Wyd

29.1 微分方程基本概念

1.定义

含有未知数的导数或微积分的方程

如：$\frac{dy}{dx}=3xy$　　　$s''+2s'+4s=\sin t$

2.方程的阶

如：$\frac{dy}{dx}=3xy$　　一阶

$s''+2s'+4s=\sin t$　　二阶

$y^{(5)}+4y'''=3x$　　五阶

3.方程的解：满足微分方程的函数

如：$y=2x^2+C$ 是方程 $\frac{dy}{dx}=4x$ 的解

n阶微分方程：$F(x,y,y'\cdots,y^{(n)})=0$的解：$y=y(x)$　$(x\in I)$

使得 $F[x,y(x),y'(x)\cdots,y^{(n)}(x)]\equiv 0$　$(x\in I)$

(注：方程的解可能是局部的)

1° 通解：

n阶微分方程的含有n个独立任意常数的解。

如：$y=2x^2+C$　是方程$\frac{dy}{dx}=4x$的解

$s=-0.2t^2+C_1t+C_2$　是方程$\frac{d^2s}{dt^2}=-0.4$的通解

2° 特解：

没有任意常数的解

如：$y=2x^2+5$ 是方程 $\frac{dy}{dx}=4x$的特解

$s=-0.2t^2+2t+3$　是方程 $\frac{d^2s}{dx}=-0.4$的特解

Δ通解中的任意常数可由初始条件确定

30.1 定义

一般形式:$F(x,y,y')=0$

如：$x(y')^2-2yy'+x=0$

特殊形式：$y'=f(x,y)$　$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$

如：$y'=2xy$　　$\frac{dy}{dx}=10^{x+y}$

30.2 常考三类型

1.可分离变量微分方程

如果一个一阶微分方程可化为$g(y)dy=f(x)dx$

那我们称原方程为可分离变量微分方程

题型一：求解可分离变量微分方程

步骤：①分离变量
②两边积分

例 1. 求微分方程$\frac{dy}{dx}=2xy$的通解.

解：$\frac{dy}{y}=2xy$

$\int\frac{1}{y}dy=\int 2x\,dx$

$\ln|y|=x^2+\ln C$

$=\ln e^{x^2}+\ln C$

$\therefore y=\pm Ce^{x^2}.$

例 2. 求下列微分方程满足所给初值条件的特解：

$y'\sin x=y\ln y$，$y\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=e.$

解：$\frac{dy}{dx}\sin x=y\ln y$

$\frac{1}{y\ln y}dy=\frac{1}{\sin x}dx$

$\int\frac{1}{y\ln y}dy=\int\frac{1}{\sin x}dx$

$\ln|\ln y|=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+\ln C_1$

$x=\frac{\pi}{2}$　　$0=0+\ln C_1$　$\therefore \ln y=\tan\frac{x}{2}$

$\therefore C_1=1$　　$y=e^{\tan\frac{x}{2}}$

2.齐次方程

形如$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$的方程，称为齐次方程.

如：$(xy-y^2)dx-(x^2-2xy)dy=0$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{xy-y^2}{x^2-2xy}=\frac{\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1-2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

题型二：求齐次方程的解 $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$

步骤：
①令$\frac{y}{x}=u$，$y=xu$，$\frac{dy}{dx}=u+\frac{du}{dx}$
②代入原方程：$u+x\frac{du}{dx}=f(u)$
③分离变量：$\frac{1}{f(u)-u}du=\frac{1}{x}dx$
④积分：$\int\frac{1}{f(u)-u}du=\int\frac{1}{x}dx$
⑤求解积分方程

例 1. 解方程$x^2\frac{dy}{dx}+2xy=3y^2$.

