空间解析几何与多元函数微分学专题

一、空间解析几何

例 1、(2019 年一(5))设 $a,b,c,\mu>0$，曲面 $xyz=\mu$ 与曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 相切，则 $\mu=$____.

【$\mu=\frac{abc}{3\sqrt{3}}$】

例 2、（2021 年一（4））过三条直线 $L_1:\begin{cases} x=0, \\ y-z=2, \end{cases}$ $L_2:\begin{cases} x=0, \\ x+y-z+2=0, \end{cases}$ 与 $L_3:\begin{cases} x=\sqrt{2}, \\ y-z=0, \end{cases}$ 的圆柱面方程为____________.

【$2x^2+y^2+z^2-2yz=4$】

例 3、已知二次锥面 $4x^2+12y^2-3z^2=0$ 与平面 $x-y+z=0$ 的交线是一条直线 L，

（1）试求直线 L 的标准（对称式）方程；

（2）平面 Π 通过直线 L，且与球面 $x^2+y^2+z^2+6x-2y-2z+10=0$ 相切，试求平面 Π 的方程.

【（1）$\frac{x}{-3}=\frac{y}{1}=\frac{z}{4}$.（2）$2x+2y+z=0$ 或 $2x-14y+5z=0$.】

例 4、求与两直线 $L_1: y=0, z=c$ 与 $L_2: x=0, z=-c(c\neq 0)$ 均相交，且与双曲线 $\Gamma: xy+c^2=0, z=0$ 也相交的动直线所产生的曲面方程.

【 $xy=z^2-c^2(c\neq 0)$ 】

例 5、经过定点 $M_0(x_0,0,0)$ 作椭球面 $S:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面，其中 $x_0>a>0, b>0, c>0$. 当切点 $M(X,Y,Z)$ 在 S 上运动时，求直线 M_0M （包括它的延长线）的轨迹的方程.

【 $(x-x_0)^2-\left(\dfrac{x_0^2-a^2}{b^2}\right)y^2-\left(\dfrac{x_0^2-a^2}{c^2}\right)z^2=0$ 】

例 6、设 P 为曲面 $S: x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的动点，若 S 在点 P 处的切平面总与 xOy 平面垂直.

(1) 求点 P 的轨迹 C 的方程；

(2) 说明 C 是平面封闭曲线，并求该 C 在此平面上所围成的区域的面积.

【(1) $C:\begin{cases}2z-y=0,\\ x^2+\dfrac{3}{4}y^2=1.\end{cases}$ (2) $\sqrt{\dfrac{5}{3}}\pi$ 】

例 7、在椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$上求一切平面，使得它在坐标轴的正半轴截取相等的线段.

【$x+y+z=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$】

练习 1、设直线$l:\begin{cases} x+y+b=0 \\ x+ay-z-3=0 \end{cases}$在平面$\Pi$上，而平面$\Pi$与曲面$z=x^2+y^2$相切于点$(1,-2,5)$，求$a,b$的值.

【$a=-5,b=-2$】

练习 2、设直线$L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$及$\Pi$：$x-y+2z-1=0$.

(1)求直线L在平面Π上的投影直线L_0；　(2)求L绕y轴旋转一周所成曲面的方程.

【$\begin{cases} x-3y-2z+1=0 \\ x-y+2z-1=0 \end{cases}$，$x^2-2y^2+z^2-2=0$】

练习 3、在过直线$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x+y+z=0 \end{cases}$的所有平面中，求和原点距离最大的平面.

【$x-y-z-3=0$】

二、多元函数微分学

例 8、（2021 年一（2））设$z=z(x,y)$是由方程$2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$所确定的二元隐函数，则$\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$____________.　　【 1 】

例 9、（2019 年一（4））已知$\mathrm{d}u(x,y)=\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{3x^2-2xy+3y^2}$，则$u(x,y)=$__________.

