

Розрахункова Робота 2  
з математичної статистики  
Варіант 133

Воробйов Георгій

12 травня 2021 р.

**Зміст**

<b>0 Завдання</b>	<b>1</b>
<b>1 Розв'язок</b>	<b>2</b>
1.1 Вступ . . . . .	2
1.2 Аналіз вибірки . . . . .	2
<b>2 Вибіркові статистики</b>	<b>6</b>
<b>3 Висунення Гіпотези</b>	<b>7</b>
<b>4 Оцінки параметра розподілу</b>	<b>8</b>
4.1 Метод моментів . . . . .	8

**0 Завдання**

1. Проведіть первинний аналіз вибірки. Це включає статистичний ряд (для розподілів — інтервальний), емпіричну функцію розподілу (для неперервних розподілів інтервальну), її графік, полігон частот (для дискретних розподілів), гістограму (неперервних розподілів), box-and-whisker plot.
2. Знайдіть вибіркове середнє, вибіркору дисперсію, виправлену вибіркору дисперсію, вибіркору медіану, вибіркору моду, вибіркові коефіцієнти асиметрії та ексцесу.
3. Обґрунтуйте та висуньте (нову) гіпотезу про розподіл генеральної сукупності.
4. Методом моментів та методом максимальної вірогідності знайдіть оцінки параметрів розподілу. В деяких випадках це може бути не дуже

просто (як, наприклад, для параметра  $N$  біноміальної генеральної сукупності). Це чудовий спосіб проявити креативність та/або вміння користуватися Google.

5. Для кожного параметра краще з цих двох оцінок перевірте на (асимптотичну) незміщеність, консистентність та ефективність.
6. Побудуйте довірчі інтервали надійністю 0.95 для параметрів розподілу.
7. Нарешті, перевірте висунуту гіпотезу про розподіл генеральної сукупності за допомогою критерію  $\chi^2$
8. Проявіть всі свої літературні здібності та напишіть висновки

Задана вибірка:

2 1 1 4 4 3 4 3 2 7 6 1 5 3 3 1 4 3 2 3 2 3 2 3 4 5 3 5 5 1 2 3 6 3 5 5 2 5 2 2 0 3  
 0 2 6 2 3 4 3 2 4 1 4 3 4 2 4 1 4 5 5 3 3 3 2 4 3 2 4 3 3 3 3 4 2 3 6 1 2 3 3 4 0 3  
 5 1 4 4 3 3 1 3 3 6 2 2 3 2 5 3

## 1 Розв'язок

### 1.1 Вступ

Запишемо відсортовану вибірку:

0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 3 3 3  
 3  
 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 6 6 6 6 6 6 7

