

## FOURIER SERIES CONCEPTS

หลักการวิเคราะห์อนุกรมฟูรีเยร์ และการแทนสัญญาณในรูปสมการคณิตศาสตร์ที่ประกอบด้วย องค์ประกอบย่อยๆทางความถี่ (Harmonics) เทคนิคการประมาณสมการคณิตศาสตร์ ในรูปอนุกรมขององค์ประกอบฟังก์ชัน Sine และ Cosine ที่สามารถใช้แทนปรากฏการณ์ทางไฟฟ้า (Phenomena) ถูกคิดค้นและพัฒนาโดย Jean Baptiste Joseph Fourier ในปี 1807 ขณะที่ Joseph Fourier กำลังทำการทดลองและพัฒนาเกี่ยวกับ(Heat Conduction) ทฤษฎีอนุกรมของฟูรีเยร์ไม่ได้รับการยอมรับเท่าที่ควรในขณะนั้นและยังคงไม่ได้รับความสนใจเรื่อยมาจนกระทั่งเข้าสู่กลางศตวรรษที่ 18 ทฤษฎีดังกล่าวได้รับการยอมรับในภายหลังและได้ถูกนำไปใช้อย่างแพร่หลายในงานด้านต่างๆ โดยนักวิทยาศาสตร์และวิศวกร เช่นในการศึกษาเกี่ยวกับ คาบเวลา (Periodicities) เมื่อกระแสไฟฟ้าขึ้นสู่ระดับสูงสุด การโคจรของอุกบาต แสงส่องสว่างของดวงดาว (Star Brightness) และปรากฏการณ์ธรรมชาติที่เกี่ยวข้องกับไฟฟ้า ในเวลาต่อมา เทคนิคต่างๆ ได้ถูกพัฒนาสำหรับการคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ของอนุกรมฟูรีเยร์ (Coefficients)

### Signal Terminology:

**Signal** หมายถึง สัญญาณ สัญลักษณ์ หรือการคาดเดา การส่งข้อมูลหรือข้อความ การส่งข้อมูลอิเล็กทรอนิกส์ครั้งแรกในรูปแบบรหัสสมอร์ส โดยทั่วไปสัญญาณประกอบด้วยกันสองรูปแบบ รูปแบบที่หนึ่ง คือ การวัดหรือสังเกตหรือมีคุณสมบัติทางกายภาพของปรากฏการณ์ที่มีข้อมูลเกี่ยวกับปรากฏการณ์ดังกล่าว รูปแบบอื่นๆ สัญญาณถูกสร้างโดยระบบที่มนุษย์สร้างขึ้นและมีการเข้ารหัสข้อมูล สัญญาณอาจแตกต่างกันตามช่วงเวลาหรือพื้นที่ การดำรงชีวิตประจำวันเต็มไปด้วยการปรากฏตัวของสัญญาณและไม่เพียงเกิดขึ้นในระบบที่มนุษย์สร้างขึ้น แต่ยังปรากฏอยู่ตามธรรมชาติ

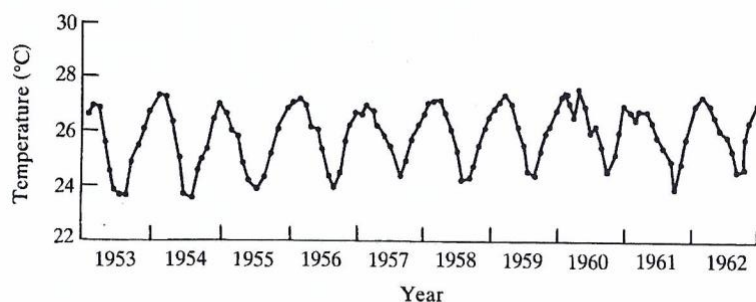


Figure 1.1 The average monthly air temperature at Recife Brazil. [Adapted from Chatfield, fig. 1.2.]

