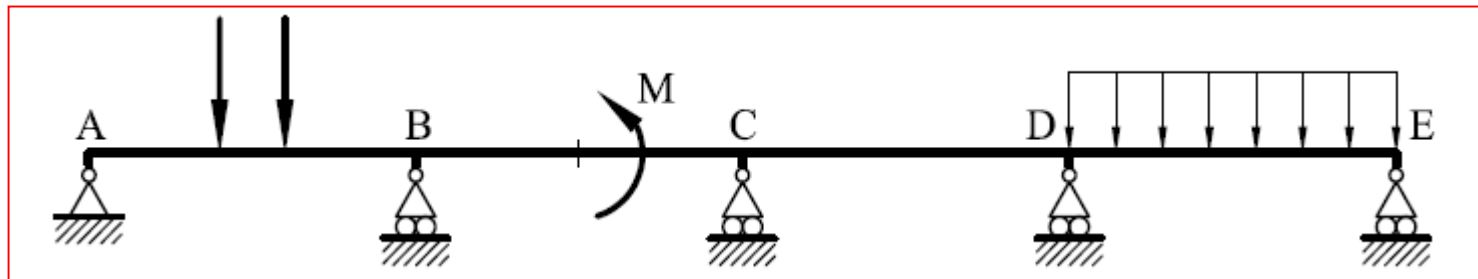




Vigas continuas:

Se designa por viga continua a una estructura construida por n apoyos, siendo $n \geq 3$. Por tanto la viga continua posee como mínimo dos vanos. Uno de los apoyos es fijo (articulación o empotramiento) y los otros apoyos como rodillos. El proceso general de los esfuerzos para la resolución de estructuras hiperestáticas se basa en la transformación de esta en una estructura isostática (isostática fundamental). Imponiendo las condiciones de compatibilidad de los desplazamientos, se obtiene un sistema de n ecuaciones que nos permite resolver el problema.



Ecuación de los tres momentos:

La ecuación de los tres momentos establece una relación entre los momentos flectores que surgen en los tres apoyos consecutivos de una viga continua, en función de la carga aplicada y de las características geométricas y de inercia de la viga.

Aplicando la ecuación de los tres momentos el número de veces que sea necesario, se obtiene un sistema de ecuaciones que, resolviéndolo entrega los momentos flectores (incógnitas hiperestáticas) en los apoyos de la viga continua.



Observaciones:

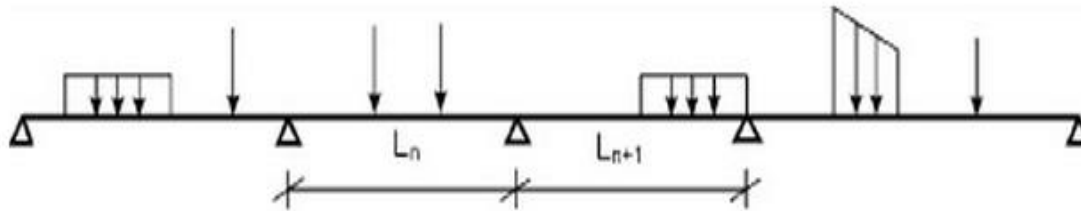
1. Para resolver la viga continua se aplica varias veces la ecuación de los tres momentos, siempre a tres apoyos consecutivos, y se monta un sistema de ecuaciones, cuya resolución entrega las incógnitas hiperestáticas.
2. Los signos para los momentos flectores en los apoyos, obtenidos de la resolución del sistema, están de acuerdo con la convención clásica, momentos flectores positivos (tracción en la fibra inferior) y momentos negativos (tracción en la fibra superior de la viga)
3. Si los apoyos son articulaciones o apoyos simples (rodillos) los momentos son conocidos como cero.
4. Si hay un voladizo en los apoyos extremos, los momentos en esos apoyos son conocidos (son los momentos que los voladizos introducen en las vigas). Cuenta el signo para estos momentos, de acuerdo con la convención clásica.
+ = tracción del lado inferior de la viga.
- = tracción del lado superior de la viga.
5. Si hay un empotramiento en el extremo de la viga, se aplica la ecuación imaginando en el lugar del empotramiento un vano ficticio con momento de inercia infinito
 $I \rightarrow \infty$



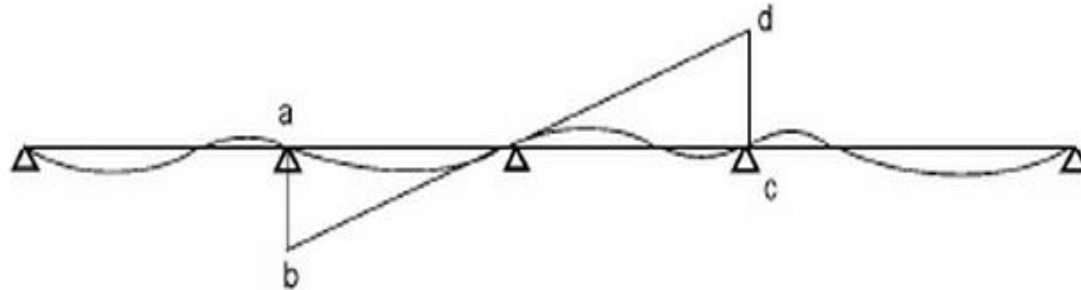
Teoría:

Suponga la viga mostrada en la figura, en la cual en los apoyos de los extremos no existe momento.