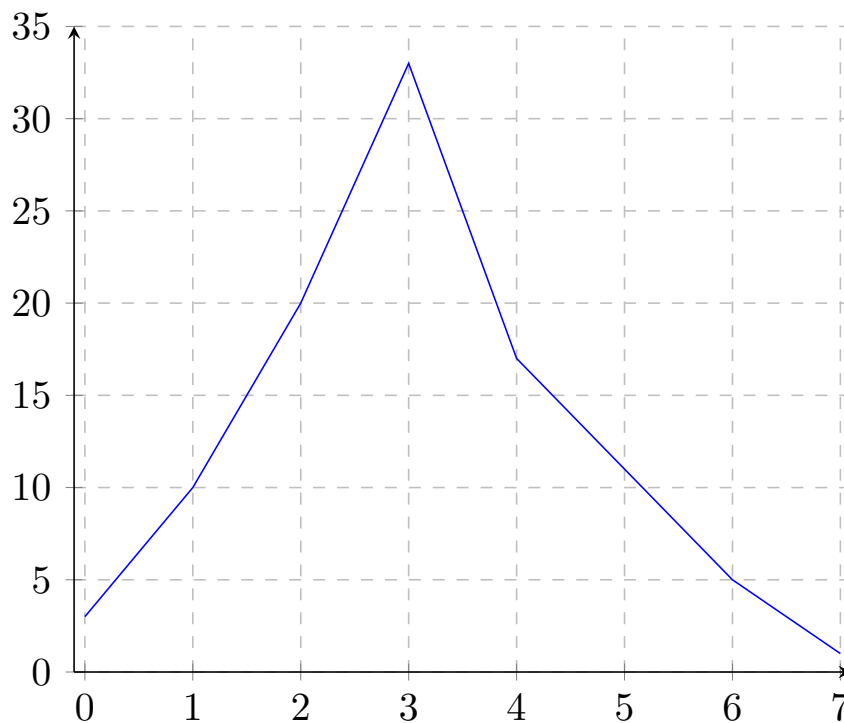
### 1.2 Аналіз вибірки

Побудуємо статистичний ряд даної вибірки

елементи	Частота $n_i$	Кумулятивна частота $n_i^*$	Відносна частота $\nu_i$	Відносна кумулятивна частота $\nu_i^*$
0	3	3	0.03	0.03
1	10	13	0.1	0.13
2	20	33	0.2	0.33
3	33	66	0.33	0.66
4	17	83	0.17	0.83
5	11	94	0.11	0.94
6	5	99	0.05	0.99
7	1	100	1	1

За даними таблиці можемо побудувати полігон частот та функцію розподілу

Рис. 1: Полігон частот



Маємо наступну емпіричну функцію розподілу

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 0.03 & 0 < x \leq 1 \\ 0.13 & 1 < x \leq 2 \\ 0.33 & 2 < x \leq 3 \\ 0.66 & 3 < x \leq 4 \\ 0.83 & 4 < x \leq 5 \\ 0.94 & 5 < x \leq 6 \\ 0.99 & 6 < x \leq 7 \\ 1 & x > 7 \end{cases}$$

Відповідний їй графік:

Рис. 2: Емпірична функція розподілу

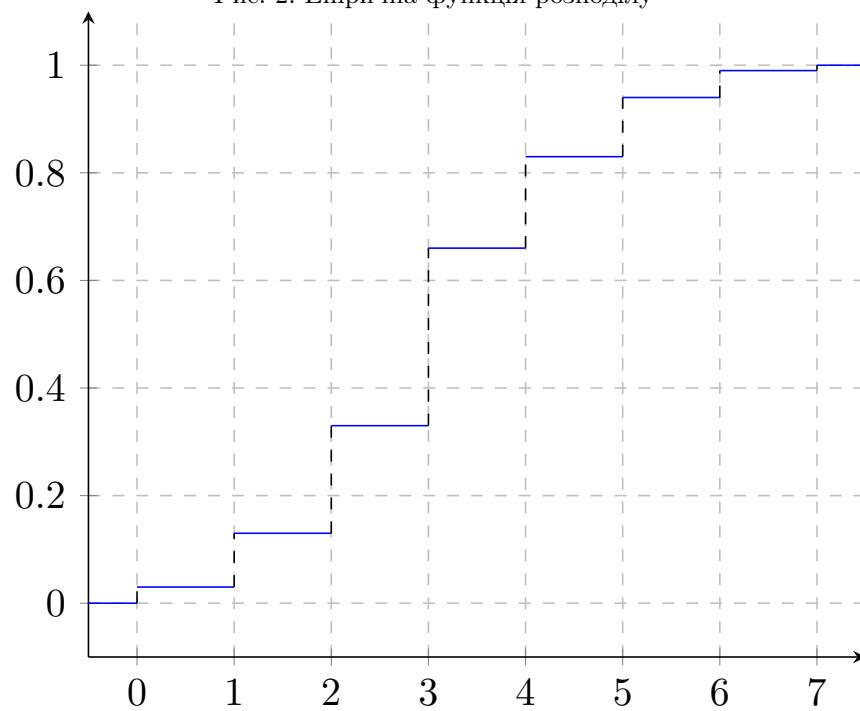
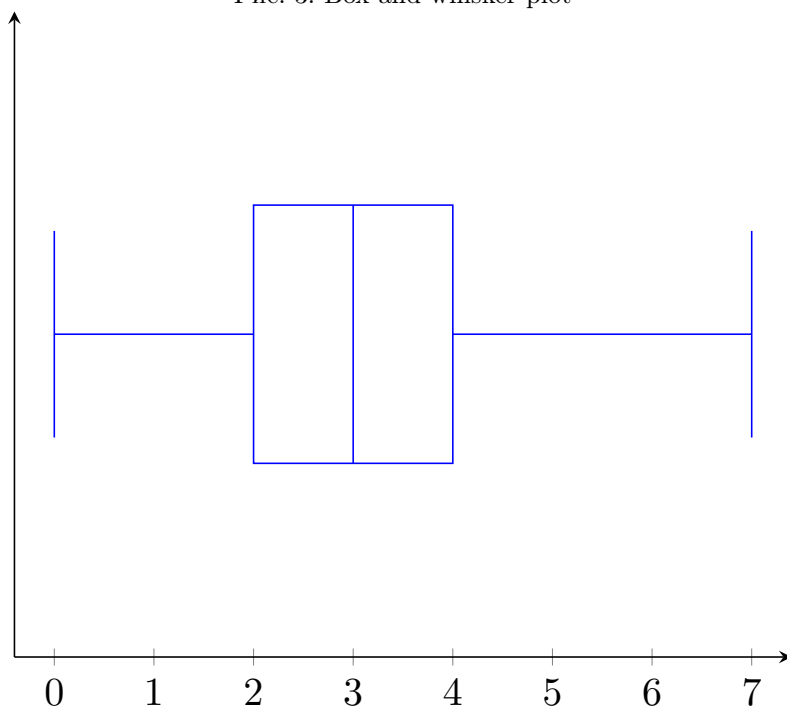