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{3y^2-2xy}{x^2}=3\left(\frac{y}{x}\right)^2-2\frac{y}{x}$

令$\frac{y}{x}=u$　　$\frac{dy}{dx}=u+\frac{du}{dx}$

$u+x\frac{du}{dx}=3u^2-2u$

$\frac{du}{u(u-1)}=\frac{3dx}{x}\Rightarrow\int\frac{du}{u(u-1)}=\int\frac{3}{x}dx\Rightarrow\ln(u-1)-\ln u=3\ln x+\ln C$

$\frac{u-1}{u}=Cx^3$　　$\frac{y-x}{y}=Cx^3$　　$y=\frac{x}{1-Cx^3}.$

3.一阶线性微分方程

1）一般形式：$a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=f(x)$

线性：一次幂(y,y')

标准形式：$\frac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x)\leftarrow$自由项　$Q(x)\neq 0$　(非齐次线性方程)
$Q(x)=0$　(齐次线性方程)

$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0$

2）解方程

① $\frac{dy}{dx}+p(x)y=0$　　可分离变量　$\frac{dy}{y}=-p(x)dx$

两边积分　$\ln|y|=-\int p(x)dx+C$

$y=Ce^{-\int p(x)dx}$　　(4−1).

② $\frac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x)$

Δ常数变易法(将(4−1)中C换成x的未知函数$u(x)$)

设原方程通解为：$y=ue^{-\int p(x)dx}$

$\frac{dy}{dx}=u'e^{-\int p(x)dx}-up(x)e^{-\int p(x)dx}$

$\therefore u'e^{-\int p(x)dx}-up(x)e^{-\int p(x)dx}+p(x)ue^{-\int p(x)dx}=Q(x)$

$Q(x)=u'e^{-\int p(x)dx}, u'=Q(x)e^{\int p(x)dx},$

$\therefore y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right)$　　(4−2)

$=\underbrace{Ce^{-\int p(x)dx}}_{\text{对应齐次方程通解}}+\underbrace{e^{-\int p(x)dx}\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx}_{\text{原方程−特解[(4−2)中}C=0\text{时]}}$

题型三：求一阶线性微分方程的解

步骤：
①将方程写成标准形式
②代入通解公式
③化简

例 1.（绍兴文理学院 14-15）求微分方程$\frac{dy}{dx}+y=x$的通解.

解：$P(x)=1$　$Q(x)=x$

$y=e^{\int -P(x)dx}\left[\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}+C\right]$

$=e^{-\int 1dx}\left(\int xe^{\int 1dx}dx+C\right)$

$=e^{-x}\left(\int xe^{x}dx+C\right)$

$=e^{-x}\left(xe^{x}-\int e^{x}dx+C\right)$

$=e^{-x}(xe^{x}-e^{x}+C).$

例 2. 已知$y'+\frac{y}{x}+e^x=0$，$y(1)=0$,求$y(x)$.

解：$y'+\frac{1}{x}y=-e^x$

$P(x)=\frac{1}{x},Q(x)=-e^x$

$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}+C\right]$

$=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(\int -e^{x}e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right)$

$=\frac{1}{|x|}\left(\int -|x|e^{x}dx+C\right)$

$=\frac{1}{x}\left(-xe^{x}+\int e^{x}dx+C\right)$

$=\frac{1}{x}(-xe^{x}+e^{x}+C)$

$\because y(1)=0$　$\therefore C=0$　$\therefore y(x)=\frac{1}{x}(e^x-xe^x).$

31.1 n阶微分方程

①一般形式：$F(x,y,y',\cdots y^{(n)})=0$

②特殊形式：$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots y^{(n-1)})$

通解：$y=\varphi(x,C_1,\cdots C_n)$

$y^{(n)}=f(x)$型的微分方程

这种n阶方程可以通过n次积分，求通解

$y^{(n-1)}=\int y^{(n)}dx=\int f(x)dx+C_1$

再积分，降为$n-2$阶方程

题型一：$y^{(n)}=f(x)$型求解

方法：两边连续积分n次，得含n个任意常数的通解

例 1. 求微分方程$y'''=e^{2x}-\cos x$的通解.

解：连续积分三次，得$y''=\int(e^{2x}-\cos x)dx$

$=\frac{1}{2}e^{2x}-\sin x+C_1$

$y'=\int\left(\frac{1}{2}e^{2x}-\sin x+C_1\right)dx$

$=\frac{1}{4}e^{2x}+\cos x+C_1x+C_2$

$y=\int y'dx=\frac{1}{8}e^{2x}+\sin x+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3.$

31.2 特殊的二阶微分方程

1. $y''=f(x,y')$ 型

令$y'=p$，则$y''=\frac{dp}{dx}$

$\frac{dp}{dx}=f(x,p)$

题型二：$y''=f(x,y')$型微分方程求解

方法：降阶法

例 1. 求微分方程$(1+x^2)y''=2xy'$的特解，其中$y(0)=1,y'(0)=3$.

