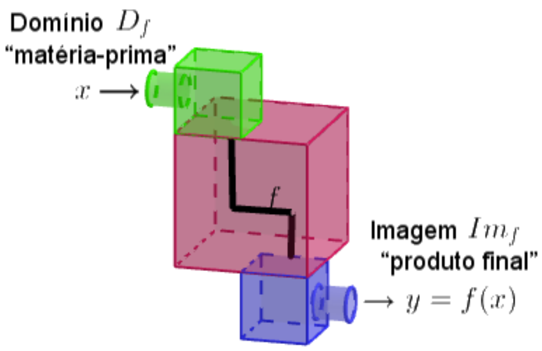
Introdução à Função

Introdução

Uma função pode ser entendida como uma máquina que tranforma uma matéria-prima num produto final.

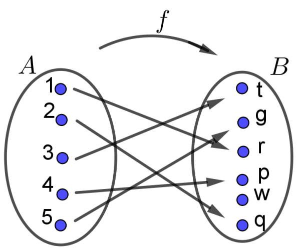


Neste material aborda-se o gráfico, paridade, tipologia e operações de funções.

Conceitos de função

Definição 1 (Função). *Dados dois conjuntos não vazios A e B, chama-se* função de A em B a regra que associa **cada** elemento de A a um **único** elemento de B.

$$f : A \longrightarrow B$$
$$x \longmapsto y = f(x)$$

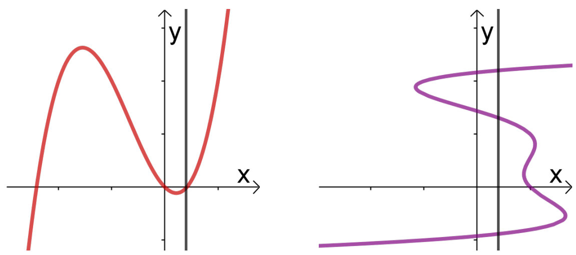


Domínio de f: $D_f = A$

Contradomínio de f: $CD_f = B$

Imagem de f: $\mathrm{Im}_f = \{y \in B;\ y = f(x),\ x \in A\}$

Teste da reta vertical



Exemplo 1. *Em uma pista circular de testes, um automóvel desloca-se com velocidade constante. Com o auxílio de um cronômetro, marcaram-se diferentes intervalos de tempo e, em cada intervalo de tempo, verificou-se a distância percorrida.*

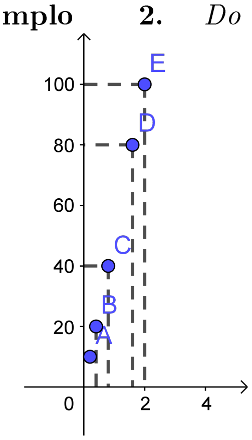
Tempo (h)	*0,2*	*0,4*	*0,8*	*1,6*	*2*	x
Distância (km)	*10*	*20*	*40*	*80*	*100*	*50x*

Definição 2 (Gráfico). *Seja $f : A \longrightarrow B$ uma função. O conjunto*

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x \in D_f \text{ e } y = f(x) \in \mathrm{Im}_f\}$$

é chamado de gráfico de f.

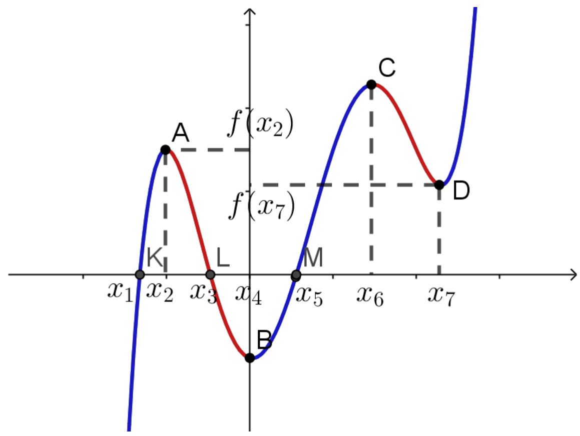
Exemplo 2. *Do Exemplo 1, temos*



$$G_f = \{A, B, C, D, E\}$$

Análise de Gráficos

Considere o seguinte gráfico

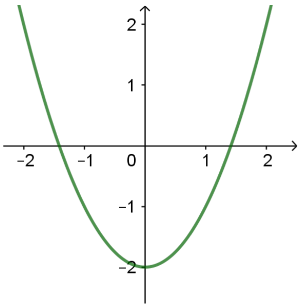


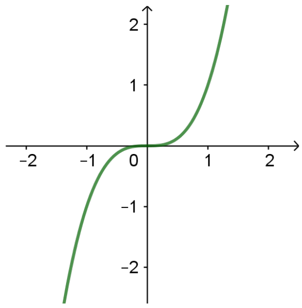
Sejam m e n tais que $m < n$ e $I \subset D_f$:

f é crescente em I:	se $f(m) < f(n),\ \forall\ m, n \in I$.
f é decrescente em I:	se $f(m) > f(n),\ \forall\ m, n \in I$.
f é constante em I:	se $f(m) = f(n),\ \forall\ m, n \in I$.
$f(m)$ é máximo local:	se $f(m) > f(n),\ \forall\ n \in I$.
O número $m \in D_f$ chama-se **ponto de máximo local**.	
$f(n)$ é mínimo local:	se $f(m) > f(n),\ \forall\ m \in I$.
O número $n \in D_f$ chama-se **ponto de mínimo local**.	
f é negativa em I:	se $f(x) < 0,\ \forall\ x \in I$.
f é positiva em I:	se $f(x) > 0,\ \forall\ x \in I$.
raízes de f:	x, tais que $x \in D_f$ e $f(x) = 0$.

