高等数学 I-1 综合练习 3

一、填空题

1. 设 $y = y(x)$ 由方程 $\ln(x^2+y) = x^3y + \sin x$ 确定，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} =$ ________.

2. 若 $f(x) = \dfrac{e^x - a}{x(x-1)}$ 有无穷间断点 $x=0$ 及可去间断点 $x=1$，则 $a=$ ________.

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-a}{x(x-1)}=\infty \\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-a}{x(x-1)} \text{ 存在} \end{cases}$

$\Downarrow$

$\lim\limits_{x\to 1} e^x - a = 0 \Rightarrow a = e$

(分母极限为0，而商的极限存在，则分子的极限只能等于0)

3. 设曲线 $\begin{cases} x = e^t \sin 2t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$，则其在点 $(0,1)$ 处的法线方程为 ________.

$t=0$

(参数方程)

4. 曲线 $y = \dfrac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线方程为 ________.

5. $\displaystyle\int_1^{e^3} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+\ln x}} =$ ________.

凑微分

二、选择题

1. 下列极限不存在的是（ D ）.

(A) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{\frac{1}{x}}$； (B) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$； (C) $\lim\limits_{x\to 0}\arctan\dfrac{1}{x^2}$； (D) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3x+1}}{x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3x+1}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}} = 1$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3x+1}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} -\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}} = -1$

∴极限不存在.

2. 当 $x\to 0$ 时，$f(x) = x - \sin x$ 与 $g(x) = x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小，则（ ）.

(A) $b=6$； (B) $b=-6$； (C) $b=\dfrac{1}{6}$； (D) $b=-\dfrac{1}{6}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^2\ln(1-bx)} = 1$

方式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{-bx^3}$ 洛 ……

3. 设 $F(x) = f(x)(1+|\sin x|)$，其中 $f(x)$ 具有一阶连续的导数，则 $f(0)=0$ 是 $F'(0)$ 存在的（ ）.

(A) 充分非必要条件； (B) 必要非充分条件；

(C) 充要条件； (D) 既非充分也非必要条件.

$F'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)(1+|\sin x|) - f(0)}{x-0}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} + \dfrac{|\sin x|}{x}f(x)$

4. 设 $f(x) = \sin\dfrac{x}{2} + \cos 2x$，则 $f^{(27)}(\pi)$ 的值等于（ ）.

高阶导数，利用 $\sin^{(n)}x$，$\cos^{(n)}x$ 的结论.

(A) 0； (B) $-\dfrac{1}{2^{27}}$； (C) $2^{27}-\dfrac{1}{2^{27}}$； (D) 2^{27}.

5. 设 $F(x) = \dfrac{x^2}{x-a}\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$，其中 $f(x)$ 为连续函数，则 $\lim\limits_{x\to a} F(x) =$（ ）.

积分上限函数.

(A) $a^2 f(a)$； (B) a^2； (C) 0； (D) 不存在.

三、解答题

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2} - \arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$. ($0^0$型)

$= \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{\ln x}\ln\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}$

$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}{\ln x}}$ ($\frac{\infty}{\infty}$型)

$\overset{洛}{=} e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}\cdot\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)}{\frac{1}{x}}}$

$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{-x}{1+x^2}}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}}$ ($\frac{0}{0}$型)

$\overset{洛}{=} e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}}{-\frac{1}{1+x^2}}}$ (分式化简整理)

$= e^{-1}$

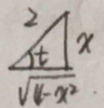
2. $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$. (三角代换)

令 $x=2\sin t \quad t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

原式 $=\int \frac{4\sin^2 t}{2\cos t}\cdot 2\cos t\,dt$

$=\int 2(1-\cos 2t)\,dt$

$=2t-\sin 2t+C$



$=2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}+C$

3. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos x}{2+\sin x}+x^2\sin x\right)dx$. 奇函数

$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2+\sin x}\,d(\sin x+2)+0$

$=\ln(2+\sin x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$

$=\ln 3$

*4. 设 $x_1>0$，$x_{n+1}=\frac{2(1+x_n)}{2+x_n}(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并计算 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. (单调有界准则)

有难度.