解：令$y'=p$　$y''=\frac{dp}{dx}$

$(1+x^2)\frac{dp}{dx}=2xp$

$\frac{dp}{p}=\frac{2x}{1+x^2}dx$

两边积分后　$\ln|p|=\ln(1+x^2)+\ln C$

$\therefore p=y'=C(1+x^2)$

$\because y'(0)=3$　$\therefore C=3$　$y'=3(1+x^2)$

两端再积分得　$y=x^3+3x+C_2$

$\because y(0)=1$　$\therefore C_2=1$　$y=x^3+3x+1.$

2. $y''=f(y,y')$ 型

令$y'=p$，则$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$

$p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$

题型三: $y''=f(y,y')$型微分方程求解

方法：降阶法

例 1. 求微分方程$yy''-y'^2=0$的通解.

解：令$y'=p$，则$y''=\frac{dp}{dy}\cdot p$

$yp\frac{dp}{dy}-p^2=0$

$y\neq 0$，$p\neq 0$时，$\frac{dp}{p}=\frac{dy}{y}.$

两端积分　$\ln|p|=\ln|y|+\ln C$

$y'=p=Cy$

两端再分离变量　$\frac{dy}{y}=Cdx$

$\ln|y|=Cx_1+\ln C_1$

$\therefore y=C_1e^{Cx}.$

32.1 定义

1.一阶线性微分方程

$y'+p(x)y=Q(x)$

通解：$y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right)$

2.二阶线性微分方程

$y''+p(x)y+Q(x)y=f(x)$ ＜ $f(x)\neq 0$　非齐次线性方程；$f(x)=0$　对应齐次线性方程

3. n阶线性微分方程

$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f(x)\rightarrow$自由项

32.2 解的构造

1.二阶齐次线性方程

① 定理 1　如果函数$y_1(x)$与$y_2(x)$是方程$y''+p(x)y'+Q(x)y=0$的两个解，那么$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$也是方程的解，其中C_1, C_2为任意常数.

证：$[C_1y_1''+C_2y_2'']+p(x)[C_1y_1'+C_2y_2']+Q(x)[C_1y_1+C_2y_2]$

$=C_1[y_1''+p(x)y_1'+Q(x)y_1]+C_2[y_2''+p(x)y_2'+Q(x)y_2]$

$=0.$

思考：定理 1 中$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$是否为方程通解?

当$y_2(x)=ky_1(x)$时，　$y=C_1y_1(x)+C_2ky_1(x)=(k+1)C_1y_1(x).$

② 线性相关与线性无关

n个函数$y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$在区间$I$上线性相关，当且仅当：存在不全为 0 的$n$个数$k_1,k_2,\cdots k_n$使$k_1y_1+k_2y_2+\cdots k_ny_n\equiv 0$，否则线性无关.

题型一：判断函数组在定义域内是否线性相关

方法：$\frac{y_2}{y_1}=k$　线性相关；$\frac{y_2}{y_1}\neq k$　线性无关

例 1. 判断下列函数组在其定义域区间内是否线性相关.

1）x，x^2；　2）e^{-x}，e^x；　3）$\sin 2x$，$\cos x\sin x$.

解：1）$\frac{x^2}{x}=x\neq k$　　线性无关.

2）$\frac{e^{-x}}{e^x}=e^{-2x}\neq k$　　线性无关.

3）$\frac{\sin 2x}{\cos x\sin x}=2$　　线性相关.

③ 定理 2　如果$y_1(x)$与$y_2(x)$是方程$y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0$的两个线性无关的特解，则$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$是方程的通解.

推论：如果$y_1(x),y_2(x),\cdots y_n(x)$是$n$阶齐次线性方程

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{n-1}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$$

的n个线性无关的解，那么次方程通解为：

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x)$$

其中C_1，C_2，$\cdots$，C_n为任意常数.

