# 专题 2-2 多元函数微分学

**第一部分典型例题**

**1. 可微，可导和连续的判断**

例 1 讨论函数 $z=f\left(x,y\right)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2\neq 0\end{cases}$ 在坐标原点的连续性、可偏导性和可微性以及偏导数的连续性.

【连续、可偏导、可微，偏导数不连续】

**2. 多元函数的偏导数与全微分**

例 2 当$\left(x,y\right)\to\left(0,0\right)$时，$f\left(20xy+\cos x,17xy+\cos y\right)=1+x^2+y^2+o(x^2+y^2)$，$f\left(x,y\right)$在$\left(1,1\right)$处可微，求$f_x\left(1,1\right)$，$f_y\left(1,1\right)$.

【$f_x\left(1,1\right)=-2$，$f_y\left(1,1\right)=-2$】

例 3（2019 年预赛，一(4)）已知 $\mathrm{d}u(x,y)=\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{3x^2-2xy+3y^2}$，则 $u(x,y)=$___________.

【$u(x,y)=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\arctan\dfrac{3}{2\sqrt{2}}\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{1}{3}\right)+C$】

**3. 复合函数求导**

例 4　设 $f(x,y)$ 可微，$f(1,2)=2$，$f_x(1,2)=3$，$f_y(1,2)=4$，$\varphi(x)=f(x,f(x,2x))$，则 $\varphi'(1)=$___________.

【$\varphi'(1)=47$】

例 5　设函数 $z=y^{x\ln y}$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【$2y^{x\ln y-1}\cdot\ln y\left(1+x\ln^2 y\right)$】

例 6 设函数 $z=z(x,y)$ 满足 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$，又设 $u=x, v=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}, \varphi=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}$，求函数 $\varphi(u,v)$ 的偏导数 $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$.

【0】

例 7 设二元函数 $f(x,y)$ 有一阶连续的偏导数, 且 $f(0,1)=f(1,0)$, 证明: 单位圆周上至少存在两点满足方程 $y\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)-x\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=0$.

**4. 隐函数求导**

例 8 (2015 年预赛, 一(2)) 设函数 $z=z(x,y)$ 是由 $F\left(x+\frac{z}{y}, y+\frac{z}{x}\right)=0$ 所决定, 其中 $F(u,v)$ 具有连续的偏导数，且 $xF_u+yF_v\neq 0$，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$____________. (本小题结果要求不显含 $F$ 及其偏导数)

【$z-xy$】

例 9 设函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续，$f(1)=1$，且满足

$$\int_1^{xy} f(t)\mathrm{d}t = x\int_1^{y} f(t)\mathrm{d}t + y\int_1^{x} f(t)\mathrm{d}t\,(x>1,y>1),$$

(1) 求 $f(x)$ 的表达式（$x\ge 1$）；　　【$f(x)=\ln x+1$】

(2) 由方程 $F\left(xe^{x+y}, f(xy)\right)=x^2+y^2$ 确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$（其中 $F(u,v)$ 是可微的二元函数.）

【$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y\left[2x^2-F_1'\cdot e^{x+y}(1+x)-F_2'\right]}{x\left[F_1'\cdot xye^{x+y}+F_2'-2y\right]}$】

**5. 多元函数微分学的几何应用**

例 10 求空间曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=\dfrac{9}{4} \\ 3x^2+(y-1)^2+z^2=\dfrac{17}{4} \end{cases}$ 上对应 $x=1$ 的点处的切线方程和法平面方程.

【在 $\left(1,\dfrac{1}{2},1\right)$ 点切线方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-\frac{1}{2}}{2}=\dfrac{z-1}{-2}$，法平面方程为 $x+2y-2z=0$】

【在 $\left(1,\dfrac{1}{2},-1\right)$ 点切线方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-\frac{1}{2}}{2}=\dfrac{z-1}{2}$，法平面方程为 $x+2y+2z=0$】

例 11 求过锥面 $4x^2+12y^2=3z^2$ 在与平面 $x-y+z=0$ 的交线，且与球面 $x^2+y^2+z^2+6x-2y-2z+10=0$ 相切的平面方程.

