

# 第一章 极限与连续

极限存在准则 { 单调有界必有极限  
夹逼定理

两类重要极限 {  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$   
 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$

无穷小与无穷大 { 性质 { 有限个无穷小的和,积仍是无穷小  
无穷小与有界量的积仍是无穷小  
比较 (高阶,低阶,同阶,等价, $k$ 阶)

## 常用等价无穷小

当  $x \rightarrow 0$ ,

$$e^x - 1 \sim x$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a$$

$$\sin x \sim x$$

$$\arcsin x \sim x$$

$$\tan x \sim x$$

$$\arctan x \sim x$$

$$\ln(1+x) \sim x$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$$

$$\tan x - \sin x \sim \frac{x^3}{2}$$

- (1) 消去零因子法; (2) 同除最高次幂; (3) 通分;
- (4) 同乘共轭因式; (5) 利用无穷小运算性质
- (6) 复合函数求极限法则
- (7) 利用左、右极限求分段函数极限;
- (8) 利用夹逼定理;
- (9) 利用两类重要极限;
- (10) 利用等价无穷小代换;
- (11) 利用连续函数的性质(代入法);
- (12) 利用洛必达法则.

洛必达法则+等价无穷小代换

洛必达法则+变上限积分求导

例

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{e^{\tan x} - e^{\sin x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{(\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x})(e^{\tan x} - e^{\sin x})}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{e^{\tan x} - e^{\sin x}} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{e^{\sin x} (e^{\tan x - \sin x} - 1)}$$

当  $x \rightarrow 0$ ,  $e^{\tan x - \sin x} - 1 \sim \tan x - \sin x$ ,

$$\text{故原式} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{e^{\sin x} (e^{\tan x - \sin x} - 1)}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{e^{\sin x} (\tan x - \sin x)} = \frac{1}{2}$$

## 两对重要的单侧极限

$$(a > 1) \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} a^{\frac{1}{x}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} a^{\frac{1}{x}} = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

## 一类需要注意的极限

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = 1.$$

连续的定义	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ 左连续、右连续
<u>间断点的分类</u>	第一类间断 (可去型, 跳跃型) 第二类间断 (无穷型, 振荡型)
闭区间连续函数的性质	最大, 最小值定理 有界性 介值定理, <u>零点定理</u>

例 求  $f(x) = \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}}$  的间断点, 并指出其类型.

解 当  $x = 0, x = 1$  时, 函数无定义, 是函数的间断点.

$x = 0$ , 由于  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}} = \infty$ ,

所以  $x = 0$  是函数的第二类间断点, 且是无穷型.

$x = 1$ , 由于  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}} = 1$$

所以  $x = 1$  是函数的第一类间断点, 且是跳跃型.

例求  $f(x) = \frac{(1+x)\sin x}{|x|(x+1)(x-1)}$  的间断点,并判别其类型.

解  $x = -1, x = 1, x = 0$  是间断点,

$$x = -1, \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(1+x)\sin x}{|x|(x+1)(x-1)} = \frac{1}{2} \sin 1,$$

$x = -1$  为第一类可去间断点

$$x = 1, \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty,$$

$x = 1$  为第二类无穷间断点

$$x = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1.$$

$x = 0$  为第一类跳跃间断点



例 求  $y = \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1} + \sin(x-1)\sin\frac{1}{x-1}$  的间断点,  
并判断其类型.

解: 可知  $x = 0$ ,  $x = 1$  是可能的间断点.

(1) 在  $x = 0$  处,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} y = -1 + \sin^2(-1), \lim_{x \rightarrow 0^+} y = 1 + \sin^2(-1)$$

因在  $x = 0$  处的左右极限都存在, 但不相等,

所以  $x = 0$  为函数的第一类间断点, 且是跳跃间断点.

(2) 在 $x = 1$ 处,

$$\lim_{x \rightarrow 1} y = \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^x + 1} + \sin(x - 1) \sin \frac{1}{x - 1} \right] = \frac{1}{3}$$

即在 $x = 1$ 处函数的左右极限都存在且相等,  
所以 $x = 1$ 是函数的第一类间断点,且是可去间断点.

例 设函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{a(1 - \cos x)}{x^2} & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ \ln(b + x^2), & x > 0 \end{cases}$

在  $x = 0$  连续, 则  $a = \underline{2}$ ,  $b = \underline{e}$ .

提示:  $f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a(1 - \cos x)}{x^2} = \frac{a}{2}$

$$f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(b + x^2) = \ln b$$

$$\frac{a}{2} = 1 = \ln b$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2$$

例 讨论  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

在  $x = 0$  处的连续性与可导性 .

