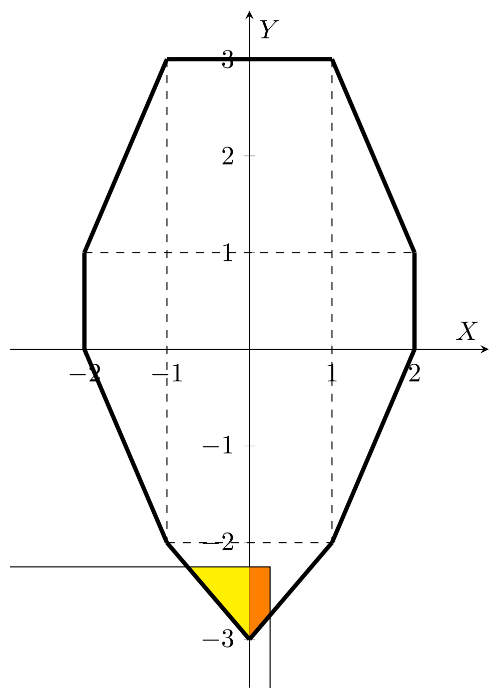
Зробимо перевірку

$$F_{\vec{\xi}}(y = -3 - x) = \frac{(x - 3 - x + 3)^2}{34} = 0$$

2.

$$D_2 = \{(x,y)|(0 < x \le 1) \wedge (x-3 < y \le -2)\}$$

$$G_2 = G_2' + G_2'' = \begin{matrix} \{(t,s)|(-3-y \le t < 0) \wedge (-3-t \le s < y)\} \cup \\ \{(t,s)|(0 \le tx) \wedge (t-3 \le s < y)\} \end{matrix}$$



$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{1}{17}\left(\int_{-3-y}^{0} dt \int_{-3-t}^{y} ds + \int_{0}^{x} dt \int_{t-3}^{y} ds\right) = \frac{(y+3)^2 + 2x(y+3) - x^2}{34}$$

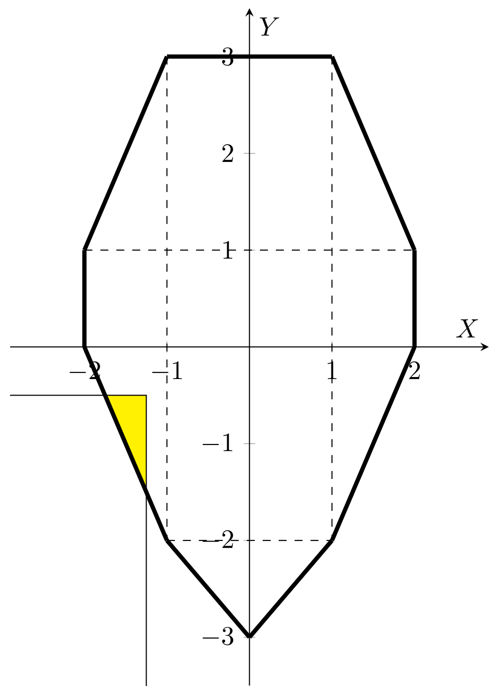
Зробимо перевірку

$$F_{\vec{\xi}}(1,-2) = \frac{1}{17} = S(D_1 \cup D_2)/17$$

3.

$$D_3 = \{(x,y)|(-2 < x \leq -1) \wedge (-2x-4 < y \leq 0)\}$$

$$G_3 = \left\{(t,s)\middle|(-2x-4 \leq s < y) \wedge (-2-\frac{s}{2} \leq t < x)\right\}$$



$$F_{\overrightarrow{\xi}}(x,y) = \frac{1}{17}\left(\int_{-2x-4}^{y} ds \int_{-2-\frac{s}{2}}^{x} dt\right) = \frac{1}{17}\left(\int_{-2x-4}^{y}(x+2+\frac{s}{2})ds\right) = \frac{(4+2x+y)^2}{68}$$

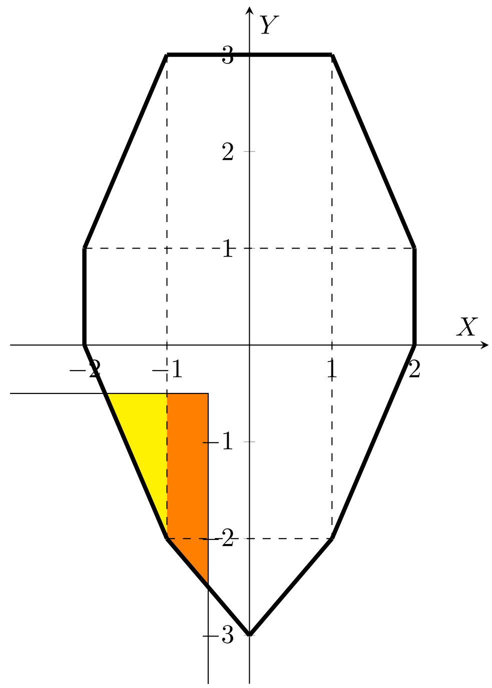
Зробимо перевірку

$$F_{\overrightarrow{\xi}}(-1,0) = \frac{1}{17} = S(D_3)/17$$

4.

$$D_4 = (-1, 0] \times (-2, 0]$$

$$G_4 = \begin{array}{c} \left\{(t,s)\middle|(-2-\frac{y}{2} \le t < -1) \wedge (-2t-4 \le s < y)\right\} \cup \\ \{(t,s)|(-1 \le t \le x) \wedge (-t-3 \le s < y)\} \end{array}$$



$$F_{\overrightarrow{\xi}}(x,y) = \frac{1}{17}\left(\int_{-2-\frac{y}{2}}^{-1} dt \int_{-2t-4}^{y} ds + \int_{-1}^{x} dt \int_{-t-3}^{y} ds\right) =$$

$$\frac{1}{17}\left(\int_{-2-\frac{y}{2}}^{-1} (y+2t+4)dt + \int_{-1}^{x} (y+t+3)dt\right) = \frac{(2+y)^2 + 2(1+x)(5+x+2y)}{68}$$

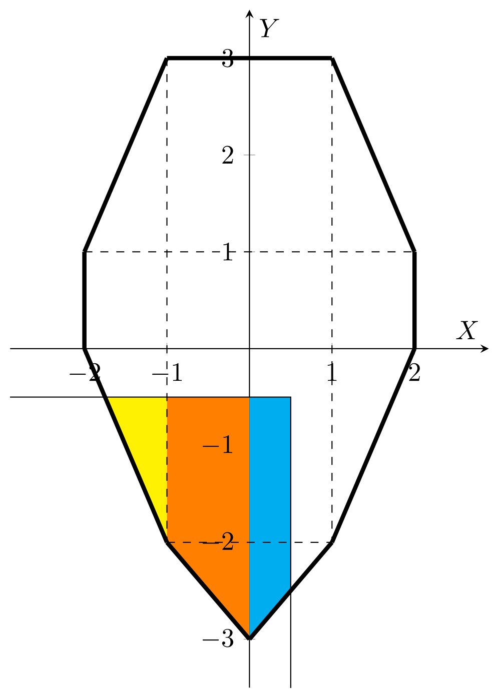
Зробимо перевірку

$$F_{\overrightarrow{\xi}}(-1,-2) = 0$$

5.

