南京信息工程大学
Nanjing University of Information Science & Technology

高等数学（上）

数学与统计学院　公共数学教学部

高等数学教学团队

第二节 数列的极限

定积分的概念与性质

知识目标

理解： 数列极限的概念与几何意义

掌握： 数列极限的性质

意义

重难点

重点： 数列极限的概念，几何意义，数列极限的性质

难点： 数列极限的概念，几何意义

一、引 例

例1 一尺之锤，日取其半，万世不竭.(庄子 天下篇)

解 根据题意可得木棒的长度与经过天数的关系如下表：

天数	1	2	3	……	n	……
剩下木棒的长度	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	……	$\frac{1}{2^n}$	……

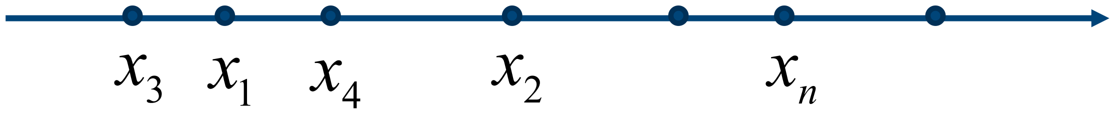
因此剩下木棒的长度构成了一个数列：$\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots \longrightarrow 0$

二、数列极限的定义

1、数列

按一定顺序排列起来的一列数 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ 称为**数列**，记为 $\{x_n\}$ 或 $x_n (n = 1, 2, \cdots)$，其中 n 表示数列的**项数**，第 n 项 x_n 称为数列的**通项**.

注：1) 数列的几何意义： 数列 $\{x_n\}$ 对应着数轴上的一个点列，



2) 数列与函数的关系： 数列$\{x_n\}$可以看作自变量为正整数 n 的函数 $x_n = f(n)$.

如 (1) $2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n+(-1)^n}{n}, \cdots\cdots$

(2) $1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n-1}, \cdots$

(3) $2, 4, 8, \cdots, 2^n, \cdots\cdots$

问题： 当 n 越来越大时，x_n的变化趋势如何呢？

数列的极限

图1-1

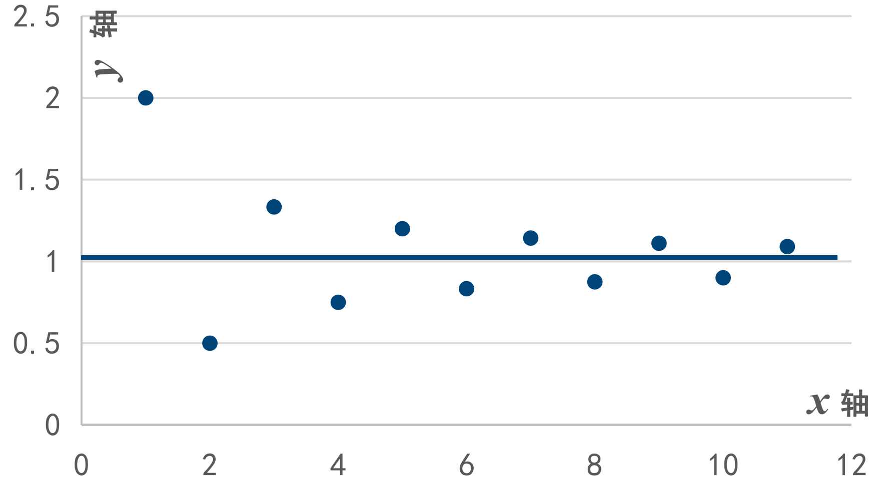


图1-1： 数列$\left\{\dfrac{n+(-1)^n}{n}\right\}$随着$n$越来越大，动点在$x=1$的附近跳跃变化，但与$x=1$的距离越来越小，即其值越来越靠近于1.