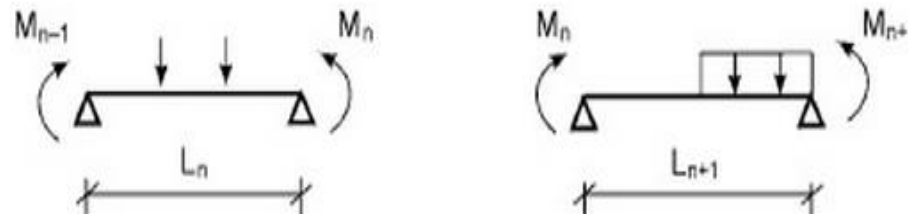
A)



B)



C)





Considerando la tangente de la elástica en un apoyo intermedio cualquier, y de la semejanza entre triángulos de la figura anterior **B)** se obtiene:

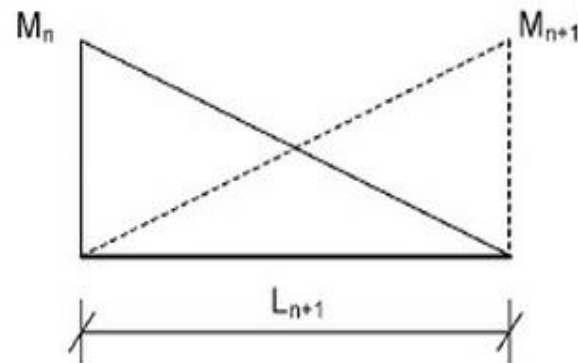
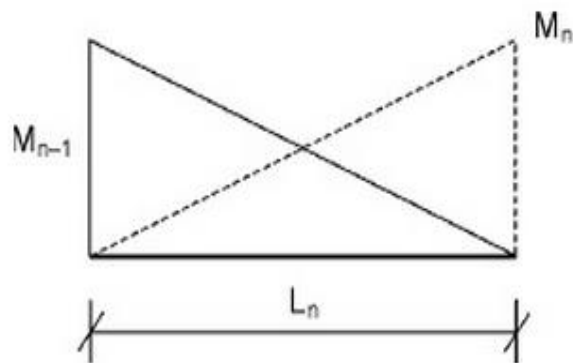
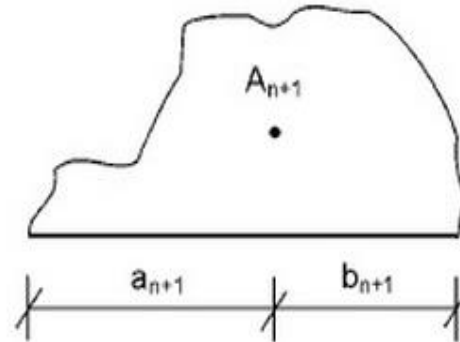
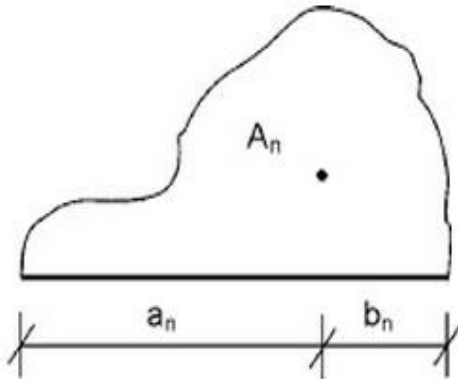
$$\frac{\overline{ab}}{L_n} = -\frac{\overline{cd}}{L_{n+1}}$$
$$(\overline{ab})L_{n+1} = -(\overline{cd})L_n$$



En la figura **C)** están representados por separado los respectivos trechos de la viga, que pueden ser trasladados como vigas simplemente apoyados con momentos redundantes en sus extremos.

En el caso general, los diagramas de los momentos debidos a las cargas aplicadas tendrán áreas A_n y A_{n+1} con sus Centroides localizados como se presenta en las siguientes figuras.

En la siguiente presentación, están trazados los diagramas correspondientes a los momentos en los apoyos. Los signos utilizados son los correspondientes a los momentos internos en las vigas.



Aplicando el segundo teorema de área-momento se tiene:

$$\overline{ab} (EI)_n = (A_n a_n) + M_{n-1} \frac{L_n}{2} \times \frac{L_n}{3} + M_n \frac{L_n}{2} \times \frac{2}{3} L_n$$

$$\overline{cd} (EI)_{n+1} = (A_{n+1} b_{n+1}) + M_n \frac{L_{n+1}}{2} \times \frac{2}{3} L_{n+1} + M_{n+1} \frac{L_{n+1}}{2} \times \frac{L_{n+1}}{3}$$



Si la viga tiene inercia constante en todos los vanos, al reemplazar estos valores en la ecuación **1** y simplificar se obtiene:

$$\begin{aligned} (A_n a_n) L_{n+1} + M_{n-1} \frac{(L_n)^2}{6} L_{n+1} + M_n \frac{(L_n)^2}{3} L_{n+1} \\ = -A_{n+1} b_{n+1} L_n - \frac{M_n (L_{n+1})^2}{3} L_n - M_{n+1} \frac{(L_{n+1})^2}{6} L_n \end{aligned}$$

Dividiendo a ambos lados por $L_n \cdot L_{n+1}$:

$$M_{n-1} \frac{L_n}{6} + M_n \frac{L_n}{3} + M_n \frac{L_{n+1}}{3} + M_{n+1} \frac{L_{n+1}}{6} = -A_n \frac{a_n}{L_n} - A_{n+1} \frac{b_{n+1}}{L_{n+1}}$$

Finalmente se obtiene la ecuación de los tres momentos:

$$M_{n-1} L_n + 2M_n (L_n + L_{n+1}) + M_{n+1} L_{n+1} = -\frac{6A_n a_n}{L_n} - \frac{6A_{n+1} b_{n+1}}{L_{n+1}}$$

