Noções de Conjuntos

Introdução

Neste material são abordados os conceitos primitivos de conjuntos, algumas propriedades e as operações entre conjuntos.

Conjuntos

Um *conjunto* é uma coleção qualquer de objetos.

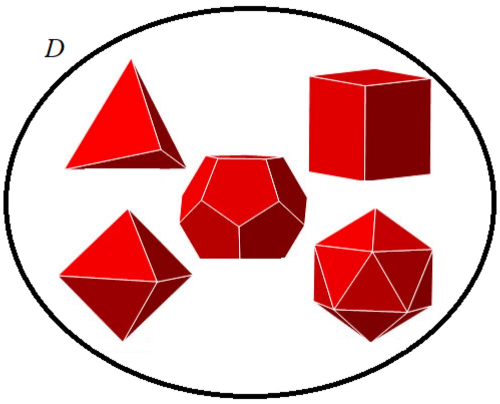
Exemplo 1.

i) A: *planetas do sistema solar.*

ii) $B = \{$*janeiro, março, maio, julho, agosto, outubro, dezembro*$\}$.

iii) $C = \{x |\, x^2 = 1\}$.

iv)



v) $E = \{2, 3, 5, 7, 11, ...\}$.

vi) $F = \{b, c, d, f, g, ..., x, y, z\}$.

Observação 1. *Pode-se representar os conjuntos de várias maneiras, algumas dessas maneiras estão explícitas acima, os conjuntos foram representados por:* descrição, enumeração, propriedade *e* Diagrama de Venn.

O objeto de um conjunto denomina-se *elemento* desse conjunto, a exemplo: Urano é um elemento do conjunto A.

Quando um objeto a obedece à regra de certo conjunto A, diz-se que "*a pertence* a A". Em símbolos:

$$a \in A.$$

Pode-se escrever, então: Urano $\in A$. Quando um elemento não pertence a certo conjunto usa-se o símbolo $\notin$. A exemplo: fevereiro $\notin B$.

Tipos de Conjuntos

Conjunto unitário: é um conjunto formado por um único elemento.

Conjunto vazio: é um conjunto que não possui elemento algum. É representado por $\emptyset$ ou $\{\}$.

Conjunto finito: é um conjunto em que há uma quantidade finita de elementos.

Conjunto infinito: é um conjunto que não é finito, ou seja, há uma quantidade infinita de elementos.

Conjunto universo: é o conjunto ao qual pertencem todos os elementos envolvidos em um determinado contexto ou estudo, e é simbolizado pela letra U.

Subconjuntos

Definição 1 (Subconjunto)**.** *Um conjunto A é um subconjunto do conjunto B se, e somente se, todo elemento de A pertence também a B.*

Em símbolos: $A \subset B$ e diz-se: "A está contido em B".

Se $A \subset B$, pode-se escrever também $B \supset A$ e lê-se: "B contém A".

Definição 2 (Igualdade entre conjuntos)**.** *Dois conjuntos A e B são ditos iguais (e denota-se por: $A = B$) se, e somente se, $A \subset B$ e $B \subset A$.*

Propriedade 1 (Relação de inclusão)**.** *Sejam A, B e C três conjuntos quaisquer, então valem as seguintes propriedades:*

1ª) $\emptyset \subset A$

2ª) $A \subset A$ *(reflexiva)*

3ª) $(A \subset B$ e $B \subset A) \;\Rightarrow\; A = B$ *(anti-simétrica)*

4ª) $(A \subset B$ e $B \subset C) \;\Rightarrow\; A \subset C$ *(transitiva)*

Definição 3 (Conjunto das partes)**.** *Dado um conjunto A, chama-se* conjunto das partes *de A (e denota-se por: $\mathcal{P}(A)$) o conjunto cujos elementos são todos os subconjuntos de A. Em símbolos:*

$$\mathcal{P}(A) = \{X |\, X \subset A\}.$$

Exemplo 2. *Determine o conjunto das partes de:*

I) $J = \{2, 3, 5\}$, *logo*
$\mathcal{P}(J) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{5\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}, J\}$.

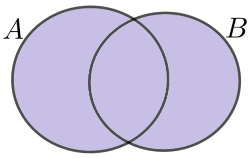
II) $V = \{m, a, t, h\}$, *logo* $\mathcal{P}(V) = \{\emptyset, \{m\}, \{a\}, \{t\}, \{h\}, \{m, a\}, \{m, t\}, \{m, h\}, \{a, t\}, \{a, h\}, \{t, h\}, \{m, a, t\}, \{m, a, h\}, \{m, t, h\}, \{a, t, h\}, V\}$.