图1-2

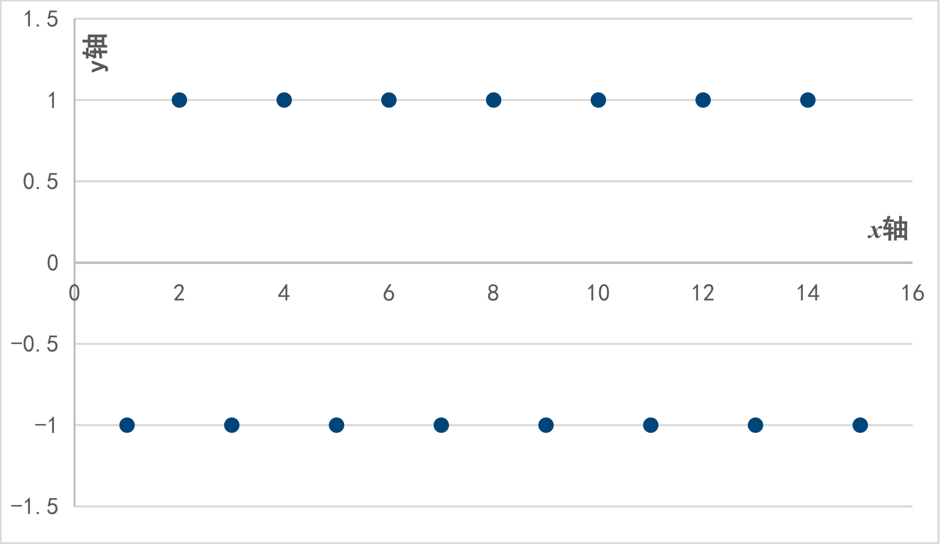


图1-2： 数列$\left\{(-1)^n\right\}$随着n越来越大，动点在 1 与 −1 之间交替变化，不与任何一个定常数靠近.

数列的极限

图1-3

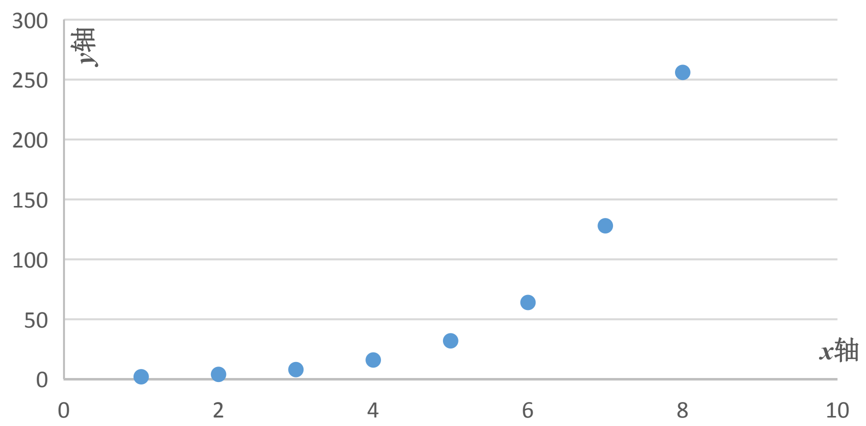


图1-3： 数列$\left\{2^n\right\}$随着n越来越大，动点的值不断地增大，即其值不与任何一个定常数靠近.

分析：观察数列$\left\{\frac{n+(-1)^n}{n}\right\}$的图像，可以发现：当$n$越来越大时，$x_n$越来越靠近于1，即当$n\to\infty$时，$x_n$与1的距离$|x_n-1|$越来越小，那么数学上如何刻画

"当$n\to\infty$时，距离$|x_n-1|$越来越小呢？"

若取 $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{100.1}$，即希望 $|x_n - 1| = \left|\dfrac{n+(-1)^n}{n} - 1\right| = \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{100.1}$，

则取 $N_1 = 100$，显然只要 $n > N_1$，即从第101项开始，均有

$$|x_n - 1| < \varepsilon_1$$

若取 $\varepsilon_2 = \dfrac{1}{1000.1}$，即希望 $|x_n - 1| = \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{1000.1}$，

则取 $N_2 = 1000$，显然只要 $n > N_2$，即从第1001项开始，均有

$$|x_n - 1| < \varepsilon_2$$

以此类推，只要选定一个正数ε，无论它多么的小，我们都能找到一个正整数N，使得当$n > N$时，都有

$$\left|x_n - 1\right| < \varepsilon$$

这里的数“1”就称为数列$\{x_n\}$的**极限**.

2、数列的极限

定义1 设$\{x_n\}$是一个数列，A是某个常数，如果对任意给定的正数ε(不论它多么的小)，总存在正整数N，使得当$n>N$时，不等式$|x_n - A| < \varepsilon$都成立，那么称常数A为数列$\{x_n\}$当$n\to\infty$时的**极限**，记作$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$或$x_n \to A(n\to\infty)$．此时也称数列$\{x_n\}$**收敛**到$A$，否则称数列$\{x_n\}$**发散**.

如 数列$\left\{\dfrac{n+(-1)^n}{n}\right\}$收敛到1. 数列$\{(-1)^n\}$与$\{2^n\}$均发散.

