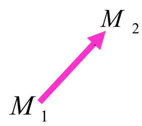
专题 6　空间解析几何

第一部分　内容概要

一、向量的基本概念与向量的运算

1. 向量的基本概念



(1) 向量：既有大小又有方向的量（或称为矢量）.

(2) 向量相等：大小相等，方向相同就是相等的向量，与其在空间的位置无关.

(3) 向量表示：黑体字母或手写体：$\vec{a}$ 或 $\overrightarrow{M_1M_2}$（以 M_1 为起点，M_2 为终点的有向线段）.

向量的坐标表示：$\vec{a}=\left(a_1,a_2,a_3\right)=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$.

(4) 向量的模、方向角与方向余弦：设 $\vec{a}=\left(a_1,a_2,a_3\right)$

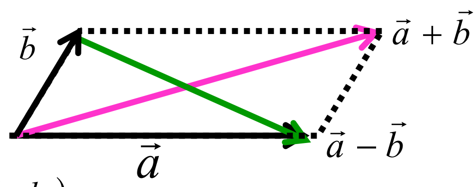
向量的模为 $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_1^{\;2}+a_2^{\;2}+a_3^{\;2}}$ ，

向量 $\vec{a}$ 的方向余弦为：$\cos\alpha=\dfrac{a_1}{\left|\vec{a}\right|}$，$\cos\beta=\dfrac{a_2}{\left|\vec{a}\right|}$，$\cos\gamma=\dfrac{a_3}{\left|\vec{a}\right|}$，

$\vec{a}^{\,0}=\left(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\right)$ 是与 $\vec{a}$ 同方向的单位向量，

$\pm\vec{a}^{\,0}=\pm\left(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\right)$ 是与 $\vec{a}$ 平行的单位向量.

2. 向量的运算及应用



(1) 向量的线性运算：加减法和数乘

加减法满足平行四边形法则

(2) 向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的数量积（内积）：设 $\vec{a}=\left(a_1,a_2,a_3\right)$，$\vec{b}=\left(b_1,b_2,b_3\right)$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle.\qquad \vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.\qquad \vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\,\vec{b}=\left|\vec{b}\right|\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\,\vec{a}.$$

(3) 向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的向量积（外积）：$\vec{a}\times\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle\vec{c}^{\,0}$，

这里 $\vec{c}^{\,0}$ 是同时垂直于 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的单位向量，且 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}^{\,0}$ 组成右手系.

$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle$ 的几何意义：以 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

设 $\vec{a}=\left(a_1,a_2,a_3\right)$，$\vec{b}=\left(b_1,b_2,b_3\right)$，则 $\vec{a}\times\vec{b}$ 的坐标计算式为：

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3&a_1\\b_3&b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\right),$$

(4) 向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的混合积为：$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$，

混合积的绝对值的几何意义：以 $\vec{a}$ ，$\vec{b}$ ，$\vec{c}$ 为邻边的平行六面体的体积.

(5) 数量积、向量积、混合积的应用

$\vec{a}\perp\vec{b}$ 的充要条件是 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$.

$\vec{a}\,||\,\vec{b}$ 的充要条件是 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$，即 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$.

三向量共面的充要条件是 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0$.

二、空间的曲面

1. 空间曲面

空间曲面的一般方程：$F(x,y,z)=0$，或 $z=f(x,y)$.

2. 球面

球面的一般方程：$x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$；

球面的标准方程：$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$，这里 (a,b,c) 为球心，R 为半径.

3. 柱面

柱面：动直线沿定曲线平行移动所形成的曲面.

(1) 方程 $F(x,y)=0$ 表示准线为 $C:\begin{cases} F(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$，母线平行于 z 轴的柱面；

(2) 方程 $G(x,z)=0$ 表示准线为 $C:\begin{cases} G(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$，母线平行于 y 轴的柱面；

(3) 方程 $H(y,z)=0$ 表示准线为 $C:\begin{cases} H(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$，母线平行于 x 轴的柱面.

三种常见柱面：椭圆柱面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$；双曲柱面：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$；抛物柱面：$y=ax^2$.

4. 旋转曲面

(1) yOz 坐标面上一条曲线 C：$f(y,z)=0$

绕 z 轴旋转一周，所得旋转曲面方程为 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$；

绕 y 轴旋转一周，则旋转曲面方程为 $f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$.