$$D_5 = (0,1] \times (-2,0]$$

$$G_5 = \begin{array}{c} \left\{(t,s)\middle|(-2-\frac{y}{2} \le t < -1) \wedge (-2t-4 \le s < y)\right\} \cup \\ \{(t,s)|(-1 \le t < 0) \wedge (-t-3 \le s < y)\} \cup \\ \{(t,s)|(0 \le t < x) \wedge (t-3 \le s < y)\} \end{array}$$



$$F_{\overrightarrow{\xi}}(x,y) = \frac{1}{17}\left(\int_{-2-\frac{y}{2}}^{-1} dt \int_{-2t-4}^{y} ds + \int_{-1}^{0} dt \int_{-t-3}^{y} ds + \int_{0}^{x} dt \int_{t-3}^{y} ds\right) =$$

$$\frac{\frac{(2+y)^2}{4} + y + \frac{5}{2} + x(3+y) - \frac{x^2}{2}}{17}$$

Зробимо перевірку

$$F_{\overrightarrow{\xi}}(0,-2) = \frac{1}{34} = S(D_1)/17$$

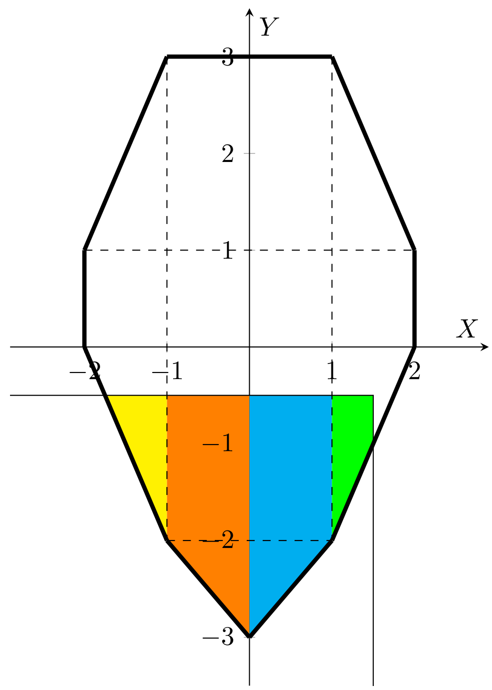
6.

$$D_6 = \{(x,y)|(1 < x \le 2) \land (2x-4 < y \le 0)\}$$

$$G_6 = D_1 \cup D_2 \cup$$

$$\left\{(t,s)\middle|(-2 \le s < 2x-4) \land (-2-\frac{s}{2} \le t < 2+\frac{s}{2}\right\} \cup$$

$$\left\{(t,s)\middle|(2x-4 \le s < y) \land (-2-\frac{s}{2} \le t < x)\right\}$$



$$F_{\overrightarrow{\xi}}(x,y) = \frac{1}{17}\left(S(D_1)+S(D_2)+\int_{-2}^{2x-4} ds \int_{-2-\frac{s}{2}}^{2+\frac{s}{2}} dt + \int_{2x-4}^{y} ds \int_{-2-\frac{s}{2}}^{x} dt\right) =$$

$$\frac{1+2(x^2-1)-3x^2+x(4+y)+\frac{(4+y)^2}{4}}{17}$$

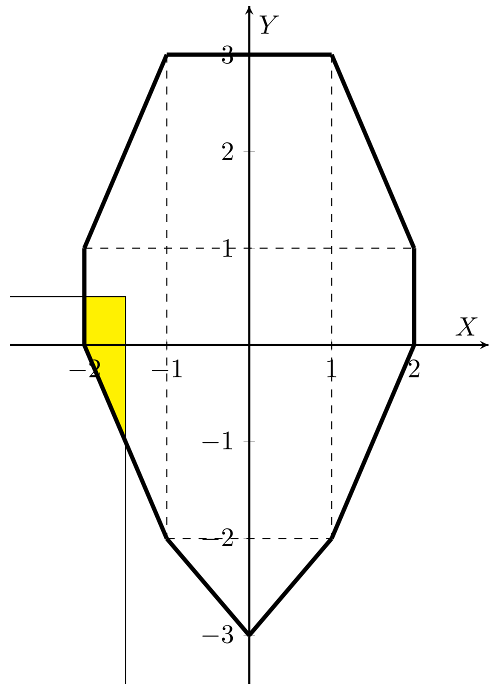
Зробимо перевірку

$$F_{\overrightarrow{\xi}}(1,-2) = \frac{1}{17} = S(D_1 \cup D_2)/17$$

7.

$$D_7 = (-2,-1] \times (0,1]$$

$$G_7 = \{(t,s) | (-2 \le t < x) \wedge (-2t-4 \le s < y)\}$$



$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{1}{17}\left(\int_{-2}^{x} dt \int_{-2t-4}^{y} ds\right) = \frac{(2+x)(2+x+y)}{17}$$

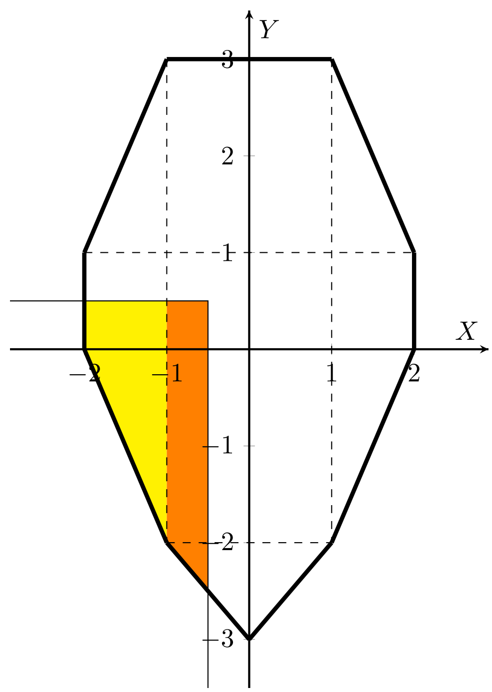
Зробимо перевірку

$$F_{\vec{\xi}}(x=-2) = \frac{(2-2)(2-2+y)}{17} = 0$$

8.

$$D_8 = (-1, 0] \times (0, 1]$$

$$G_8 = \{(t,s) | (-2 \le t < -1) \wedge (-2t - 4 \le s < y)\} \cup$$
$$\{(t,s) | (-1 \le t < x) \wedge (-t - 3 \le s < y)\}$$



$$F_{\overrightarrow{\xi}}(x,y) = \frac{1}{17}\left(\int_{-2}^{-1} dt \int_{-2t-4}^{y} ds + \int_{-1}^{x} dt \int_{-t-3}^{y} ds\right) = \frac{y + 1 + \frac{(1+x)(5+x+2y)}{2}}{17}$$

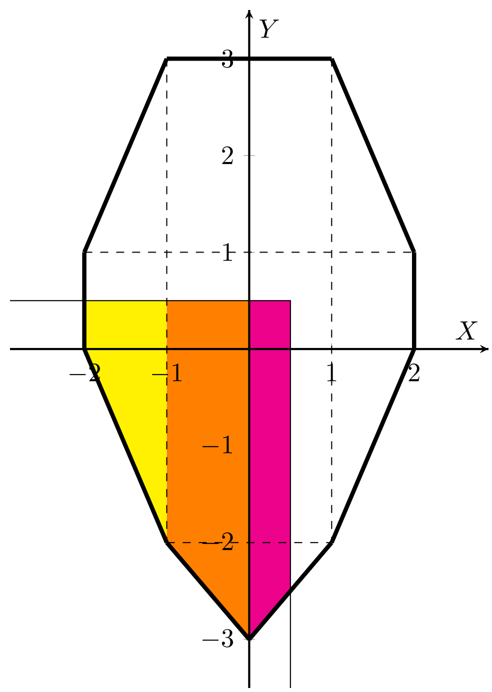
Зробимо перевірку

$$F_{\overrightarrow{\xi}}(-1, 0) = \frac{1}{17}$$

9.

$$D_9 = (0,1]^2$$

$$G_9 = \{(t,s) | (-2 \le t < -1) \wedge (-2t - 4 \le s < y)\} \cup$$
$$\{(t,s) | (-1 \le t < 0) \wedge (-t - 3 \le s < y)\} \cup$$
$$\{(t,s) | (0 \le t < x) \wedge (t - 3 \le s < y)\}$$



$$F_{\overrightarrow{\xi}}(x,y) = \frac{1}{17}\left(\int_{-2}^{-1} dt \int_{-2t-4}^{y} ds + \int_{-1}^{0} dt \int_{-t-3}^{y} ds + \int_{0}^{x} dt \int_{t-3}^{y} ds\right) =$$
$$\frac{y + 1 + y + \frac{5}{2} + 3x + xy - \frac{x^2}{2}}{17} =$$
$$\frac{3x + 2y + xy - \frac{x^2}{2} + \frac{7}{2}}{17}$$

