



第三章 中值定理与导数应用

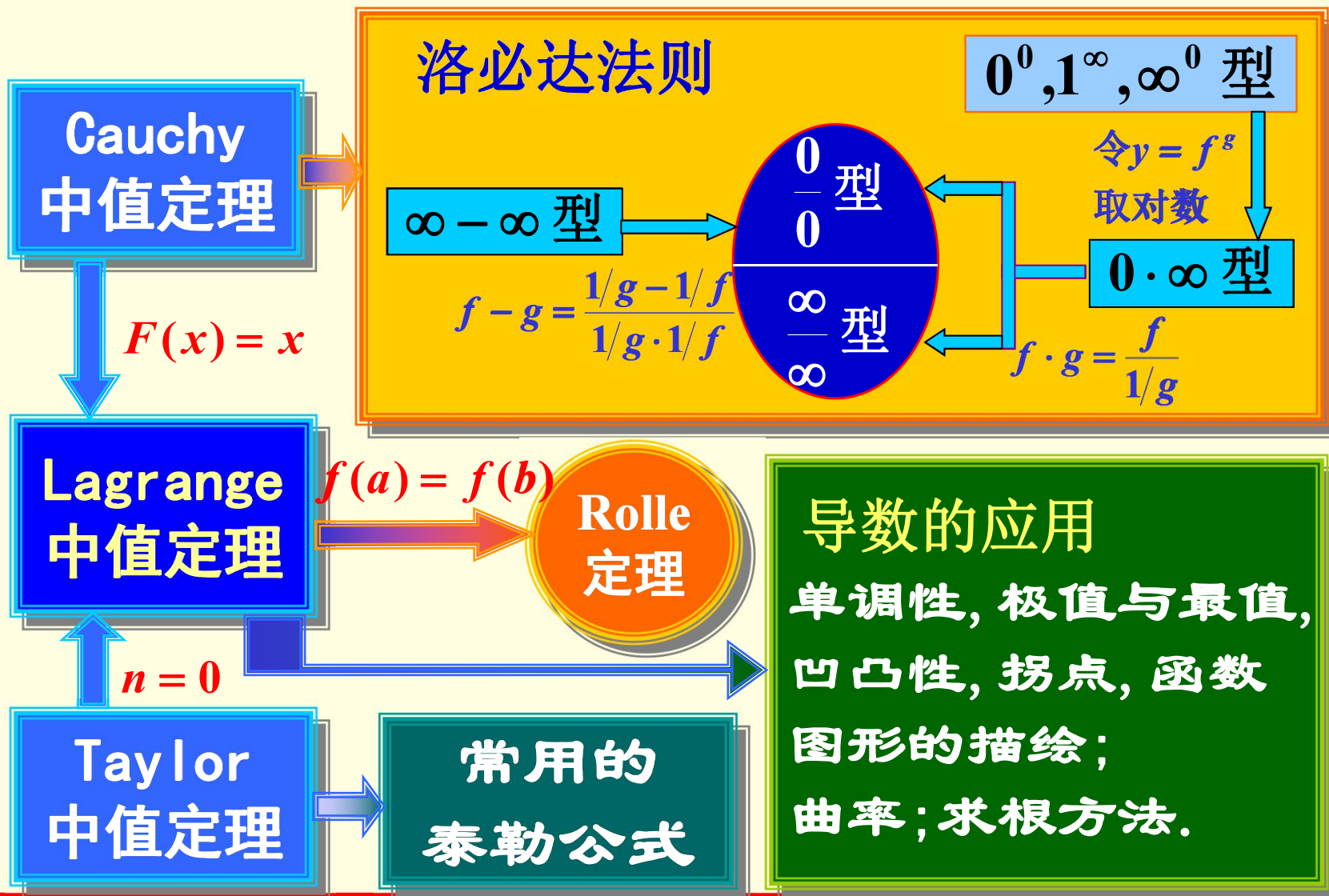
习题课

一、主要内容

二、典型例题



一、主要内容





1、罗尔中值定理

罗尔 (Rolle) 定理 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导, 且在区间端点的函数值相等, 即 $f(a) = f(b)$, 那末在 (a, b) 内至少有一点 $\xi (a < \xi < b)$, 使得函数 $f(x)$ 在该点的导数等于零,

$$\text{即 } f'(\xi) = 0$$



2、拉格朗日中值定理

拉格朗日 (Lagrange) 中值定理 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导, 那末在 (a, b) 内至少有一点 $\xi (a < \xi < b)$, 使等式

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) \text{ 成立.}$$

有限增量公式.