(2) xOy 坐标面上一条曲线 C： $g(x,y)=0$

绕 x 轴旋转一周，所得旋转曲面方程为 $g(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$；

绕 y 轴旋转一周，则旋转曲面方程为 $g(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)=0$.

(3) xOz 坐标面上一条曲线 C： $h(x,z)=0$

绕 x 轴旋转，所得旋转曲面方程为 $h(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$；

绕 z 轴旋转一周，则旋转曲面方程为 $h(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$.

5. 二次曲面

(1) 椭球面： $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$；　(2) 单叶双曲面： $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$；

(3) 双叶双曲面： $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$；　(4) 二次锥面： $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$；

(5) 椭圆抛物面： $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z$；　(6) 双曲抛物面： $z=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$.

三、空间的曲线

1. 空间曲线的一般式方程

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}，\text{这里曲线表示为两张曲面的交线.}$$

2. 空间曲线的参数式方程

$$x=x(t)，\quad y=y(t)，\quad z=z(t)，\quad t\in I\ \text{其中}\ t\ \text{为参数.}$$

3. 空间曲线在坐标面上的投影

设空间曲线 Γ 的一般式方程为 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$,

(1) 空间曲线 Γ 在 xOy 面上的投影曲线为： $\begin{cases}H(x,y)=0\\z=0\end{cases}$，投影柱面为： $H(x,y)=0$；

(2) 空间曲线 Γ 在 yOz 面上的投影曲线为： $\begin{cases}R(y,z)=0\\x=0\end{cases}$，投影柱面为： $R(y,z)=0$；

(3) 空间曲线 Γ 在 xOz 面上的投影曲线为： $\begin{cases}T(x,z)=0\\y=0\end{cases}$，投影柱面为：$T(x,z)=0$.

四、空间平面

1. 平面的点法式方程

过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，法向量为 $\vec{n}=\left(A,B,C\right)$ 的平面方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

2. 平面的一般式方程

$Ax+By+Cz+D=0$，这里 A，B，C 不全为 0.

特别地，(1) $D=0$，平面通过坐标原点；

(2) $A=0,\ \begin{cases} D=0, \text{平面通过} x \text{轴}; \\ D\neq 0, \text{平面平行于} x \text{轴}. \end{cases}$

同理，$B=0, C=0$ 分别表示平行于 y 轴、z 轴的平面；

(3) $A=B=0$，表示平行于 xOy 面的平面；

同理，$B=C=0$，表示平行于 yOz 面的平面；$A=C=0$，表示平行于 xOz 面的平面.

坐标面 xOy 面，yOz 面，xOz 面分别是 $z=0$, $x=0$, $y=0$.

3. 平面的截距式方程

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$，其中 a,b,c 依次叫做平面在 x,y,z 轴上的截距.

4. 点到平面的距离公式

点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为：$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

5. 两平面的夹角

平面 π_1, π_2 的法线向量分别为 $\vec{n}_1=\left(A_1,B_1,C_1\right)$ 和 $\vec{n}_2=\left(A_2,B_2,C_2\right)$，则平面 π_1,π_2 的夹角 θ 的余弦公式为：$\cos\theta=|\cos(\widehat{\vec{n}_1,\vec{n}_2})|=\dfrac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$.

特别地，(1) $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$；

(2) $\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}$；

(3) π_1 与 π_2 重合 $\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$.

五、空间直线

1. 空间直线的一般式方程

$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$，这里的直线表示为两个平面的交线.

2. 直线的对称式方程(或点向式、标准式方程)

通过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，方向向量为 $\vec{s}=(m, n, p)$ 的直线方程为：$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$.

3. 直线的参数式方程

$$x=x_0+mt,\quad y=y_0+nt,\quad z=z_0+pt.$$

4. 两直线的夹角

已知直线 L_1：$\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$ 和 L_2：$\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$，则

$$\cos\varphi=\left|\cos\left(\widehat{\vec{s}_1,\vec{s}_2}\right)\right|=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{{m_1}^2+{n_1}^2+{p_1}^2}\cdot\sqrt{{m_2}^2+{n_2}^2+{p_2}^2}}.$$

特别地：(1) $L_1\perp L_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1\perp\vec{s}_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1\cdot\vec{s}_2=0 \Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$；

(2) $L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1\times\vec{s}_2=0 \Leftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$；

(3) L_1 与 L_2 共面 $\Leftrightarrow \overrightarrow{P_1P_2},\vec{s}_1,\vec{s}_2$ 共面

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{P_1P_2}\times\vec{s}_1)\cdot\vec{s}_2=0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{P_1P_2},\vec{s}_1,\vec{s}_2)=0$$ （三向量的混合积为 0）

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0；$$

(4) L_1 与 L_2 相交 $\Leftrightarrow$ 两直线共面且 $\vec{s}_1$ 与 $\vec{s}_2$ 不平行；

(5) L_1 与 L_2 异面 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}\neq 0$.

5. 直线与平面的夹角公式

直线 $L:\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ 和平面 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ 的夹角 φ 的正弦为：

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

特别地，(1) 直线 L 与平面 π 垂直 $\Leftrightarrow \vec{s}\parallel\vec{n} \Leftrightarrow \dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}$；

(2) 直线 L 与平面 π 平行 $\Leftrightarrow \vec{s}\perp\vec{n} \Leftrightarrow Am+Bn+Cp=0$；

(3) 直线 L 在平面 π 上 $\Leftrightarrow$ $Am+Bn+Cp=0$ 且直线 L 上至少有一点满足平面方程.

6. 平面束问题

设直线 L 的一般式方程为：$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$（其中 A_1,B_1,C_1 与 A_2,B_2,C_2 不成比例），

通过定直线的所有平面的全体称为平面束.

平面束的两种表示（注意两种方程表示的差异）

(1) 建立三元一次方程 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda\left(A_2x+B_2y+C_2z+D_2\right)=0$（其中 λ 为任意常数），

方程整理得　$\left(A_1+\lambda A_2\right)x+\left(B_1+\lambda B_2\right)y+\left(C_1+\lambda C_2\right)z+D_1+\lambda D_2=0$

(2) 建立三元一次方程：$\lambda\left(A_1x+B_1y+C_1z+D_1\right)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$（其中 λ，μ 为任意常数），

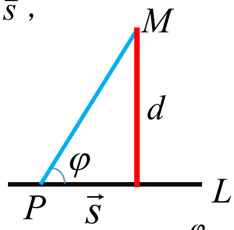
方程整理得 $(A_1+\lambda A_2)x+(B_1+\lambda B_2)y+(C_1+\lambda C_2)z+D_1+\lambda D_2=0$

7. 点到直线的距离

设直线 L 通过点 P，方向向量为 $\vec{s}$，则点 M 到直线 L 的距离为：$d=\dfrac{\left|\overrightarrow{PM}\times\vec{s}\right|}{|\vec{s}|}$.

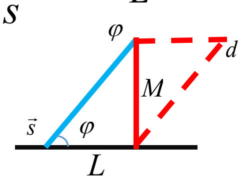
问题：设直线 L 通过点 P，点 M 是直线外一点，且直线的方向向量为 $\vec{s}$，

讨论：点 M 到直线 L 的距离.



解：$d=\left|\overrightarrow{PM}\right|\cdot\sin\varphi$　，其中 φ 是直线 PM 与直线 L 的夹角.

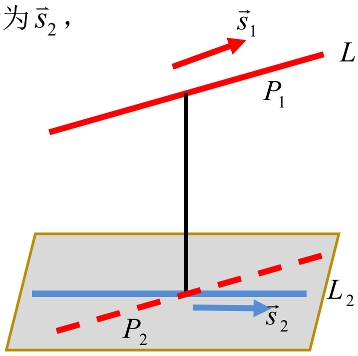
$\sin\varphi=\dfrac{\left|\overrightarrow{PM}\times\vec{s}\right|}{\left|\overrightarrow{PM}\right|\cdot|\vec{s}|}$,所以，$d=\dfrac{\left|\overrightarrow{PM}\times\vec{s}\right|}{|\vec{s}|}$　（点到直线的距离公式）



注：$d\cdot|\vec{s}|=\left|\overrightarrow{PM}\times\vec{s}\right|$ 表示以向量 $\overrightarrow{PM}$，$\vec{s}$ 为相邻两边的平行四边形的面积.

8. 异面直线的距离

设直线 L_1 过点 P_1，方向向量为 $\vec{s}_1$；直线 L_2 过点 P_2，方向向量为 $\vec{s}_2$，



则直线 L_1 与 L_2 的距离为：$d=\dfrac{\left|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\left(\vec{s}_1\times\vec{s}_2\right)\right|}{\left|\vec{s}_1\times\vec{s}_2\right|}$.**（公垂线长度）**

思路：线线距离转化为线面距离转化为点面距离.