题型二：求高阶线性齐次微分方程的通解

方法 ：用定理 2

例 1. 验证$y_1=\cos\omega x$及$y_2=\sin\omega x$都是方程$y''+\omega^2y=0$的解，并写出该方程的通解.

解：$y_1'=-\omega\sin\omega x$　　$y_1''=-\omega^2\cos\omega x$

$y_2'=\omega\cos\omega x$　　$y_2''=-\omega^2\sin\omega x$

$\therefore y_1$，y_2是方程的解　　$\frac{y_2}{y_1}=\tan\omega x\neq k$

$\therefore y_1$，y_2线性无关

$\therefore$方程通解为 $y=C_1y_1+C_2y_2=C_1\cos\omega x+C_2\sin\omega x$

2.二阶非齐次线性方程

定理 3 设$y^*(x)$是二阶非齐次线性方程

$$y''+p(x)y'+Q(x)y=f(x)\qquad(2-1)$$

的一特解.$Y(x)$是方程$(2-1)$对应的齐次方程的通解，则$y=Y(x)+y^*(x)$是二阶非齐次线性微分方程的通解.

证：$(Y''+y^{*\prime\prime})+p(x)(Y'+y^{*\prime})+Q(x)(Y+y^*)$

$=[Y''+p(x)Y'+Q(x)Y]+[y^{*\prime\prime}+p(x)y^{*\prime}+Q(x)y^*].$

33.1 二阶常系数齐次线性微分方程

$$y''+py'+qy=0\qquad(1\text{-}1)$$

设(1-1)的解为 $y=e^{rx}$　(r为待定常数)

$y'=re^{rx}$　　$y''=r^2e^{rx}$

代入得 $(r^2+pr+q)e^{rx}=0$　(r^2+pr+q为方程(1-1)的特征方程)

求特征根: $r_1=\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$　　$r_2=\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$

① $\Delta=p^2-4q>0$　$\Rightarrow r_1\neq r_2$，得两解:$y_1=e^{r_1x}$，$y_2=e^{r_2x}$;

$\therefore$方程通解:$y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}$.

② $\Delta=p^2-4q=0$　$\Rightarrow r_1=r_2=r=-\frac{D}{2}$，得一解:$y_1=e^{r_1x}$;

为求另一线性无关解 $y_2=y_1u(x)$

$y'=u'e^{rx}+ure^{rx}$　　$y''=u''e^{rx}+u're^{rx}+u're^{rx}+ur^2e^{rx}$;

代入(1-1)得　$u''+(2r+p)u'+(r^2+pr+q)u=0$;

$u=c_1x+c_2$　取$c_1=1$，$c_2=0\Rightarrow u(x)=x$　　$\therefore$另一解$y_2=xe^{rx}$;

$\therefore$方程通解为 $y=c_1e^{rx}+c_2e^{rx}=(c_1+c_2x)e^{rx}$.

③ $\Delta=p^2-4q<0$　$\Rightarrow$一对共轭复根 $\alpha\pm\beta i$;

得两解 $y_1=e^{(\alpha+\beta i)x}=e^{\alpha x}e^{\beta xi}$，$y_2=e^{(\alpha-\beta i)x}=e^{\alpha x}e^{-\beta xi}$;

两解线性无关,但要转化为实数解;

用欧拉公式 $e^{\theta i}=\cos\theta+i\sin\theta$

$\therefore$方程通解为 $y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$.

题型一：求二阶常系数齐次线性微分方程的解

方法: ① $y''+py'+qy=0\Rightarrow r^2+pr+q=0$;
② $y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}$　　$\Delta>0$
$y=(c_1+c_2x)e^{rx}$　$\Leftarrow$　$\Delta=0$
$y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$　　$\Delta<0$

例 1. (陇东学院 2013-2014) 微分方程$y''+2y'-3y=0$的通解是____.

解　① $r^2+2r-3=0$，$\Delta>0$，$r_1=1$　$r_2=-3$;

② $\therefore Y=c_1e^x+c_2e^{-3x}$.