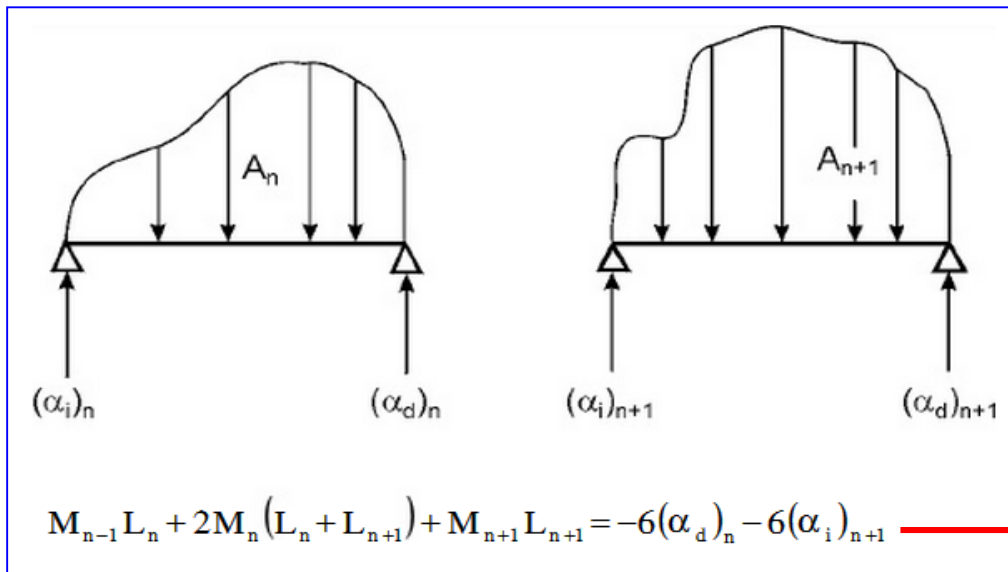


Ecuación de los tres momentos para vigas continuas.



El procedimiento consiste en tomar trechos de la viga formados por trechos consecutivos e aplicar la ecuación **2** resultando en un sistema de ecuaciones cuya solución da los momentos en los apoyos.

Una forma alterna de la ecuación de los tres momentos se obtiene al observar que los términos de la derecha de la ecuación, son simplemente las reacciones de las vigas conjugadas correspondientes multiplicadas por EI .



Para aplicar esta ecuación resulta práctico utilizar tablas de vigas conjugadas para diferentes tipos de cargas (ver las próximas presentaciones)



	1	2
	$M_1 = -M_2 = \frac{wL^2}{12}$	$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{wL^3}{24}$
	$M_1 = -M_2 = \frac{ws}{24L}(3L^2 - s^2)$	$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{ws}{48}(3L^2 - s^2)$
	$M_1 = M_2 = \frac{ws^2}{6L}(2L + a)$	$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{ws^2}{12}(2L + a)$
	$M_1 = \frac{ws^2}{12L^2}[2L(3L - 4s) + 3s^2]$ $M_2 = -\frac{ws^3}{12L^2}(4L - 3s)$	$\alpha_1 = \frac{ws^2}{24L}(2L - s)^2$ $\alpha_2 = \frac{ws^2}{24L}(2L^2 - s^2)$
	$M_1 = -M_2 = \frac{5wL^2}{96}$	$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{5wL^3}{192}$
	$M_1 = M_2 = \frac{ws}{24L}(3L^2 - 2s^2)$	$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{ws}{48}(3L^2 - 2s^2)$
	$M_1 = -M_2 = \frac{wL^2}{32}$	$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{wL^3}{64}$
	$M_1 = -M_2 = \frac{ws^2}{12L}(2L - s)$	$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{ws^2}{24}(2L - s)$
	$M_1 = -M_2 = \frac{w}{12L}[L^3 - a^2(2L - a)]$	$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{w}{24}[L^3 - a^2(2L - a)]$