$x_{n+1}=\frac{2(2+x_n)-2}{2+x_n}=2-\frac{2}{2+x_n}$

$x_{n+1}-x_n=\frac{2}{2+x_{n-1}}-\frac{2}{2+x_n}=\frac{x_n-x_{n-1}}{(2+x_{n-1})(2+x_n)}$

$\therefore x_{n+1}-x_n$ 与 x_n-x_{n-1} 同号

$x_2-x_1=2-\frac{2}{2+x_1}-x_1=\frac{2-x_1^2}{2+x_1}$

若 $0<x_1<\sqrt{2}$ 时，$x_2-x_1>0$ 从而由数学归纳法可知 $x_{n+1}-x_n>0$ 即 $\{x_n\}\uparrow$

由 $x_1>0$，$x_{n+1}=\frac{2(1+x_n)}{2+x_n}$ 可知 $x_n>0$

$\therefore x_{n+1}=2-\frac{2}{2+x_n}<2$

从而 $\{x_n\}$ 有上界.

若 $x_1>\sqrt{2}$ 时，$x_2-x_1<0$ 从而 $x_{n+1}-x_n<0$

即 $\{x_n\}\downarrow$ 且 $x_n>0$

$\therefore$ 综上，$\{x_n\}$ 单调有界 从而极限存在.

令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 则 $a=\frac{2(1+a)}{2+a}$

得 $a=\sqrt{2}$

或 $a=-\sqrt{2}$ (舍去)

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$

5. 设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $f(x)=xe^{2x}+2\int_0^1 f(t)\,dt$, 求 $f(x)$.

(定积分是一个常数)

等式两边同时取0到1上的定积分,

$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 xe^{2x}dx+2A \quad (令 \int_0^1 f(t)\,dt=A)$

$A=-\int_0^1 xe^{2x}dx$ (分部积分)

$=-\frac{1}{2}\int_0^1 x\,de^{2x}$

$=-\frac{1}{2}xe^{2x}\Big|_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx$

$=-\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{4}$

$\therefore f(x)=xe^{2x}-\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}$

四、 设 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, 已知曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 对应点处的切线与 x 轴平行, 且以点 $(1,-1)$ 为拐点, 求 $f(x)$ 的极小值.

$f'(0)=0$

$(1,-1)$ 是拐点 $\therefore f''(1)=0$

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$\begin{cases} b=0 \\ 6+2a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=0 \end{cases}$ $\quad f(1)=-1 \Rightarrow c=1$

$f''(x)=6x+2a$

$f'(x)=3x^2-6x=0 \Rightarrow x=0$ 或 $x=2$

$f''(0)=-6<0 \quad f''(2)=6>0$

$\therefore f(2)=-3$ 是极小值

五、 证明: 当 $0<x<1$ 时, $e^{-2x}>\dfrac{1-x}{1+x}$. (利用单调性证明)

$\Leftrightarrow (1+x)e^{-2x}+(x-1)>0$

设 $f(x)=(1+x)e^{-2x}+(x-1)$, $x\in[0,1)$ $\quad f(0)=0$

$f'(x)=1-(1+2x)e^{-2x}$ $\quad x\in[0,1)$, $f'(0)=0$

$f''(x)=4xe^{-2x}>0$, $x\in(0,1)$ 从而 $f'(x)\uparrow$ $\quad \therefore f'(x)>f'(0)=0$, $x\in(0,1)$

$\therefore f(x)\uparrow \Rightarrow f(x)>f(0)$

$\therefore (1+x)e^{-2x}+x-1>0 \quad x\in(0,1)$

即得式成立.