例 如果  $f(x) = \begin{cases} e^{ax}, & x \leq 0 \\ b(1 - x^2), & x > 0 \end{cases}$  处处可导, 那么  
( )

- (A)  $a = b = 1$ ;      (B)  $a = -2, b = -1$ ;  
(C)  $a = 1, b = 0$ ;      (D)  $a = 0, b = 1$ .

## 第二章 导数与微分

导数	<u>定义</u>	$\left\{ \begin{array}{l} \text{左导数 } f'_-(x_0), \text{ 右导数 } f'_+(x_0) \\ \text{导数存在的充要条件} \end{array} \right.$
	<u>几何意义</u>	切线斜率 $k = f'(x_0)$
	<u>可导性与连续性的关系</u>	可导 $\Rightarrow$ 连续
微分	求微分	$dy = f'(x_0)dx$
	可导与微分的关系	可导 $\Leftrightarrow$ 可微

## 求导数方法

按定义求导

复合函数求导

隐函数, 参数方程求导

对数法求导

分段函数在分段点求导

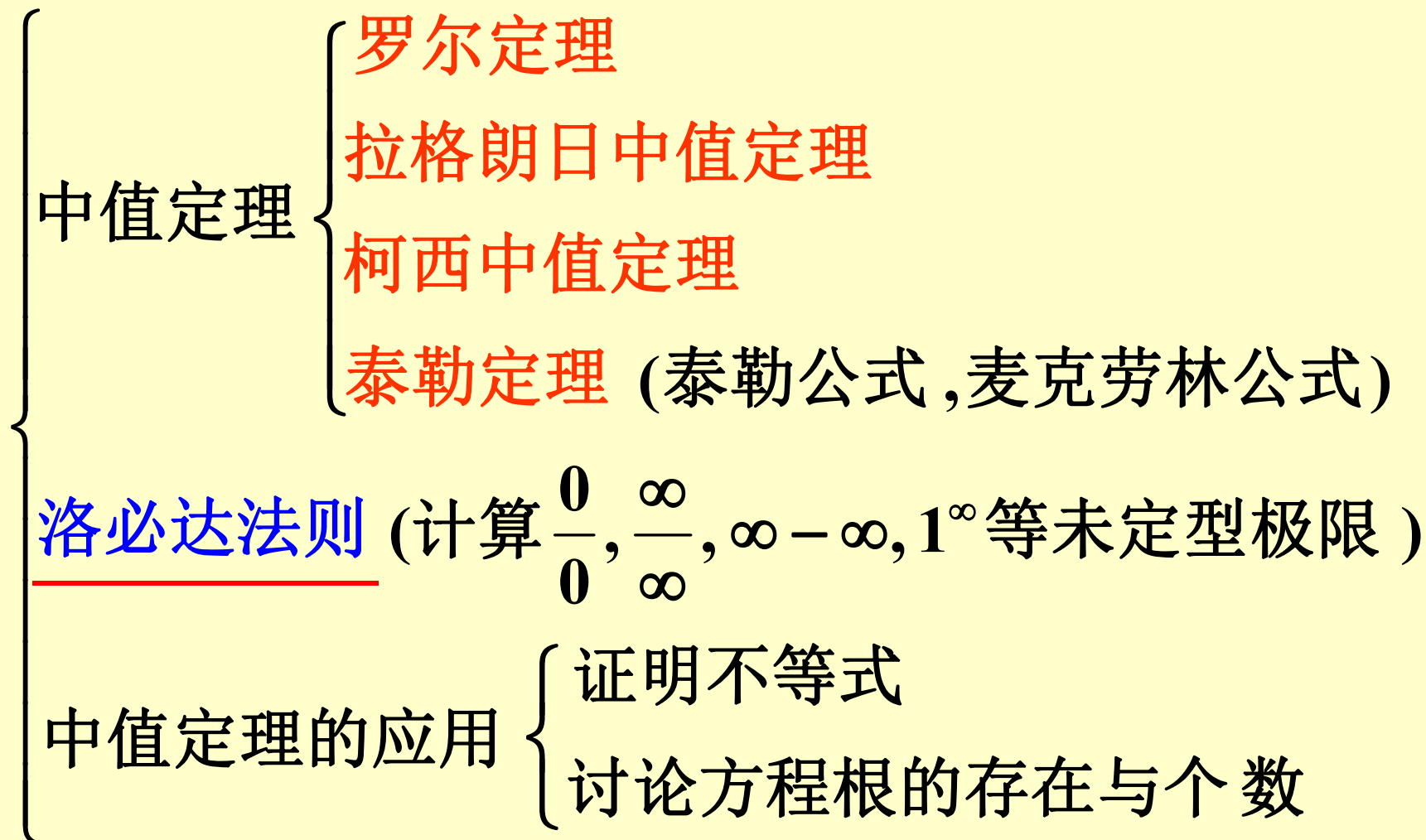
高阶导数( $\sin x, \cos x, e^x, \frac{1}{1-x} \dots$ )