การวัดอุณหภูมิของอากาศเมื่อเวลาผ่านไป ดังแสดงในรูป Figure 1.1 การศึกษาความผันผวนของอุณหภูมิ ทำให้เราทราบเกี่ยวกับลักษณะบางอย่างของสภาพแวดล้อมที่เปลี่ยนแปลงไป ปรากฏการณ์ที่ซับซ้อนมากขึ้น การพูดเป็นการสื่อสารส่งผ่านข่าวสารข้อมูลที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา รูปที่ 1.2 แสดงตัวอย่างขนาดของรูปคลื่นที่เกี่ยวข้องกับสัญญาณเสียงพูด เสียงแต่ละคำมีลักษณะรูปคลื่นที่แตกต่างกัน ซึ่งถ่ายทอดข้อมูลที่แตกต่างกันไปขึ้นอยู่กับการรับรู้ได้ยินของผู้ฟัง

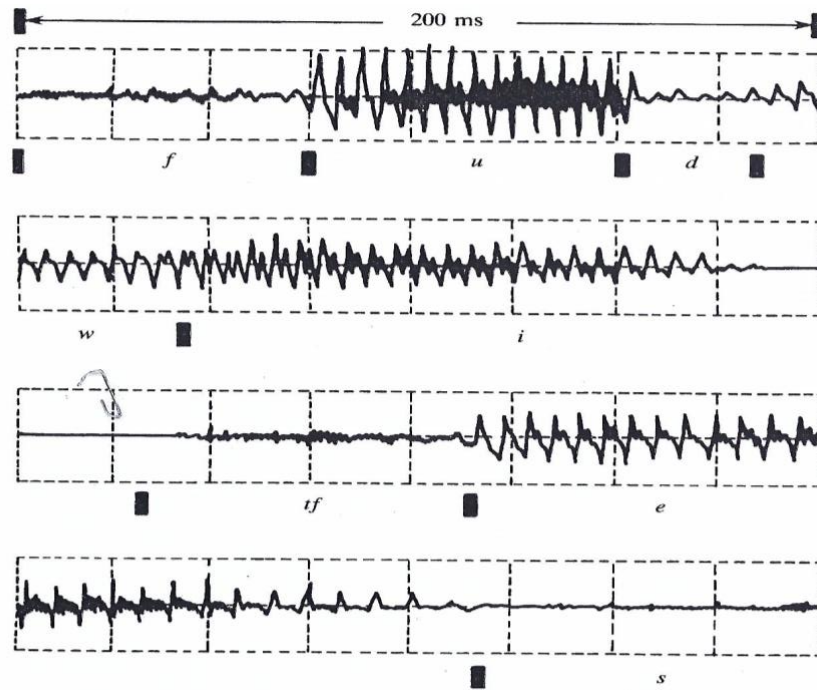


Figure 1.2 Example of a speech waveform illustrating different sounds. The utterance is “should we chase.....”

[Adapted from Oppenheim, fig. 3.3.]

ในระบบหัวใจและกล้ามเนื้อของมนุษย์ สัญญาณปรากฏในรูปแบบของแรงดันไฟฟ้า (ECG, EMG - Electromyographic) ในส่วนตัวอย่างสัญญาณเหล่านี้ วัตถุประสงค์ของการศึกษาสัญญาณหรือการวิเคราะห์สัญญาณ ต้องอาศัยเทคนิคการประมวลผลสัญญาณ เพื่อดึงข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับคุณลักษณะเฉพาะ ของการทำงานของหัวใจ และการทำงานของกล้ามเนื้อ รูปที่ 1.3 แสดงคลื่นไฟฟ้าหัวใจ (ECG) วัดจากท้องของหญิงตั้งครรภ์ ECG เกิดอยู่ตลอดเวลาทุกช่วงเวลา (Continuous Time Domain).

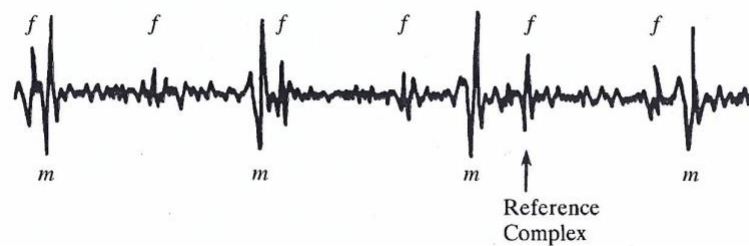


Figure 1.3 The abdominal ECG from a pregnant woman showing the maternal ECG waveform (m) and the fetal ECG waveform (f). [Adapted from Inbar, fig. 8.]

