

高等数学样卷 (考试时间 120 分钟)

一、填空题 (每题 4 分, 共 6 题, 共 24 分)

1、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \sin \pi \sqrt{4n^2 + 2})^n = \underline{\hspace{2cm}}.$

2、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{\frac{1}{n}} + 3^{\frac{2}{n}} + \cdots + 3^{\frac{n}{n}}}{n+1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

3、设函数 $y = f(x)$ 存在二阶导数, $f'(x) \neq 0$, $x = \varphi(y)$ 是 $y = f(x)$ 的反函数, 则 $\varphi''(y) = \underline{\hspace{2cm}}.$

4、 $\int \frac{e^x(x-1)}{(x-e^x)^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

5、设 $a > 0$, 满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x - \sin x} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}} dt = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} [\sin(\frac{\pi}{6} - x) \tan 3x]$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}.$

6、 $\int_0^1 \frac{\arctan x}{(1+x^2)^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

二、选择题 (单选题, 每题 4 分, 共 6 题, 共 24 分)

1、当 $x \rightarrow 0$ 时, $\int_0^{x^2} (e^{t^3} - 1) dt$ 是 x^7 的 ().

- (A) 低阶无穷小 (B) 等价无穷小
(C) 高阶无穷小 (D) 同阶但非等价无穷小.

2、曲线 $y = e^{\frac{1}{x}} \sqrt{1+x^2}$ 的渐近线条数为 ().

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 0.

3、设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h^2)}{h^2} = 1$, 则 ().

- (A) $f(0)=0$ 且 $f'_-(0)=0$ 存在 (B) $f(0)=0$ 且 $f'_+(0)=0$ 存在
(C) $f(0)=1$ 且 $f'_-(0)=0$ 存在 (D) $f(0)=1$ 且 $f'_+(0)=0$ 存在.

4、设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x) + [f'(x)]^2 = x$, 且 $f'(0) = 0$. 则 ().

- (A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值 (B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C) $(0, f(0))$ 是 $y = f(x)$ 的拐点 (D) $f(0)$ 不是极值, $(0, f(0))$ 不是拐点.

5、设常数 $k > 0$, 函数 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k$ 在 $(0, +\infty)$ 内零点个数为 ()

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0.

6、已知 $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{2(1+\cos x)} dx$, $I_2 = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+\cos x} dx$, $I_3 = \int_0^1 \frac{2x}{1+\sin x} dx$, 则 ()

(A) $I_1 < I_2 < I_3$ (B) $I_2 < I_1 < I_3$ (C) $I_1 < I_3 < I_2$ (D) $I_3 < I_2 < I_1$.

三、解答题 (共 5 小题, 共 52 分)

1、(本题满分 10 分) 设 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内具有二阶连续导数, 且 $f(0) = 0, f'(0) \neq 0$,

$$f''(0) = 2, \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{f(\sin x)} - \frac{1}{f'(0) \cdot \sin x} \right].$$

2、(本题满分 10 分) 设非负函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上满足 $x f'(x) = f(x) + \frac{3a}{2} x^2$, 曲线 $y = f(x)$

与直线 $x = 1$ 及坐标轴围成图形的面积为 2, (1) 求函数 $f(x)$; (2) a 为何值时, 所围图形绕 x 轴一周所得旋转体的体积最小?

3、(本题满分 10 分) 设 $a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx$ ($n=1,2,3,\cdots$), (1) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 单调递

减, 且 $a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2}$ ($n=2,3,\cdots$) (2) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$.

4、(本题满分 11 分) 设函数 $f(x)$ 满足方程: $3f(x) + 4x^2 f(-\frac{1}{x}) + \frac{7}{x} = 0$, 求 $f(x)$ 极值.

5、(本题满分 11 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0, f(1)=1$, 若 $a > 0, b > 0$, 求证: $\exists \xi \in (0,1), \eta \in (0,1), \xi \neq \eta$, 使得

$$(1). \frac{a}{f'(\xi)} + \frac{b}{f'(\eta)} = a + b; \quad (2). af'(\xi) + bf'(\eta) = a + b.$$