南京信息工程大学　试卷 1

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 排列 $2,4,6,\cdots,2n,1,3,5,\cdots,2n-1$ 的逆序数为 $\underline{\dfrac{n(n+1)}{2}}$.

2. 设 $f(x)=x^2-5x+3, \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$，则 $f(\boldsymbol{A})=\underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$.

3. 若 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & x \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}=0$，则 $x=$ ____5____.

4. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都为 3 阶方阵，$|\boldsymbol{A}|=-1,|\boldsymbol{B}|=2$，则 $|2\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}|=$ ____一4____.

5. 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$，则 $|\boldsymbol{B}|=$ ____2____.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵，下列命题正确的是(　D　)

(A) 若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$；　(B) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$；

(C) 若 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，$k\in\boldsymbol{N}$，则 $\boldsymbol{A}^k\neq\boldsymbol{O}$；　(D) 若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0, \boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

2. 若 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=6$，则行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 2a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 2a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 2a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ 的值为(　B　)

(A) 12；　(B) -12；　(C) 18；　(D) 0.

3. 下列矩阵中必是对称矩阵的是(　C　)

(A) $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$；　(B) $\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$；　(C) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$；　(D) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{BA}^{\mathrm{T}}$.

4. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的可逆矩阵 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}=$(　D　)

(A) $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$；　(B) $\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})$；　(C) $-\frac{1}{2}(2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$；　(D) $-\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})$.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵，$|\boldsymbol{A}|=-2$，则 $\left|\left(\frac{1}{12}\boldsymbol{A}\right)^{-1}+(3\boldsymbol{A})^{*}\right|=$ (　B　)

(A) -108；　(B) 108；　(C) -54；　(D) 54.

三、计算题（每小题 6 分，共 18 分）

1. 求行列式 $D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&1&3&4\\3&1&6&10\\4&1&10&20\end{vmatrix}$.

解：原式 $D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&0&2&3\\2&0&5&9\\3&0&9&19\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2&3\\2&5&9\\3&9&19\end{vmatrix}$

$$=-\begin{vmatrix}1&2&3\\0&1&3\\0&3&10\end{vmatrix}=-1$$

2. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&2&0&0\\0&0&0&2\\0&0&5&1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^2,|\boldsymbol{A}^5|$.

解：设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$，　$\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}0&2\\5&1\end{pmatrix}$.

则 $\boldsymbol{A}_1^2=\begin{pmatrix}5&4\\4&5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_2^2=\begin{pmatrix}10&2\\5&11\end{pmatrix}$.

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^2&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_2^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&4&0&0\\4&5&0&0\\0&0&10&2\\0&0&5&11\end{pmatrix}.$$

$$\left|\boldsymbol{A}^5\right| = \left|\boldsymbol{A}\right|^5 = \left(\left|\boldsymbol{A}_1\right|\left|\boldsymbol{A}_2\right|\right)^5 = -30^5.$$

3．设 $\boldsymbol{\alpha} = \left(1,2,3,4\right)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta} = \left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 及 $\boldsymbol{B}^n$．

解： $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = \left(1,2,3,4\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \\ 1/4 \end{pmatrix} = 4$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \\ 1/4 \end{pmatrix}\left(1,2,3,4\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}^n = \left(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\right)\left(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\right)\cdots\left(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\right) = \boldsymbol{\beta}\left(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\right)\cdots\left(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\right)\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$$

$$= \left(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\right)^{n-1}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = 4^{n-1}\boldsymbol{B}$$

四、(本题满分 10 分) 已知矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{X} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{E}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$．

解：由 $\boldsymbol{X} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{E}$，得

$\left(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{X} = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^2$，即 $\left(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{X} = \left(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}\right)\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}\right)$

又 $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$，$\left|\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}\right| = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$，

因此 $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}$ 可逆，

故 $$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&2&-1\\0&1&5\end{pmatrix}$$

五、(本题满分 10 分) 计算行列式$D=\begin{vmatrix}1&2&8&4\\1&-1&-1&1\\1&3&27&9\\x&x^2&x^4&x^3\end{vmatrix}$

解：$$D=\begin{vmatrix}1&2&8&4\\1&-1&-1&1\\1&3&27&9\\x&x^2&x^4&x^3\end{vmatrix}\overset{c_3\leftrightarrow c_4}{=}-\begin{vmatrix}1&2&4&8\\1&-1&1&-1\\1&3&9&27\\x&x^2&x^3&x^4\end{vmatrix}\overset{\text{转置}}{=}-\begin{vmatrix}1&1&1&x\\2&-1&3&x^2\\4&1&9&x^3\\8&-1&27&x^4\end{vmatrix}$$

$$=-x\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&-1&3&x\\4&1&9&x^2\\8&-1&27&x^3\end{vmatrix}$$

$$=-x(-1-2)(3-2)(x-2)(3+1)(x+1)(x-3)$$

$$=12x(x-2)(x+1)(x-3)$$

六、(本题满分 10 分) 设$D=\begin{vmatrix}2&1&1&7\\1&1&1&1\\-1&2&3&5\\7&9&-1&4\end{vmatrix}$，求(1)$\sum_{k=1}^{4}A_{4k}$；(2) $\sum_{k=1}^{4}M_{k2}$.

解：(1) $$\sum_{k=1}^{4}A_{4k}=\begin{vmatrix}2&1&1&7\\1&1&1&1\\-1&2&3&5\\1&1&1&1\end{vmatrix}=0$$

(2) $$\sum_{k=1}^{4}M_{k2}=-A_{12}+A_{22}-A_{32}+A_{42}=\begin{vmatrix}2&-1&1&7\\1&1&1&1\\-1&-1&3&5\\7&1&-1&4\end{vmatrix}=-48.$$

七、**(本题满分 10 分)** 计算行列式$D=\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 2+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & n+a_n \end{vmatrix}$

解：$D=\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 2+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & n+a_n \end{vmatrix} \overset{\substack{r_i-r_1 \\ (i=1,\cdots n)}}{=} \begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$

$$\underset{k=2,\cdots,n}{\overset{r_1-\frac{1}{k}a_k r_k}{=}} \begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{a_k}{k} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = n!\left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}\right)$$

八、**(本题满分 12 分)** (1) 设非齐次线性方程组为$\begin{cases} x_1+3x_2=0 \\ 2x_1+ax_2=1 \end{cases}$，问 a 为何值时，线性方程组有唯一，并求解.

(2) 设齐次线性方程组为$\begin{cases} x_1+x_2+3x_3=0 \\ 2x_1+x_2+ax_3=0 \\ 3x_1+2x_2+4x_3=0 \end{cases}$，问 a 为何值时，方程组有非零解.

解：(1)当$D=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & a \end{vmatrix}=a-6\neq 0$，即 $a\neq 6$ 时，方程组有唯一解，

且 $x_1=\dfrac{1}{a-6}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & a \end{vmatrix}=\dfrac{-3}{a-6}$， $x_2=\dfrac{1}{a-6}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=\dfrac{1}{a-6}$

(2) 设方程组为$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & a \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & a-3 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & a-3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=a-1$,

当 $D=a-1=0$，即 $a=1$ 时，齐次方程组有非零解.

.