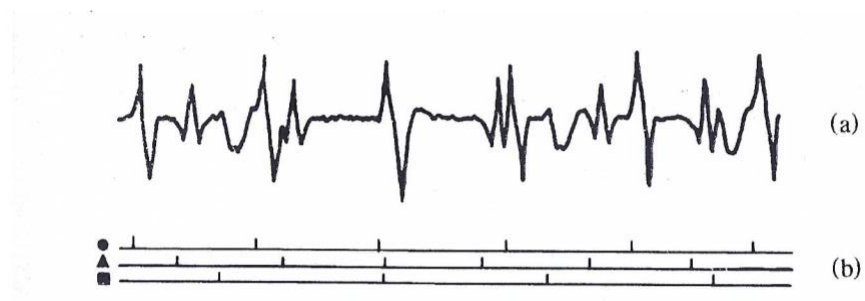


Figure 1.4 (a) An EMG signal containing three different waveform complexes. (b) Three impulse trains showing the times of occurrence of these complexes. [Adapted from Guiheneuc et al., fig. 1.]

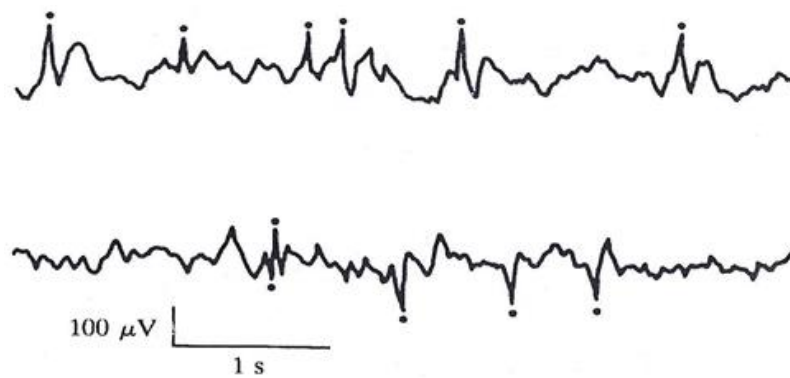


Figure 1.4 (a) An Electroencephalographic signal with sharp transients marked with dots. [Adapted from Glover et al., fig. 1.]

Fourier Series:

$$x(t) = C_0 + \sum_{m=1}^{\infty} C_m \cos(2\pi m f_0 t + \theta_m) \quad (1)$$

$x(t)$  เป็นฟังก์ชันทางเวลาของสัญญาณ

$C_m$  คือ ขนาดของฮาร์โมนิก,

$f_m = m f_0$  คือ ความถี่ฮาร์โมนิกที่อันดับ  $m$

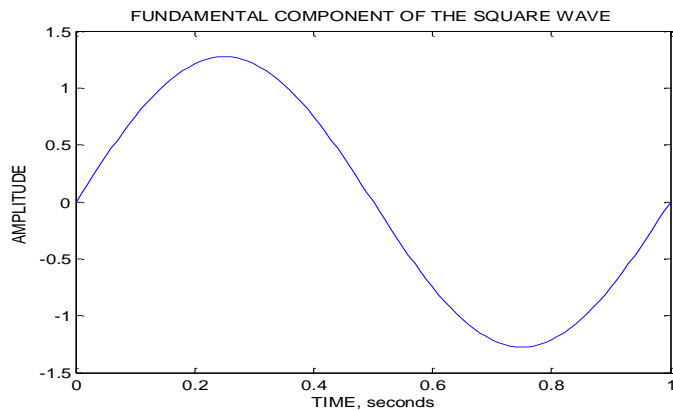
$f_0 = 1/P$  คือ Fundamental frequency,  $P$  คือ คาบเวลาของสัญญาณ