【$u(x,y)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\dfrac{3}{2\sqrt{2}}\left(\dfrac{y}{x}-\dfrac{1}{3}\right)+C.$】

例 10、（2020 年四）已知 $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)+2y\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$，其中 f,φ 均为二次可微函数.

(1) 求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$；　　(2) 当 $f=\varphi$，且 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=a}=-by^2$ 时，求 $f(y)$.

【(1) $\frac{\partial z}{\partial x}=f\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)-+2\varphi'\left(\frac{x}{y}\right),\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{y}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{2x}{y^2}\varphi''\left(\frac{x}{y}\right)$；(2) $f(x)=\frac{a^3b}{3}\left(\frac{1}{3x^2}-\frac{x^3}{6}\right)+C_1x+C_2$】

例 11、（2018 年五）设 $f(x,y)$ 在区域 D 内可微，且 $\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\le M$，

$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 是 D 内两点，线段 AB 包含在 D 内，证明

$$\left|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)\right|\le M\left|AB\right|,$$

其中 $|AB|$ 表示线段 AB 的长度.　　【证明略】

例 12、（2017 年二）设二元函数 $f(x,y)$ 在平面上有连续的二阶偏导数. 对任何角度 α，定义一元函数 $g_\alpha(t)=f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)$. 若对任何 α 都有 $\dfrac{\mathrm{d}g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t}=0$ 且 $\dfrac{\mathrm{d}^2g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t^2}>0$. 证明 $f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值. 【证明略】

例 13、记曲面 $z=x^2+y^2-2x-y$ 在区域 $D:x\ge 0,y\ge 0,2x+y\le 4$ 上的最低点 P 处的切平面 π, 曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\ x+y+z=0\end{cases}$ 在点 $(1,1,-2)$ 处的切线为 l，求点 P 到 l 在 π 上的投影 l' 的距离 d .

【$d=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$】

例 14、设函数 $z=f(x,y)$ 有连续的偏导数且在单位圆周 $L:x^2+y^2=1$ 上的值为零，L 围成的闭区域记为 D， k 为任意常数.

(1)利用格林公式计算：

$$\iint\limits_D \left[(x-ky)f_x'(x,y)+(kx+y)f_y'(x,y)+2f(x,y)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ ;$$

(2)若 $f(x,y)$ 在 D 上任意点处沿任意方向的方向导数的值都不超过常数 M ，证明：

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\le\frac{1}{3}\pi M\ .$$

【(1) 0； (2)证明略】

练习 4、设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处有 $f_x'(x_0,y_0)=a$， $f_y'(x_0,y_0)=b$，则下列结论正确的是（　　　　）

（A） $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 存在，但 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处不连续；

（B） $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续；

（C） $\mathrm{d}z=a\mathrm{d}x+b\mathrm{d}y$；

（D） $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y_0)$， $\lim\limits_{y\to y_0} f(x_0,y)$ 都存在.　　　【 D 】

练习 5、已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，则（　　）.

(A) 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点；　　(B) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点；

(C) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点；　　(D) 无法判断点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点.

【 A 】

练习 6、设 $z=z\left(u,v\right)$ 具有二阶连续偏导数，且 $z=z\left(x-2y,x+3y\right)$ 满足

$6\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}$，求 $z=z\left(u,v\right)$ 的一般表达式.

【 $z=\Phi\left(v\right)e^{\frac{u}{5}}+\psi\left(u\right)$，$u=x-2y,v=x+3y$ 】

练习 7、设 $\Sigma_1:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$，其中 $a>b>c>0$，$\Sigma_2:z^2=x^2+y^2$，Γ 为 Σ_1 与 Σ_2 的交线，求椭球面 Σ_1 在 Γ 上各点的切平面到原点距离的最大值和最小值.

【 $d_{\max}=ac\sqrt{\dfrac{a^2+c^2}{a^4+c^4}}$，$d_{\min}=bc\sqrt{\dfrac{b^2+c^2}{b^4+c^4}}$ 】