增量 Δy 的精确表达式.

$$\Delta y = f'(x_0 + \theta \Delta x) \cdot \Delta x \quad (0 < \theta < 1).$$

推论 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上的导数恒为零, 那末 $f(x)$ 在区间 I 上是一个常数.



3、柯西中值定理

柯西 (Cauchy) 中值定理 如果函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导, 且 $F'(x)$ 在 (a, b) 内每一点处均不为零, 那末在 (a, b) 内至少有一点 $\xi (a < \xi < b)$, 使等式

$$\frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} \text{ 成立.}$$



4、洛必达法则

1⁰. $\frac{0}{0}$ 型及 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式

定义 这种在一定条件下通过分子分母分别求导再求极限来确定未定式的值的方法称为洛必达法则.

2⁰. $0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型未定式

关键: 将其它类型未定式化为洛必达法则可解决的类型 $(\frac{0}{0}), (\frac{\infty}{\infty})$.

注意: 洛必达法则的使用条件.



5、泰勒中值定理

泰勒(Taylor)中值定理 如果函数 $f(x)$ 在含有 x_0 的某个开区间 (a, b) 内具有直到 $(n+1)$ 阶的导数, 则当 x 在 (a, b) 内时, $f(x)$ 可以表示为 $(x - x_0)$ 的一个 n 次多项式与一个余项 $R_n(x)$ 之和:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

$$\text{其中 } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$



常用函数的麦克劳林公式

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$



6、导数的应用

(1) 函数单调性的判定法

定理 设函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导.

1⁰ 如果在 (a, b) 内 $f'(x) > 0$ ，那末函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加；

2⁰ 如果在 (a, b) 内 $f'(x) < 0$ ，那末函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调减少.



(2) 函数的极值及其求法

定义 设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义, x_0 是 (a, b) 内的一个点,

如果存在着点 x_0 的一个邻域, 对于这邻域内的任何点 x , 除了点 x_0 外, $f(x) < f(x_0)$ 均成立, 就称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个 极大值;

如果存在着点 x_0 的一个邻域, 对于这邻域内的任何点 x , 除了点 x_0 外, $f(x) > f(x_0)$ 均成立, 就称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个 极小值.



函数的极大值与极小值统称为极值,使函数取得极值的点称为极值点.

极值是函数的局部性概念:极大值可能小于极小值,极小值可能大于极大值.

定理(必要条件) 设 $f(x)$ 在点 x_0 处具有导数,且在 x_0 处取得极值,那末必定 $f'(x_0) = 0$.

定义 使导数为零的点(即方程 $f'(x) = 0$ 的实根)叫做函数 $f(x)$ 的驻点.

驻点和不可导点统称为临界点.



定理(第一充分条件)

- (1) 如果 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, 有 $f'(x) > 0$; 而 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, 有 $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值.
- (2) 如果 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, 有 $f'(x) < 0$; 而 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 有 $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值.
- (3) 如果当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 及 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, $f'(x)$ 符号相同, 则 $f(x)$ 在 x_0 处无极值.

定理(第二充分条件) 设 $f(x)$ 在 x_0 处具有二阶导数, 且 $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, 那末

- (1) 当 $f''(x_0) < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值;
- (2) 当 $f''(x_0) > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值.



求极值的步骤:

(1) 求导数 $f'(x)$;

(2) 求驻点和不可导点;

(3) 检查 $f'(x)$ 在驻点左右的正负号或 $f''(x)$ 在该点的符号,判断极值点;

(4) 求极值.



(3) 最大值、最小值问题

步骤:

1.求驻点和不可导点;

2.求区间端点及驻点和不可导点的函数值,比较大小,那个大那个就是最大值,那个小那个就是最小值;

注意:如果区间内只有一个极值,则这个极值就是最值.(最大值或最小值)



实际问题求最值应注意:

- 1) 建立目标函数;
- 2) 求最值; 若目标函数只有唯一驻点, 则该点的函数值即为所求的最大 (或最小) 值.

(4) 曲线的凹凸与拐点

定义 设 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 如果对 I 上任意

两点 x_1, x_2 , 恒有
$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

那末称 $f(x)$ 在 I 上的图形是 (向上) 凹 的;



如果对区间 I 上任意两点 x_1, x_2 , 恒有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

那末称 $f(x)$ 在 I 上的图形是（向上）凸的;

如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内连续, 且在 (a, b) 内的图形是凹
(或凸)的, 那末称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内的图形是凹(或凸)的;



定理1 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内具有二阶导数,若在 (a,b) 内

(1) $f''(x) > 0$,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凹的;

(2) $f''(x) < 0$,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凸的;

连续曲线上凹凸的分界点称为**曲线的拐点**.

定理 2 如果 $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内存在二阶导数,则点 $(x_0, f(x_0))$ 是拐点的必要条件是 $f''(x_0) = 0$.



方法1: 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内二阶可导,
且 $f''(x_0) = 0$,

(1) x_0 两近旁 $f''(x)$ 变号,点 $(x_0, f(x_0))$ 即为拐点;

(2) x_0 两近旁 $f''(x)$ 不变号,点 $(x_0, f(x_0))$ 不是拐点.

方法2: 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内三阶可导,
且 $f''(x_0) = 0$,而 $f'''(x_0) \neq 0$,那末 $(x_0, f(x_0))$ 是
曲线 $y = f(x)$ 的拐点.



(5) 函数图形的描绘

利用函数特性描绘函数图形.

第一步 确定函数 $y = f(x)$ 的定义域, 对函数进行奇偶性、周期性、曲线与坐标轴交点等性态的讨论, 求出函数的一阶导数 $f'(x)$ 和二阶导数 $f''(x)$;

第二步 求出方程 $f'(x) = 0$ 和 $f''(x) = 0$ 在函数定义域内的全部实根, 用这些根同函数的间断点或导数不存在的点把函数的定义域划分成几个部分区间.



第三步 确定在这些部分区间内 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的符号，并由此确定函数的增减性与极值及曲线的凹凸与拐点（可列表进行讨论）；

第四步 确定函数图形的水平、铅直渐近线以及其他变化趋势；

第五步 描出与方程 $f'(x) = 0$ 和 $f''(x) = 0$ 的根对应的曲线上的点，有时还需要补充一些点，再综合前四步讨论的结果画出函数的图形。



(6) 弧微分 曲率 曲率圆

1⁰. 弧微分 $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx.$

2⁰. 曲率 $K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{d\alpha}{ds} \right|.$

曲率的计算公式 $k = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$



3⁰. 曲率圆

定义 设曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x, y)$ 处的曲率为 $k (k \neq 0)$. 在点 M 处的曲线的法线上, 在凹的一侧取一点 D , 使 $|DM| = \frac{1}{k} = \rho$. 以 D 为圆心, ρ 为半径作圆(如图), 称此圆为曲线在点 M 处的曲率圆.

$$\rho = \frac{1}{k}, \quad k = \frac{1}{\rho}.$$

D 是曲率中心, ρ 是曲率半径.



二、典型例题

例1 验证罗尔定理对 $y = \ln \sin x$ 在 $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$ 上的正确性.

解 $\because D : 2k\pi < x < 2k\pi + \pi, \quad (k = 0, \pm 1, \cdots)$

且在 $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$ 上连续.

又 $y' = \cot x$ 在 $(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$ 内处处存在

并且 $f(\frac{\pi}{6}) = f(\frac{5\pi}{6}) = -\ln 2$

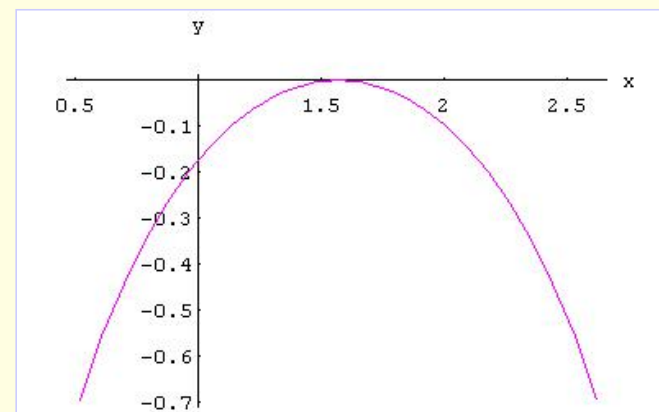
\therefore 函数 $y = \ln \sin x$ 在 $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$ 上满足罗尔定理的条件.

由 $y' = \cot x = 0$,

在 $(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$ 内显然有解 $x = \frac{\pi}{2}$.

取 $\xi = \frac{\pi}{2}$, 则 $f'(\xi) = 0$.

这就验证了命题的正确性.





例2 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x} - (1+x)}.$

解 \because 分子关于 x 的次数为 2.

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt[5]{1+5x} &= (1+5x)^{\frac{1}{5}} \\ &= 1 + \frac{1}{5}(5x) + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5} - 1\right) \cdot (5x)^2 + o(x^2) \\ &= 1 + x - 2x^2 + o(x^2)\end{aligned}$$

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{[1 + x - 2x^2 + o(x^2)] - (1 + x)} = -\frac{1}{2}.$$



例3 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且
 $f(0) = 0, f(1) = 1$, 试证 : 对任意给定的正数 a, b
在 $(0,1)$ 内存在不同的 ξ, η 使 $\frac{a}{f'(\xi)} + \frac{b}{f'(\eta)} = a + b$.

证 $\because a$ 与 b 均为正数, $\therefore 0 < \frac{a}{a+b} < 1$

又 $\because f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 由介值定理,

存在 $\tau \in (0,1)$, 使得 $f(\tau) = \frac{a}{a+b}$,

$f(x)$ 在 $[0,\tau], [\tau,1]$ 上分别用拉氏中值定理, 有



$$f(\tau) - f(0) = (\tau - 0)f'(\xi), \quad \xi \in (0, \tau) \quad \textcircled{1}$$

$$f(1) - f(\tau) = (1 - \tau)f'(\eta), \quad \eta \in (\tau, 1) \quad \textcircled{2}$$

注意到 $f(0) = 0, f(1) = 1$, 由①, ②有

$$\tau = \frac{f(\tau)}{f'(\xi)} = \frac{\frac{a}{a+b}}{f'(\xi)} \quad \textcircled{3} \quad 1 - \tau = \frac{1 - f(\tau)}{f'(\eta)} = \frac{\frac{b}{a+b}}{f'(\eta)} \quad \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3} + \textcircled{4}, \text{得 } 1 = \frac{a}{f'(\xi)(a+b)} + \frac{b}{f'(\eta)(a+b)}$$

$$\therefore \frac{a}{f'(\xi)} + \frac{b}{f'(\eta)} = a + b.$$



例4 证明不等式

$$x \ln x + y \ln y > (x + y) \ln \frac{x + y}{2}, (x > 0, y > 0, x \neq y).$$

证 令 $f(t) = t \ln t (t > 0)$,

$$\text{则 } f'(t) = \ln t + 1, \quad f''(t) = \frac{1}{t} > 0,$$

$\therefore f(t) = t \ln t$ 在 (x, y) 或 (y, x) , $x > 0, y > 0$ 是凹的.

$$\text{于是 } \frac{1}{2}[f(x) + f(y)] > f\left(\frac{x + y}{2}\right)$$

$$\text{即 } \frac{1}{2}[x \ln x + y \ln y] > \frac{x + y}{2} \ln \frac{x + y}{2},$$

$$\text{即 } x \ln x + y \ln y > (x + y) \ln \frac{x + y}{2}.$$



例5 若函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可微,且 $f(0) = f(1)$, $|f''(x)| \leq 1$, 证明: $|f'(x)| \leq \frac{1}{2} \quad (x \in [0,1])$

证 设 $\forall x_0 \in [0,1]$, 在 x_0 处把 $f(x)$ 展成一阶泰勒公式,有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_0)^2$$

令 $x = 0, x = 1$, 则有

$$f(0) = f(x_0) - f'(x_0)x_0 + \frac{1}{2} f''(\xi_1)x_0^2 \quad \text{①}$$

$$f(1) = f(x_0) + f'(x_0)(1 - x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi_2)(1 - x_0)^2 \quad \text{②}$$



②-①, 注意到 $f(0) = f(1)$, 则有

$$f'(x_0) = \frac{1}{2} f''(\xi_2)(1-x_0)^2 - \frac{1}{2} f''(\xi_1)x_0^2$$

$$\because |f''(x)| \leq 1,$$

$$\therefore |f'(x_0)| \leq \frac{1}{2}(1-x_0)^2 + \frac{1}{2}x_0^2 = (x_0 - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}$$

$$\text{又由 } x_0 \in [0,1] \text{ 知, } \left| x_0 - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{2}, \text{ 于是有 } |f'(x_0)| \leq \frac{1}{2}$$

由 x_0 的任意性, 可知命题成立.



例6 过正弦曲线 $y = \sin x$ 上点 $M(\frac{\pi}{2}, 1)$ 处, 求作一抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 使抛物线与正弦曲线在 M 点具有相同的曲率和凹向, 并写出 M 点处两曲线的公共曲率圆方程.

解 曲线 $y = f(x)$ 在点 (x, y) 处的曲率, 曲率半径和曲率圆的圆心坐标分别为

$$k = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}}, \quad \rho = \frac{1}{k}, \quad \begin{cases} x_0 = x - \frac{y'[1 + (y')^2]}{y''} \\ y_0 = y + \frac{1 + (y')^2}{y''} \end{cases}$$



对于曲线 $y = f(x) = \sin x$,

$$\text{有 } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

对于曲线 $y = ax^2 + bx + c$,

$$\text{有 } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}a + \frac{\pi}{2}b + c, \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi a + b, \quad f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2a.$$

若两曲线满足题设条件,必在该点处具有相同的一阶导数和二阶导数,于是有

$$\frac{\pi^2}{4}a + \frac{\pi}{2}b + c = 1, \quad \pi a + b = 0, \quad 2a = -1.$$



解此方程组得 $a = -\frac{1}{2}, \quad b = \frac{\pi}{2}, \quad c = 1 - \frac{\pi^2}{8}.$

故所求作抛物线的方程为

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{2}x + 1 - \frac{\pi^2}{8}.$$

两曲线在点处的曲率圆的圆心为 $(\frac{\pi}{2}, 0),$

曲率半径 $\rho = 1,$

曲率圆的方程为 $(x - \frac{\pi}{2})^2 + y^2 = 1.$



例7 求函数 $y = x + \frac{x}{x^2 - 1}$ 的单调区间, 极值, 凹凸区间, 拐点, 渐近线, 并作函数的图形.

解 (1) 定义域: $x \neq \pm 1$,

即 $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$,

$\because f(-x) = -x + \frac{-x}{x^2 - 1} = -f(x)$, 奇函数

$$(2) y' = 1 - \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2},$$

令 $y' = 0$, 得 $x = -\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$.



$$y'' = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x+1)^3},$$

令 $y'' = 0$, 得可能拐点的横坐标 $x = 0$.

(3) $\because \lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty$, \therefore 没有水平渐近线;

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow 1-0} y = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} y = +\infty,$$

$\therefore x = 1$ 为曲线 y 的铅直渐近线;

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} y = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} y = +\infty,$$

$\therefore x = -1$ 为曲线 y 的铅直渐近线;







$$\because a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \left(x + \frac{x}{x^2 - 1} \right) = 1,$$



$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0,$$

\therefore 直线 $y = x$ 为曲线 y 的斜渐近线.

(4) 以函数的不连续点 ($x = \pm 1$), 驻点 ($x = -\sqrt{3}$, $x = 0$, $x = \sqrt{3}$) 和可能拐点的横坐标为分点, 列表如下:



x	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$
y'	+	0	-		-	0	-
y''	-		-		+	0	-
y		极大值				拐点	

x	1	$(1, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
y'		-	0	+
y''		+		+
y			极小值	

