专题 5　多元函数积分学（三重积分）

第一部分　内容概要

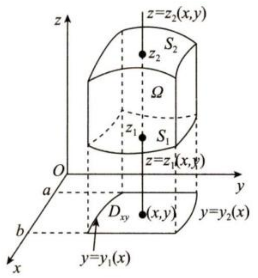
1、定义

$$\text{和式极限}\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta v_k$$

2、计算方法

2.1 利用直角坐标系计算

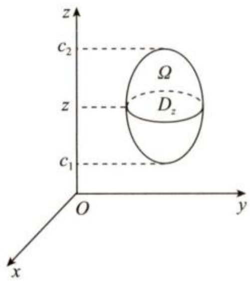
（1）投影法



$$\Omega:\begin{cases}(x,y)\in D\\ z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\end{cases},$$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\iint\limits_{D}dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz=\cdots$$

（2）截面法



$$\Omega:\begin{cases}(x,y)\in D_z\\ c\le z\le d\end{cases}$$

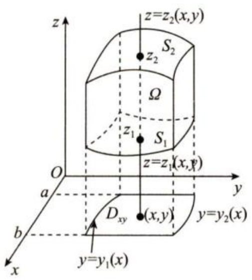
$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\int_c^d dz\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)dxdy=\cdots$$

适用于：

①被积函数为 z 的一元函数或常数，

②截面 D_z 的面积容易求出，即截面 D_z 为圆、椭圆、长方形、三角形等.

（3）三次积分法

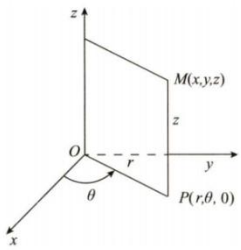


$$\Omega:\begin{cases}a\le x\le b\\ y_1(x)\le y\le y_2(x)\\ z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\end{cases}$$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

2.2 利用柱面坐标系计算

直角坐标与柱面坐标的关系：$\begin{cases}x=\rho\cos\theta, & 0\le\rho<+\infty\\ y=\rho\sin\theta, & 0\le\theta\le 2\pi\\ z=z, & -\infty<z<+\infty\end{cases}$，

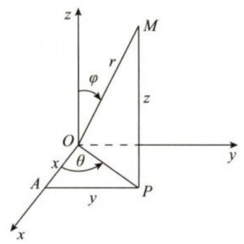


体积元素 $dv=\rho d\rho d\theta dz$，

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\iiint\limits_{\Omega} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\rho d\rho d\theta dz$$

2.3 利用球面坐标系计算

直角坐标与球面坐标的关系：$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, & 0 \le r < +\infty \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, & 0 \le \varphi \le \pi \\ z = r\cos\varphi, & 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$，



体积元素 $r^2\sin\varphi drd\theta d\varphi$，

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iiint_{\Omega} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$

3、对称性

3.1 对称性

设函数 $f(x,y,z)$ 在空间有界区域 Ω 上连续，且 Ω 关于坐标平面 $z=0$ 对称.

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \begin{cases} 0, & 若 f(x,y,-z) = -f(x,y,z), (x,y,z) \in \Omega \\ 2\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)dv, & 若 f(x,y,-z) = f(x,y,z), (x,y,z) \in \Omega \end{cases}$$

其中 Ω_1 是 Ω 的上半部分，即 $\Omega_1 = \{(x,y,z) \in \Omega \mid z \ge 0\}$.

同理可得，Ω 关于坐标平面 $x=0$（或 $y=0$）对称时的情形

3.2 轮换对称性

若 $x \leftrightarrow y$，空间区域 Ω 的边界曲面的方程不变，则称区域 Ω 关于 x,y 具有轮换对称性.

此时，则有

（1）$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iiint_{\Omega} f(y,x,z)dv$；（2）$\iiint_{\Omega} f(x)dv = \iiint_{\Omega} f(y)dv \ne \iiint_{\Omega} f(z)dv$.

若 $x \to y \to z \to x$，区域 Ω 的边界曲面的方程不变，则称 Ω 关于 x,y,z 具有轮换对称性.

此时，则有

（1）$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iiint_{\Omega} f(y,z,x)dv = \iiint_{\Omega} f(z,x,y)dv$；

（2）$\iiint_{\Omega} f(x)dv = \iiint_{\Omega} f(y)dv = \iiint_{\Omega} f(z)dv = \frac{1}{3}\iiint_{\Omega} [f(x)+f(y)+f(z)]dv$.

5、几何应用

（1）立体体积

求空间立体 Ω 的体积 $V = \iiint_{\Omega} dv$.

