专题 5　多元函数积分学（二重积分）

第一部分　内容概要

1、定义

和式极限 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$

2、性质

①数乘性 $\iint\limits_D kf(x,y)d\sigma = k\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$；

②和差性 $\iint\limits_D [f(x,y)\pm g(x,y)]d\sigma = \iint\limits_D f(x,y)d\sigma \pm \iint\limits_D g(x,y)d\sigma$；

③积分区域可积性 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma$，$D = D_1 + D_2$；

④ $\iint\limits_D d\sigma = \sigma$；

⑤保序性 $f(x,y)\le g(x,y) \Rightarrow \iint\limits_D f(x,y)d\sigma \le \iint\limits_D g(x,y)d\sigma$；

⑥绝对值不等式性 $\left|\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\right| \le \iint\limits_D |f(x,y)|d\sigma$；

⑦估值性 $m\sigma \le \iint\limits_D f(x,y)d\sigma \le M\sigma$；

⑧积分中值定理 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\sigma, (\xi,\eta)\in D$.

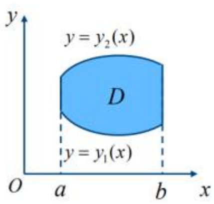
3、计算方法

3.1 利用直角坐标系计算

适用于：积分区域为：多边形、曲边多边形时（不适合用极坐标系计算时）

（1） X 型区域：作一条平行于 y 轴的直线穿过积分区域 D，与其边界交点不多于两个。

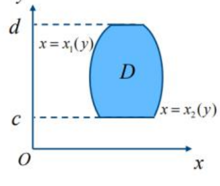
D 为 X 型区域 $\begin{cases} a\le x\le b \\ \varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x)\end{cases}$，**先积 y 后积 x，**



$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

（2）Y 型区域：作一条平行于 x 轴的直线穿过积分区域 D，与其边界交点不多于两个。

D 为 Y 型区域 $\begin{cases} c\le y\le d \\ \psi_1(y)\le x\le \psi_2(y)\end{cases}$，**先积 x 后积 y，**



$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \int_c^d dy\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)dx$$

3.1 利用极坐标系计算

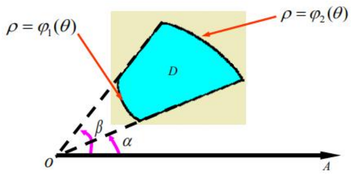
适用于：（1）被积函数为 $f(x^2+y^2)$ 或 $f(\frac{y}{x})$ 或 $f(\frac{x}{y})$；

（2）积分区域为圆域、圆环域或其一部分.

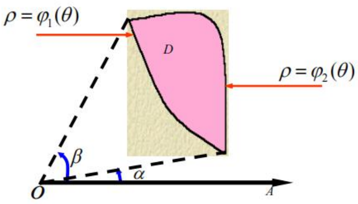
θ 型区域：作一条从极点出发的射线穿过积分区域 D，与其边界交点不多于两个。

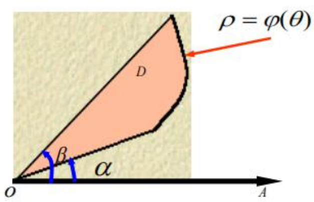
极角 θ 上下限的确定：从极轴 ox 出发，逆时针方向旋转，极轴与积分域开始接触时的角 α 为 θ 的下限，离开时的角 β 为 θ 的上限.

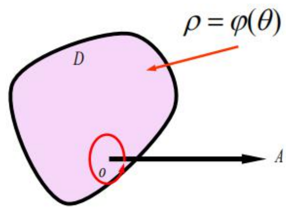
D 为 θ 型区域 $\begin{cases} \alpha \le \theta \le \beta \\ \varphi_1(\theta) \le \rho \le \varphi_2(\theta) \end{cases}$，**先积 ρ 后积 θ，**



$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$$







$$\begin{cases} \alpha \le \theta \le \beta \\ \varphi_1(\theta) \le \rho \le \varphi_2(\theta) \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha \le \theta \le \beta \\ 0 \le \rho \le \varphi(\theta) \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \rho \le \varphi(\theta) \end{cases}$$

4、对称性

4.1 对称性

设函数 $f(x,y)$ 在 xoy 平面上的有界区域 D 上连续，且 D 关于 x 轴对称.