注：1) ε 的大小可任意给定，它刻画 x_n 与 A 的接近程度；

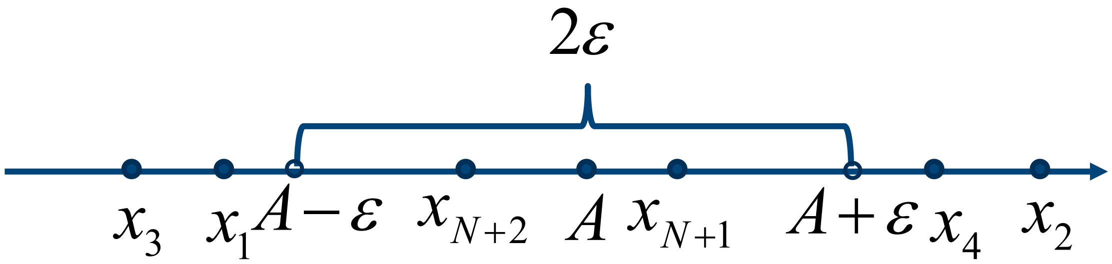
2) N 是由 ε 确定的，一般地，ε 越小，N 越大.

3) N 如何确定？

一般地，N 由不等式 $|x_n - A| < \varepsilon$ 解得，通常满足不等式的正整数 N 有很多个，只需选其中之一，故 N 不唯一.

$\varepsilon - N$ 语言：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \Leftrightarrow$ 对任意 $\varepsilon > 0$，$\exists N > 0$ 且 $N \in N^+$，使得当 $n > N$ 时，均有 $|x_n - A| < \varepsilon$.

几何意义：当 $n > N$ 时，所有的点 x_n 都落在了 $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ 内，只有有限个(至多只有N个)点落在其外.



例2 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^n}{n}=1$.

解 对 $\forall\varepsilon>0$，因为 $\left|\dfrac{n+(-1)^n}{n}-1\right|=\dfrac{1}{n}$，

要使 $\left|\dfrac{n+(-1)^n}{n}-1\right|<\varepsilon$，只要 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，即 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$ 成立.

因此取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，有 $\left|\dfrac{n+(-1)^n}{n}-1\right|<\varepsilon$.

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^n}{n}=1.$

例3 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{3n+1}=\dfrac{2}{3}$.

证明： $\forall\varepsilon>0$, 考察 $\left|\dfrac{2n-1}{3n+1}-\dfrac{2}{3}\right|=\dfrac{5}{3(3n+1)}<\boxed{\dfrac{5}{9n}<\varepsilon,}$（充分条件）

要使 $\left|\dfrac{2n-1}{3n+1}-\dfrac{2}{3}\right|<\varepsilon$, 只要 $\dfrac{5}{9n}<\varepsilon$, 即只要 $\boxed{n>\dfrac{5}{9\varepsilon}}$ 成立.（正整数？）

因此取 $\boxed{N=\left[\dfrac{5}{9\varepsilon}\right]}$ 则当 $n>N$ 时，有 $\left|\dfrac{2n-1}{3n+1}-\dfrac{2}{3}\right|<\varepsilon$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n+1}=\frac{2}{3}.$$

例4 证明 $\lim_{n\to\infty} q^n = 0\ (|q|<1)$.

解 当$q=0$ 时，显然 $\lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$.

当$0<|q|<1$时，对$\forall\varepsilon>0$（设 $\varepsilon<1$），

要使$|x_n-0|=|q^n|=|q|^n<\varepsilon$， 只要$n\ln|q|<\ln\varepsilon$， 即$n>\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$.

$\boxed{取\ N=\left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]}$， 则当 $n>N$ 时，有$|q^n-0|<\varepsilon$.

$\therefore\ \lim_{n\to\infty} q^n = 0.$

例5 证明 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1.$

(1) 当 $a=1$时，显然 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

(2) 当 $a>1$ 时，令 $\sqrt[n]{a}-1=h$, 则 $h>0$.

且 $a=(1+h)^n>1+nh$, 所以 $h<\dfrac{a-1}{n}$.

对 $\forall\varepsilon>0$ ，要使 $\left|\sqrt[n]{a}-1\right|<\varepsilon$，只要 $h<\dfrac{a-1}{n}<\varepsilon$，即$n>\dfrac{a-1}{\varepsilon}$.

