一、填空题

1．函数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ 在点 $p_0(1,1)$ 处的最大方向导数为【 $\sqrt{2}$ 】.

2．使函数 $z=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 取极大值的点的坐标为【 $(-3,2)$ 】.

3． $\int_0^2 dx\int_x^2 e^{-y^2}dy=$【 $\frac{1}{2}(1-e^{-4})$ 】.

4．设 Σ 为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ ，则 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS=$ 【 $2\pi a^4$ 】.

5．若 $\vec{A}=3x^2y\vec{i}+e^y z\vec{j}+2x^3z\vec{k}$ ，则 $\operatorname{div}\vec{A}\big|_{(1,0,2)}=$【 4 】.

6．已知闭曲线 C 的方程为 $|x|+|y|=2$ ，则 $\oint\limits_C(|x|+|y|)ds=$ 【 $16\sqrt{2}$ 】.

7

二、 选择题

1．已知 $f\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right)=xy$ ，则 $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}=$ （ B ）

(A) $-\frac{1}{x^2y^2}$,　　(B) $-\frac{x+y}{x^2y^2}$,　　(C) $\frac{x-y}{x^2y^2}$,　　(D) $\frac{y-x}{x^2y^2}$.

2．设区域 D 是圆环域 $a^2\le x^2+y^2\le b^2$，则 $\iint\limits_D(x^2+y^2)d\sigma=$（ D ）

(A) $\frac{\pi}{2}b^4$　　(B) $\frac{2\pi}{3}b^3$　　(C) $\frac{2\pi}{3}(b^3-a^3)$　　(D) $\frac{\pi}{2}(b^4-a^4)$

3．已知 $(x+ay)dx+(x+y)dy$ 为某函数的全微分，则 $a=$（ C ）

(A) -1　　(B) 0　　(C) 1　　(D) 2

4．设 L 为圆周 $x^2+y^2=2$ 的逆时针方向，则 $\oint\limits_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=$（ A ）

(A) 2π　　(B) π　　(C) $\frac{\pi}{2}$　　(D) 0

5

6

7

三

解

四、判别下列级数的敛散性.

1.

五、求球面 $x^2+y^2+z^2=14$ 在点 $(1,2,3)$ 处的切平面及法线方程.

解： $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-14$， 则 $\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)=(2x,2y,2z)$，

$\vec{n}\big|_{(1,2,3)}=(2,4,6)\,||\,(1,2,3)$，则点 $(1,2,3)$ 处的切平面为 $x+2y+3z-14=0$，

法线方程为 $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}$.

六、求上半球面 $x^2+y^2+z^2=4a^2$ 含在柱面 $x^2+y^2=2ax(a>0)$ 内部的那部分面积.

解： 设Σ： $z=\sqrt{4a^2-x^2-y^2}$，在 xOy 面上的投影为D： $x^2+y^2\le 2ax$，

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\frac{2a}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}dxdy.$$

由D： $x^2+y^2\le 2ax$，且D关于y轴对称，故

$$S=\iint_{\Sigma}dS=\iint_{D}\frac{2a}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}dxdy=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}\frac{2a}{\sqrt{4a^2-\rho^2}}\rho d\rho$$

$$=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}2a(1-\sin\theta)d\theta=4a^2(\pi-2).$$

七、已知起点 $O(0,0)$ 及终点 $A(1,1)$，且曲线积分

$$I=\int_{OA}\left(ax\cos y-y^2\sin x\right)dx+\left(by\cos x-x^2\sin y\right)dy$$

与路径无关，试确定常数a,b，并求I．

解：令$P=ax\cos y-y^2\sin x,\ Q=by\cos x-x^2\sin y$，

则$\dfrac{\partial P}{\partial y}=-ax\sin y-2y\sin x$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-by\sin x-2x\sin y$，

由题意$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，解得$a=b=2$．

$$I=\int_{(0,0)}^{(1,1)}Pdx+Qdy=\int_0^1 P\left(x,0\right)dx+\int_0^1 Q\left(1,y\right)dy$$

$$=\int_0^1 2xdx+\int_0^1(2y\cos1-\sin y)dy=2\cos1.$$

【或$I=\int_{(0,0)}^{(1,1)}Pdx+Qdy=\int_0^1 Q\left(0,y\right)dy+\int_0^1 P\left(x,1\right)dx$

$=\int_0^1 2ydy+\int_0^1\left(2x\cos1-\sin x\right)dx=2\cos1$.】

八、设Σ为上半球面$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$的下侧，求曲面积分

$$\iint_{\Sigma}\left(x^3+az^2\right)dydz+\left(y^3+ax^2\right)dzdx+\left(z^3+ay^2\right)dxdy.$$

解：记$\Sigma_1:z=0$，取上侧，Ω是Σ,Σ_1所围成的空间区域，则

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}=-\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=-3\iiint_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$$

$$=-3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^a r^2\cdot r^2dr=-\frac{6}{5}\pi a^5.$$

而$\displaystyle\iint_{\Sigma_1}=\iint_{x^2+y^2\le a^2}ay^2dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a a\rho^2\sin^2\theta\cdot\rho d\rho=\frac{\pi a^5}{4}$，

【或$\displaystyle\iint_{\Sigma_1}=\iint_{x^2+y^2\le a^2}ay^2dxdy=\frac{a}{2}\iint_{x^2+y^2\le a^2}(x^2+y^2)dxdy=\frac{a}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\rho^3d\rho=\frac{\pi a^5}{4}$】

故原式$=-\dfrac{6}{5}\pi a^5-\dfrac{1}{4}\pi a^5=-\dfrac{29}{20}\pi a^5$.

九