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \begin{cases} 0, & 若 f(x,-y) = -f(x,y),(x,y)\in D, \\ 2\iint_{D_上} f(x,y)d\sigma, & 若 f(x,-y) = f(x,y),(x,y)\in D. \end{cases}$$

设函数 $f(x,y)$ 在 xoy 平面上的有界区域 D 上连续，且 D 关于 y 轴对称.

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \begin{cases} 0, & 若 f(-x,y) = -f(x,y),(x,y)\in D, \\ 2\iint_{D_右} f(x,y)d\sigma, & 若 f(-x,y) = f(x,y),(x,y)\in D. \end{cases}$$

其中 $D_上$ 是 D 在 x 轴上方的部分，$D_右$ 是 D 在 y 轴右侧的部分.

4.2 轮换对称性

若 $x \leftrightarrow y$，平面区域 D 的边界曲线方程不变，则称区域 D 关于 x,y 具有轮换对称性。若平面区域 D 关于 x,y 具有轮换对称性，则

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(y,x)dxdy = \frac{1}{2}\iint_D [f(x,y)+f(y,x)]dxdy.$$

5、几何意义

上半球体的体积 $\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy=\frac{2}{3}\pi a^3$.

6、几何应用

（1）曲面面积

设曲面 $\Sigma: z=f(x,y)$ 在 xoy 面上的投影区域为 D_{xy}，函数 $f(x,y)$ 在 D_{xy} 上具有连续偏导数，则曲面 Σ 的面积为：$A=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy$.

（2）曲顶柱体体积

设曲面 $\Sigma: z=f(x,y)$ 在 xoy 面上的投影区域为 D_{xy}，则以 D_{xy} 为底、以曲面 Σ 为顶的曲顶柱体的体积为：$V=\iint\limits_{D_{xy}}|f(x,y)|dxdy$.

（3）形心坐标

xoy 面上平面闭区域 D 的形心 $(\overline{x},\overline{y})$ 坐标公式为：$\overline{x}=\frac{\iint\limits_D xdxdy}{\iint\limits_D dxdy}$，$\overline{y}=\frac{\iint\limits_D ydxdy}{\iint\limits_D dxdy}$.

第二部分 典型例题

题型一、与二重积分有关的极限计算

【例 1】（南工大 2009）求 $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{1}{t^2}\int_0^t dx\int_0^{t-x}e^{x^2+y^2}dy$.

【分析】被积函数是 $f(x^2+y^2)$，积分域不适合极坐标，用积分中值定理.【答案】$\frac{1}{2}$

题型二、二次积分换序或二重积分换系

【例 2】计算二重积分 $\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\frac{\pi x}{2y}dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\frac{\pi x}{2y}dy$.

【分析】积分换序　【答案】$\frac{4}{\pi^3}(\pi+2)$

题型三、二重积分的基本计算

3.1 利用直角坐标系计算二重积分

【例 3】计算 $\iint\limits_{\sqrt{x}+\sqrt{y}\le 1}\sqrt[3]{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\,dxdy$.

【分析】无理函数的二重积分：先化为累次积分，然后利用简单无理变换 2 次（令 $t=\sqrt{y}$ 换元，再令 $u=\sqrt{x}+t$ 换元）去根号. 【答案】$\frac{2}{13}$

【例 4】已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $f(1,y)=0, f(x,1)=0$，$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy=a$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$，计算 $I=\iint\limits_{D} xyf''_{xy}(x,y)dxdy$.

【分析】首先化为累次积分，定积分的被积函数中含有偏导函数，应用分部积分法

【答案】a

3.2 利用极坐标系计算二重积分

【例 5】设区域 $D: x^2+y^2\le 1, x\ge 0$，计算 $\iint\limits_{D}\frac{1+xy}{1+x^2+y^2}dxdy$.