【$2x+2y+z=0$ 或 $2x-14y+5z=0$】

例 12 设函数 $f(x,y)$ 可微，且对任意的 $x,y,t$ 满足 $f(tx,ty)=t^2f(x,y)$，$P_0(1,-2,2)$ 是曲面 $\Sigma: z=f(x,y)$ 上一点，求当 $f_x(1,-2)=4$ 时，$\Sigma$ 在点 $P_0$ 处的法线方程.

【$\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-2}{-1}$】

**6. 极值与最值**

例 13 设锥面 $S: z=\sqrt{x^2+4y^2+4}$，平面 $\Pi: x+2y+2z=2$，求以点 $P$ 为中心与 $\Pi$ 相切的球面方程与切点坐标，其中 $P$ 是 $S$ 上到 $\Pi$ 距离最小的点.

【球面方程：$\left(x+\sqrt{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(z-2\sqrt{2}\right)^2=\dfrac{4}{9}\left(3-2\sqrt{2}\right)$，

切点 $\left(\dfrac{1}{9}\left(2-11\sqrt{2}\right),\dfrac{1}{18}\left(8-18\sqrt{2}\right),\dfrac{2}{9}\left(2-7\sqrt{2}\right)\right)$】

例 14 设 $z=z\left(x,y\right)$ 是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数，求 $z=z\left(x,y\right)$ 的极值点和极值.

【极小值为 $z\left(9,3\right)=3$，极大值为 $z\left(-9,-3\right)=-3$】

例 15 证明：$\frac{1}{4}\left(x^2+y^2\right)\le e^{x+y-2}$ 对 $x\ge 0, y\ge 0$ 成立.

**7. 方向导数、梯度、旋度和散度**

例 16 在椭球面 $2x^2+2y^2+z^2=1$ 上找一点，使函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在该点沿方向 $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$ 的方向导数最大.

【$M_1\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$】

例 17 设有一小山，取它的底面所在的平面为 $xOy$ 平面，其底部所在区域为 $D:\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2-xy\le 75\right\}$，小山的高度函数 $h(x,y)=75-x^2-y^2+xy$.

(1) 设 $M(x_0,y_0)$ 是 $D$ 上一点，问 $h(x,y)$ 在该点处沿平面上什么方向的方向导数最大？若记此方向导数的最大值为 $g(x_0,y_0)$，试写出 $g(x_0,y_0)$ 的表达式.

【$g(x_0,y_0)=\sqrt{5{x_0}^2+5{y_0}^2-8x_0y_0}$】

(2) 现欲利用此小山开展攀岩活动，为此需要在山脚寻找一上山坡度最大的点作为攀登的起点，也就是说，要在 $D$ 的边界线 $x^2+y^2-xy=75$ 上找到使(1)中的 $g(x,y)$ 达到最大值的点。试确定攀登起点的位置.　【$(5,-5),(-5,5)$】

**8. 多元函数的泰勒公式**

例 18 (2018 年初赛, 五) 设 $f(x,y)$ 在区域 $D$ 内可微，且 $\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\le M$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 是 $D$ 内两点，线段 $AB$ 包含在 $D$ 内。证明：$\left|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)\right|\le M\left|AB\right|$，其中 $|AB|$ 表示线段 $AB$ 的长度.

**第二部分 强化训练**

1. 设二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\left(a\sqrt{|x|}+x^2+y^2+b\right)\dfrac{\sin\left(xy^2\right)}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2\neq 0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处可微.

(1) 求常数 $a,b$ 的值；

(2) 按(1)求得的 $a,b$，求 $f''_{xy}(0,0)$ 和 $f''_{yx}(0,0)$.

2. 已知 $z=f(x+\varphi(y))$，且 $f,\varphi$ 具有二阶连续导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

3. 已知 $z=\dfrac{1}{x}f(xy)+yf(x+y)$，且 $f$ 具有二阶连续导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

4. 已知 $z=f(x,y)$，其中 $x=\varphi(y)$，且具有二阶连续偏导数，$\varphi$ 具有二阶连续导数，求 $\dfrac{d^2 z}{dx^2}$.

5. 设 $g$ 二阶可导， $f$ 具有二阶连续偏导数， $z=g\left(xf(x+y,2y)\right)$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

6. 设 $f$ 连续可导，$z(x,y)=\int_0^y e^y f(x-t)dt$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

7. 设 $z(x,y)=xyf\left(\dfrac{x+y}{xy}\right)$，且 $f$ 可微，证明 $z(x,y)$ 满足形如 $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}-y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=g(x,y)z$ 的方程，并求函数 $g(x,y)$.

