多元函数积分学

一、典型例题

1、二重积分

例 1 计算 $I=\iint\limits_D x\left[1+yf(x^2+y^2)\right]dxdy$，其中 D 是由 $y=x^3, y=1$ 及 $x=-1$ 所围成.

【$-\frac{2}{5}$】

例 2 设 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le\sqrt{2}, x\ge 0, y\ge 0\right\}$, $\left[1+x^2+y^2\right]$ 表示不超过 $1+x^2+y^2$ 的最大正整数. 计算 $I=\iint\limits_D xy\left[1+x^2+y^2\right]dxdy$.

【$\frac{3}{8}$】

例 3 计算 $I=\iint\limits_D \frac{(x+y)\ln(1+\frac{y}{x})}{\sqrt{1-x-y}}dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x+y\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$.

【$\dfrac{16}{15}$】

例 4　证明 $\dfrac{\pi(R^2-r^2)}{R+K} \le \iint\limits_D \dfrac{d\sigma}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} \le \dfrac{\pi(R^2-r^2)}{r-K}$，

其中 $0<K=\sqrt{a^2+b^2}<r<R,\ D$：$r^2 \le x^2+y^2 \le R^2$.

例 5　设 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\operatorname{arccot}(x^2+y^2), & (x,y)\ne(0,0) \\ \dfrac{\pi}{2}, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$，

平面区域 $D: x^2+y^2 \le a^2$，求 $\lim\limits_{a\to 0^+} \dfrac{1}{\pi a^2} \iint\limits_D f(x,y)d\sigma$.

提示：积分中值定理　【$\dfrac{\pi}{2}$】

2、三重积分

例 6 设函数 $f(x)$ 连续， $F(t)=\iiint\limits_{\Omega}[z^2+f(x^2+y^2)]dv$，其中

$\Omega: 0\le z\le h, x^2+y^2\le t^2$，求 $\dfrac{dF}{dt}$ 和 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{F(t)}{t^2}$.

【$\dfrac{2}{3}\pi h^3 t+2\pi hf(t^2)t$ ； $\dfrac{1}{3}\pi h^3+\pi hf(0)$】

例 7 设 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 1\}$，计算

(1) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz$； (2) $\iiint\limits_{\Omega}z^2dxdydz$；

(3) $\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2dxdydz$； (4) $\iiint\limits_{\Omega}(mx+ny+pz)^2dxdydz$（其中 m,n,p 均为常数）.

【$\dfrac{4\pi}{5},\dfrac{4\pi}{15},\dfrac{4\pi}{5},(m^2+n^2+p^2)\dfrac{4\pi}{15}$】

例 8 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，试证 $\int_0^1dx\int_x^1dy\int_x^y f(x)f(y)f(z)dz=\dfrac{1}{3!}\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^3$

3、曲线积分

例 9 设 $f(x)$ 具有连续导数，求 $\int_L \frac{1+y^2 f(xy)}{y}dx+\frac{x\left[y^2 f(xy)-1\right]}{y^2}dy$，其中 L 是从点 $A(3,\frac{2}{3})$ 到点 $B(1,2)$ 的直线段。

【-4】

例 10 设函数 $f(u)$ 连续，C 为平面上逐段光滑的闭曲线，

证明：$\oint\limits_C f(x^2+y^2)(xdx+ydy)=0$.

例 11 设 $I_a(r)=\oint\limits_C \frac{ydx-xdy}{\left(x^2+y^2\right)^a}$，其中 a 为常数，曲线 C 为椭圆 $x^2+xy+y^2=r^2$，取正向.

求极限 $\lim\limits_{r\to+\infty} I_a(r)$.

【$I_a(r)=\begin{cases}0, a>1\\ -\infty, a<1\\ -2\pi, a=1\end{cases}$】

例 12　已知平面区域 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le\pi, 0\le y\le\pi\}$，$L$ 为 D 的正向边界，试证：

（1）$\oint_L xe^{\sin y}\mathrm{d}y-ye^{-\sin x}\mathrm{d}x=\oint_L xe^{-\sin y}\mathrm{d}y-ye^{\sin x}\mathrm{d}x$；【格林公式、对称性】

（2）$\oint_L xe^{\sin y}\boldsymbol{d}\boldsymbol{y}-ye^{-\sin x}\boldsymbol{d}\boldsymbol{x}\ge\frac{5}{2}\pi^2$.【格林公式、对称性、泰勒公式】

4、曲面积分

例 13 计算 $\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dS$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧，

$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 是其外法线向量的方向余弦.

【4π】

例 14 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{S^+}\dfrac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$，

其中 S^+ 是 $1-\dfrac{z}{7}=\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y-1)^2}{16}(z\geq 0)$ 的上侧.

【 2π 】

例 15 计算积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x-y+z)dydz+(y-z+x)dzdx+(z-x+y)dxdy$，

其中 Σ 是 $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$ 所围立体表面外侧.

【1】

例 16 试证 $\oiint\limits_{\Sigma}(x+y+z+\sqrt{3}a)dS\geq 12\pi a^3(a>0)$，

其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2-2ax-2ay-2az+2a^2=0$.

例 17 设半径为 R 的球面 Σ 的球心在定球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$ 上，问当 R 取何值时，球面 Σ 在定球内部的面积最大？

【$R=\frac{4}{3}a$】

例 18　计算$I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{2dydz}{x\cos^2 x}+\frac{dzdx}{\cos^2 y}-\frac{dxdy}{z\cos^2 z}$，其中$\Sigma$是球面$x^2+y^2+z^2=1$的外侧.

