

高等数学(理工科)标准化作业参考答案

第一章 函数与极限

第 1 节

1. (1) $[0, 3]$; (2) $[-5, 5)$ 2. (1) $[-1, 1]$; (2) $\bigcup [2n\pi, (2n+1)\pi], (n \in \mathbb{Z})$.

$$3. f[g(x)] = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x > 0. \end{cases}$$

第 2 节

1-2. 略

第 3 节

1. 略

$$2. \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1; \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1. \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -\frac{\pi}{2}; \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \frac{\pi}{2}. \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = 0; \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = +\infty.$$

第 4 节

1. (1) ∞ ; 0. (2) 0^- ; 0^+ . 2. 略.

第 5 节

1. (1) $3x^2$; (2) $\frac{3}{4}$; (3) $\frac{1}{4}$; (4) 8; (5) 3; (6) $-\frac{1}{3}$; (7) $-\frac{1}{2}$; (8) 2.
2. (1) 0; (2) 0; (3) 0.

第 6 节

1. (1) 0; (2) 1; (3) 1; (4) 2; (5) 2; (6) 8.
2. (1) e^{-2} ; (2) e^{-1} ; (3) e ; (4) \sqrt{e} . 3. $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = 1$. 4. $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = 1$.

第 7 节

1. (1) 2; (2) $\frac{1}{2}$; (3) -1 ; (4) 1; (5) 3; (6) $\frac{1}{2}$.
2. $a = -\frac{3}{2}$.

第 8-9 节

1. (1) $x = 1$ 为第二类无穷间断点;
(2) $x = 0$ 为第一类跳跃间断点; $x = 1$ 为第一类可去间断点;
 $x = -1$ 为第二类(无穷)间断点.
(3) $x = 0, x = k\pi + \frac{\pi}{2} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 为第一类可去间断点;
 $x = k\pi (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$ 为第二类无穷间断点.
(4) $x = 0$ 为第一类跳跃间断点.

2. $a = 1, b = 2$. 3. $a = e$, 第二类无穷间断点.

第 10 节 略

第二章 导数与微分

第 1 节

1. 3. 2. $y = 4x + 6$. 3. (1) 1; (2) 12. 4. $a = 2, b = -1$.

5. 连续且可导. 6. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x}, & x \geq 0, \\ 1, & x < 0. \end{cases}$

第 2 节

1. (1) $2x \ln x + x + 2a^x \ln a$; (2) $-2 \tan 2x$; (3) $2x \sec(x^2) \tan(x^2) + \frac{1}{x} \sec^2 \ln x$;
 (4) $\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$; (5) $\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$; (6) $\frac{1}{2(1+x^2)}$.
 2. (1) 3; (2) 1. 3. (1) $3x^2 f'(x^3)$; (2) $\frac{f'(\arctan x)}{1+x^2} + \frac{f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}$;
 (3) $e^{f(x)} f'(x) + 2e^x f(e^x) f'(e^x)$; (4) $\sin 2x f'(\sin^2 x) - \sin x f'(\cos x) - \frac{f'(x)}{f(x)}$.

第 3 节

1. (1) $-2 \sin 2x - 2x \cos 2x$; (2) $-\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$; (3) $4e^{4x} f''(e^{2x}) + 4e^{2x} f'(e^{2x})$;
 (4) $\frac{f''(x)f(x) - f'(x)^2}{f^2(x)}$.
 2. $(-1)^n 4^n$.
 3. $(-1)^n e^{-x} [x^2 - 2(n-1)x + (n-1)(n-2)]$. 4. $\frac{\sqrt{2}}{2} n!$

第 4 节

1. (1) $\frac{y - e^y}{1 - x + xe^y}$; (2) $\frac{y^2 - 2x \cos(x^2 + y^2) - e^x}{2y \cos(x^2 + y^2) - 2xy}$; (3) $1 - \frac{\pi}{2}$.
 2. (1) $y \left(\frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{\arctan x}{x} \right)$; (2) $y \left(\frac{1}{2(x+2)} - \frac{4}{3-x} - \frac{5}{x+1} \right)$; (3) $\frac{y^2 + xy}{xy - 3x^2}$.
 3. $\frac{2}{t}$. 4. $\frac{1}{e^t(1+t)^3}$.