Paridade de Funções

Seja $f : A \longrightarrow B$ uma função.





f é par se $\forall\ x \in D_f$ tem-se $f(-x) = f(x)$.

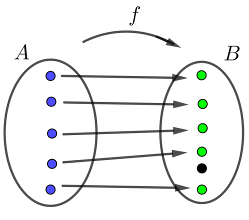
f é ímpar se $\forall\ x \in D_f$ tem-se $f(-x) = -f(x)$.

Exemplo 3. *Em cada caso, indique se a função é par ou ímpar.*
a) $f(x) = 1/x$, *b)* $g(x) = 5 - x^2$,
c) $h(x) = x^3 - x$, *d)* $m(x) = 2x + 1$.

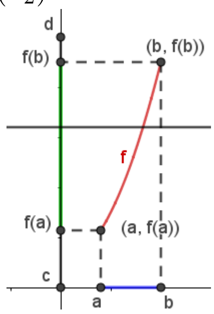
Tipologia de Funções

Sejam $A = [a, b]$ e $B = [c, d]$ intervalos reais e $f : A \longrightarrow B$ uma função. Então f será:

♦ Injetora
Se $x_1 \neq x_2$ tem-se $f(x_1) \neq f(x_2)$.

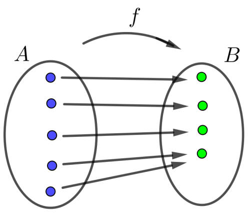


Exemplo em Diagrama de Venn.

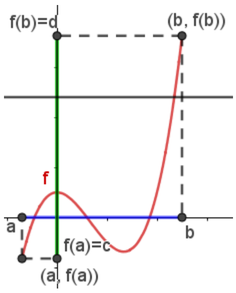


★ Se nenhuma reta horizontal corta o gráfico mais de uma vez, então f é injetora.

♦ Sobrejetora
Se $\mathrm{Im}_f = B$.

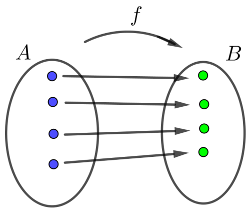


Exemplo em Diagrama de Venn.

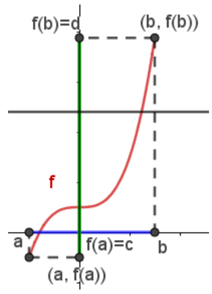


★ Se toda reta horizontal (não disjunta com B) corta o gráfico, então f é sobrejetora.

♦ Bijetora
Se f for injetora e sobrejetora.



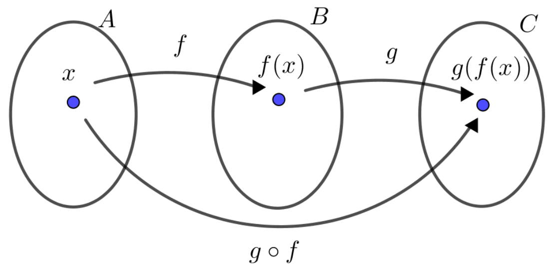
Exemplo em Diagrama de Venn.



★ Se toda reta horizontal (não disjunta com B) corta o gráfico em um só ponto, então f é bijetora.

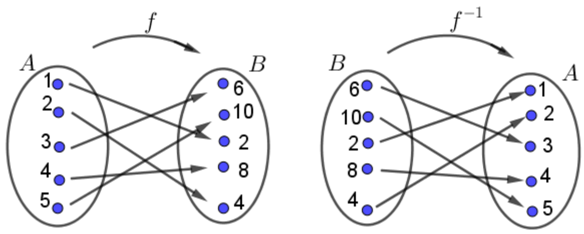
Composição de Funções

Definição 3 (Função composta). *Sejam $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$ duas funções. A* composta *de g com f é a função $g \circ f : A \longrightarrow C$ tal que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ para $x \in A$.*



Exemplo 4. *Dadas as funções $f(x) = 2x - 1$ e $g(x) = x^2 + 5$, determine $g \circ f$.*

Definição 4 (Função inversa). *Se f é uma função bijetora de A em B, a regra inversa de f é uma função de B em A que é denominada* função inversa *de f e indicada por f^{-1}.*



Exemplo 5. *Determine a função inversa de*

$$f(x) = 4x^3 - 1.$$

Graficamente, temos: