

1. $AB \rightarrow C, AB \rightarrow D, E \rightarrow B$

If $AB \rightarrow C, AB \rightarrow D$ then $AB \rightarrow CD$ (union)

If $AB \rightarrow CD, E \rightarrow B$ then $AE \rightarrow BCD$ (transitivity)

Minimal Key: AE

2. $A \rightarrow B, B \rightarrow A, B \rightarrow D$

If $A \rightarrow B, B \rightarrow A$ then $AB \rightarrow AB$ (union)

If $AB \rightarrow AB, B \rightarrow D$ then $AB \rightarrow ABD$ (union)

If $AB \rightarrow ABD, C \rightarrow C$ then $AB \rightarrow ABCD$ (augmentation)

If $AB \rightarrow ABCD, E \rightarrow E$ then $AB \rightarrow ABCDE$ (augmentation)

If $AB \rightarrow ABCDE$, then $AB \rightarrow CDE$ (reduce right-hand side)

Minimal Key: AB

3. $A \rightarrow B, C \rightarrow E, D \rightarrow E$

If $A \rightarrow B, C \rightarrow E$ then $AC \rightarrow BE$ (union)

If $AC \rightarrow BE, D \rightarrow E$ then $ACD \rightarrow BE$ (union)

Minimal Key: ACD