8. 设 $u=f(x,y,z)$，$f$ 是可微函数，若 $\dfrac{f_x}{x}=\dfrac{f_y}{y}=\dfrac{f_z}{z}$，证明：$u$ 仅为 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的函数.

9. 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $x-z=ye^z$ 确定，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

10. 设 $x^2+y^2+z^2=yf\left(\dfrac{z}{y}\right)$，且 $f$ 可微，求 $dz$.

11. 设 $u=f\left(x^2,y^2,z^2\right)$，其中 $y=e^x$，且 $\varphi(y,z)=0$，$f,\varphi$ 皆可微，求 $\dfrac{du}{dx}$.

12. 求 $f(x,y)=x^2\left(2+y^2\right)+y\ln y$ 二元函数的极值.

13. 已知曲面 $\Sigma:\sqrt{x}+2\sqrt{y}+3\sqrt{z}=3$.

(1) 求该曲面上点 $P(a,b,c)(abc>0)$ 处的切平面方程；

(2) 问 $a,b,c$ 为何值时，上述切平面与三个坐标平面所围四面体的体积最大.

14．设函数 $f(x,y)=2\left(y-x^2\right)^2-y^2-\frac{1}{7}x^7$.

(1) 求 $f(x,y)$ 的极值，并证明函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不取极值；

(2) 当点 $(x,y)$ 在过原点的任一直线上变化时，求证函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处取最大值.

15．在椭球面 $\Sigma: 2x^2+2y^2+z^2=1$ 上求一点 $P(x_0,y_0,z_0)(x_0>0,z_0>0)$ 使得 $\Sigma$ 在点 $P$ 处的法向量与向量 $(-1,1,1)$ 垂直，且使函数 $\varphi(x)=x^2+y^2+z^3$ 在点 $P$ 处的梯度的模为最小.

**【参考答案】**

1．(1) $a=b=0$；(2) $f''_{xy}(0,0)$ 不存在， $f''_{yx}(0,0)=0$.

2．$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(x+\varphi(y)),\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(x+\varphi(y))\varphi^2(y)+f'(x+\varphi(y))\varphi''(y)$.

3．$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}f(xy)+\frac{y}{x}f'(xy)+yf'(x+y)$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''(x+y)+yf''(xy)+yf''(x+y)$.

4．$\frac{d^2 z}{dx^2}=f''_{11}+\frac{2}{\varphi'(y)}f''_{12}+\frac{1}{\left[\varphi'(y)\right]^2}f''_{22}-\frac{\varphi''(y)}{\left[\varphi'(y)\right]^3}f'_2$.

5．$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x\left(f+xf'_1\right)\left(f'+2f'_2\right)g''+\left[f'_1+2f'_2+x\left(f''_{11}+2f''_{12}\right)\right]g'$

6．$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^y\left[f(x)-f(x-y)+f'(x-y)\right]$

7．证明略。$g(x,y)=x-y$.

8．证明略.

9．$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{ye^z+1},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{ye^z}{\left(ye^z+1\right)^3}$.

10．$dz=\frac{2x}{f'-2z}dx+\frac{2y^2-yf\left(\frac{z}{y}\right)-zf'\left(\frac{z}{y}\right)}{y\left(f'-2z\right)}dy$.

11．$\frac{du}{dx}=2xf'_1+2e^{2x}f'_2-2ze^x f'_3\frac{\varphi'_1}{\varphi'_2}$.

12．$f(x,y)$ 在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 处取极小值，极小值为 $f\left(0,\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$.

13．(1) 切平面方程为 $\frac{1}{\sqrt{a}}x+\frac{2}{\sqrt{b}}y+\frac{3}{\sqrt{c}}z=3$；

（2）当$a=1,b=\dfrac{1}{4},c=\dfrac{1}{9}$时，四面体的体积最大，最大值为$\dfrac{1}{8}$.

14.（1）$f(x,y)$ 在$(-2,8)$处取极小值，极小值为$f(-2,8)=-\dfrac{96}{7}$；

（2）略.

15．所求的点为$\left(\dfrac{\sqrt{31}+1}{12},\dfrac{\sqrt{31}-1}{12},\dfrac{1}{3}\right)$.