参数方程  $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$  求导数:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx} = \frac{\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{d(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)})}{\frac{dx}{dt}}$$

# 第三章 微分中值定理及其应用





函数性态

函数的单调性 (利用导数判断)

函数的极值

驻点

极值存在的必要条件

极值存在的充分条件

函数的凹凸性 (拐点,凹凸性和判别法)

函数的最大最小值

函数的渐近线 (水平,垂直, 斜)

## 带Peano型余项的泰勒公式

设  $f(x)$  在含  $x_0$  的区间  $(a, b)$  内有  $n$  阶连续导数, 则对于  $x \in (a, b)$ , 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 \\ + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o[(x - x_0)^n].$$

# 常用函数的麦克劳林公式

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$\begin{aligned} (1+x)^m &= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \end{aligned}$$

# 洛必达法则

基本类型:  $\frac{0}{0}$  型,  $\frac{\infty}{\infty}$  型

变型:  $0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$  型

法则: 
$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

- 注 (1) 当上式右端极限存在时, 才能用此法则,
- (2) 在求极限过程中, 可能要多次使用此法则,
- (3) 在使用中, 要进行适当的化简,
- (4) 在使用中, 注意和其它求极限方法相结合.

**定理(第一充分条件)** 设  $f(x)$  在邻域  $U(x_0)$  内,

(a) 当  $x < x_0$ , 有  $f'(x) > 0$ ; 而当  $x > x_0$ , 有  $f'(x) < 0$ , 则  $f(x)$  在  $x_0$  处取极大值.

(b) 当  $x < x_0$ , 有  $f'(x) < 0$ ; 而当  $x > x_0$ , 有  $f'(x) > 0$ , 则  $f(x)$  在  $x_0$  处取极小值.

(c) 若  $f(x)$  在邻域  $U(x_0)$  内符号相同, 则  $f(x)$  在  $x_0$  处无极值.

## 定理(第二充分条件)

设  $f(x)$  在  $x_0$  处具有二阶导数, 且  $f'(x_0) = 0$ ,  
 $f''(x_0) \neq 0$ , 则

(a) 当  $f''(x_0) < 0$ ,  $f(x)$  在  $x_0$  处取得极大值,

(b) 当  $f''(x_0) > 0$ ,  $f(x)$  在  $x_0$  处取得极小值.

## 求极值的步骤:

*a.* 求导数  $f'(x)$ ;

*b.* 求驻点(方程  $f'(x) = 0$  的根) 及  $f'(x)$  不存在的点.

*c.* 检查  $f'(x)$  在 *b* 中所有点左右的正负号, 或  $f''(x)$  在该点的符号, 判断极值点.

*d.* 求极值.



# 渐近线的求法

(a) 水平渐近线 若函数  $f(x)$  满足

$$\lim_{x \rightarrow \infty (-\infty, +\infty)} f(x) = a,$$

则函数  $f(x)$  的曲线有水平渐近线  $y = a$ .

(b) 垂直渐近线 若函数  $f(x)$  满足

$$\lim_{x \rightarrow x_0 (x_0^-, x_0^+)} f(x) = \infty,$$

则函数  $f(x)$  的曲线有垂直渐近线  $x = x_0$ .

(c) 斜渐近线

若函数  $f(x)$  满足

$$\lim_{x \rightarrow \infty (-\infty, +\infty)} \frac{f(x)}{x} = a,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty (-\infty, +\infty)} [f(x) - ax] = b,$$

则函数  $f(x)$  的曲线有斜渐近线  $y = ax + b$ .

# 计算题

1. 设  $y = f(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2} & x \leq 1 \\ ax+b & x > 1 \end{cases}$ , 已知函数在

$x=1$ 处可导, 确定  $a, b$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right]$

3. 求极限

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$       (2)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1 - x)^{\frac{1}{\ln x}}$

# 计算题解答

1. 由连续性, 有  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$

$$\therefore a + b = 1 \quad (1)$$

由可导性, 有  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax + b - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{2}{1 + x^2} - 1}{x - 1}$$

$$\therefore a = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{2}{1 + x^2} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-4x}{(1 + x^2)^2} = -1$$

$a = -1$  由 (1)  $\Rightarrow b = 2$ .