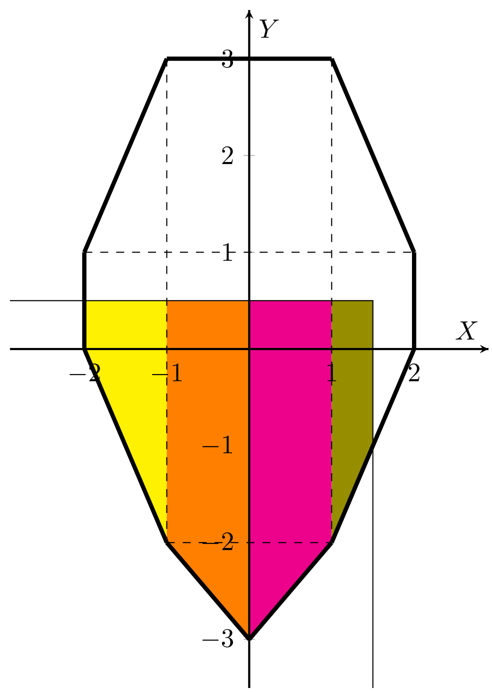
Зробимо перевірку

$$F_{\overrightarrow{\xi}}(1,1) = \frac{7}{34}$$

10.

$$D_{10} = (1,2] \times (0,1]$$

$$G_{10} = \{(t,s)|(-2 \le t < -1) \wedge (-2t-4 \le s < y)\} \cup$$
$$\{(t,s)|(-1 \le t < 0) \wedge (-t-3 \le s < y)\} \cup$$
$$\{(t,s)|(0 \le t < x) \wedge (t-3 \le s < y)\}$$



$$F_{\overrightarrow{\xi}}(x,y) =$$
$$\frac{1}{17}\left(\int_{-2}^{-1} dt \int_{-2t-4}^{y} ds + \int_{-1}^{0} dt \int_{-t-3}^{y} ds + \int_{0}^{1} dt \int_{t-3}^{y} ds + \int_{1}^{x} dt \int_{2t-4}^{y} ds\right) =$$
$$\frac{y+1+y+\frac{5}{2}+y+\frac{5}{2}+(1-x)(x-y-3)}{17} =$$
$$\frac{3y+6+(1-x)(x-y-3)}{17}$$

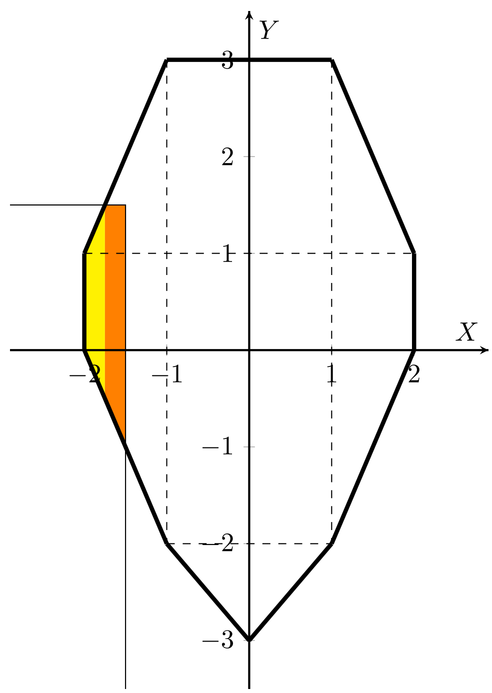
Зробимо перевірку

$$F_{\overrightarrow{\xi}}(2,0) = \frac{7}{17}$$

11.

$$D_{11} = \{(x,y)|(-2 < x \le -1) \wedge (1 < y < 2x+5)\}$$

$$G_{11} = \left\{(t,s)\middle|(-2 \le t < -2.5 + \frac{y}{2}) \wedge (-2t-4 \le s < 2t+5)\right\} \cup$$
$$\left\{(t,s)\middle|(-2.5 + \frac{y}{2} \le t < x) \wedge (-2t-4 \le s < y)\right\}$$



$$F_{\overrightarrow{\xi}}(x,y) =$$
$$\frac{1}{17}\left(\int_{-2}^{-2.5+\frac{y}{2}} dt \int_{-2t-4}^{2t+5} ds + \int_{-2.5+\frac{y}{2}}^{x} dt \int_{-2t-4}^{y} ds\right) =$$
$$\frac{1}{17}\left(\frac{y^2-y}{2} + \frac{15}{4} + x^2 + 3y - \frac{3}{4}y^2 + x(4+y)\right) =$$
$$\frac{1}{17}\left(\frac{15}{4} + 4x + x^2 + \frac{5y}{2} + xy - \frac{y^2}{4}\right)$$

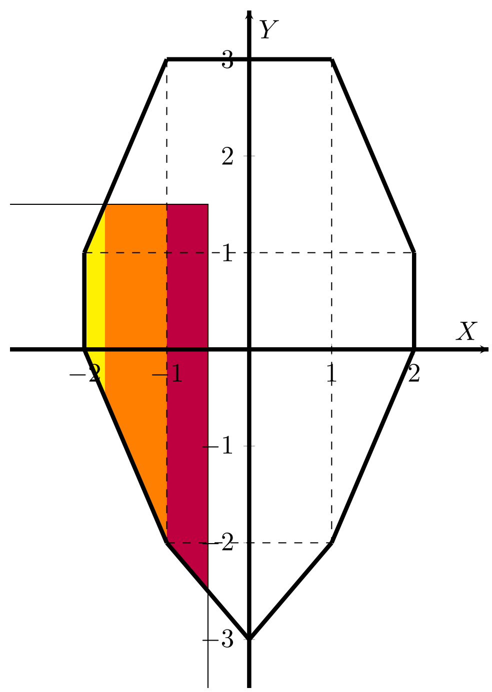
Зробимо перевірку

$$F_{\overrightarrow{\xi}}(-2,1) = 0$$

12.

$$D_{12} = (-1, 0] \times (1, 3]$$

$$G_{12} = \left\{(t,s)\middle|(-2 \le t < -2.5 + \frac{y}{2}) \wedge (-2t - 4 \le s < 2t + 5)\right\} \cup$$
$$\left\{(t,s)\middle|(-2.5 + \frac{y}{2} \le t < -1) \wedge (-2t - 4 \le s < y)\right\} \cup$$
$$\{(t,s)|(-1 \le t < x) \wedge (-t - 3 \le s < y)\}$$



$$F_{\overrightarrow{\xi}}(x,y) =$$
$$\frac{1}{17}\left(\int_{-2}^{-2.5+\frac{y}{2}} dt \int_{-2t-4}^{2t+5} ds + \int_{-2.5+\frac{y}{2}}^{-1} dt \int_{-2t-4}^{y} ds + \int_{-1}^{x} dt \int_{-t-3}^{y} ds\right) =$$
$$\frac{1}{17}\left(\frac{y^2 - y}{2} + \frac{3}{4}(1 + \frac{8}{3}y - y^2) + \frac{1}{2}(1 + x)(5 + x + 2y)\right) =$$
$$\frac{\frac{13}{4} + 3x + \frac{x^2}{2} + \frac{5y}{2} + xy - \frac{y^2}{4}}{17}$$

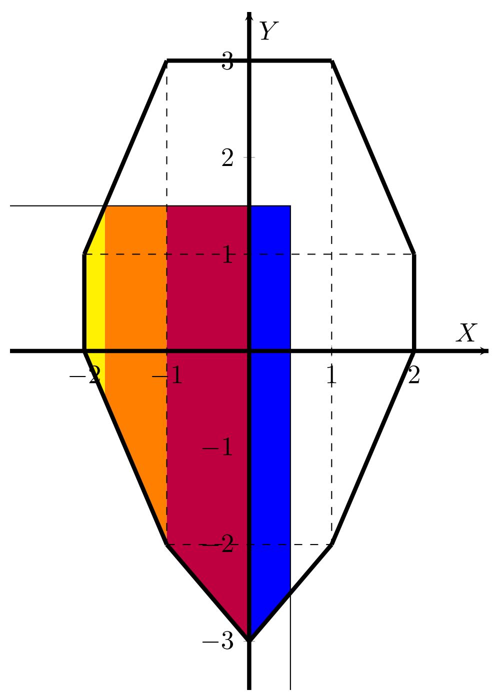
Зробимо перевірку

$$F_{\overrightarrow{\xi}}(-1, 1) = \frac{2}{17}$$

13.