例 2. 已知$\frac{dy}{dx}=1-\int_0^x y(t)dt$, $y(0)=1$,求此方程所确定的函数$y(x)$.

解　① $y''=-y$　　$r^2+1=0$　$\Rightarrow$　$r_1=i$　　$r_2=-i$;

② $\therefore Y=e^0(c_1\cos x+c_2\sin x)=c_1\cos x+c_2\sin x$.

33.2 二阶常系数非齐次线性微分方程

$$y''+py'+qy=f(x)\qquad(2\text{-}1)$$

$$y''+py'+qy=0\qquad(2\text{-}2)$$

(2-1)求解步骤:　① 求出(2-2)的通解　$Y=c_1y_1+c_2y_2$;

② 求出(2-1)一特解y^*　(y与自由项$f(x)$有关);

③ (2-1)通解　$y=Y+y^*$.

1. $f(x)=p_m(x)e^{\lambda x}$ 型

$$y''+py'+qy=p_m(x)e^{\lambda x}\qquad(2\text{-}3)$$

其中,$p_m(x)$为m次多项式.

设方程特解$y^*=Q(x)e^{\lambda x}$

$y^{*\prime}=[Q'(x)+\lambda Q(x)]e^{\lambda x}$　　$y^{*\prime\prime}=[Q''(x)+2\lambda Q'(x)+Q'(x)]e^{\lambda x}$

代入(2-3)并约去$e^{\lambda x}$

$$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=p_m(x)$$

① λ不是特征根　$y^*=Q_m(x)e^{\lambda x}$

② λ是特征单根　$y^*=xQ_m(x)e^{\lambda x}$

③ λ是特征二重根　$y^*=x^2Q_m(x)e^{\lambda x}$

题型二　求形如$y''+py'+qy=p_m(x)e^{\lambda x}$的解

步骤: ① 求$y''+py'+qy=0$通解Y;
② 判断λ和特征根关系,求y^*;
③ $y=Y+y^*$.

例 1. (绍兴理工大学 2013-2014) 求$y''-6y'+9y=e^{2x}$的解.

解　① $y''-6y'+9y=0$　r^2-6r+9　$r_1=r_2=3$　$Y=(c_1+c_2x)e^{3x}$;

② $\lambda=2$不是特征方程的根　$\therefore y^*=c_3e^{2x}$

$y^{*\prime}=2c_3e^{2x}$　　$y^{*\prime\prime}=4c_3e^{4x}$

$\therefore 4c_3e^{2x}-12c_3e^{2x}+9c_3e^{2x}=e^{2x}$　　$\therefore c_3=1$　　$\therefore y^*=e^{2x}$;

③ $y=(c_1+c_2x)e^{3x}+e^{2x}$.

2. $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+Q_n(x)\sin\omega x]$

特解可设为 $y^*=x^ke^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x]$

① $R_m^{(1)}(x)$，$R_m^{(2)}(x)$是m次多项式;

② $\lambda+\omega i$(或$\lambda-\omega i$)　是特征方程的根　$k=1$；不是特征方程的根　$k=0$

题型三：求$y''+py'+qy=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+Q_n(x)\sin\omega x]$型方程的特解

步骤: ① 求$y''+py'+qy=0$的特征根;
② 与$\lambda+\omega i$比较后设出y^*;
③ 代入原方程后化简

例 1. 求$y''+y=x\cos 2x$的一特解.

解　$y''+y=0$　$r^2+1=0$　$\Rightarrow$　$r=\pm i$;

$\because\lambda+\omega i=2i$不是特征方程的根

$\therefore y^*=(ax+b)\cos 2x+(cx+d)\sin 2x$;

代入原方程 $(-3ax-3b+4c)\cos 2x-(3cx+3d+4a)\sin 2x=x\cos 2x$;

$$\therefore\begin{cases}-3a=1\\-3b+4c=0\\-3c=0\\-3d-4a=0\end{cases}\Rightarrow a=-\frac{1}{3},b=0,c=0,d=\frac{4}{9};$$

$\therefore y^*=-\frac{1}{3}x\cos 2x+\frac{4}{9}\sin 2x.$