$\theta_m$  คือ เฟสของสัญญาณ

## 1. ทดลองสร้างสัญญาณตามหลักการของอนุกรมฟูรีเยร์

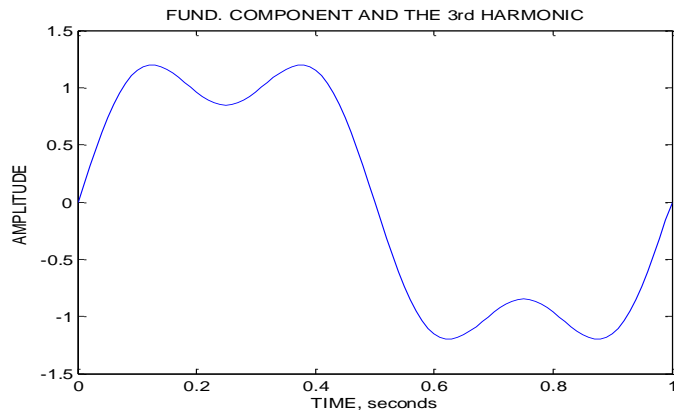
- 1.1. Square Wave มีขนาดของสัญญาณเท่ากับ  $\pm 1$  หน่วย และคาบเวลาเท่ากับ 1 วินาที เป็นสัญญาณที่จะถูกประมาณโดยอาศัย อนุกรมฟูรีเยร์ การกระจายอนุกรมฟูรีเยร์สำหรับสัญญาณ square wave ในรูปผลรวม Sine/Cosine จะมีค่าประมาณเท่ากับ ผลรวมของสัญญาณฮาร์โมนิกส์ อันดับต่างๆ แบบ Odd Harmonics โดยมีขนาดของสัญญาณฮาร์โมนิกส์เท่ากับ  $\frac{4}{\pi k}$ ,  $k$  คือ อันดับการเกิดของฮาร์โมนิกส์
- การทดลองจะเริ่มต้นโดยการสร้างสัญญาณองค์ประกอบพื้นฐาน (Fundamental Component) ซึ่งเป็นสัญญาณไซน์ที่ถูกสุ่มตัวอย่างด้วยช่วงเวลาเท่ากับ 0.01 วินาที และมีความถี่ธรรมชาติเท่ากับ 1Hz แสดงรูปสัญญาณโดยรัน matlab script ที่กำหนด

```
close all;
clear all;
format compact;
whitebg('w');
clc; % clears the command window
f = 1;
T = 1/100;
t = 0:T:1;
y = 4/pi*sin(2*pi*f*t);
figure(1)
plot(t,y), xlabel('TIME, seconds'); ylabel('AMPLITUDE')
title('FUNDAMENTAL COMPONENT OF THE SQUARE WAVE')
```



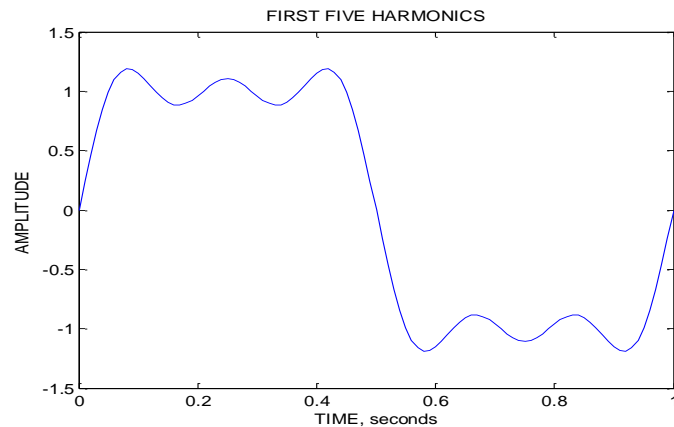
- 1.2. เพิ่มเทอมฮาร์โมนิกอันดับที่ 3 รวมเข้ากับองค์ประกอบพื้นฐาน (Fundamental Component) แสดงผลรูปสัญญาณรวมและสังเกตการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นกับสัญญาณรวม

```
y = 4/pi*(sin(2*pi*f*t) + sin(2*pi*f*3*t)/3);  
figure(2)  
plot(t,y), xlabel('TIME, seconds'); ylabel('AMPLITUDE')  
title('FUND. COMPONENT AND THE 3rd HARMONIC')
```