$$D_{13} = (0,1] \times (1,3]$$

$$G_{13} = \left\{(t,s)\middle|(-2 \le t < -2.5 + \frac{y}{2}) \land (-2t-4 \le s < 2t+5)\right\} \cup$$
$$\left\{(t,s)\middle|(-2.5 + \frac{y}{2} \le t < -1) \land (-2t-4 \le s < y)\right\} \cup$$
$$\{(t,s)|(-1 \le t < 0) \land (-t-3 \le s < y)\} \cup$$
$$\{(t,s)|(0 \le t < x) \land (t-3 \le s < y)\}$$



$$F_{\overrightarrow{\xi}}(x,y) =$$
$$\frac{1}{17}\left(\int_{-2}^{-2.5+\frac{y}{2}} dt \int_{-2t-4}^{2t+5} ds + \int_{-2.5+\frac{y}{2}}^{-1} dt \int_{-2t-4}^{y} ds + \int_{-1}^{0} dt \int_{-t-3}^{y} ds + \int_{0}^{x} dt \int_{t-3}^{y} ds = \right)$$
$$\frac{1}{17}\left(\frac{y^2-y}{2} + \frac{3}{4}(1 + \frac{8}{3}y - y^2) + y + \frac{5}{2} + xy + 3x - \frac{x^2}{2}\right) =$$
$$\frac{1}{17}\left(\frac{13}{4} + 3x - \frac{x^2}{2} + \frac{5y}{2} + xy - \frac{y^2}{4}\right)$$

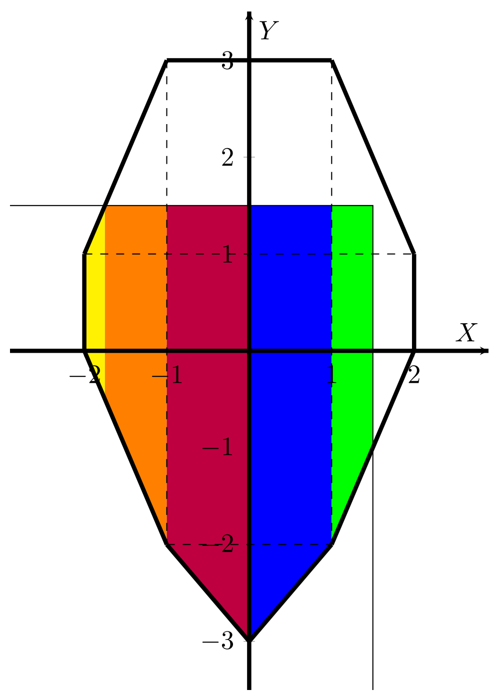
Зробимо перевірку

$$F_{\overrightarrow{\xi}}(1,3) = \frac{14}{17}$$

14.

$$D_{14} = \{(1 < x \le 2) \wedge (1 < y \le 5 - 2x)\}$$

$$G_{14} = \left\{(t,s)\middle|(-2 \le t < -2.5 + \frac{y}{2}) \wedge (-2t-4 \le s < 2t+5)\right\} \cup$$
$$\left\{(t,s)\middle|(-2.5 + \frac{y}{2} \le t < -1) \wedge (-2t-4 \le s < y)\right\} \cup$$
$$\{(t,s)|(-1 \le t < 0) \wedge (-t-3 \le s < y)\} \cup$$
$$\{(t,s)|(0 \le t < 1) \wedge (t-3 \le s < y)\} \cup$$
$$\{(t,s)|(1 \le t < x) \wedge (2t-x \le s < y)\}$$



$$F_{\overrightarrow{\xi}}(x,y) =$$
$$\frac{1}{17}\left(\int_{-2}^{-2.5+\frac{y}{2}} dt \int_{-2t-4}^{2t+5} ds + \int_{-2.5+\frac{y}{2}}^{-1} dt \int_{-2t-4}^{y} ds + \int_{-1}^{0} dt \int_{-t-3}^{y} ds + \int_{0}^{1} dt \int_{t-3}^{y} ds + \int_{1}^{x} dt \int_{2t-4}^{y} ds\right) =$$
$$\frac{1}{17}\left(\frac{y^2-y}{2} + \frac{3}{4}(1 + \frac{8}{3}y - y^2) + y + \frac{5}{2} + y + \frac{5}{2} + (1-x)(x-y-3)\right) =$$
$$\frac{1}{17}\left(\frac{11}{4} + 4x - x^2 + \frac{5y}{2} + xy - \frac{y^2}{4}\right)$$

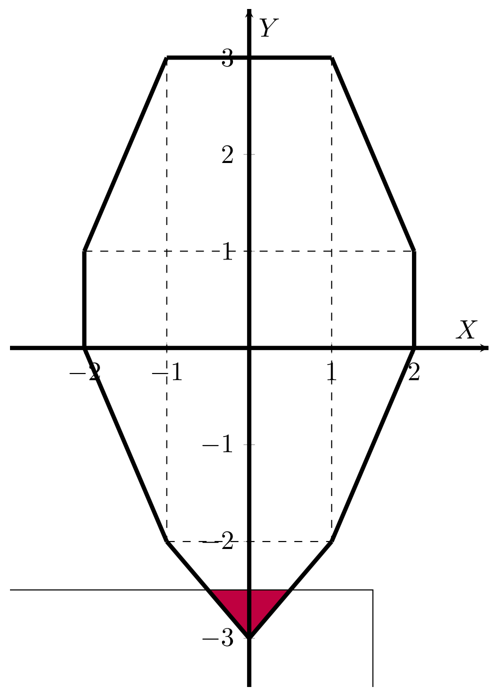
Зробимо перевірку

$$F_{\overrightarrow{\xi}}(1,3) = \frac{14}{17}$$

15.

$$D_{15} = \{(-3 < y \leq -2) \wedge (x > y + 3)\}$$

$$G_{15} = \{(t, s) | (-3 \leq s < y) \wedge (-3 - s \leq t < 3 + s)\}$$



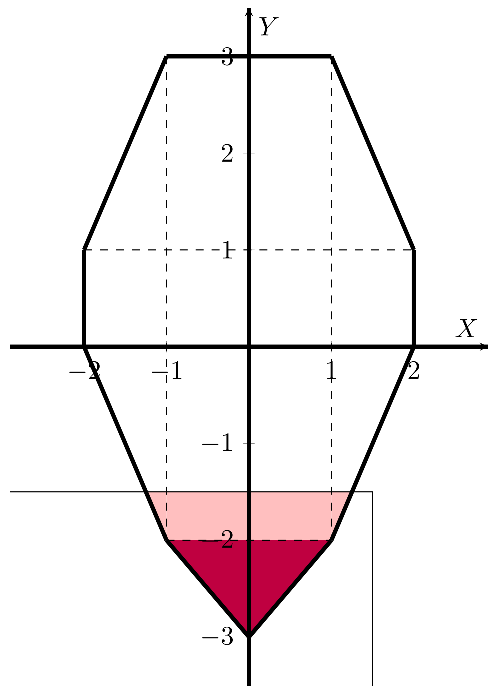
$$F_{\vec{\xi}}(x, y) =$$

$$\frac{1}{17}\left(\int_{-3}^{y} ds \int_{-3-s}^{3+s} dt\right) = \frac{y^2 + 6y + 9}{17} = F_{\xi_2}(y)$$

16.