因此取 $\boxed{N=\left[\dfrac{a-1}{\varepsilon}\right]}$, 则当 $n>N$ 时，有 $\left|\sqrt[n]{a}-1\right|<\varepsilon$. $\therefore \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1.$

数列的极限

注： 题中a的取值可推广至$a>0$.对$0<a<1$的证明需要用到1.5节中极限的运算法则. 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{1/a}}=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1/a}}=1.$

小结： 几个常用的数列极限:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\,(a>0)$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}q^n=0\,(|q|<1)$$

三、数列极限的性质

定理1 (唯一性) 如果数列$\{x_n\}$收敛，那么它的极限是唯一的.

证(反证法) 假设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = B$ 且 $A \neq B$.

不妨设 $A < B$，取 $\varepsilon = \dfrac{B-A}{2}$.

由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ 知：$\exists N_1 > 0$，使得当 $n > N_1$ 时，有

$$|x_n - A| < \frac{B-A}{2}，即 \boxed{x_n < \frac{A+B}{2}}.$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = B$ 知：$\exists N_2 > 0$，使得当 $n > N_2$ 时，有

$$\left|x_n - B\right| < \frac{B-A}{2}, \text{ 即 } \boxed{x_n > \frac{A+B}{2}}.$$

取 $\boxed{N = \max\{N_1, N_2\}}$，则当 $n > N$ 时上述两个不等式都成立，矛盾.

所以数列 $\{x_n\}$ 的极限是唯一的.

定理2 (有界性) 如果数列$\{x_n\}$收敛，那么$\{x_n\}$是有界的.

证 因为数列$\{x_n\}$收敛，设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$．取$\varepsilon = 1$.

则$\exists N > 0$，使得当$n > N$时，有$|x_n - A| < 1$．

于是当$n > N$时，有$|x_n| = |x_n - A + A| \le |x_n - A| + |A| < 1 + |A|$

取$\boxed{M = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_N|, 1 + |A|\}}$,

那么数列$\{x_n\}$中的一切x_n都满足不等式$|x_n| \le M$. 即$\{x_n\}$有界.

注：数列有界是数列收敛的必要条件，有界数列不一定收敛.

如数列$\left\{(-1)^n\right\}$有界但该数列不收敛.

推论1：无界数列必定发散.

定理3 (保号性) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，且 $A>0$ 或($A<0$)，则存在正整数 N，当 $n>N$ 时，都有 $x_n>0$ 或($x_n<0$).

证 以 $A>0$ 为例. 取 $\varepsilon = A/2$，则 $\exists N>0$，使得当 $n>N$ 时，有 $|x_n - A| < A/2$. 从而 $x_n > A - A/2 = A/2 > 0$.

推论2： 如果数列 $\{x_n\}$ 从某项起有 $x_n \ge 0$（或 $x_n \le 0$）且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，则 $A \ge 0$（或 $A \le 0$）.

四、数列的子列

定义2 将数列$\{x_n\}$在保持原有顺序情况下，任取其中无穷多项构成的新数列称为$\{x_n\}$的**子数列**，简称**子列**.

如数列$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$中依次取出$x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}, \cdots$，记为$\left\{x_{n_k}\right\}$.

注：在子数列$\{x_{n_k}\}$中，一般项x_{n_k}是第k项，而x_{n_k}是在原数列$\left\{x_n\right\}$的第n_k项，显然$n_k \geq k$.

关于数列极限与其子列的极限有如下结论：

结论1： 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A，则 该数列的任何子列也收敛，且收敛于 A.

结论2： 若数列 $\{x_n\}$ 的某子列发散，或存在 $\{x_n\}$ 的某两个子列收敛但极限不相等，则数列 $\{x_n\}$ 发散.

如 数列 $\{a_n=(-1)^n\}$，显然 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1}=-1$.

注： 一个发散的数列也可能有收敛的子数列.

一般地，仅有$\{x_n\}$的某两子列收敛且极限相等，不能判断数列$\{x_n\}$收敛，但若这两子列为$\{x_{2n}\}$和$\{x_{2n+1}\}$，则有以下结论：

结论3： $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = A \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$

五、内容小结

- **数列极限：** 极限思想, 精确定义, 几何意义；
- **收敛数列的性质：** 有界性、唯一性、保号性.
- **数列极限与其子极限：** 有关结论.

思考题：

1、证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |A|$，反之不然.

【提示：利用极限定义. 如 $\{(-1)^n\}$ 】

2、求证：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0$ 【提示：利用极限定义】

南京信息工程大学
Nanjing University of Information Science & Technology

数学是无穷的科学。

——赫尔曼外尔