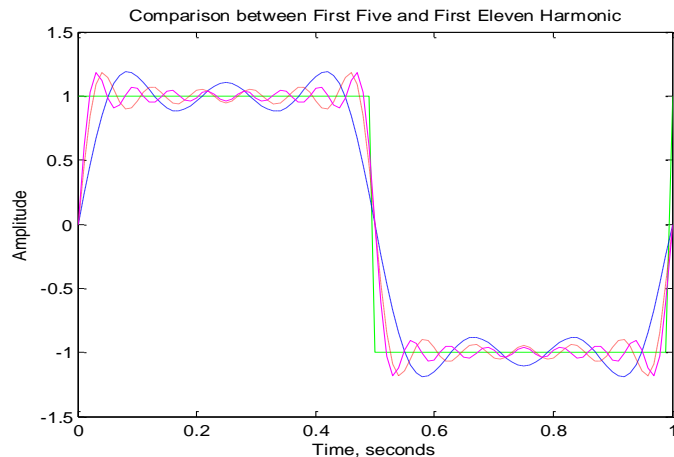
- 1.3. เพิ่มเทอมฮาร์โมนิกอันดับที่ 5 รวมเข้ากับสัญญาณรวมที่ได้จากขั้นตอนที่ 1.2 แสดงผลรูปสัญญาณรวมและสังเกตการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นกับสัญญาณรวม เปรียบเทียบกับผลรวมที่ได้จากขั้นตอนที่ผ่านมา

```
y = 4/pi*(sin(2*pi*f*t) + sin(2*pi*f*3*t)/3 + sin(2*pi*f*5*t)/5);  
figure(3)  
plot(t,y), xlabel('TIME, seconds'); ylabel('AMPLITUDE')  
title('FIRST FIVE HARMONICS')
```



- 1.4. ขั้นตอนนี้ สัญญาณ square wave จะถูกประมาณ โดยเพิ่มเทอมฮาร์โมนิกส์ต่างๆ รวมเข้าด้วยกัน จนถึงฮาร์โมนิกส์อันดับที่ 15 แสดงรูปสัญญาณ พิจารณาและอธิบายผลการเปลี่ยนแปลงของสัญญาณรวมที่เกิดขึ้น และคำนวณหาค่าความผิดพลาดของการประมาณสัญญาณ (Mean Squared Error, MSE) โดยเปรียบเทียบระหว่างสัญญาณรวมที่ประกอบด้วย เทอมฮาร์โมนิกส์สูงสุดลำดับที่ 5 และสัญญาณรวมที่ประกอบด้วย เทอมต่างๆจนถึงเทอมฮาร์โมนิกส์สูงสุดลำดับที่ 15 ค่าความผิดพลาดที่คำนวณได้แตกต่างกันหรือไม่เมื่อเปรียบเทียบกัน

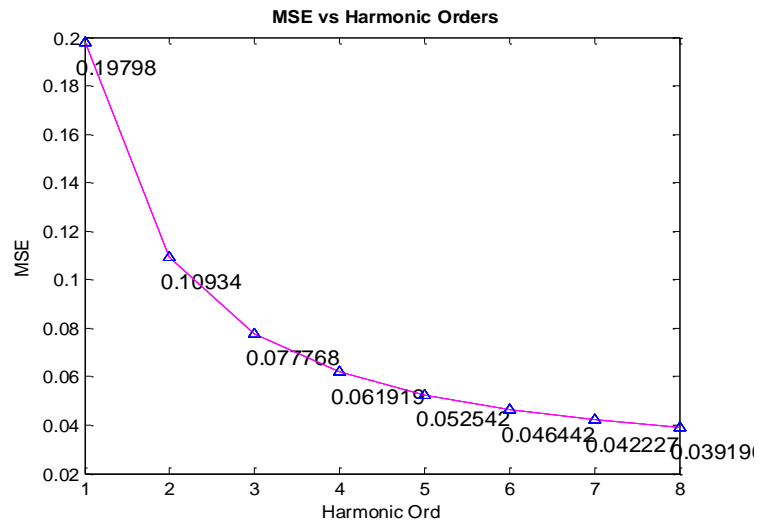
```
f = 1;
T = 1/100;
t = 0:T:1;
x = zeros(size(t));
sw = square(2*pi*f*t);
MeanSE= zeros(8,1);
h= 1;
for k = 1:2:15
    x = x+4*sin(2*pi*f*k*t)/(pi*k);
    MeanSE(h)= mse(sw-x); %Call MSE function
    if k ==5
        y5 =x; % first five harmonics
    elseif k ==11
        y11 =x; % first eleven harmonics
    elseif k ==15
        y15 =x; % first fifteen harmonics
    end
    h= h+1;
end; harOrd= [1:h-1];
figure; plot(t,sw,'g',t,y5,'b--',t,y11,'r:',t,y15,'m')
xlabel('Time, seconds'); ylabel('Amplitude')
title('Comparison between First Fifth-order and First Fifteenth-order Harmonics')
```



```

figure,
for i=1:length(harOrd)
    plot(harOrd,MeanSE,':m', harOrd,MeanSE,'^b'),
    xlabel('Harmonic Ord'),ylabel('MSE'),
    title('\bf MSE vs Harmonic Orders'),
    mark= [num2str(MeanSE(i))];
    text(harOrd(i)-0.1,MeanSE(i)-0.01, mark,'FontSize',12)
    hold on;
end
hold off;