$$D_{16} = \{(-3 < y \le -2) \wedge (x > y + 3)\}$$

$$G_{16} = D_1 \cup D_2 \cup \left\{(t,s)\middle|(-2 \le s < y) \wedge (-2 - \frac{s}{2} \le t < 2 + \frac{s}{2})\right\}$$



$$F_{\overrightarrow{\xi}}(x,y) =$$

$$\frac{1}{17}\left(S(D_1) + S(D_2) + \int_{-2}^{y} ds \int_{-2-\frac{s}{2}}^{+2+\frac{s}{2}} dt\right) =$$

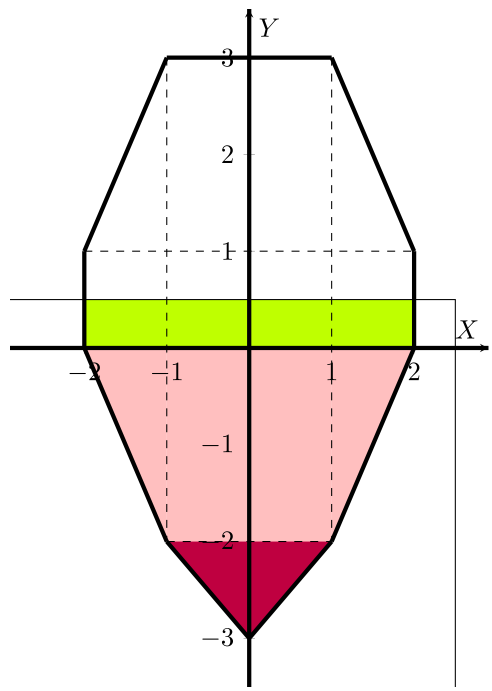
$$\frac{1}{17}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \int_{-2}^{y}(s+4)ds\right) =$$

$$\frac{1}{17}\left(\frac{y^2}{2} + 4y + 7\right) = F_{\xi_2}(y)$$

17.

$$D_{17} = (2, +\infty] \times (0, 1]$$

$$G_{17} = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4 \cup D_5 \cup D_6 \cup [-2, 2] \times [0, y]$$



$$F_{\vec{\xi}}(x, y) =$$

$$\frac{1}{17}\left(S(D_1) + S(D_2) + S(D_3) + S(D_4) + S(D_5) + S(D_6) + \int_{-2}^{2} dt \int_{0}^{y} ds\right) =$$

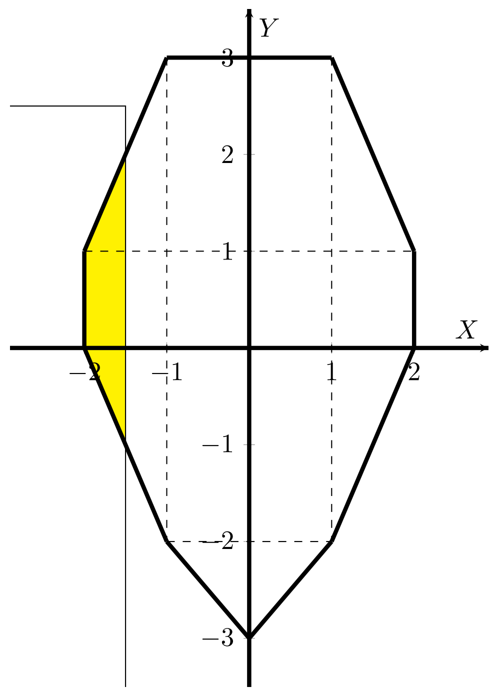
$$\frac{1}{17}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + 2 + 2 + 1 + \int_{-2}^{2} y dt\right) =$$

$$\frac{1}{17}\left(4y + 7\right) = F_{\xi_2}(y)$$

18.

$$D_{18} = \{(x,y) | (-2 < x \le -1) \wedge (y > 2x+5)\}$$

$$G_{18} = \{(t,s) | (-2 \le t < x) \wedge (-4-2t \le s < 5+2t\}$$



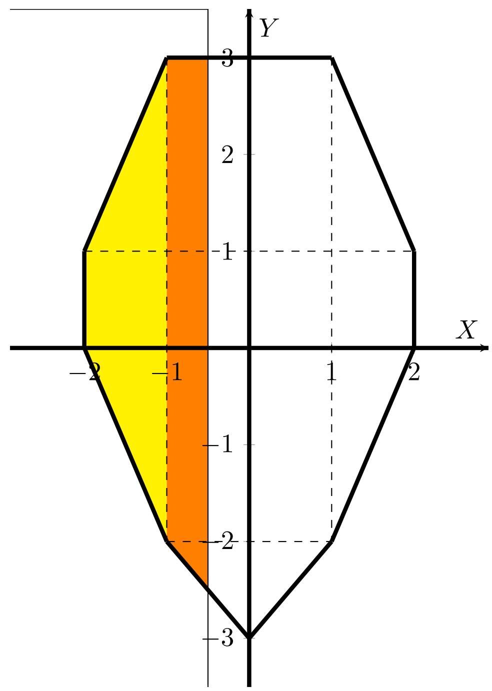
$$F_{\overrightarrow{\xi}}(x,y) =$$

$$\frac{1}{17}\left(\int_{-2}^{x} dt \int_{-4-2t}^{5+2t} ds\right) = \frac{1}{17}\left(\int_{-2}^{x} (9+4t)dt\right) = \frac{1}{17}(2x^2+9x+10) = F_{\xi_1}(x)$$

19.

$$D_{19} = \{(x, y) | (-1 < x \leq 0) \wedge (y > 3)\}$$

$$G_{19} = D_3 \cup D_7 \cup D_{11} \cup \{(t, s) | (-1 \leq t < x) \wedge (-t - 3 \leq s < 3\}$$



$$F_{\overrightarrow{\xi}}(x, y) =$$

$$\frac{1}{17}\left(S(D_3) + S(D_7) + S(D_{11}) + \int_{-1}^{x} dt \int_{-t-3}^{3} ds\right) =$$

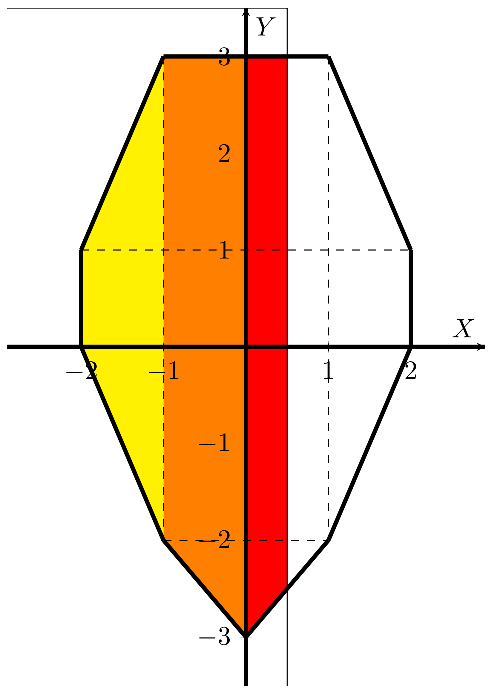
$$\frac{1}{17}\left(1 + 1 + 1 + \int_{-1}^{x} (t + 6) dt\right) =$$

$$\frac{1}{17}\left(\frac{x^2}{2} + 6x + \frac{17}{2}\right) = F_{\xi_1}(x)$$

20.

$$D_{20} = \{(x,y)|(0 < x \leq 1) \wedge (y > 3)\}$$

$$G_{20} = D_3 \cup D_7 \cup D_{11} \cup D_1 \cup D_4 \cup D_8 \cup D_{12} \cup \{(t,s)|(0 \leq t < x) \wedge (t-3 \leq s < 3\}$$



$$F_{\overrightarrow{\xi}}(x,y) =$$

$$\frac{1}{17}\left(S(D_3)+S(D_7)+S(D_{11})S(D_1)+S(D_4)+S(D_8)+S(D_{12})+\int_0^x dt\int_{t-3}^3 ds\right) =$$