【分析】极坐标适用于圆形区域或被积函数含有 x^2+y^2 的因子.【答案】$\frac{\pi\ln 2}{2}$

3.3 利用计算技巧计算二重积分

计算技巧：对称性、轮换对称性、几何意义、形心公式

【例 6】设$D: x^2+y^2\le x+y$，计算$I=\iint\limits_D (x+y)dxdy$.【答案】$\frac{\pi}{2}$

【例 7】设D是以$(1,1)$, $(-1,1)$和$(-1,-1)$为顶点的三角形区域，D_1是D在第一象限部分，则$\iint\limits_D (xy+\sin y\cdot e^{-x^2-y^2})dxdy=$（　　）.

（A）$2\iint\limits_{D_1}\sin y\cdot e^{-x^2-y^2}dxdy$　　　　（B）$2\iint\limits_{D_1}xydxdy$

（C）$4\iint\limits_{D_1}(xy+\sin y\cdot e^{-x^2-y^2})dxdy$　　（D）0

【分析】添加辅助线分割积分区域，然后利用对称性　【答案】（A）

【例 8】计算二重积分$I=\iint\limits_D(\cos^2 x+\sin^2 y)dxdy$，其中$D: x^2+y^2\le 1$.

【分析】轮换对称性　【答案】π

3.4 极坐标系下积分换序

【例 9】计算二重积分$\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\theta}{2}}^{\pi}(\theta^2-1)e^{\rho^2}d\rho$.

【分析】极坐标系下的二次积分一般都是先ρ后θ，但也可以先θ后ρ.

法 1：类直角坐标法：以θ为横轴，ρ为纵轴画出的$\theta O\rho$直角坐标系和积分区域.

法 2：极坐标常数穿越法：先确定ρ的取值范围，然后用$\rho=C$（C为常数）穿过积分区域，

确定θ的取值范围.

【答案】$\frac{7}{3}+\frac{1}{3}e^{\pi^2}(4\pi^2-7)$

【例 10】设函数$f(u)$在点$u=0$处可导，且$f(0)=0$，区域$D: x^2+y^2\le 2tx, y\ge 0$，求

$\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{1}{t^4}\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})ydxdy$.

【分析】利用极坐标系计算，但要进行极坐标系的积分换序；还有利用洛必达法则和导数定义.【答案】$\frac{4}{5}f'(0)$

3.5 二重积分的换元法

定理：设$f(x,y)$在xOy平面上的闭区域D上连续，变换$T: x=x(u,v), y=y(u,v)$将uOv面上的闭区域D'变为xOy面上的D，且满足

（1）$x(u,v), y(u,v)$在D'上具有一阶连续偏导数；

（2）在D'上雅可比行列式$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$；

（3）变换$T': D'\to D$是一对一的，

则 $$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D'} f[x(u,v),y(u,v)]\left|J(u,v)\right|dudv.$$

说明：若$J(u,v)$只在D'内个别点或一条曲线上为零，该定理仍成立.

【例 11】计算 $\iint\limits_D e^{\frac{y-x}{y+x}}dxdy$，其中 D 由 x 轴、 y 轴和直线 $x+y=2$ 所围成.

【答案】 $e-e^{-1}$

【例 12】计算 $\iint\limits_D \sqrt{1-(\frac{x}{a})^2-(\frac{y}{b})^2}dxdy$，其中 $D:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1(a>0,b>0)$.

【提示】利用广义极坐标变换.　　【答案】 $\frac{2}{3}\pi ab$

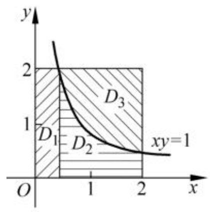
3.6 积分区域的边界曲线为参数方程给出

【例 13】计算 $\iint\limits_D y^2dxdy$，其中 D 是由摆线 $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}(0\le t\le 2\pi)$ 与 $y=0$ 围成.