（2）形心坐标

$$\bar{x} = \frac{\iiint_{\Omega} xdv}{\iiint_{\Omega} dv}，\quad \bar{y} = \frac{\iiint_{\Omega} ydv}{\iiint_{\Omega} dv}，\quad \bar{z} = \frac{\iiint_{\Omega} zdv}{\iiint_{\Omega} dv}.$$

第二部分 典型例题

题型一、与三重积分有关的极限计算

【**例 1**】设函数 $f(u)$ 在点 $u=0$ 处可导，$f(0)=0$，区域 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le 2tz$． 求极限 $\lim\limits_{t\to 0+}\frac{1}{t^5}\iiint\limits_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2)dV$．

【答案】$\frac{32}{15}\pi f'(0)$．　【提示】球面坐标系、洛必达法则、导数定义，对比区域 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le t^2$. 常规积分次序 $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{2t\cos\varphi}f(r^2)r^2dr$ 行不通，考虑其他积分次序.

题型二、三重积分积分换序或积分换系

【**例 2**】将三次积分 $\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)dz$ 改为 y,z,x 的积分顺序.

【**答案**】$\int_0^1 dx\int_0^{x^2} dz\int_0^1 f(x,y,z)dy+\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x^2+1} dz\int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x,y,z)dy$

【提示】改变 y,z 的积分次序，x 不变，相当于二重积分的积分换序

题型三、三重积分计算

3.1 利用直角坐标系计算

【**例 2**】计算 $\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^y \frac{\sin z}{1-z}dz$．

【分析】因 $\int_0^y \frac{\sin z}{1-z}dz$ 积不出来，需要交换积分次序. 此时，可仿照二重积分的换序方式进行积分换序.　【答案】$\frac{1}{2}(1-\sin 1)$

3.2 利用直角坐标系的截面法计算

【例 3】（江苏 2006）曲线$\begin{cases} x^2 = 2z \\ y = 0 \end{cases}$绕 z 轴旋转一周生成的曲面与 $z=1$，$z=2$ 所围立体区域记为Ω. 求（1）$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz$；（2）$\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}dxdydz$.

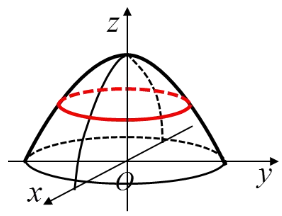
【分析】利用直角坐标系的“先二后一”与极坐标系，即柱面坐标系.

【答案】（1）$\dfrac{73}{6}\pi$；（2）$3\pi\ln\dfrac{4}{3}$

3.3 利用柱面坐标系计算

【例 4】计算 $I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 d\rho\int_0^{1-\rho^2}e^{-(1-z)^2}dz$.

【分析】所给三次积分不能直接计算，因此先还原再选择合适的方法计算. 考虑到积分区域为抛物面，且被积函数只与 z 有关，采用柱坐标且先二后一. 由题设知，积分区域为 $\Omega: 0\le z\le 1-(x^2+y^2), (x,y)\in D_{xy}$，其中 $D_{xy}: x^2+y^2\le 1$ 是Ω在 xOy 平面上的投影. 按先二后一法积分，积分区域为



$\Omega: 0\le z\le 1, (x,y)\in D_z$，其中 $D_z: x^2+y^2\le 1-z$，即按 ρ,θ,z 次序积分. 【答案】$\dfrac{\pi}{2}(1-\dfrac{1}{e})$

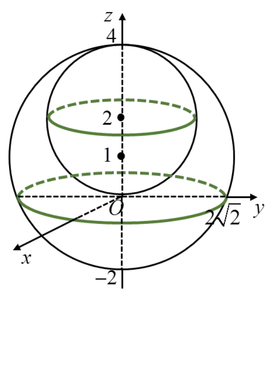
3.3 利用计算技巧计算三重积分

计算技巧：对称性、轮换对称性、几何意义、形心公式

【例 5】（2018 国预赛）计算三重积分$\iiint\limits_{V}(x^2+y^2)dv$，其中$V$ 是由$x^2+y^2+(z-2)^2\ge 4$，$x^2+y^2+(z-1)^2\le 9$，$z\ge 0$ 所围成的空心立体.

【分析】画图是关键. 考虑区域的特殊性，分割成常规区域处理.

此处分成三部分讨论，利用积分区域可加性.



【例 6】设 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 1\}$，计算（1）$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz$；（2）$\iiint\limits_{\Omega}z^2dxdydz$；（3）$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2dxdydz$；（4）$\iiint\limits_{\Omega}(mx+ny+pz)^2dxdydz$（其中 m,n,p 均为常数）.