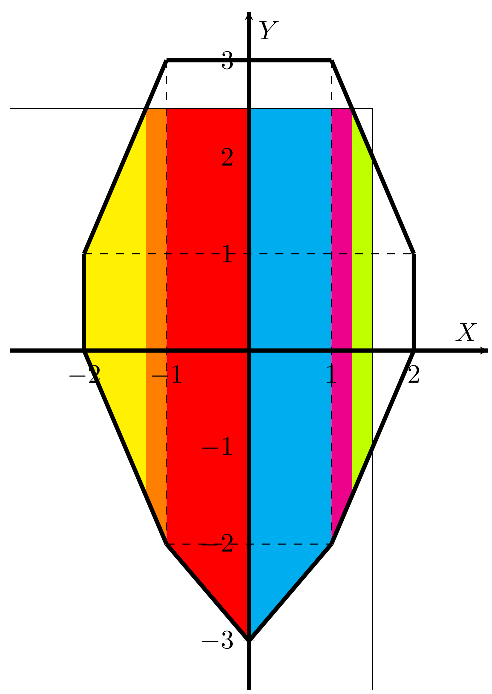
$$\frac{1}{17}\left(1+1+1+0.5+2+1+2+\int_0^x(-t+6)dt\right) =$$

$$\frac{1}{17}(-\frac{x^2}{2}+6x+\frac{17}{2}) = F_{\xi_1}(x)$$

21.

$$D_{21} = \{(x, y) | (1 < x \le 2) \wedge (5 - 2x < y \le 3)\}$$

$$G_{21} = \Big\{(t, s)\Big|(-2 \le t < -2.5 + \frac{y}{2}) \wedge (-2t - 4 \le s < 2t + 5)\Big\} \cup$$
$$\Big\{(t, s)\Big|(-2.5 + \frac{y}{2} \le t < -1) \wedge (-2t - 4 \le s < y)\Big\} \cup$$
$$\{(t, s)|(-1 \le t < 0) \wedge (-t - 3 \le s < y)\} \cup$$
$$\{(t, s)|(0 \le t < 1) \wedge (t - 3 \le s < y)\} \cup$$
$$\Big\{(t, s)\Big|(1 \le t < 2.5 - \frac{y}{2}) \wedge (2t - 4 < s < y)\Big\} \cup$$
$$\Big\{(t, s)\Big|(2.5 - \frac{y}{2} \le t < x) \wedge (2t - 4 < s < 5 - 2t)\Big\}$$



$$F_{\overrightarrow{\xi}}(x,y)=$$
$$\frac{1}{17}(\int_{-2}^{-2.5+\frac{y}{2}}dt\int_{-2t-4}^{2t+5}ds+\int_{-2.5+\frac{y}{2}}^{-1}dt\int_{-2t-4}^{y}ds+\int_{-1}^{0}dt\int_{-t-3}^{y}ds+$$
$$\int_{0}^{1}dt\int_{t-3}^{y}ds+\int_{1}^{2.5-\frac{y}{2}}dt\int_{2t-4}^{y}ds+\int_{2.5-\frac{y}{2}}^{x}dt\int_{2t-4}^{5-2t}ds)=$$
$$\frac{1}{17}\left(\frac{y^2-y}{2}+\frac{3}{4}(1-y^2+\frac{8}{3}y)+y+\frac{5}{2}+y+\frac{5}{2}+\frac{3}{4}(1-y^2+\frac{8}{3}y)+9x-2x^2-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}y^2-10\right)=$$
$$\frac{1}{17}\left(9x-2x^2+5y-\frac{y^2}{2}-\frac{7}{2}\right)$$

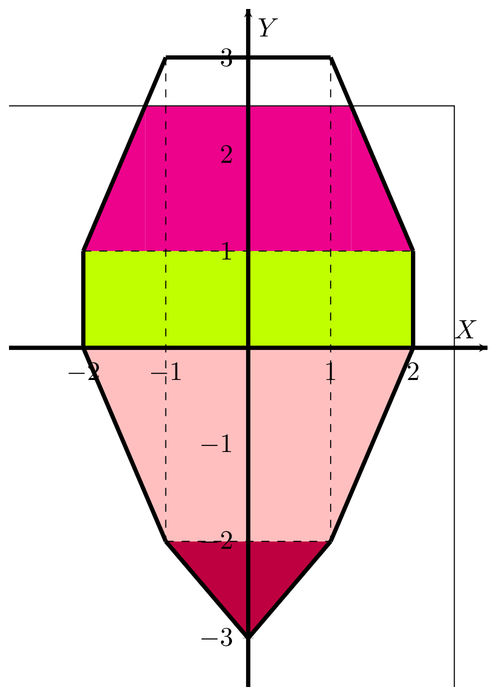
Зробимо перевірку

$$F_{\overrightarrow{\xi}}(2,3)=1$$

22.

$$D_{22}=\{(x,y)|(x>2)\wedge(1<y\leq 3)\}$$

$$G_{22}=\bigcup_{i=1}^{10}D_i\cup\left\{(t,s)\Big|(1\leq s<y)\wedge(-2.5+\frac{y}{2}\leq t<2.5-\frac{y}{2})\right\}$$



$$F_{\vec{\xi}}(x,y)=$$

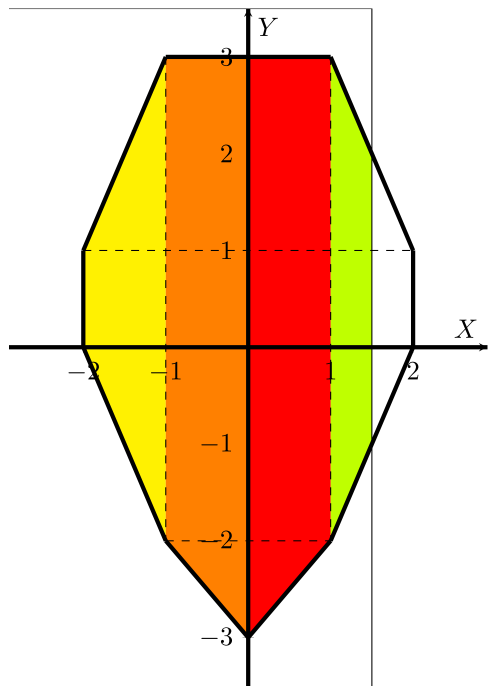
$$\frac{1}{17}\left(\sum_{i=1}^{10}S(D_i)+\int_1^y ds\int_{-2.5+\frac{s}{2}}^{2.5-\frac{s}{2}}dt\right)=$$

$$\frac{1}{17}\left(11+5y-\frac{y^2}{2}-\frac{9}{2}\right)=\frac{1}{17}\left(6.5+5y-\frac{y^2}{2}\right)=F_{\xi_2}(y)$$

23.

$$D_{23} = \{(x,y)|(1 < x \leq 2) \wedge (y > 3)\}$$

$$G_{23} = D_3 \cup D_7 \cup D_{11} \cup D_1 \cup D_4 \cup D_8 \cup D_{12} \cup D_2 \cup D_5 \cup D_9 \cup D_{13} \cup$$
$$\{(t,s)|(1 \leq t < x) \wedge (2t - 4 \leq s < 5 - 2t\}$$

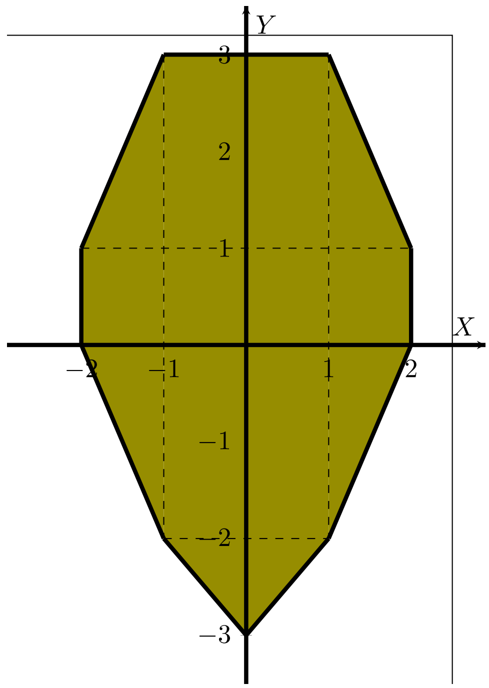


$$F_{\overrightarrow{\xi}}(x,y) =$$
$$\frac{1}{17}(S(D_3) + S(D_7) + S(D_{11})S(D_1) + S(D_4) + S(D_8) + S(D_{12}) + S(D_2) + S(D_5) + S(D_9)$$
$$+S(D_{13}) + \int_1^x dt \int_{2t-4}^{5-2t} ds) =$$
$$\frac{1}{17}\left(14 \int_1^x (-4t + 9)dt\right) =$$
$$\frac{1}{17}(14 - 2x^2 + 9x - 7) =$$
$$\frac{1}{17}(7 - 2x^2 + 9x) = F_{\xi_1}(x)$$