Observação 2. *Se* A *é um conjunto finito com* n *elementos, então* $\mathcal{P}(A)$, *conjunto das partes de* A, *tem* 2^n *elementos.*

Operações com Conjuntos

Definição 4 (União)**.** *Sejam* A *e* B *dois conjuntos, chama-se* união *entre* A *e* B *o conjunto formado por todos os elementos pertencentes a* A *ou a* B. *(*$A \cup B$ *lê-se: "A união B".)*

$$A \cup B = \{x |\, x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$



Exemplo 3.

1) *Sejam* $A = \{a, b, c\}$ *e* $B = \{d, e\}$, *então* $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$.

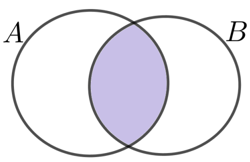
2) *Sejam* $D = \{a, b, c, d\}$ *e* $E = \{d, e, g\}$, *então* $D \cup E = \{a, b, c, d, e, g\}$.

3) $\{\alpha, \beta, \gamma\} \cup \emptyset = \{\alpha, \beta, \gamma\}$.

4) $\{-1, 0, 1\} \cup \{0, 1\} = \{-1, 0, 1\}$.

Definição 5 (Interseção)**.** *Sejam* A *e* B *dois conjuntos, chama-se* interseção *entre* A *e* B *o conjunto formado pelos elementos pertencentes a* A *e* B. *(*$A \cap B$ *lê-se: "A interseção B".)*

$$A \cap B = \{y |\, y \in A \text{ e } y \in B\}.$$



Exemplo 4.

1) *Sejam* $A = \{a, b, c\}$ *e* $B = \{d, e\}$, *então* $A \cap B = \{\}$.

2) *Sejam* $D = \{a, b, c, d\}$ *e* $E = \{d, e, g\}$, *então* $D \cap E = \{d\}$.

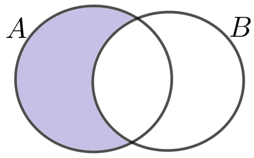
3) $\{\alpha, \beta, \gamma\} \cap \emptyset = \emptyset$.

4) $\{-1, 0, 1\} \cap \{0, 1\} = \{0, 1\}$.

Observação 3. *Quando* $A \cap B = \emptyset$, *diz-se que* A *e* B *são* disjuntos.

Definição 6 (Diferença)**.** *Sejam* A *e* B *dois conjuntos, chama-se* diferença *entre* A *e* B *o conjunto formado pelos elementos que pertencem a* A *e não pertencem a* B. *(*$A - B$ *lê-se: "A menos B".)*

$$A - B = \{z |\, z \in A \text{ e } z \notin B\}.$$



Exemplo 5.

1) *Sejam* $A = \{a, b, c\}$ *e* $B = \{d, e\}$, *então* $A - B = A$.

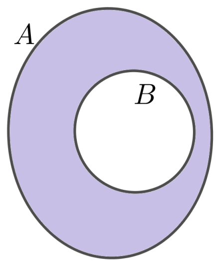
2) *Sejam* $D = \{a, b, c, d\}$ *e* $E = \{d, e, g\}$, *então* $D - E = \{a, b, c\}$.

3) $\{\alpha, \beta, \gamma\} - \emptyset = \{\alpha, \beta, \gamma\}$.

4) $\{-1, 0, 1\} - \{0, 1\} = \{-1\}$.

Definição 7 (Complementar)**.** *Sejam dois conjuntos* A *e* B *tais que* $B \subset A$, *denomina-se* complementar *de* B *com relação a* A *o conjunto* $\complement_A^B = A - B$. ($\complement_A^B$ *lê-se: "complementar de B com relação a A".*)

$$\complement_A^B = A - B.$$



Exemplo 6.

1) *Sejam* $F = \{a, b, c\}$ *e* $G = \{a, b\}$, *então* $\complement_F^G = \{c\}$.

2) *Sejam* $H = \{v, x, w, y, z\}$ *e* $I = \{w, y, z\}$, *então* $\complement_H^I = \{v, x\}$.

Observação 4. *Para expressar a quantidade de elementos de um conjunto* A *com* m *elementos usa-se*

$$n(A) = m.$$

Sejam A, B *e* C *conjuntos contidos no cojunto universo* U *finito. Então valem as seguintes fórmulas:*

- $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.
- $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(B) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$.