Análisis Estructural

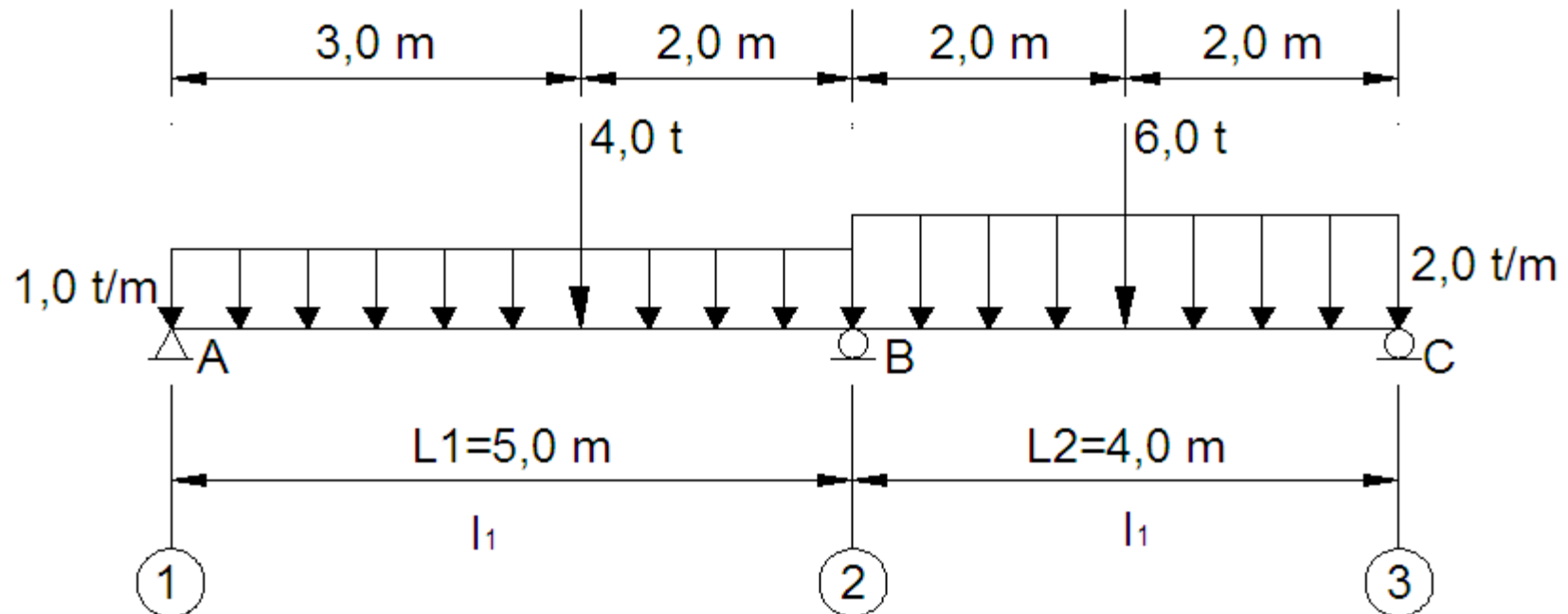
	$M_1 = \frac{wL^2}{20}$ $M_2 = -\frac{wL^2}{30}$	$\alpha_1 = \frac{wL^3}{45}$ $\alpha_2 = \frac{7wL^3}{360}$
	$M_1 = M \frac{b}{L} \left(2 - \frac{3b}{L} \right)$ $M_2 = M \frac{a}{L} \left(2 - \frac{3a}{L} \right)$	$\alpha_1 = M \frac{L}{6} \left(\frac{3b^2}{L^2} - 1 \right)$ $\alpha_2 = M \frac{L}{6} \left(1 - \frac{3a^2}{L^2} \right)$
	$M_1 = -M_2 = \frac{PL}{8}$	$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{PL^2}{16}$
	$M_1 = -M_2 = \frac{Pa(L-a)}{L}$	$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{Pa(L-a)}{2}$
	$M_1 = -M_2 = \frac{Pa(L-a)}{L}$	$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{Pa(L-a)}{2}$
	$M_1 = -M_2 = \frac{5PL}{16}$	$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{5PL^2}{32}$
	$M_1 = -M_2 = \frac{19PL}{72}$	$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{19PL^2}{144}$
	$M_1 = -M_2 = \frac{PL}{12} \cdot \frac{n^2 - 1}{n}$	$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{PL^2}{24} \cdot \frac{n^2 - 1}{n}$
	$M_1 = -M_2 = \frac{PL}{24} \cdot \frac{2n^2 + 1}{n}$	$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{PL^2}{48} \cdot \frac{2n^2 + 1}{n}$
	$M_1 = \frac{Pab^2}{L^2}$ $M_2 = -\frac{Pa^2b}{L^2}$	$\alpha_1 = \frac{Pab}{6L} (b + L)$ $\alpha_2 = \frac{Pab}{6L} (a + L)$

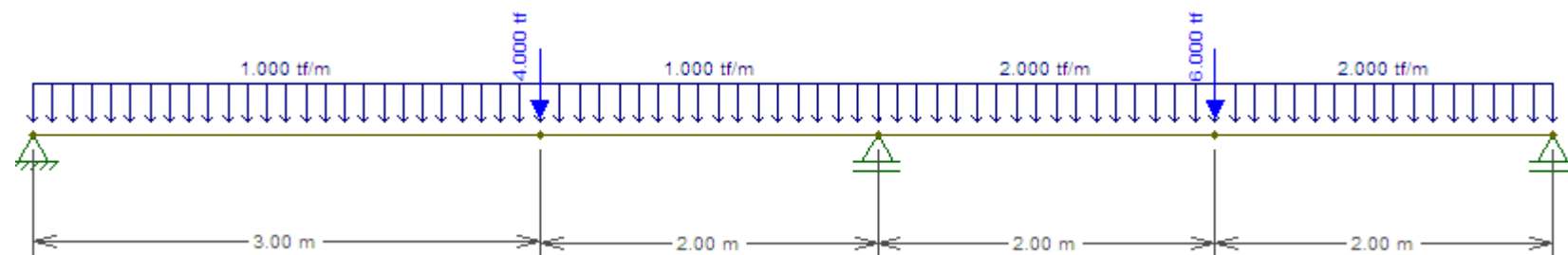


Aplicación de la ecuación de los tres momentos.

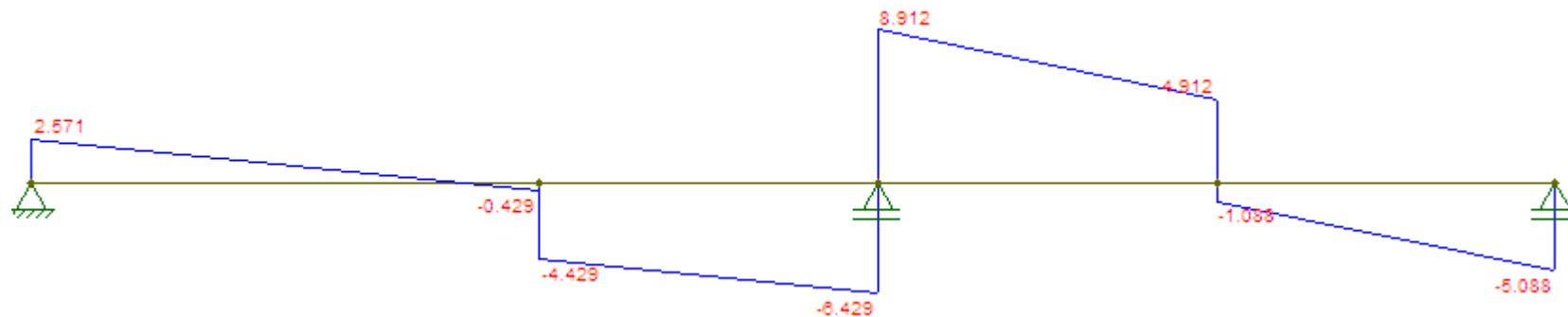
Ejercicio :

Determinar los diagramas de esfuerzos solicitantes para la viga de la figura.