第 5 节

1. (1) dx ; (2) $(e+1) dx$.
 2. (1) $\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$; (2) $\frac{\sec^2 \frac{x}{2}}{4\sqrt{\tan \frac{x}{2}}} dx$; (3) $(3e^{3x} \cos 2x - 2e^{3x} \sin 2x) dx$; (4) $\frac{-1}{1+e^x} dx$.
 3. $\frac{x+y}{x-y} dx$. 4. $\left(\frac{f'(\ln x)}{x} + f'(\sin^2 x) \sin 2x \right) dx$.
 5. $(3t^2 + \sec t \cdot \tan t) \frac{\sqrt{1-t^4}}{2t} dx$. 6. $\Delta y = 0.0802, dy = 0.08$.

第三章 微分中值定理与导数的应用

第 1 节 略

第 2 节

1. (1) $\frac{4}{e}$; (2) 1; (3) 2; (4) 1; (5) $\frac{1}{2}$; (6) $+\infty$; (7) 1; (8) $e^{-\frac{1}{6}}$. 2. 略

第 3 节

1. $\sqrt{x} = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{16}\xi^{-\frac{5}{2}}(x-4)^3$, ξ 介于 4 与 x 之间.
2. $\frac{1}{x} = -1 - (x+1) - (x+1)^2 - (x+1)^3 + \xi^{-5}(x+1)^4$, ξ 介于 -1 与 x 之间.
3. $xe^x = x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}x^n + o(x^n)$.

第 4 节

1. (1) 单调增区间 $(-\infty, -1), (3, +\infty)$; 单调减区间 $(-1, 3)$;
(2) 单调增区间 $(-\infty, 0), (1, +\infty)$; 单调减区间 $(0, 1)$. 2. 略
3. (1) 凹区间: $(-\infty, 0), (1, +\infty)$; 凸区间: $(0, 1)$; 拐点: $(0, 1), (1, 0)$.
(2) 凹区间: $(2, +\infty)$; 凸区间: $(-\infty, 2)$; 拐点: $(2, 2e^{-2})$.

第 5 节

1. (1) $x = 0$ 处, y 取得极小值 0.
(2) $x = -\frac{\pi}{6}$ 时, y 取得极小值 $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}$; $x = \frac{\pi}{6}$ 时, y 取得极大值 $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$.
2. $a = 2$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ 是极大值. 3. $y_{\max} = 11$, $y_{\min} = -14$.
4. 最大项 $\{\sqrt[3]{3}\}$. 5. $\sqrt{2}a, \sqrt{2}b$. 6. $h = r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.

第 6 节

1. 铅直渐近线 $x = 1$, 斜渐近线 $y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$. 2. 略.

第 7 节

1. $K = \frac{1}{13\sqrt{26}}, \rho = 13\sqrt{26}$.

第四章 不定积分

第 1 节

1. (1) $\frac{1}{3}e^{3x} + C$; (2) $-\frac{1}{x} + C$; (3) $\frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1}$.
2. (1) $\frac{1}{3}x^3 - x + \arctan x + C$; (2) $\frac{1}{3}(x-a)^3 + C$; (3) $\frac{6}{11}x^{\frac{11}{6}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x + C$;
(4) $-4\cot x + C$; (5) $\sin x + \cos x + C$; (6) $\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{2}{\ln 2 + 1}(2e)^x + \frac{4^x}{\ln 4} + C$;
(7) $\tan x - x + C$; (8) $x < 0, -\frac{1}{2}x^2 + C$; $x \geq 0, \frac{1}{2}x^2 + C$.

