In[ ]:= `<< GeneralRelativityTensors``

In[ ]:= `g = ToMetric["Kerr"]`

Out[ ]= $g_{\alpha\beta}$

In[ ]:= `g // TensorValues // MatrixForm`

Out[ ]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{-a^2+2\,M\,r-r^2+a^2\,\mathrm{Sin}[\theta]^2}{r^2+a^2\,\mathrm{Cos}[\theta]^2} & 0 & 0 & -\frac{2\,a\,M\,r\,\mathrm{Sin}[\theta]^2}{r^2+a^2\,\mathrm{Cos}[\theta]^2} \\ 0 & \frac{r^2+a^2\,\mathrm{Cos}[\theta]^2}{a^2-2\,M\,r+r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2+a^2\,\mathrm{Cos}[\theta]^2 & 0 \\ -\frac{2\,a\,M\,r\,\mathrm{Sin}[\theta]^2}{r^2+a^2\,\mathrm{Cos}[\theta]^2} & 0 & 0 & \frac{\mathrm{Sin}[\theta]^2\left((a^2+r^2)^2-a^2\,(a^2-2\,M\,r+r^2)\,\mathrm{Sin}[\theta]^2\right)}{r^2+a^2\,\mathrm{Cos}[\theta]^2} \end{pmatrix}$$

In[ ]:= `χ = ToTensor["χ", g, {1, 0, 0, 0}]`

Out[ ]= χ^{α}

In[ ]:= `dχ = MergeTensors[CovariantD[χ[-α], -γ], ActWith → Simplify]`

Out[ ]= $\left(\,((\,(-1)\,\cdot\,(\Gamma\cdot\chi))\,+\,(\partial\chi)\,\right)_{\alpha\gamma}$

In[ ]:= `dχ // TensorValues // MatrixForm`

Out[ ]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{2\,M\,(a^2-2\,r^2+a^2\,\mathrm{Cos}[2\,\theta])}{(a^2+2\,r^2+a^2\,\mathrm{Cos}[2\,\theta])^2} & \frac{4\,a^2\,M\,r\,\mathrm{Sin}[2\,\theta]}{(a^2+2\,r^2+a^2\,\mathrm{Cos}[2\,\theta])^2} & 0 \\ -\frac{2\,M\,(a^2-2\,r^2+a^2\,\mathrm{Cos}[2\,\theta])}{(a^2+2\,r^2+a^2\,\mathrm{Cos}[2\,\theta])^2} & 0 & 0 & \frac{2\,a\,M\,(a^2-2\,r^2+a^2\,\mathrm{Cos}[2\,\theta])\,\mathrm{Sin}[\theta]^2}{(a^2+2\,r^2+a^2\,\mathrm{Cos}[2\,\theta])^2} \\ -\frac{4\,a^2\,M\,r\,\mathrm{Sin}[2\,\theta]}{(a^2+2\,r^2+a^2\,\mathrm{Cos}[2\,\theta])^2} & 0 & 0 & \frac{4\,a\,M\,r\,(a^2+r^2)\,\mathrm{Sin}[2\,\theta]}{(a^2+2\,r^2+a^2\,\mathrm{Cos}[2\,\theta])^2} \\ 0 & -\frac{2\,a\,M\,(a^2-2\,r^2+a^2\,\mathrm{Cos}[2\,\theta])\,\mathrm{Sin}[\theta]^2}{(a^2+2\,r^2+a^2\,\mathrm{Cos}[2\,\theta])^2} & -\frac{4\,a\,M\,r\,(a^2+r^2)\,\mathrm{Sin}[2\,\theta]}{(a^2+2\,r^2+a^2\,\mathrm{Cos}[2\,\theta])^2} & 0 \end{pmatrix}$$

In[ ]:= `ϵ = ToTensor["ϵ", g, Normal[LeviCivitaTensor[4]]]`

Out[ ]= $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$

In[ ]:= `Ω = MergeTensors[ϵ[δ, α, β, γ] (dχ[-α, -β] - dχ[-β, -α]) χ[-γ]]`

Out[ ]= $\left(\,((-1)\,\cdot\,(((((-1)\,\cdot\,(\Gamma\cdot\chi))\,+\,(\partial\chi))\cdot\epsilon)\cdot\chi))\,+\,(((((-1)\,\cdot\,(\Gamma\cdot\chi))\,+\,(\partial\chi))\cdot\epsilon)\cdot\chi)\,\right)^{\delta}$

In[ ]:= `Ω // TensorValues`

Out[ ]= $\left\{ 0,\; \dfrac{32\,a^3\,M^2\,r^2\,\mathrm{Sin}[\theta]^2\,\mathrm{Sin}[2\,\theta]}{\left(r^2+a^2\,\mathrm{Cos}[\theta]^2\right)\left(a^2+2\,r^2+a^2\,\mathrm{Cos}[2\,\theta]\right)^2} - \right.$

$\dfrac{16\,a\,M\,r\,(a^2+r^2)\,(-a^2+2\,M\,r-r^2+a^2\,\mathrm{Sin}[\theta]^2)\,\mathrm{Sin}[2\,\theta]}{\left(r^2+a^2\,\mathrm{Cos}[\theta]^2\right)\left(a^2+2\,r^2+a^2\,\mathrm{Cos}[2\,\theta]\right)^2},$

$-\dfrac{16\,a\,M^2\,r\,(a^2-2\,r^2+a^2\,\mathrm{Cos}[2\,\theta])\,\mathrm{Sin}[\theta]^2}{\left(r^2+a^2\,\mathrm{Cos}[\theta]^2\right)\left(a^2+2\,r^2+a^2\,\mathrm{Cos}[2\,\theta]\right)^2} +$

$\left.\dfrac{8\,a\,M\,(a^2-2\,r^2+a^2\,\mathrm{Cos}[2\,\theta])\,\mathrm{Sin}[\theta]^2\,(-a^2+2\,M\,r-r^2+a^2\,\mathrm{Sin}[\theta]^2)}{\left(r^2+a^2\,\mathrm{Cos}[\theta]^2\right)\left(a^2+2\,r^2+a^2\,\mathrm{Cos}[2\,\theta]\right)^2},\; 0 \right\}$