Рис. 3: Box and whisker plot



## 2 Вибіркові статистики

Порахуємо значення вибіркового середнього:

$$\bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{100} \xi_i = 3.09$$

Порахуємо значення вибіркової дисперсії:

$$\mathbb{D}^{**} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{100} (\xi_i - \bar{\xi})^2 = 2.08$$

Порахуємо значення виправленої вибіркової дисперсії:

$$\mathbb{D}^{***} = \frac{n}{n-1} \mathbb{D}^{**} = 2.06$$

Порахуємо вибірккову медіану:

$$Me^* \xi = \langle \text{середина вибірки} \rangle = 3$$

Порахуємо вибірккову моду - значення вибірки, що зустрічається найчастіше:

$$Mo^* \xi = 3$$

Для розрахунку вибіркових коефіцієнтів асиметрії та ексцесу розрахуємо потрібні початкові та центральні вибіркові моменти

$$As^* \xi = \frac{\mu_3^*}{(\sigma^*)^3}$$

$$Ex^* \xi = \frac{\mu_4^*}{(\sigma^*)^4} - 3$$

$$\mu_3^* = \mathbb{E} [\xi - \bar{\xi}]^3 = 0.667$$

$$\mu_4^* = \mathbb{E} [\xi - \bar{\xi}]^4 = 12.429$$

$$\sigma^* = \sqrt{\mathbb{D}^{**}} = 1.443$$

$$As^* \xi = 0.221$$

$$Ex^* \xi = -0.14$$

### 3 Висунення Гіпотези

1. Маємо дискретну ГС
2. Значення дисперсії менше ніж математичного сподівання (Що схоже на  $pq$  та  $pr$  відповідно)
3. Має вибіркву медіану рівну вибірковій моді

Тож можемо припустити, що данна ГС є розподіленою біноміально  
 $\xi \sim Bin(N, p)$

## 4 Оцінки параметра розподілу

### 4.1 Метод моментів

Маємо відомі нам значення матсподівання та дисперсії:

$$\begin{cases} \mathbb{E}\xi = np \\ \mathbb{D}\xi = np(1 - p) \end{cases}$$