3. $x \geq 0, e^x + C; \quad x < 0, \frac{1}{2}x^2 + x + 1 + C.$

第 2 节

1. (1) $-\frac{1}{6057}(2-3x)^{2019} + C; \quad (2) -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C; \quad (3) \frac{1}{9}\tan^9 x + C; \quad (4) \ln|\ln x| + C;$
 (5) $\arctan e^x + C; \quad (6) \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x \ln x}{\sqrt{2}}\right) + C; \quad (7) \ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + C;$
 (8) $\frac{1}{2}\ln|x^2-2x+3| + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-1}{\sqrt{2}} + C; \quad (9) \sqrt{x^2-4} - 2\arccos\frac{2}{x} + C;$
 (10) $\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C. \quad 2. -\frac{1}{2}(1-x^2)^2 + C.$

第 3 节

1. (1) $-x \cos x + \sin x + C; \quad (2) x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C; \quad (3) 2x \tan x + 2\ln|\cos x| + C;$
 (4) $x \ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x + C; \quad (5) \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)e^{2\sqrt{x}} + C;$
 (6) $-\frac{1}{2}x^2 + x \tan x + \ln|\cos x| + C; \quad (7) -\sqrt{1-x^2} \cdot \arccos x - x + C;$
 (8) $-(e^{-x} + 1)\ln(1+e^x) + x + C; \quad (9) -\frac{1}{2}\sec x \cot x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C;$
 (10) $(x+1)\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + C.$

2. $-x \sin x - \cos x + C; \quad -x \cos x + \sin x + C.$

第 4 节

1. (1) $\frac{1}{2}\ln|x+1| - \ln|x+2| + \frac{1}{2}\ln|x+3| + C; \quad (2) \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\arctan x + C;$
 (3) $\frac{1}{2}(x-1)^2 + \ln|x+1| + C; \quad (4) -x + \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C;$
 (5) $\ln|1+x| - \arctan x + C; \quad (6) \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2(1+x^2)} + C;$
 (7) $\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}} + C; \quad (8) \frac{2}{5}\ln|\cos x + 2\sin x| + \frac{1}{5}x + C;$
 (9) $2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(1+\sqrt[6]{x}) + C; \quad (10) x - 4\sqrt{x+1} + 4\ln(1+\sqrt{1+x}) + C.$

第五章 定积分及其应用

第 1 节

1. (1) $\frac{9}{2}\pi; \quad (2) 0.$

2. (1) $\int_0^1 e^x dx \geq \int_0^1 (1+x)dx; \quad (2) \int_0^1 \ln x dx \leq \int_0^1 (\ln x)^2 dx.$

3. (1) $\frac{\pi}{9} \leq \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} x \arctan x dx \leq \frac{2}{3}\pi; \quad (2) -2e^2 \leq \int_2^0 e^{x^2-x} dx \leq -2e^{-\frac{1}{4}}.$

第 2 节

1. (1) $y' = 2x\sqrt{1+x^4}$; (2) $y' = \int_{x^2}^{\sin x} \ln(1+t^2) dt + x \ln(1+\sin^2 x) \cos x - 2x^2 \ln(1+x^4)$.
2. (1) 1; (2) 12.
3. (1) $1 + \frac{\pi}{4}$; (2) $\frac{3}{2}$; (3) $\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$; (4) 4; (5) $\frac{4}{5}$. 4. $\frac{8}{3}$. 5. 略.

第 3 节

1. (1) $\frac{31}{10}$; (2) $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$; (3) $\frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{e}$; (4) $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$; (5) $\frac{a^3}{3}$; (6) $4 - 2 \arctan 2$.
2. (1) $\frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$; (2) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$; (3) $\frac{1}{2}(e \sin 1 - e \cos 1 + 1)$; (4) $2 - \frac{2}{e}$.
3. (1) 0; (2) $\frac{2}{3} \left(\sin \frac{1}{2} \right)^3$. 4. $2 \ln 2 + 1 - \ln(e+1)$.