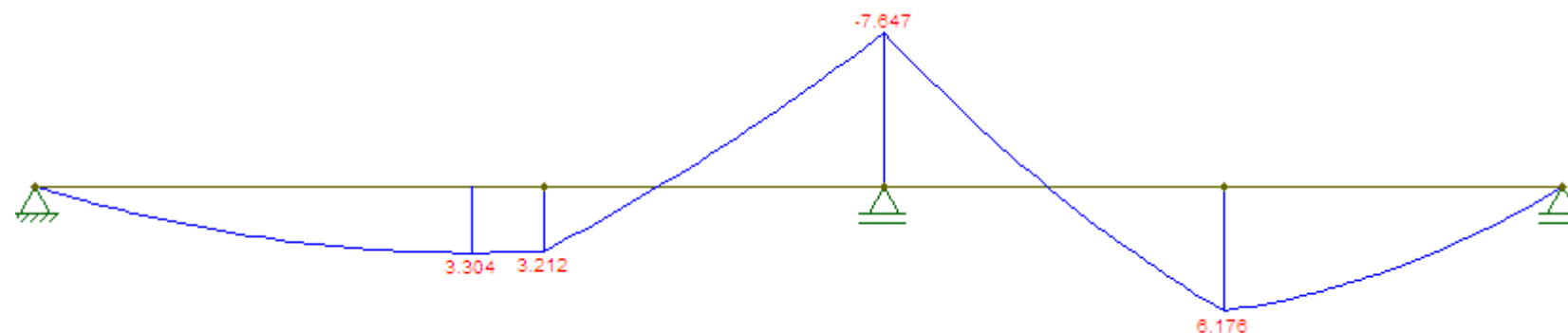




DEC



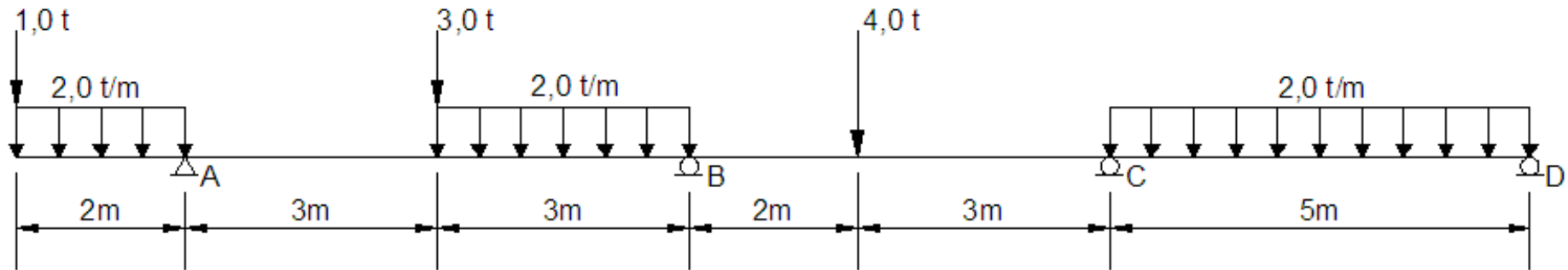
DMF

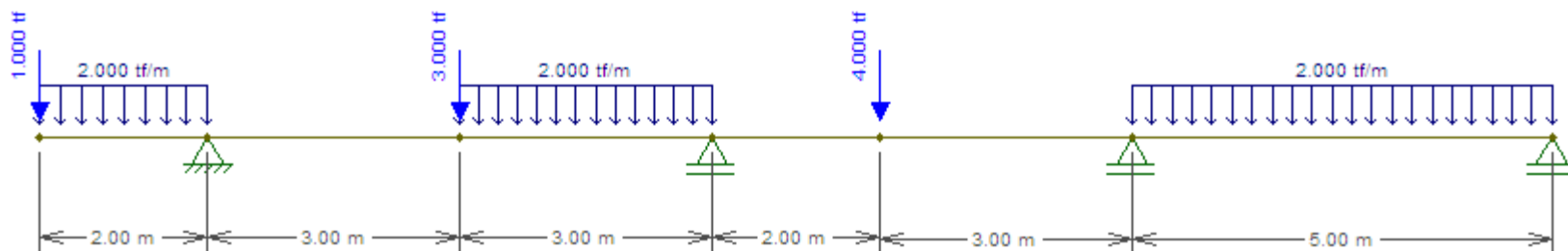




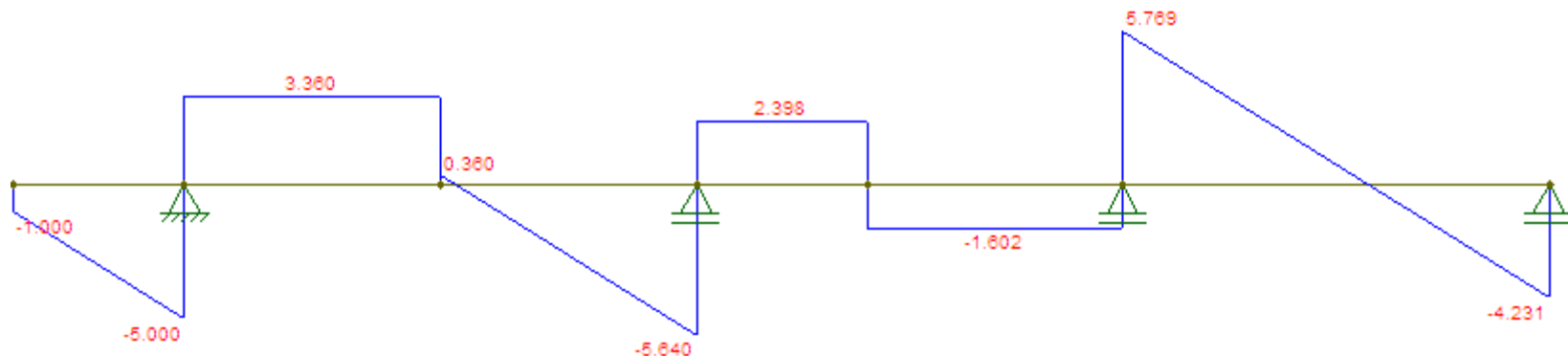
Ejercicio :