```



## 2. ความถูกต้องของการประมาณสัญญาณ

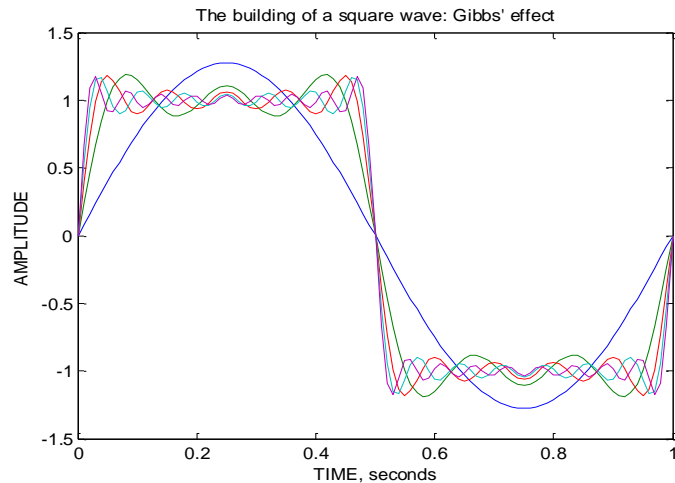
- 2.1. ขั้นตอนนี้จะสร้างสัญญาณ SW จากการรวมสัญญาณเทอมต่างๆ ไปจนถึงสัญญาณฮาร์โมนิกอันดับที่ 19 โดยผลรวมของสัญญาณจากเทอมฮาร์โมนิกต่างๆ ที่ถูกเพิ่มขึ้นในแต่ละขั้นจะถูกเก็บไว้ในพารามิเตอร์รูปเวกเตอร์และแมทริกซ์
- พล็อตแสดงสัญญาณรวมต่างๆ อย่างต่อเนื่องในรูปเดียวกันเพื่อแสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงจากสัญญาณจากสัญญาณ Sine ไปสู่สัญญาณ SW

หมายเหตุ ปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้น ณ จุดที่ไม่ต่อเนื่องทางขนาด (Amplitude Discontinuity) ของสัญญาณ หรือ ฟังก์ชัน เมื่ออนุกรมฟูรีเยร์ถูกนำมาใช้ในการประมาณสัญญาณ ซึ่งปรากฏการณ์นี้เรียกว่า Gibbs' effect สามารถสังเกตเห็นได้ ในรูปของการเกิดออสซิลเลท ณ จุดที่ไม่ต่อเนื่อง Gibbs' effect เกิดขึ้นได้สำหรับการประมาณ (Approximation) ฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่องด้วย จำนวนเทอมที่จำกัดของฟังก์ชันที่ต่อเนื่องในรูปอนุกรมฟูรีเยร์ (Sum of sine or cosine functions)

```

y = zeros(10,max(size(t)));
x = zeros(size(t));
for k=1:2:19
    x = x + 4*sin(2*pi*f*k*t)/(pi*k);
    y((k+1)/2,:) = x;
end
figure(5)
plot(t,y(1:2:9,:)), xlabel('TIME, seconds'); ylabel('AMPLITUDE')
title('The building of a square wave: Gibbs'' effect');