【利用轮换对称性计算，$4\pi\tan 1$】

例 19　设$\sum$为平面$x-y+z=1$介于三坐标平面间的有限部分，法向量与z轴交角为锐角，

函数$f(x,y,z)$连续，计算

$$I=\iint\limits_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]dydz+[2f(x,y,z)+y]dzdx+[f(x,y,z)+z]dxdy\ .$$

【$\frac{1}{2}$】

例 20　设Σ为$x^2+y^2+z^2=1(z\geq 0)$的外侧，连续函数$f(x,y)$满足

$$f(x,y)=2(x-y)^2+\iint\limits_{\Sigma}x(z^2+e^z)dydz+y(z^2+e^z)dzdx+[zf(x,y)-2e^z]dxdy,$$

求$f(x,y)$.

【$f(x,y)=2(x-y)^2+\frac{18\pi}{5(2\pi-3)}$】

例 21　设$\varphi(x,y,z)$为原点到椭圆面Σ: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1(a>0,b>0,c>0)$上点$(x,y,z)$处的切平面的距离，求$\iint\limits_{\Sigma}\varphi(x,y,z)dS$.

【$4\pi abc$】

例 22 设P为椭球面$S:x^2+y^2+z^2-yz=1$上的动点，若S在点P处的切平面与xoy面垂直，求点P的轨迹C，并计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{(x+\sqrt{3})\left|y-2z\right|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}dS$，其中$\Sigma$是椭球面$S$位于曲线$C$上方的部分.

【2π】

二、同步练习

1、 设 $f(x)$ 为连续**偶**函数，试证明：$\iint\limits_D f(x-y)dxdy = 2\int_0^{2a}(2a-u)f(u)du$. 其中 D 为正方形 $|x|\le a, |y|\le a(a>0)$. 【积分换元、积分换序、对称性】

2、 求二重积分 $\iint\limits_D \max\{xy,1\}dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 2, 0\le y\le 2\}$.

【$\dfrac{19}{4}+\ln 2$】

3、某物体所在的空间区域为 $\Omega: x^2+y^2+2z^2 \le x+y+2z$，密度函数为 $x^2+y^2+z^2$，求质量 $M=\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2+z^2)dxdydz$.

【三重积分的换元积分法】【$\dfrac{3+2\sqrt{2}}{6}\pi$】

4、设 $f(u)$ 具有连续导数，$\Omega: x^2+y^2+z^2 \le t^2$，求 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\pi t^4}\iiint\limits_\Omega f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})dxdydz$.

【答案：$\begin{cases} f'(0), & f(0)=0, \\ \infty, & f(0)\ne 0. \end{cases}$】

5、证明：$28\sqrt{3}\pi \le \iiint\limits_\Omega (x+y-z+10)dxdydz \le 52\sqrt{3}\pi$，其中 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le 3$.

6、设有一半径为 R 的球体，P_0 是此球的表面上的一个定点，球体上任一点的密度与该点到 P_0 距离的平方成正比（比例常数 $k>0$），求球体的质心位置.

【答案：$(-\dfrac{R}{4},0,0)$】

7、设 $f(u)$ 具有连续的一阶导数，L_{AB} 为以 $\overline{AB}$ 为直径的左上半个圆弧，从 A 到 B，其中点 $A(1,1)$，点 $B(3,3)$. 求 $\int_{L_{AB}}[\dfrac{1}{x}f(\dfrac{x}{y})+2y]dx-[\dfrac{1}{y}f(\dfrac{x}{y})+x]dy$.

【格林公式 $3\pi+4$】

8、 设 Γ 是由点 $(1,0)$ 经曲线 $y=1-x^2$ 到 $(-1,0)$ 一段弧，计算 $\int_\Gamma \dfrac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}$.

【π】

9、 设 $f(x,y)$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid x>0,y>0\}$ 处具有一阶连续偏导数，且为二次齐次函数.

试证明：对于 D 内任意分段光滑的简单封闭曲线 L 均有 $\oint_L f(x,y)(\frac{dy}{xy^2}-\frac{dx}{x^2y})=0$.

10、 设 S 为椭球面 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+z^2=1$，已知 S 的面积为 A，则第一类曲面积分 $\iint[(2x+3y)^2+(6z-1)^2]dS$.

【对称性 $37A$】

11、计算 $\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S$， 其中 Σ 为内接于球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的八面体 $|x|+|y|+|z|=a$ 表面.

【$2\sqrt{3}a^4$】

11、 计算 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$，其中 $\sum$ 为

曲面 $1-\frac{z}{5}=\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{9}(z>0)$ 的上侧.

【2π】

13、设 Σ 表示球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧位于 $x^2+y^2-x\le 0,z\ge 0$ 的部分，

计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$.

【$\frac{38}{105}+\frac{5}{32}\pi$】

14、设 S 为椭球面 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分，点 $P(x,y,z)\in S$，$\prod$ 为 S 在点 P 处的切平面，$\rho(x,y,z)$ 为点 $O(0,0,0)$ 到平面 $\prod$ 的距离，求 $\iint\limits_{S}\frac{z}{\rho(x,y,z)}dS$.

【$\frac{3\pi}{2}$】