24.

$$D_{24} = \{(x, y) | (x > 2) \wedge (y > 3)\}$$

$$G_{24} = D$$



$$F_{\vec{\xi}}(x, y) =$$

$$\frac{1}{17}(S(D)) = \frac{17}{17} = 1$$

Тоді маємо наступну функцію розподілу:

$$F_{\overrightarrow{\xi}}(x,y)=\begin{cases}0 & (x,y)\in D_0\\ \frac{(x+y+3)^2}{34} & (x,y)\in D_1\\ \frac{(y+3)^2+2x(y+3)-x^2}{34} & (x,y)\in D_2\\ \frac{(4+2x+y)^2}{68} & (x,y)\in D_3\\ \frac{(2+y)^2+2(1+x)(5+x+2y)}{68} & (x,y)\in D_4\\ \frac{\frac{(2+y)^2}{4}+y+\frac{5}{2}+x(3+y)-\frac{x^2}{2}}{17} & (x,y)\in D_5\\ \frac{1+2(x^2-1)-3x^2+x(4+y)+\frac{(4+y)^2}{4}}{17} & (x,y)\in D_6\\ \frac{(2+x)(2+x+y)}{17} & (x,y)\in D_7\\ \frac{2y+2+(1+x)(5+x+2y)}{34} & (x,y)\in D_8\\ \frac{3x+2y+xy-\frac{x^2}{2}+\frac{7}{2}}{17} & (x,y)\in D_9\\ \frac{3y+6+(1-x)(x-y-3)}{17} & (x,y)\in D_{10}\\ \frac{1}{17}\left(\frac{15}{4}+4x+x^2+\frac{5y}{2}+xy-\frac{y^2}{4}\right) & (x,y)\in D_{11}\\ \frac{\frac{13}{4}+3x+\frac{x^2}{2}+\frac{5y}{2}+xy-\frac{y^2}{4}}{17} & (x,y)\in D_{12}\\ \frac{1}{17}\left(\frac{13}{4}+3x-\frac{x^2}{2}+\frac{5y}{2}+xy-\frac{y^2}{4}\right) & (x,y)\in D_{13}\\ \frac{1}{17}\left(\frac{11}{4}+4x-x^2+\frac{5y}{2}+xy-\frac{y^2}{4}\right) & (x,y)\in D_{14}\\ \frac{y^2+6y+9}{17} & (x,y)\in D_{15}\\ \frac{1}{17}\left(\frac{y^2}{2}+4y+7\right) & (x,y)\in D_{16}\\ \frac{1}{17}\left(4y+7\right) & (x,y)\in D_{17}\\ \frac{1}{17}(2x^2+9x+10) & (x,y)\in D_{18}\\ \frac{1}{17}(\frac{x^2}{2}+6x+\frac{17}{2}) & (x,y)\in D_{19}\\ \frac{1}{17}(-\frac{x^2}{2}+6x+\frac{17}{2}) & (x,y)\in D_{20}\\ \frac{1}{17}\left(9x-2x^2+5y-\frac{y^2}{2}-\frac{7}{2}\right) & (x,y)\in D_{21}\\ \frac{1}{17}\left(\frac{13}{2}+5y-\frac{y^2}{2}\right) & (x,y)\in D_{22}\\ \frac{1}{17}(7-2x^2+9x) & (x,y)\in D_{23}\\ 1 & (x,y)\in D_{24}\end{cases}$$

2.4 Математичні сподівання координат та кореляційну матрицю

Розрахуємо математичні сподівання:

$$\mathbb{E}\xi_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi_1}(x)dx =$$

$$\frac{1}{17}\left(\int_{-2}^{-1} x(4x+9)dx + \int_{-1}^{0} x(x+6)dx + \int_{0}^{1} x(6-x)dx + \int_{1}^{2} x(-4x+9)dx\right) = 0$$

$$\mathbb{E}\xi_2 = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{\xi_2}(y)dy =$$

$$\frac{1}{17}\left(\int_{-3}^{-2} y(6+2y)dy + \int_{-2}^{0} y(y+4)dy + \int_{0}^{1} 4ydy + \int_{1}^{3} y(5-y)dy\right) = \frac{1}{3}$$

Тепер розрахужмо елементи Кореляційної матриці

$$\mathbb{E}\xi_1^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{\xi_1}(x)dx =$$

$$\frac{1}{17}\left(\int_{-2}^{-1} x^2(4x+9)dx + \int_{-1}^{0} x^2(x+6)dx + \int_{0}^{1} x^2(6-x)dx + \int_{1}^{2} x^2(-4x+9)dx\right) = \frac{31}{34}$$

$$\mathbb{E}\xi_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_{\xi_2}(y)dy =$$

$$\frac{1}{17}\left(\int_{-3}^{-2} y^2(6+2y)dy + \int_{-2}^{0} y^2(y+4)dy + \int_{0}^{1} 4y^2dy + \int_{1}^{3} y^2(5-y)dy\right) = \frac{13}{6}$$

$$\mathbb{E}\xi_1\xi_2 = \iint_{\mathbb{R}^2} xy f_{\vec{\xi}}(x,y)dxdy =$$

$$\frac{1}{17}\left(\int_{-2}^{-1} xdx \int_{-2x-4}^{2x+5} ydy + \int_{-1}^{0} xdx \int_{-x-3}^{3} ydy + \int_{0}^{1} xdx \int_{x-3}^{3} ydy + \int_{1}^{2} xdx \int_{2x-4}^{5-2x} ydy\right) =$$

$$\frac{1}{17}\left(-\frac{25}{12} - \frac{7}{8} + \frac{7}{8} + \frac{25}{12}\right) = 0$$

Звідси маємо:

$$\mathbb{D}\xi_1 = \mathbb{E}\xi_1^2 - (\mathbb{E}\xi_1)^2 = \frac{31}{34}$$

$$\mathbb{D}\xi_2 = \mathbb{E}\xi_2^2 - (\mathbb{E}\xi_2)^2 = \frac{13}{6} - \frac{1}{9} = \frac{37}{18}$$

$$cov(\xi_1, \xi_2) = \mathbb{E}\xi_1\xi_2 - \mathbb{E}\xi_1\mathbb{E}\xi_2 = 0 - 0 = 0$$

Тепер можемо записати коваріаційну матрицю:

$$\mathfrak{C}_{\vec{\xi}} = \begin{pmatrix} \frac{31}{34} & 0 \\ 0 & \frac{37}{18} \end{pmatrix}$$

2.5 Умовні щільності розподілу для кожної координати

Маємо:

$$f_{\overrightarrow{\xi}}(x,y) == \begin{cases} \frac{1}{17} & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \notin D \end{cases}$$

$$f_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -2 \\ \frac{1}{17}(4x+9) & -2 < x \leq -1 \\ \frac{1}{17}(x+6) & -1 < x \leq 0 \\ \frac{1}{17}(6-x) & 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{17}(9-4x) & 1 < x \leq 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$

$$f_{\xi_2}(y) = \begin{cases} 0 & y \leq -3 \\ \frac{1}{17}(6+2y) & -3 < y \leq -2 \\ \frac{1}{17}(y+4) & -2 < y \leq 0 \\ \frac{4}{17} & 0 < y \leq 1 \\ \frac{1}{17}(5-y) & 1 < y \leq 3 \\ 0 & y > 3 \end{cases}$$