六、 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+2x}, x>0 \\ \dfrac{1}{4+x^2}, x\le 0\end{cases}$, 求 $\displaystyle\int_{-1}^{5} f(x-1)\,dx$.

$\displaystyle\int_{-1}^{5} f(x-1)dx \overset{令x-1=t}{=\!=} \int_{-2}^{4} f(t)dt = \int_{-2}^{0} f(t)dt+\int_{0}^{4} f(t)dt$

$\displaystyle = \int_{-2}^{0}\frac{1}{4+t^2}dt+\int_0^4\frac{1}{1+2t}dt = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}\frac{1}{1+(\frac{t}{2})^2}d\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\int_0^4\frac{1}{1+2t}d(2t+1)$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2}\Big|_{-2}^{0}+\frac{1}{2}\ln|1+2t|\Big|_0^4 = \frac{\pi}{8}+\ln 3$

七、 设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数, 当 $x\ge 0$, 有 $f(x)F(x)=\sin^2 2x$, 且 $F(0)=1, F(x)\ge 0$, 求 $f(x)$. (同练1 而第八题)

$\int f(x)dx=F(x)+C \Rightarrow f(x)=F'(x)$

$\int f(x)F(x)dx=\int \sin^2 2x\,dx$

$\int F(x)dF(x)=\int\dfrac{1-\cos 4x}{2}dx$

$\frac{1}{2}F^2(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\sin 4x+C$

$F(0)=1 \Rightarrow C=\frac{1}{2}$

且 $F(x)\ge 0$

$\therefore F(x)=\sqrt{x-\frac{1}{4}\sin 4x+1}$

$f(x)=\dfrac{1-\cos 4x}{2\sqrt{x-\frac{1}{4}\sin 4x+1}}$

八、设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0, f(1)=1$, 试证:

(1)存在不同的 $\xi_1,\xi_2\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=2$.

(2)存在不同的 $\eta_1,\eta_2\in(0,1)$, 使得 $\dfrac{1}{f'(\eta_1)}+\dfrac{1}{f'(\eta_2)}=2$.

(1) 由拉格朗日中值定理可知. $f(\frac{1}{2})-f(0)=f'(\xi_1)\cdot\frac{1}{2}$ $(0<\xi_1<\frac{1}{2})$

$f(1)-f(\frac{1}{2})=f'(\xi_2)\cdot\frac{1}{2}$ $(\frac{1}{2}<\xi_2<1)$

则 $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=2$

(2) 由介值定理可知, $\exists x_0\in(0,1)\rightarrow f(x_0)=\frac{1}{2}$

$f(x_0)-f(0)=f'(\eta_1)x_0$ $(0<\eta_1<x_0)$

$f(1)-f(x_0)=f'(\eta_2)\cdot(1-x_0)$ $(x_0<\eta_2<1)$

$\therefore \dfrac{1}{f'(\eta_1)}+\dfrac{1}{f'(\eta_2)}=\dfrac{x_0}{\frac{1}{2}}+\dfrac{1-x_0}{\frac{1}{2}}=2$

参考答案 3

一、填空题 1. 1. 2. e. 3. $y+2x-1=0$. 4. $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$. 5. 2.

二、选择题 D. D. C. A. A.

三、1. e^{-1}. 2. $2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+C$. 3. $\ln 3$.

4. 提示: 利用单调有界准则, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$. 5. $xe^{2x}-\dfrac{e^2+1}{2}$.

四、极小值 $f(2)=-3$.

五、提示：利用单调性证明. 六、$\frac{\pi}{8}+\ln 3$.

七、$\frac{1}{2}(1-\cos 4x)\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x+1\right)^{-\frac{1}{2}}$.

八、提示 : (1) 对 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内分别使用拉格朗日中值定理.

(2) 利用介值定理得到 $f(x_0)=\frac{1}{2}$, 对 $f(x)$ 在区间 $(0,x_0),(x_0,1)$ 内分别使用拉格朗日中值定理.