【分析】球面坐标系、轮换对称性、对称性

3.5 三重积分的换元法

定理：设函数 $f(x,y,z)$ 在空间闭区域 Ω 上连续，变换 $T:\begin{cases}x=x(u,v,w)\\ y=y(u,v,w)\\ z=z(u,v,w)\end{cases}$ 将 uvw 空间的闭区域 Ω' 变为 xyz 空间的闭区域 Ω，且满足

（1）函数 $x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)$ 在 Ω' 上具有一阶连续偏导数；

（2）在 Ω' 上雅可比行列式 $J(u,v,w)=\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\ne 0$；

（3）变换 $T':\Omega'\to\Omega$ 是一对一的，

则 $\iint\limits_{D}f(x,y,z)dxdy=\iint\limits_{D'}f[x(u,v,z),y(u,v,z),z(u,v,z)]\left|J(u,v,w)\right|dudvdw$.

说明：若 $J(u,v,w)$ 只在 Ω' 内个别点或一条曲线上为零，该定理仍成立.

【例 7】设常数 a,b,c,A,B,C 均为正，$\Omega=\left\{(x,y,z)\,|\,\dfrac{x^2}{A^2}+\dfrac{y^2}{B^2}+\dfrac{z^2}{C^2}\le 1\right\}$，计算

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2 dv.$$

【分析】轮换对称性，先二后一. 【答案】$\frac{4}{15}\pi ABC(\frac{A^2}{a^2}+\frac{B^2}{b^2}+\frac{C^2}{c^2})$

【例 8】（2016 国预赛）某物体所在的空间区域为$\Omega: x^2+y^2+z^2\le x+y+2z$，密度函数为$x^2+y^2+z^2$，求质量$M=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz$.【答案】$\frac{5\sqrt{2}}{6}\pi$

题型四 三重积分证明题

4.1 证明三重积分等式

【例 9】设$f(x)\in C[0,1]$，证明：$\int_0^1 f(x)dx\int_x^1 f(y)dy\int_x^y f(z)dz=\frac{1}{6}[\int_0^1 f(x)dx]^3$.

【分析】利用变限积分函数证明

4.2 证明三重积分不等式

【例 10】设$\Omega: x^2+y^2+z^2\le 3$，证明$28\sqrt{3}\pi \le \iiint\limits_{\Omega}(x+y-z+10)dxdydz \le 52\sqrt{3}\pi$.

【提示】①求出区域内部驻点处的函数值；②利用拉格朗日乘数法求出区域边界上的最大值与最小值；③比较上述函数值即可.

题型五、三重积分的应用

【例 11】当球Ω_1：$x^2+y^2+z^2\le R^2$和球Ω_2：$x^2+y^2+z^2\le 2Rz(R>0)$的公共部分体积为$\dfrac{5\pi}{12}$时，求Ω_1的表面位于Ω_2内的部分S_1的面积A.

【答案】π　【提示】先确定R的值，然后计算S_1的面积.

【注】由于积分区域的边界曲面是两块不同的球面，因此不宜用球面坐标系计算$\iiint\limits_{\Omega}dv$，而应用直角坐标系计算.

【例 12】设半径为R的球面Σ的球心在定球面$x^2+y^2+z^2=a^2\ (a>0)$上，问当R为何值时，球面Σ在定球面内部的那部分面积最大？

【答案】$R=\dfrac{4}{3}a$

第三部分　强化练习

1、（南大 1996）设 $f(x)$ 连续，$f(0)=k$，$F(t)=\iiint\limits_{V_t}[z^2+f(x^2+y^2)]dxdydz$，其中 $V_t=\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le k, x^2+y^2\le t^2\}$，求 $\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{F(t)}{t^2}$.【答案】$\dfrac{1}{3}k^3\pi+\pi k^2$

2、设 $f(u)$ 具有连续导数，求 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\pi t^4}\iiint\limits_{\Omega}f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})dxdydz$，其中积分区域为 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le t^2$.

【提示】球面坐标系、洛必达法则、导数定义.**【答案】**$\begin{cases} f'(0), & f(0)=0, \\ \infty, & f(0)\neq 0. \end{cases}$

3、将三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dv$ 化为柱面坐标系的累次积分，其中 Ω 由 $x^2+y^2=z^2$，$z=1$ 及 $z=4$ 所围成.

【答案】$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_1^4 f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)dz$

$$+\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^4\rho d\rho\int_\rho^4 f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)dz.$$

4、将三次积分 $\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{x+y}f(x,y,z)dz$ 改为 x,y,z 的积分顺序.