Звідси:

$$f_{\xi_1|\xi_2}(x|y) = \frac{f_{\overrightarrow{\xi}}(x,y)}{f_{\xi_2}(y)} = \begin{cases} 0 & y \leq -3 \\ \frac{1}{6+2y} & -3 < y \leq -2, x \in [-y-3, y+3] \\ 0 & -3 < y \leq -2, x \notin [-y-3, y+3] \\ \frac{1}{y+4} & -2 < y \leq 0, x \in [-\frac{y}{2}-2, \frac{y}{2}+2] \\ 0 & -2 < y \leq 0, x \notin [-\frac{y}{2}-2, \frac{y}{2}+2] \\ \frac{1}{4} & 0 < y \leq 1, x \in [-2,2] \\ 0 & 0 < y \leq 1, x \notin [-2,2] \\ \frac{1}{5-y} & 1 < y \leq 3x \in [-2.5+\frac{y}{2}, 2.5-\frac{y}{2}] \\ 0 & 1 < y \leq 3x \notin [-2.5+\frac{y}{2}, 2.5-\frac{y}{2}] \\ 0 & y > 3 \end{cases}$$

$$f_{\xi_2|\xi_1}(y|x) = \frac{f_{\overrightarrow{\xi}}(x,y)}{f_{\xi_1}(x)} = \begin{cases} 0 & x \le -2 \\ \frac{1}{4x+9} & -2 < x \le -1, y \in [-2x-4, 2x+5] \\ 0 & -2 < x \le -1, y \notin [-2x-4, 2x+5] \\ \frac{1}{x+6} & -1 < x \le 0, y \in [-x-3, 3] \\ 0 & -1 < x \le 0, y \notin [-x-3, 3] \\ \frac{1}{6-x} & 0 < x \le 1, y \in [x-3, 3] \\ 0 & 0 < x \le 1, y \notin [x-3, 3] \\ \frac{1}{9-4x} & 1 < x \le 2, y \in [2x-4, -2x+5] \\ 0 & 1 < x \le 2, y \notin [2x-4, -2x+5] \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$

Перевіримо умову нормування:

$$\int_{-y-3}^{y+3} \frac{dx}{6+2y} = \int_{-\frac{y}{2}-2}^{\frac{y}{2}+2} \frac{dx}{y+4} = \int_{-2}^{2} \frac{dx}{4} = \int_{-2.5+\frac{y}{2}}^{2.5-\frac{y}{2}} \frac{dx}{5-y} = 1$$

$$\int_{-2x-4}^{2x+5} \frac{dy}{4x+9} = \int -x - 33\frac{dy}{x+6} = \int_{x-3}^{3} \frac{dy}{-x+6} == \int_{2x-4}^{5-2x} \frac{dy}{9-4x} = 1$$

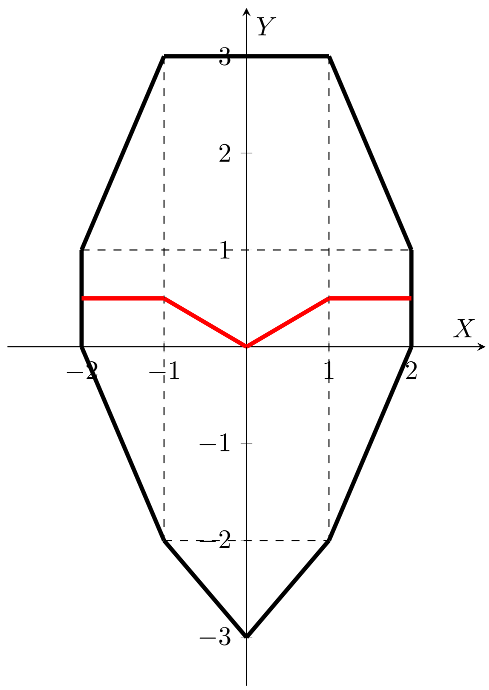
2.6 Умовні математичні сподівання для кожної координати з перевіркою

Маємо наступні формули

$$\begin{cases} \mathbb{E}(\xi_2|\xi_1 = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{\xi_2|\xi_1}(y|x) dy \\ \mathbb{E}(\xi_1|\xi_2 = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi_1|\xi_2}(x|y) dx \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1 = x) = \begin{cases} 0 & x \le -2 \\ \int_{-2x-4}^{2x+5} \frac{ydy}{4x+9} = \frac{1}{2} & -2 < x \le -1 \\ \int_{-x-3}^{3} \frac{ydy}{x+6} = -\frac{x}{2} & -1 < x \le 0 \\ \int_{x-3}^{3} \frac{ydy}{6-x} = \frac{x}{2} & 0 < x \le 1 \\ \int_{2x-4}^{-2x+5} \frac{ydy}{9-4x} = \frac{1}{2} & 1 < x \le 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$

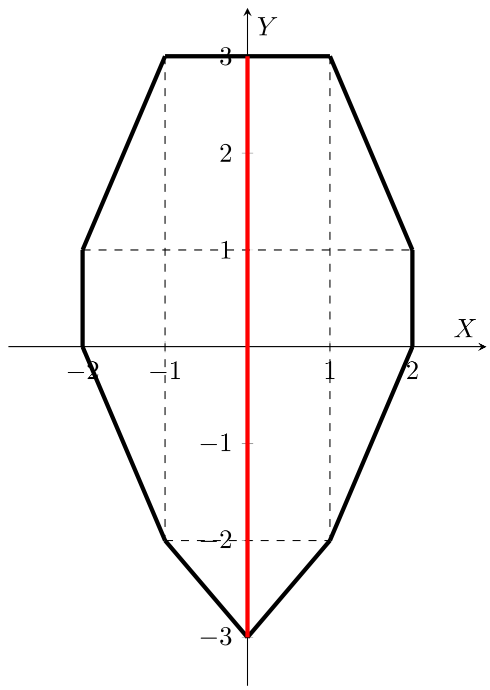
Лінію матсподівання можна побачини на наступному малюнку:



Порахуємо аналогічно $\mathbb{E}(\xi_1|\xi_2 = y)$

$$\mathbb{E}(\xi_1|\xi_2 = y) = \begin{cases} 0 & y \le -3 \\ \int_{-y-3}^{y+3} \frac{xdx}{6+2y} = 0 & -3 < y \le -2 \\ \int_{-\frac{y}{2}-2}^{\frac{y}{2}+2} \frac{xdx}{y+4} = 0 & -2 < y \le 0 \\ \int_{-2}^{2} \frac{xdx}{4} = 0 & 0 < y \le 1 \\ \int_{-2.5+\frac{y}{2}}^{-2.5+\frac{y}{2}} \frac{xdx}{5-y} = 0 & 1 < y \le 3 \\ 0 & y > 3 \end{cases} = 0 \; \forall y \in \mathbb{R}$$

Лінію матсподівання можна побачини на наступному малюнку:



Розглянемо наступні вип. величини

$$\mathbb{E}(\xi_1|\xi_2) = 0$$

$$\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1) = \begin{cases} 0 & \xi_1 \le -2 \\ \frac{1}{2} & -2 < \xi_1 \le -1 \\ -\frac{\xi_1}{2} & -1 < \xi_1 \le 0 \\ \frac{\xi_1}{2} & 0 < \xi_1 \le 1 \\ \frac{1}{2} & 1 < \xi_1 \le 2 \\ 0 & \xi_1 > 2 \end{cases}$$

Зробимо перевірку, порахуємо повне матсподівання:

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi_1|\xi_2)) = \mathbb{E}(0) = 0 = \mathbb{E}\xi_1$$

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1)) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}(\xi_2|\xi_1 = x) f_{\xi_1}(x) dx =$$

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{2} \frac{4x+9}{17} dx + \int_{-1}^{0} \frac{-x}{2} \frac{x+6}{17} dx + \int_{0}^{1} \frac{x}{2} \frac{-x+6}{17} dx + \int_{1}^{2} \frac{1}{2} \frac{9-4x}{17} dx =$$

$$\frac{3}{34} + \frac{4}{51} + \frac{4}{51} + \frac{3}{34} = \frac{1}{3} = \mathbb{E}\xi_2$$