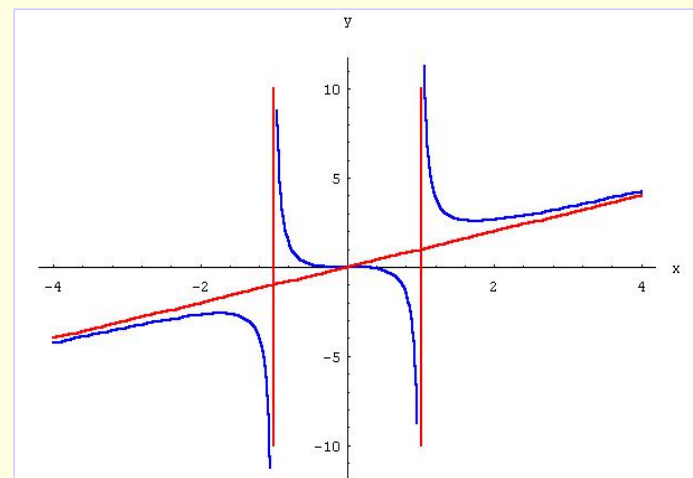
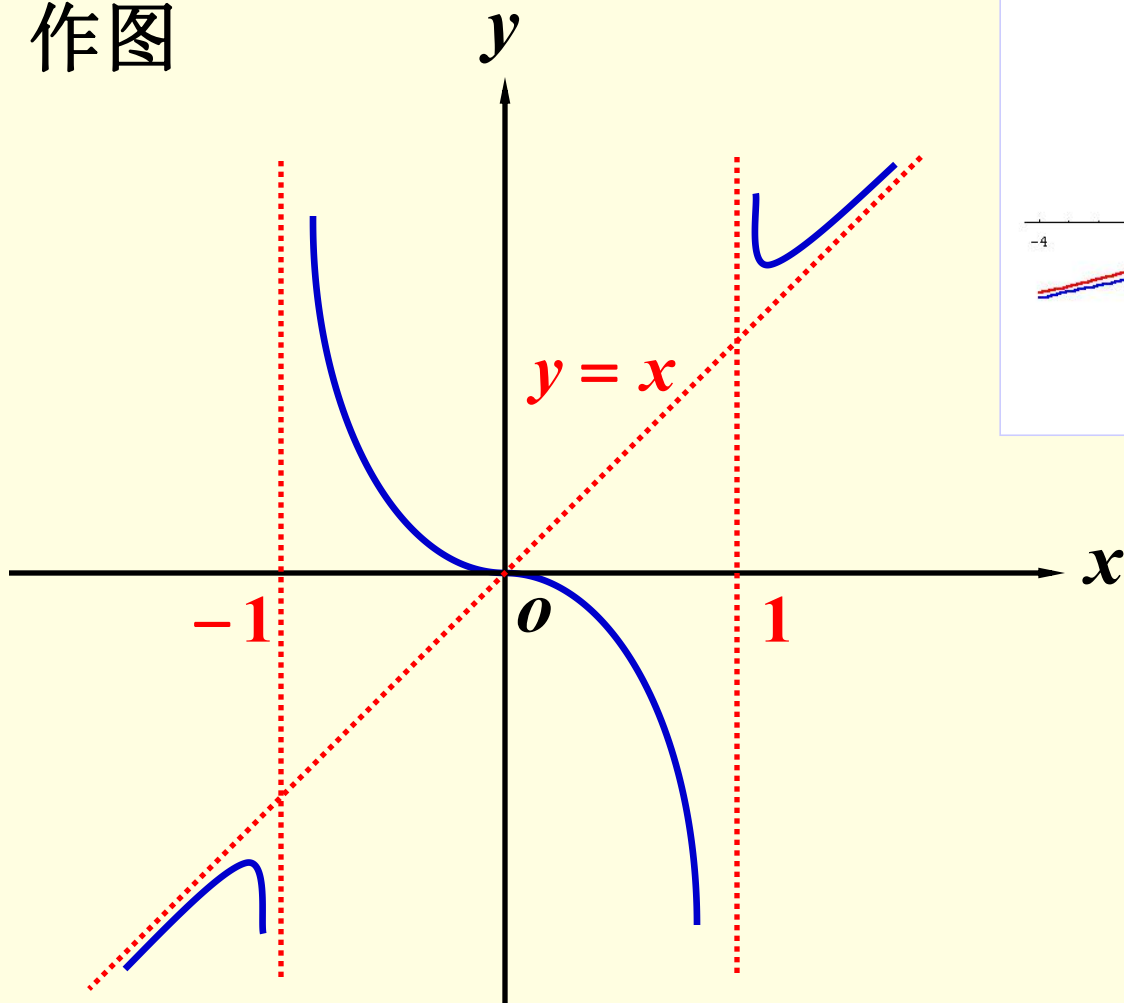
极大值 $y|_{x=-\sqrt{3}} = -\frac{3}{2}\sqrt{3},$

极小值 $y|_{x=\sqrt{3}} = \frac{3}{2}\sqrt{3},$

拐点为 $(0, 0).$



作图





测验题

一、选择题：

- 1、一元函数微分学的三个中值定理的结论都有一个共同点，即（ ）
- (A) 它们都给出了 ξ 点的求法 .
 - (B) 它们都肯定了 ξ 点一定存在，且给出了求 ξ 的方法.
 - (C) 它们都先肯定了 ξ 点一定存在，而且如果满足定理条件，就都可以用定理给出的公式计算 ξ 的值 .
 - (D) 它们只肯定了 ξ 的存在，却没有说出 ξ 的值是什么，也没有给出求 ξ 的方法 .