Determinar los diagramas de esfuerzos solicitantes para la viga de la figura.

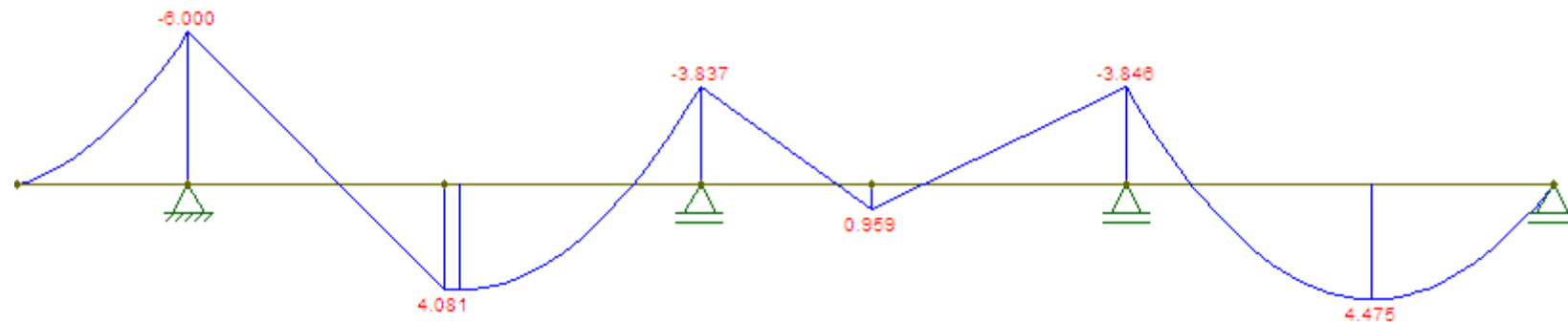




DEC



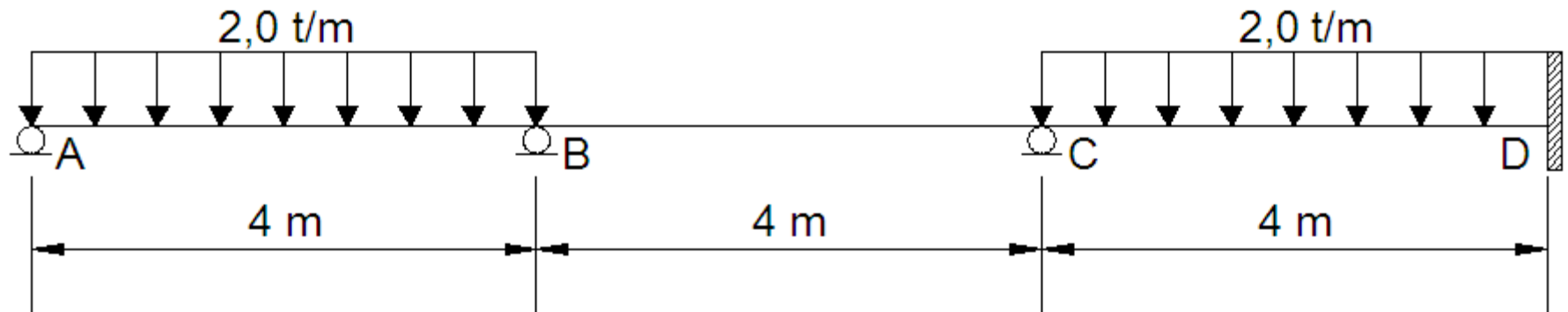
DMF

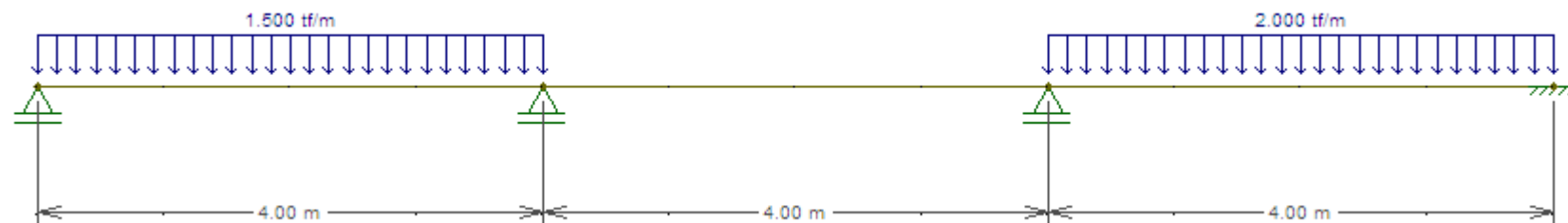




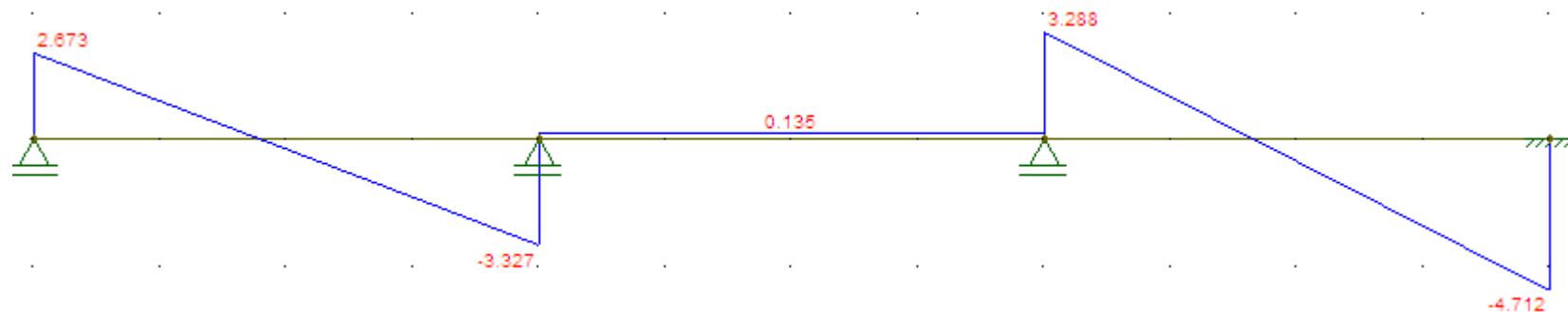
Ejercicio :

Determinar los diagramas de esfuerzos solicitantes para la viga de la figura.