【答案】 $\frac{35}{12}\pi a^2$　　【提示】二重积分积出一次，然后相当于定积分的换元积分法

3.8 分段函数的二重积分计算

【例 14】计算 $\iint\limits_D \operatorname{sgn}(xy-1)dxdy$，其中 $D=\{(x,y)|0\le x\le 2,0\le y\le 2\}$.



【答案】$2-4\ln 2$

【提示】将积分区域分成三个区域分别积分

题型四　函数方程

【例 15】设闭区域 $D: x^2+y^2\le y, x\ge 0$，$f(x,y)$ 为 D 上的连续函数，且

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}\iint\limits_D f(x,y)dxdy$$，求 $f(x,y)$.

【答案】$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}(\frac{\pi}{12}-\frac{1}{9})$

题型五、证明题

5.1 证明等式

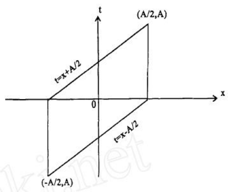
【例 16】已知 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，证明：$2\left[\int_0^a f(x)dx\int_x^a f(y)dy\right]=\left[\int_0^a f(x)dx\right]^2$.

【分析】二重积分 化为两个相等定积分 定积分^2，利用积分换序、积分区域（区间）

可加性、定积分的值与积分变量无关.

【例 17】设 $f(x)$ 为连续偶函数，D 为正方形 $|x| \le a, |y| \le a (a > 0)$．证明：

$$\iint\limits_D f(x-y)dxdy = 2\int_0^{2a}(2a-t)f(t)dt.$$



【分析】二重积分 积分一次 定积分，令 $u = x - y$ 换元化为累次积分，如不能直接积分就进行积分换序.

【例 18】设 $f'(y)$ 连续，证明：$\int_0^a dx \int_0^x \frac{f'(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}} dy = \pi[f(a) - f(0)]$.

【提示】$(a-x)(x-y) = x(a+y) - x^2 - ay = (\frac{a+y}{2})^2 - ay - (\frac{a+y}{2})^2 + x(a+y) - x^2$

$= [(\frac{a+y}{2})^2 - ay] - [(\frac{a+y}{2})^2 - x(a+y) + x^2] = (\frac{a-y}{2})^2 - (x - \frac{a+y}{2})^2$，然后三角代换

5.2 证明不等式

【例 19】设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且单调增加，证明：$\int_0^1 f(x)dx \le 2\int_0^1 xf(x)dx$.

【分析】利用 $(x-y)[f(x)-f(y)] \ge 0$ 与二重积分的轮换对称性证明

【例 20】证明不等式：$\dfrac{61}{165}\pi \le \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \sin\sqrt{(x^2+y^2)^3}\,d\sigma \le \dfrac{2}{5}\pi$.

【分析】利用极坐标系与泰勒公式，估计二重积分的值.

题型六、二重积分的几何意义

【例 21】求曲面 $z = x^2 + y^2 + 1$ 在点 $M(1,-1,3)$ 处的切平面与曲面 $z = x^2 + y^2$ 所围区域的体积.

【答案】$\dfrac{\pi}{2}$ 【提示】利用换元积分法：$x-1=u, y+1=v$ 与极坐标系

第三部分　强化练习

1、设 $I_1=\iint\limits_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$，$I_2=\iint\limits_D \cos(x^2+y^2)d\sigma$，$I_3=\iint\limits_D \cos(x^2+y^2)^2 d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 1\}$，则（　　）.

（A）$I_3>I_2>I_1$　　（B）$I_1>I_2>I_3$　　（C）$I_2>I_1>I_3$　　（D）$I_3>I_1>I_2$

【答案】（A）

2、$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$（　　）.

（A）$\int_0^1 dx\int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$　　（B）$\int_0^1 dx\int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y)}dy$

（C）$\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)}dy$　　（D）$\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$

【答案】（D）　【提示】若 $f(x,y)$ 连续，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}f(\frac{i}{n},\frac{j}{n})\frac{1}{n^2}=\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$.

3、（江苏 2017）设 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1, \\ \sqrt{2x-x^2}, & 1\le x\le 2, \end{cases}$ 交换二次积分 $\int_0^1 dy\int_y^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x)dx$ 的次序，并求此二次积分的值.【答案】1

4、（江苏 2012）积分换序 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx\int_0^{2\cos x} f(x,y)dy=$______.