【答案】$\int_0^1dz\int_0^zdy\int_{z-y}^{1-y}f(x,y,z)dx+\int_0^1dz\int_z^1dy\int_0^{1-y}f(x,y,z)dx$.

5、计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(1+x+y+z)^{-3}dv$，其中 $\Omega: x+y+z\le 1, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$.

【答案】$I=\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}(1+x+y+z)^{-3}dz=\dfrac{1}{2}(\ln 2-\dfrac{5}{8})$

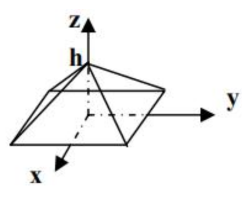
6、计算 $\iiint\limits_{\Omega}e^{x+y+z}dv$，其中 Ω 由 $y=1, y=-x, x=0, z=0, z=-x$ 所围成.

【答案】$3-e$

7、计算 $\iiint\limits_{\Omega}xydv$，其中 Ω 由 $z=xy, x+y=1, z=0$ 所围成.

【提示】$\Omega: 0\le z\le xy, (x,y)\in D_{xy}$，其中 $D_{xy}: 0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x$.**【答案】**$\dfrac{1}{180}$.

8、计算 $\iiint\limits_{\Omega}r^2dv$，其中 Ω 是底面为单位正方形，高为 h 的正四棱锥体，而 r 为棱锥中任一点到顶点 P 的距离.



【提示】将正四棱锥体向 z 轴投影，得 $0\le z\le h$. 在点 z 处作平行于底面的平面截得正方形，设其边长为 l，由相似三角形知识得 $\dfrac{h}{h-z}=\dfrac{1/2}{l/2}$，即 $l=\dfrac{h-z}{h}$.【答案】$\dfrac{h}{30}(6h^2+1)$

9、计算$\iiint\limits_{\Omega}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}dv$，$\Omega$是由$yOz$面上的区域$D$绕$z$轴旋转一周而成的空间区域，其中$D=\{(y,z)\,|\,y^2+z^2\le 1, z\ge 2y-1, y\ge 0, z\ge 0\}$.【答案】$\frac{89}{150}\pi$

10、计算$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dV$，其中$\Omega$为平面曲线$\begin{cases} y^2=2z, \\ x=0 \end{cases}$绕$z$轴旋转一周所成的曲面与平面$z=8$所围成的区域.【答案】$\frac{1024}{3}\pi$

11、（2017 国预赛）记$V: z^2\ge x^2+y^2, z\le\sqrt{4-x^2-y^2}$，则$\iiint\limits_{V}zdxdydz=$____.【答案】$2\pi$

12、计算$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$，其中$\Omega$为曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$所围成的立体.【答案】$\frac{\pi}{16}(\pi-2)$

13、计算$\iiint\limits_{\Omega}(2y+\sqrt{x^2+z^2})dv$，其中$\Omega$是由$x^2+y^2+z^2=a^2$，$x^2+y^2+z^2=4a^2$及$x^2-y^2+z^2=0$ $(y\ge 0, a\ge 0)$所围成.【答案】$\frac{15a^4\pi}{16}(2+\pi)$

14、设Ω是锥面$\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ $(a>0, b>0, c>0)$与平面$x=0$，$y=0$，$z=c$所围和成的空间区域在第一卦限的部分，求$\iiint\limits_{\Omega}\frac{xy}{z}dxdydz$.

【提示】先令$x=au, y=bv, z=cw$换元，再用柱面坐标系.【答案】$\frac{a^2b^2}{32}$

15、证明：$\int_0^x\left[\int_0^v\left(\int_0^u f(t)dt\right)du\right]dv=\frac{1}{2}\int_0^x(x-t)^2f(t)dt$.【提示】积分换序.

16、证明：$\frac{3}{2}\pi\le\iiint\limits_{\Omega}\sqrt[3]{x+2y-2z+5}dV\le 3\pi$，其中$\Omega: x^2+y^2+z^2\le 1$.

【提示】令$f(x,y,z)=x+2y-2z+5$，由于f与$\sqrt[3]{f}$具有相同的极值点，构造拉格朗日辅助函数$L(x,y,z,\lambda)=x+2y-2z+5+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$.

17、设有一半径为R的球体，P_0是此球的表面上的一个定点，球体上任一点的密度与

该点到P_0距离的平方成正比（比例常数$k>0$），求球体的质心位置.

【答案：$(-\frac{R}{4},0,0)$】