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$\begin{aligned} \text{令 } t = \frac{1}{x}, \text{ 则原式} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{t} \ln(1+t)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+t}}{2t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1+t-1}{2t(1+t)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

### 3. 解(1):

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x + e^x \cos x - 1 - 2x}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x (\sin x + \cos x) + e^x (\cos x - \sin x) - 2}{6x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cos x - 1}{3x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x \sin x + e^x \cos x}{3} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

解法2:

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{e^x (\sin x - x)}{x^3} + \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} \\ &= -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1 - x)^{\frac{1}{\ln x}} \quad (0^0)$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(e^x - 1 - x)}{\ln x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{e^x - 1}{e^x - 1 - x}}{\frac{1}{x}}}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(e^x - 1)}{e^x - 1 - x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1 + xe^x}{e^x - 1}} = e^{1 + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{xe^x}{e^x - 1}}$$

$$\because x \rightarrow 0 \text{ 时, } e^x - 1 \sim x$$

$$\therefore \text{上式} = e^{1 + \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x} = e^2$$



## 第四章 不定积分

## 基本概念 (原函数,不定积分 $\int f(x)dx$ )

## 基本性质 (与求导, 微分运算间关系; 线性可加性)

积分法

- 换元积分法
  - 第一类换元 (凑微分法)
  - 第二类换元 (三角代换, 倒代换)
- 分部积分法
- 有理函数的积分
  - 四种基本形式的积分
  - 可化为有理函数的积分

**例**  $\int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$  分子分母同除以  $x^2$

**解** 原式  $= \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx = \int \frac{d(x - \frac{1}{x})}{(x - \frac{1}{x})^2 + 2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left( \frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{2}} \right) + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left( \frac{x^2 - 1}{\sqrt{2}x} \right) + C$$

例  $\int \frac{1}{x^4 + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(x^2 + 1) - (x^2 - 1)}{x^4 + 1} dx$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d(x - \frac{1}{x})}{(x - \frac{1}{x})^2 + 2} - \frac{1}{2} \int \frac{d(x + \frac{1}{x})}{(x + \frac{1}{x})^2 - 2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}}{x + \frac{1}{x} + \sqrt{2}} \right| + C$$

( $x \neq 0$ )

例 求  $\int \max\{1, |x|\} dx$ .

解 设  $f(x) = \max\{1, |x|\}$ , 则  $f(x) = \begin{cases} -x, & x < -1 \\ 1, & -1 \leq x \leq 1, \\ x, & x > 1 \end{cases}$

$\because f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续, 则必存在原函数  $F(x)$ ,

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + C_1, & x < -1 \\ x + C_2, & -1 \leq x \leq 1. \\ \frac{1}{2}x^2 + C_3, & x > 1 \end{cases}$$

又  $\because F(x)$  须处处连续, 有

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} (x + C_2) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(-\frac{1}{2}x^2 + C_1\right), \text{ 即 } -1 + C_2 = -\frac{1}{2} + C_1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{2}x^2 + C_3\right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + C_2), \text{ 即 } \frac{1}{2} + C_3 = 1 + C_2,$$

$$\text{联立并令 } C_1 = C, \text{ 可得 } C_2 = \frac{1}{2} + C, \quad C_3 = 1 + C.$$

$$\text{故 } \int \max\{1, |x|\} dx = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + C, & x < -1 \\ x + \frac{1}{2} + C, & -1 \leq x \leq 1. \\ \frac{1}{2}x^2 + 1 + C, & x > 1 \end{cases}$$

# 第五章 定积分

定积分的定义 几何意义

基本性质 (线性, 区间可加性, 比较性质)

基本公式 { 变上限函数及其导数 (和求极限结合)  
 $N-L$ 公式  $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$

定积分估值定理  $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{计算} \left\{ \begin{array}{l} \text{换元法 } \int_a^b f(x) dx \quad \underline{\underline{x = \varphi(t)}} \quad \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \\ \text{分部积分法 } \int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du \end{array} \right. \\ \text{广义积分} \left\{ \begin{array}{l} \text{基本概念} \left\{ \begin{array}{l} \text{无穷限的广义积分} \\ \text{无界函数的广义积分} \end{array} \right. \\ \text{计算} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

## 第六章 定积分的应用

几何应用 { 平面图形的面积 (直角, 参数, 极坐标)

几何应用 { 体积 { 旋转体体积

几何应用 { 体积 { 截面面积已知立体的体积

几何应用 { 平面曲线的弧长 (直角, 参数, 极坐标)