```

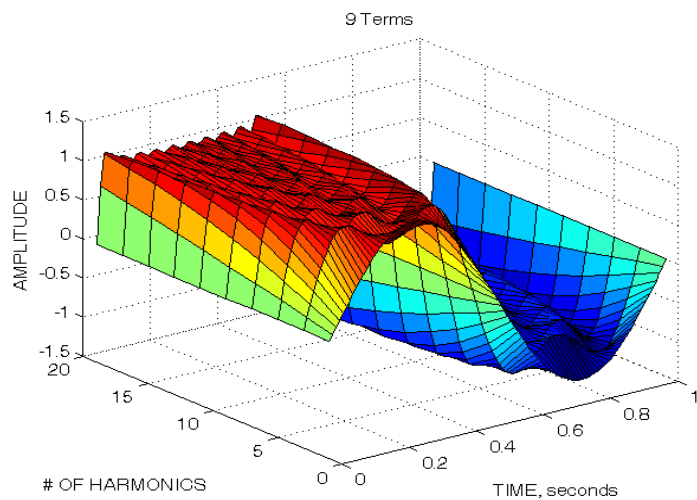


2.2. แสดงรูปสัญญาณรวมต่างๆ ที่ได้จากขั้นตอนที่ 2.1 ในลักษณะรูปพื้นผิว 3มิติ (3-D Surface plot) สังเกตและอธิบายปรากฏการณ์ Gibbs effect ที่เกิดขึ้นในรูป 3มิติ

```

figure(6)
[har NY] = size(y); harv=[1:2:2*har];
surf(t,harv,y);
xlabel('TIME, seconds'); zlabel('AMPLITUDE'); ylabel('# OF HARMONICS')
title([int2str((k-1)/2) ' Terms'])

```





```

%fsCon.m
%Fourier Series Concept of Squarewave Signal
%Modified on 01/28/22 by THA
close all; %delete all figures
clear all; %clear all parameters
format compact; %Setting background of figures
whitebg('w');
f = 1;
T = 1/100;
t = 0:T:1;
y = 4/pi*sin(2*pi*f*t);
figure(1)
plot(t,y), xlabel('TIME, seconds'); ylabel('AMPLITUDE');grid;
title('FUNDAMENTAL COMPONENT OF THE SQUARE WAVE')

%Add in the 3rd-order harmonic
y = 4/pi*(sin(2*pi*f*t) + sin(2*pi*f*3*t)/3);
figure(2)
plot(t,y), xlabel('TIME, seconds'); ylabel('AMPLITUDE')
title('FUND. COMPONENT AND THE 3rd HARMONIC')
%The 5th-order harmonic
y = 4/pi*(sin(2*pi*f*t) + sin(2*pi*f*3*t)/3 +
sin(2*pi*f*5*t)/5);
figure(3)
plot(t,y), xlabel('TIME, seconds'); ylabel('AMPLITUDE')
title('FIRST FIVE HARMONICS')

%Calculate MSE and compare between the first five and fifteen
harmonics
x = zeros(size(t)); %
sw = square(2*pi*f*t);
MeanSE= []; %MeanSE= zeros(8,1);
harOrd= [];
h= 1;
for k = 1:2:15
    x = x+4*sin(2*pi*f*k*t)/(pi*k); %FS to be generated to
match the original SW
    mseTmp= mse(sw-x); %Call MSE function
    MeanSE= [MeanSE mseTmp];
    %MeanSE(h)= mseTmp;
    if k ==5
        y5 =x; % first five harmonics
    elseif k ==11

```

```

        y11 =x; % first eleven harmonics
elseif k ==15
        y15 =x; % first fifteen harmonics
end
harOrd= [harOrd h];
h= h+2;
end;
%harOrd= [1:h-1];
figure(4); plot(t,sw,'g',t,y5,'b--',t,y11,'r:',t,y15,'m')
xlabel('Time, seconds'); ylabel('Amplitude')
title('Comparison between First Five and First Eleven
Harmonic')

%Calculate MSE values of harmonic orders
figure(5),
for i=1:length(harOrd)
    plot(harOrd,MeanSE,':m', harOrd,MeanSE,'^b'),
    xlabel('Harmonic Ord'),ylabel('MSE'),
    title('\bf MSE vs Harmonic Orders'),
    mark= [num2str(MeanSE(i))];
    text(harOrd(i)-0.1,MeanSE(i)-0.01, mark,'FontSize',12)
    hold on;
end
hold off;
%
y = zeros(10,max(size(t)));
x = zeros(size(t));
for k=1:2:19
    x = x + 4*sin(2*pi*f*k*t)/(pi*k);
    y((k+1)/2,:) = x;
end
figure(6)
plot(t,y(1:2:9,:)), xlabel('TIME, seconds');
ylabel('AMPLITUDE')
title('The building of a square wave: Gibbs'' effect');
%
figure(7)
[har NY] = size(y); harv=[1:2:2*har];
surf(t,harv,y);
xlabel('TIME, seconds'); zlabel('AMPLITUDE'); ylabel('# OF
HARMONICS')
title([int2str((k-1)/2) ' Terms'])

```