全国大学生数学竞赛第十四届

高等数学竞赛培训

南京信息工程大学
公共数学教学部

模拟练习测试

1、计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(n^3-n^2+\dfrac{n}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-\sqrt{1+n^6}\right]$.

$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，化函数极限

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(n^3-n^2+\dfrac{n}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-\sqrt{1+n^6}\right]=\dfrac{1}{6}$.

练习：计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1!+2!+\cdots n!}{n!}$.

$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1!+2!+\cdots n!}{n!}=1 .$$

夹逼准则

2、设 $a_1=3$，，$a_n=2a_{n-1}^2-1,(n\geq 2)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{2^n a_1 a_2\cdots a_{n-1}}$． 找递推关系

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{(2^n a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1)^2}=2,\ \text{则}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2^n a_1 a_2\cdots a_{n-1}}=\sqrt{2}\,.$$

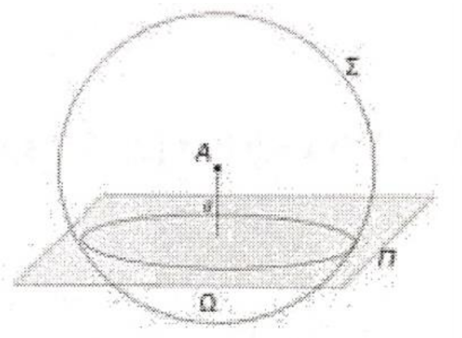
3、设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=2t+t^2 \\ y=\psi(t) \end{cases}$ $(t>-1)$ 所确定，且 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$，其中 $\psi(t)$ 具有二阶导数，曲线 $y=\psi(t)$ 与 $y=\int_1^{t^2}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u+\dfrac{3}{2\mathrm{e}}$ 在 $t=1$ 处相切，求函数 $\psi(t)$.

于是，$\psi(t)=t^3+\dfrac{1}{2\mathrm{e}}t^2+\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}-3\right)t+2(t>-1)$.

4、求立体$\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|2x+2y-z\le 4,(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2\le 4\right\}$的体积.

转化为特殊位置的体积计算

$$V=\pi\int_{-2}^{1}y^2\mathrm{d}x=\pi\int_{-2}^{1}\left(4-x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\left(4x-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{-3}^{1}=9\pi\,.$$



$\ln\frac{x+y}{x}$

5、计算 $\iint_D \frac{(x+y)\ln\left(\boxed{1+\frac{y}{x}}\right)}{\sqrt{1-x-y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中区域 D 由直线 $x+y=1$ 与两坐标轴所围成三角形区域.

重积分的换元法

$\frac{16}{15}$.

练习：设 $f(t)$ 为连续函数，求证 $\iint\limits_D f(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\mathrm{A}}^{\mathrm{A}} f(t)(\mathrm{A}-|t|)\mathrm{d}t$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle||x|\le\frac{\mathrm{A}}{2},|y|\le\frac{\mathrm{A}}{2}\right\}$，A 为正常数.

6、设当 $x>-1$ 时，可微函数 $f(x)$ 满足条件 $f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=0$，且 $f(0)=1$，试证：当 $x\geq 0$ 时，有 $\mathrm{e}^{-x}\leq f(x)\leq 1$ 成立.

分析： 这是一个积分微分方程，可以通过两边求导变成一个微分方程，然后求解。

$$\boxed{f'(x)=\frac{C\mathrm{e}^{-x}}{1+x}.}$$

7、设函数 $\varphi(x)$ 具有连续的导数，在围绕原点的任意光滑的简单闭曲线 C 上，曲线积分 $\oint_C \frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$ 的值为常数.

(1) 设 L 为正向闭曲线 $(x-2)^2+y^2=1$, 证明 $\oint_L \frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=0$; (2) 求函数 $\varphi(x)$；

(3) 设 C 是围绕原点的光滑简单正向闭曲线，求 $\oint_C \frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$.

8、设 $u_n \neq 0\ (n=1,2,\cdots)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{u_n}=1$，求证：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$ 条件收敛.

分析： 先要判断不是绝对收敛的，再判断是收敛的。另一方面，由已知条件可以看出需要对所判断的级数进行变形.

9、计算 $\int_{e^{-2n\pi}}^{1}\left|\left[\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right]'\right|\mathrm{d}x$

10、设 P 为 $S:x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的动点，若 S 在点 P 处的切平面总与 xOy 平面垂直.

(1) 求点 P 的轨迹 C 的方程；

(2) 说明 C 是平面封闭曲线，并求该 C 在此平面上所围成的区域的面积.

11、在椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$上求一切平面，使得它在坐标轴的正半轴截取相等的线段.

【分析】只需按题设要求一步一步去做即可，关键是建立完切平面方程后，应注意到切点满足椭球面方程，最好把切平面方程化简成平面的截距式方程.

12、设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上二阶可导，且有 $f(1)=0$， $|f''(x)|\le M(0\le x\le 2)$，

试证明： $\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right|\le \dfrac{M}{3}$.

泰勒展开函数f（x）

谢谢观看！