第 4 节

1. $\frac{\pi}{2}$; (2) π ; (3) $\frac{\pi}{2}$; (4) 发散. 2. $c = \frac{5}{2}$.

第六章 定积分的应用

第 2 节

1. 9. 2. $\frac{3}{8}\pi a^2$. 3. $\frac{\pi}{6} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}$. 4. $\pi(e-2)$, $\frac{\pi}{2}(e^2+1)$. 5. $8a$.

第 3 节

1. $\sqrt{2} - 1$. 2. 17.3 N. 3. $\vec{F} = \left(\frac{Gm\rho l}{a\sqrt{a^2+l^2}}, Gm\rho \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2+l^2}} \right] \right)$.

第七章 向量代数与空间解析几何

第 1 节

1. $(x_0, y_0, 0)$, $(0, y_0, z_0)$, $(x_0, 0, z_0)$, $(x_0, 0, 0)$, $(0, y_0, 0)$, $(0, 0, z_0)$.
2. (1) $(a, b, -c)$, $(-a, b, c)$, $(a, -b, c)$;
(2) $(a, -b, -c)$, $(-a, b, -c)$, $(-a, -b, c)$; (3) $(-a, -b, -c)$. 3. $(0, 1, -2)$.
4. 模 $|\overrightarrow{M_1M_2}| = 2$; 方向余弦 $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$, $\cos \beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \gamma = \frac{1}{2}$;
方向角 $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, $\beta = \frac{3\pi}{4}$, $\gamma = \frac{\pi}{3}$.
5. $z = -4$, 最小值为 $\frac{\pi}{4}$. 3. $c^o = \pm \frac{\sqrt{6}}{6}(2, 1, 1)$.
6. $\overrightarrow{PC} = \lambda \overrightarrow{PA} + (1-\lambda) \overrightarrow{PB}$ (λ 为任意实数). 7. 略.

第 2 节

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \mathbf{a} = 8$; $\overrightarrow{AB} \times \mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$; $(\overrightarrow{AB})_{\mathbf{a}} = \frac{8}{\sqrt{6}}$.

2. (1) 原式 = $|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2$; (2) 原式 = $\mathbf{a} \times \mathbf{c}$. 4. $\sqrt{\frac{21}{5}}$. 3. 略.

第 3 节

1. $2x - 6y + 2z - 7 = 0$.

2. (1) $4(x^2 + y^2) = (3z - 1)^2$; (2) $x^2 + z^2 = 4y$; (3) $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2 + z^2}{9} = 1$.

3. (1) $z = e^{-x^2 - y^2}$; (2) 双叶双曲面, 中心轴为 x 轴. 4-5. 略.

第 4 节

1. 略.

2. 曲线 Γ 在 xOy 面上的投影: $\begin{cases} x^2 + y^2 = ax, \\ z = 0. \end{cases}$ 在 xOz 面上的投影: $\begin{cases} z^2 + ax = a^2, \\ y = 0. \end{cases}$

在 yOz 面上的投影: $\begin{cases} z^4 + a^2(y^2 - z^2) = 0, \\ x = 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos \theta, \\ y = \sqrt{2} \cos \theta, \\ z = 2 \sin \theta, \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi).$ 4. $\{(x, y) | 2x^2 + y^2 \leq 1\}$.

第 5 节

1. $x - 3y - 2z = 0$. 2. $2x + 3y + z = 6$. 3. $x + 3y = 0$ 或 $3x - y = 0$. 4. $d = \sqrt{3}$.

第 6 节

1. $\left(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$. 2. $\frac{x-4}{2} = y+1 = \frac{z-3}{5}$.

3. $8x - 9y - 22z = 59$. 4. $l' : \begin{cases} y - z - 1 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$.

第 7 节

1-2. 略.