【答案】$\int_0^{\sqrt{2}} dy\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x,y)dx+\int_{\sqrt{2}}^{2} dy\int_0^{\arccos\frac{y}{2}} f(x,y)dx$

5、$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{2\sin\theta} rf(r\cos\theta,r\sin\theta)dr$ 在直角坐标系下先 x 的二次积分为_______.

【答案】$\int_0^1 dy\int_0^y f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)dx$.

6、设 $f(x)$ 为连续函数，$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx$，则 $F'(2)$ 等于（　　）.

（A）$2f(2)$　　（B）$f(2)$　　（C）$-f(2)$　　（D）0

【答案】(B)

7、计算$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{y^2}{2}}dy$.　　【$e^{-\frac{1}{2}}$】

8、设区域$D: x^2+y^2\le 1, x\ge 0$，计算$\iint\limits_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}dxdy$.【答案】$\frac{\pi\ln 2}{2}$

9、设$D: x^2+y^2\le \pi$，计算$I=\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2-\pi)}\sin(x^2+y^2)dxdy$.

【答案】$I=\frac{\pi}{2}(1+e^{\pi})$

10、求曲线$(x^2+y^2)^2=2a^2xy(a>0)$所围图形的面积.【答案】a^2

11、设$D=\{(x,y)\,|\,0\le y\le 1-x, 0\le x\le 1\}$，计算$\iint\limits_D e^{\frac{y}{x+y}}d\sigma$.【答案】$\frac{1}{2}(e-1)$

12、求$\iint\limits_D(\sqrt{x^2+y^2}+y)d\sigma$，其中$D: x^2+y^2\le 4, (x+1)^2+y^2\ge 1$.

【答案】$\frac{16}{9}(3\pi-2)$

13、设$f(x)$是连续函数且$f(x)\ne 0$，积分区域为$D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le R^2\right\}$，则$I=\iint\limits_D \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}d\sigma=$______.【答案】$(a+b)\pi R^2$

14、计算$\iint\limits_D\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2-(\frac{y}{b})^2}dxdy$，其中$D: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1(a>0,b>0)$.

【提示】利用广义极坐标变换.【答案】$\frac{2}{3}\pi ab$

15、求$x+y=c, x+y=d, y=ax, y=bx(0<c<d, 0<a<b)$所围图形面积.

【提示】令$u=x+y, v=\frac{y}{x}$，$J(u,v)=\frac{1}{J(x,y)}=\frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$.【答案】$\frac{(b-a)(d^2-c^2)}{2(1+a)(1+b)}$

16、计算$\int_0^1\int_0^1[2x+2y]dxdy$，其中$[x]$为不超过$x$的最大整数.

【提示】积分区域分 6 片.【答案】$\frac{3}{2}$

17、计算$\iint\limits_D|\sin(x-y)|dxdy$，其中$D=\{(x,y)\,|\,x\ge 0, y\ge 0, x+y\le\frac{\pi}{2}\}$.【答案：$\frac{\pi}{2}-1$】

18、证明：$\int_a^b dx\int_a^x (x-y)^{n-2} f(y)dy=\frac{1}{n-1}\int_a^b (b-y)^{n-1} f(y)dy$，其中 n 为大于 1 的自然数.

19、证明不等式 $\frac{\pi}{4}(1-\frac{1}{e})<[\int_0^1 e^{-x^2}dx]^2$.

【提示】将右端定积分平方化为二重积分，再利用极坐标计算二重积分.

20、设 $D:0\le x\le 1,0\le y\le 1$，证明：$1\le\iint\limits_D(\sin x^2+\cos y^2)d\sigma\le\sqrt{2}$.

21、（2001 北京）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，证明：$\int_0^1 e^{f(x)}dx\int_0^1 e^{-f(y)}dy\ge 1$.

【分析】利用二重积分的轮换对称性和不等式 $A^2+B^2\ge 2AB$ 证明.