《高等数学Ⅰ（2）》（理工）试卷

一、选择题(每小题 3 分，共 24 分)

1．设平面方程为 $Ax+Cz+D=0$，且 $ACD\neq 0$，则该平面　　　　(B)

(A) 平行于 x 轴；　(B) 平行于 y 轴；　(C) 经过 y 轴；　(D) 垂直于 y 轴.

2．设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{xy}\sin(x^2y), & xy\neq 0\\ 0, & xy=0\end{cases}$，则 $f_x'(0,1)=$　　　　(B)

(A) 0；　(B) 1；　(C) 2；　(D) 不存在.

3．设平面区域 $D=\left\{(x,y)\middle|\, x\geq 0, y\geq 0, \dfrac{1}{2}\leq x+y\leq 1\right\}$，则下列二重积分

$$I_1=\iint_D \ln(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad I_2=\iint_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad I_3=\iint_D (x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

之间的大小关系为　　　　(D)

(A) $I_3<I_2<I_1$；　(B) $I_1<I_2<I_3$；　(C) $I_2<I_3<I_1$；　(D) $I_1<I_3<I_2$.

4．若函数 $f(x,y)$ 在矩形区域 $D=\{(x,y)\,|\,0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1\}$ 上连续，且

$xy\left(\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^2=f(x,y)-1$，则 $f(x,y)=$　　　　(D)

(A) $xy+1$；　(B) $\dfrac{xy}{4}+1$；　(C) $16xy+1$；　(D) $4xy+1$.

5．柱面 $x^2+y^2=2ax$ 含在球面 $x^2+y^2+z^2=4a^2$ 内的部分立体体积 $V=$　　　　(B)

(A) $4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-\rho^2}\mathrm{d}\rho$；　(B) $4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\rho\sqrt{4a^2-\rho^2}\mathrm{d}\rho$；

(C) $8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\rho\sqrt{4a^2-\rho^2}\mathrm{d}\rho$；　(D) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\rho\sqrt{4a^2-\rho^2}\mathrm{d}\rho$.

6．设 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$，则曲面积分 $\oiint_\Sigma \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}S=$　　　　(A)

(A) 4π；　(B) $4\pi R^2$；　(C) π；　(D) 2π.

7．设 L 是抛物线 $y=x^2$ 上点 $(0,0)$ 与 $(1,1)$ 之间的一段弧，则曲线积分 $\int_L\sqrt{y}\mathrm{d}s=$　(A)

(A) $\dfrac{5\sqrt{5}-1}{12}$；　(B) $\dfrac{5\sqrt{5}}{12}$；　(C) $\dfrac{2(5\sqrt{5}-1)}{3}$；　(D) $\dfrac{1}{2}$.

8.

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1．设向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的模分别为$|\vec{a}|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$|\vec{b}|=2$，则$|\vec{a}\times\vec{b}|^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=$ $\underline{\quad\quad 2 \quad\quad}$.

2．设$z=x^y\ (x>0,x\neq 1)$，则$\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{\ln x}\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ $\underline{\quad 2x^y\ (或\ 2z) \quad}$.

3．曲面$z=x^3+xy+y^3$在$(1,1,3)$处的切平面方程为 $\underline{\quad 4x+4y-z-5=0 \quad}$.

4．设Σ为有向曲面，Σ上点$M(x,y,z)$处与Σ的侧指向一致的法向量的方向角分别为

α,β,γ，则两类曲面积分之间的等量关系

$$\iint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\underline{\quad\iint\limits_{\Sigma}\left(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\right)\mathrm{d}S\quad}.$$

5

三、计算题 (每小题 7 分，共 21 分)

1．设函数$z=z(x,y)$由方程$F(x+2y-z,xyz)=0$所确定，求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解：　设$G(x,y,z)=F(x+2y-z,xyz)$，

则$G_x=F_1'+yzF_2'$，$G_y=2F_1'+xzF_2'$，$G_z=-F_1'+xyF_2'$，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_1'+yzF_2'}{-F_1'+xyF_2'}=\frac{F_1'+yzF_2'}{F_1'-xyF_2'}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2F_1'+xzF_2'}{-F_1'+xyF_2'}=\frac{2F_1'+xzF_2'}{F_1'-xyF_2'}.$$

2．计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$是由平面$x+y+z=1$与三个坐标面所围闭区域.

解法 1：$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1 z\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}\sigma$

$$=\int_0^1 z\cdot\frac{1}{2}(1-z)^2\mathrm{d}z=\frac{1}{24}.$$

解法 2：$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y} z\,\mathrm{d}z$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x}\frac{(1-x-y)^2}{2}\mathrm{d}y = \frac{1}{6}\int_0^1 (1-x)^3\mathrm{d}x = \frac{1}{24}.$$

3．设 L 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 取逆时针方向，求曲线积分 $\oint_L (x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y$.

解法 1：由格林公式得，

$$\oint_L (x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y = \iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1}(-1-1)dxdy$$

$$=-2ab\pi .$$

解法 2：设 $x=a\cos\theta, y=b\sin\theta,\quad (\theta:0\to 2\pi)$,

$$\oint_L (x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}[(a\cos\theta+b\sin\theta)(-a\sin\theta)-(a\cos\theta-b\sin\theta)b\cos\theta]\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}[(b^2-a^2)\sin\theta\cos\theta-ab]\mathrm{d}\theta=-2ab\pi .$$

四、（每小题 5 分，共 10 分）

五、（本题满分 10 分）求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=50 \\ x^2+y^2=z^2 \end{cases}$ 在点 $(3,4,5)$ 处的切线方程.

解：方程两边对 x 求导，得

$$\begin{cases} 2x+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0 \\ 2x+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \end{cases},$$

在点 　　　处，$\begin{cases} 3x+4\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+5\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0 \\ 3+4\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=5\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{3}{4} \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0 \end{cases}$,

取切向量 $\vec{T}=(4,-3,0)$，

所求切线方程为 $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-4}{-3}=\dfrac{z-5}{0}$.

六、（本题满分 10 分）计算曲面积分 $\oiint\limits_{\Sigma} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是由圆柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0,\ z=2$ 所截得圆柱体的整个表面的外侧.

解： 设曲面 Σ 所围圆柱体区域为 Ω，

由高斯公式，得 $\oiint\limits_{\Sigma} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\iiint\limits_{\Omega} 3(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$$

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_0^2(\rho^2+z^2)\mathrm{d}z$$

$$=11\pi.$$

七、（本题满分 10 分）求常数 a,b 的值，使 $\dfrac{ax+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\dfrac{y-x-b}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$ 在右半平面 $(x>0)$ 为某个函数的全微分，并求一个这样的函数 $u(x,y)$.

解： 设 $P(x,y)=\dfrac{ax+y}{x^2+y^2}$，$Q(x,y)=\dfrac{y-x-b}{x^2+y^2}$，

$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{x^2-y^2-2axy}{(x^2+y^2)^2}$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{x^2-y^2-2xy+2bx}{(x^2+y^2)^2}$

由 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 得 $\begin{cases} -2a=-2 \\ 2b=0 \end{cases}$，即 $a=1,b=0$，

$$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x-\frac{x-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$$

$$=\int_1^x\frac{1}{x}\mathrm{d}x-\int_0^y\frac{x-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)-\arctan\frac{y}{x}.$$

注：有的题目有多种解法，以上解答和评分标准仅供参考.