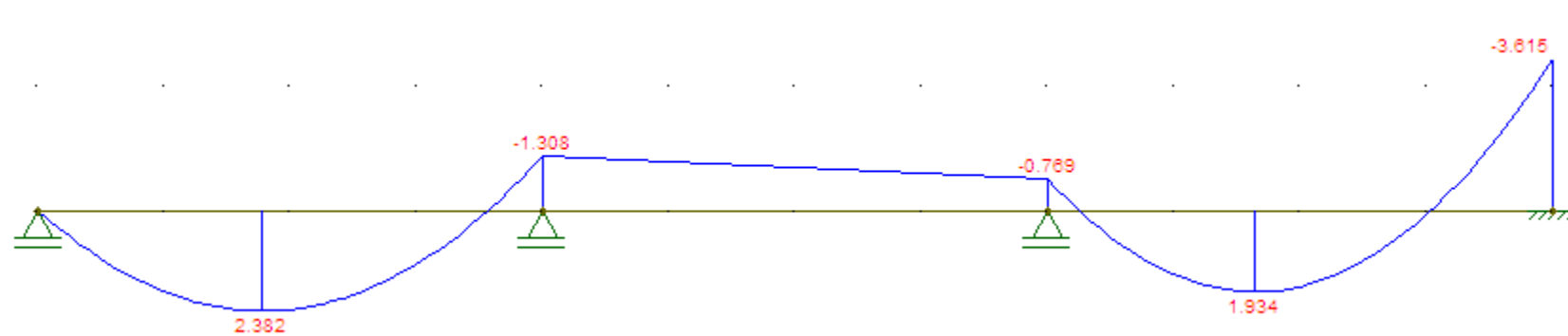




DEC



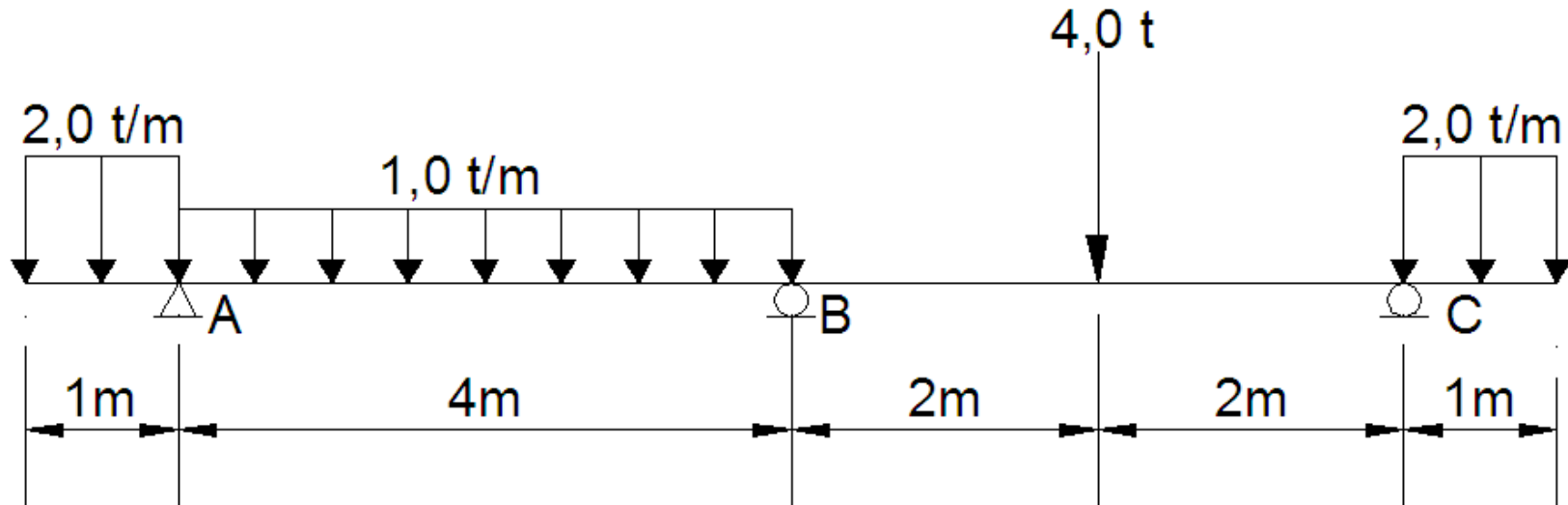
DMF

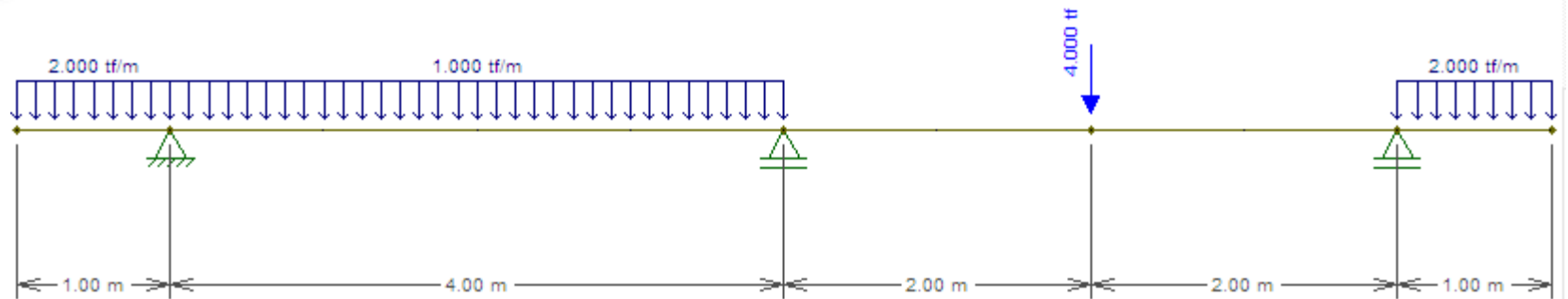




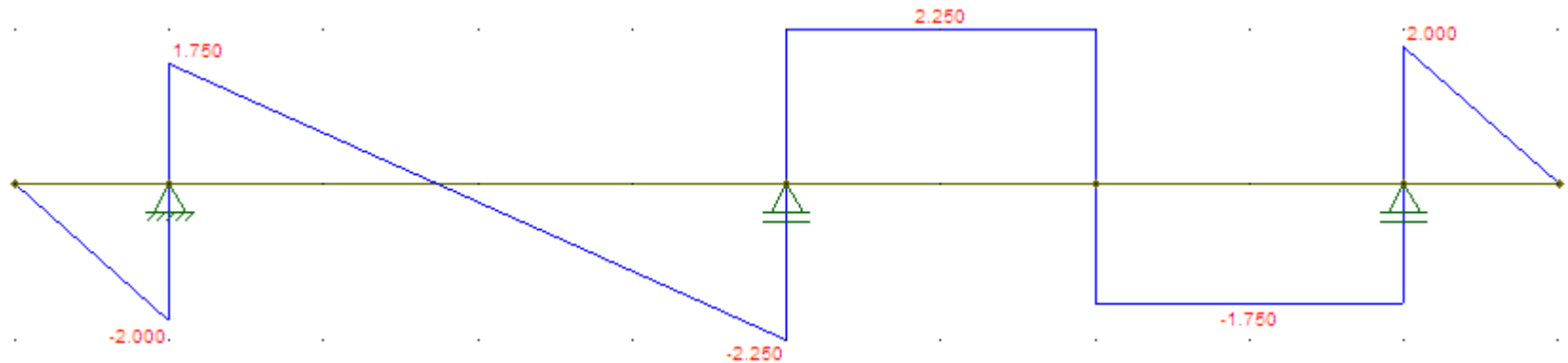
Ejercicio :

Determinar los diagramas de esfuerzos solicitantes para la viga de la figura.

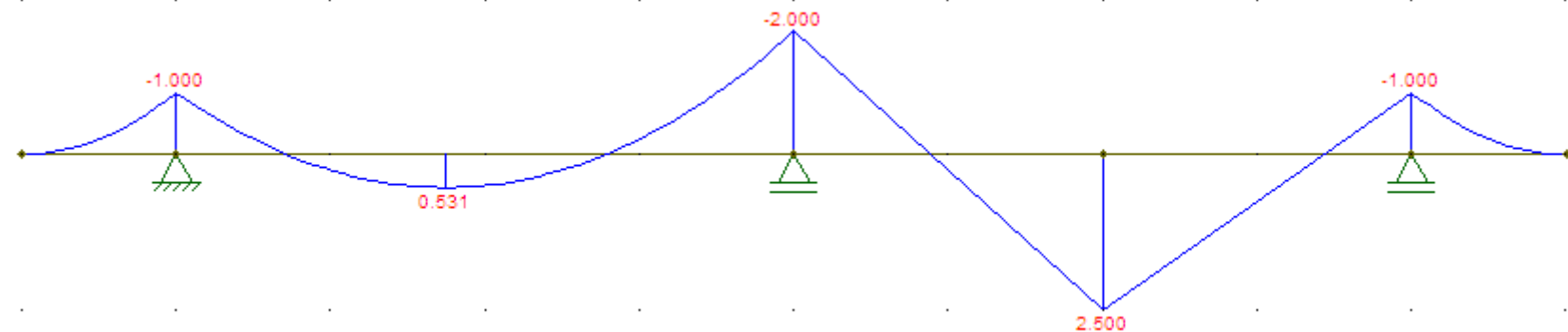




DEC



DMF





Bibliografía

- [1] Hibbeler, R.C., Análisis de estructuras, 8º Ed., Pearson Prentice Hall.
- [2] Aslam Kassimali, Análisis de estructuras. 5Ta ed. Cengage Learning.
- [3] Jack McCormac. Análisis de estructuras Métodos clásicos y matricial. 4 edición.
- [4] James M. Gere., Barry J.G. Mecánica de materiales. 7 edición. Cengage Learning 2010.
- [5] Ftool – Two- Dimensional Frame Analysis Tool. Versión Educacional 2.12.