2、若 $f(x)$ 在 (a,b) 可导且 $f(a) = f(b)$, 则 ()

- (A) 至少存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使 $f'(\xi) = 0$;
- (B) 一定不存在点 $\xi \in (a,b)$, 使 $f'(\xi) = 0$;
- (C) 恰存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使 $f'(\xi) = 0$;
- (D) 对任意的 $\xi \in (a,b)$, 不一定能使 $f'(\xi) = 0$.

3. 已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可导, 且方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 有两个不同的根 α 与 β , 那么在 (a,b) ()

$$f'(x) = 0.$$

- (A) 必有;
- (B) 可能有;
- (C) 没有;
- (D) 无法确定.



4、如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续，在 (a, b) 可导， c 为介于 a, b 之间的任一点，那么在 (a, b) () 找到两点 x_2, x_1 ，使 $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c)$ 成立.

- (A) 必能; (B) 可能;
(C) 不能; (D) 无法确定能 .

5、若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，且 $x \in (a, b)$ 时， $f'(x) > 0$ ，又 $f(a) < 0$ ，则 () .

- (A) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加，且 $f(b) > 0$;
(B) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加，且 $f(b) < 0$;
(C) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调减少，且 $f(b) < 0$;
(D) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加，但 $f(b)$ 的正负号无法确定.



6、 $f'(x_0) = 0$ 是可导函数 $f(x)$ 在 x_0 点处有极值的（ ）。

- (A) 充分条件；
- (B) 必要条件
- (C) 充要条件；
- (D) 既非必要又非充分条件。

7、若连续函数在闭区间上有唯一的极大值和极小值，则（ ）。

- (A) 极大值一定是最大值，且极小值一定是最小值；
- (B) 极大值一定是最大值，或极小值一定是最小值；
- (C) 极大值不一定是最大值，极小值也不一定是最小值；
- (D) 极大值必大于极小值。



8、若在 (a,b) 内，函数 $f(x)$ 的一阶导数 $f'(x) > 0$ ，
二阶导数 $f''(x) < 0$ ，则函数 $f(x)$ 在此区间内()。

- (A) 单调减少，曲线是凹的；
- (B) 单调减少，曲线是凸的；
- (C) 单调增加，曲线是凹的；
- (D) 单调增加，曲线是凸的。

9、设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} F(x) = 0$ ，且在点 a 的某

邻域中（点 a 可除外）， $f(x)$ 及 $F(x)$ 都存在，

且 $F(x) \neq 0$ ，则 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{F(x)}$ 存在是 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$

存在的()。

- (A) 充分条件；
- (B) 必要条件；
- (C) 充分必要条件；
- (D) 既非充分也非必要条件。



$$10、\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{1 - \cos x} = (\quad) .$$

$$(A) 0; \quad (B) -\frac{1}{2};$$

$$(C) 1; \quad (D) \frac{1}{2}.$$

二、求极限:

$$1、\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} \quad (a \geq 0);$$

$$2、\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \tan x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{x^3}};$$

$$3、\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right];$$

$$4、\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos x}};$$



三、一个半径为 R 的球内有一个内接正圆锥体，问圆锥体的高和底半径成何比例时，圆锥体的体积最大？

四、若 $x > 0$ ，试证 $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.

五、设 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 有拐点 $(1, 2)$ ，并在该点有水平切线， $f(x)$ 交 x 轴于点 $(3, 0)$ ，求 $f(x)$.

六、确定 a, b, c 的值，使抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与正弦曲线在点 $(\frac{\pi}{2}, 1)$ 相切，并有相同的曲率.

七、绘出函数 $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ 的图形.



八、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0) = 0, f(1) = 1$ ，试证：对任意给定的正数 a, b 在 $(0,1)$ 内存在不同的 ξ, η ，使 $\frac{a}{f'(\xi)} + \frac{b}{f'(\eta)} = a + b$.



测验题答案

一、 1、 D; 2、 D; 3、 A; 4、 B; 5、 D;
 6、 B; 7、 C; 8、 D; 9、 B; 10、 C.

二、 1、 $\frac{1}{\sqrt{2a}}$; 2、 $e^{\frac{1}{2}}$; 3、 $\frac{1}{2}$; 4、 不存在.

三、 $\sqrt{2}:1$.

五、 $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$.

六、 $y = \pm \frac{1}{2}x^2 \mp \frac{\pi}{2}x + 1 \pm \frac{\pi^2}{8}$.



七、