证明：构造一平面过直线 L_2 且与直线 L_1 平行，

则该平面法向量可取 $\vec{n}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=(A,B,C)$.

平面方程为 $A(x-x_2)+B(y-y_2)+C(z-z_2)=0$.

L_1,L_2 的距离 $\Leftrightarrow$ L_1 与平面的距离 $\Leftrightarrow$ 点 P_1 到平面的距离 $d=\dfrac{\left|A(x_1-x_2)+B(y_1-y_2)+C(z_1-z_2)\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

第二部分　典型例题

一、向量运算

解题提示：向量的线性运算，向量积，数量积，混合积以及模与夹角.

例 1 设 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 是非零向量，$\left|\vec{b}\right|=2$，$\left\langle \vec{a},\vec{b}\right\rangle=\dfrac{\pi}{3}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left|\vec{a}+x\vec{b}\right|-\left|\vec{a}\right|}{x}=$______.

【1】

例 2 设 $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=1$，$\left\langle \vec{a},\vec{b}\right\rangle=\dfrac{\pi}{4}$，以 $\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}-\vec{b}$ 为邻边的平行四边形的面积是____.(2014 省赛)

【$\sqrt{2}$】

例 3 已知点 $A(1,0,0)$ 和点 $B(0,2,1)$，试求 z 轴上一点 C，使得 ΔABC 的面积最小.

【$C(0,0,\dfrac{1}{5})$】

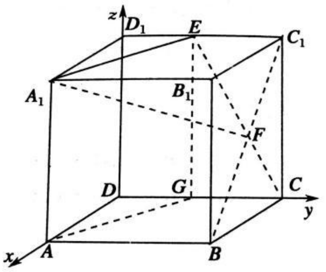
例 4 设向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 不共面，且 $\vec{d}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$ ，如果 $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ 有公共起点，问系数 α,β,γ 应满足什么条件，才能使向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ 的终点在同一平面上？

【$\alpha+\beta+\gamma=1$】

例 5 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 边长为 2，E 为 D_1C_1 的中点，F 为侧面正方形 BCC_1B_1 的中点，

(1) 试求过点 A_1,E,F 的平面与底面 $ABCD$ 所成二面角的值；

(2) 试求过点 A_1,E,F 的平面截正方体所得到的截面的面积.（2010 省赛）



【(1) $\theta=\arccos\dfrac{3}{\sqrt{14}}$；(2) $\sqrt{14}$】

二、空间直线与平面

解题提示：

(1) 建立平面方程及直线方程，主要是利用已知条件寻找平面法向量及直线方向向量；

(2) 线面，线线垂直或平行的关系下，建立相应的等量关系；

(3) 所求向量垂直于两个已知向量，构造向量积是最方便的手段；

(4) 经过已知直线的平面问题可以使用平面束方法；

(5) 与已知直线相交，利用直线的参数式方程设交点坐标，通常是很有效的解题手段；

(6) 熟记点到平面距离公式，掌握点到直线距离及异面直线距离的计算思路.

例 6 求两个平面 $\pi_1: 3x - z + 12 = 0$ 和 $\pi_2: 2x + 6y + 17 = 0$ 所构成的二面角的平分面的方程.

【$4x - 6y - 2z + 7 = 0$ 和 $8x + 6y - 2z + 41 = 0$】

例 7 设直线 $L_1: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z}{-1}, L_2: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-1}{1}$，判断两直线是否为异面直线，若是，求两条直线之间的距离.

【$d = \dfrac{2}{\sqrt{11}}$】

例 8 已知点 $P(1,0,-1)$ 与 $Q(3,1,2)$，在平面 $x-2y+z=12$ 上求一点 M，使得 $|PM|+|MQ|$ 最小.（2004 省赛）

【$M=(\frac{27}{7},-\frac{20}{7},\frac{17}{7})$】

例 9 在平面 $\Pi: x+2y-z=20$ 内作一直线 Γ，使直线 Γ 过另一直线 $L:\begin{cases} x-2y+2z=1 \\ 3x+y-4z=3 \end{cases}$ 与平面 Π 的交点，且 Γ 与 L 垂直，求直线 Γ 的参数方程.

【$x=7+24t, y=10-13t, z=7-2t$】

例 10 设直线 $\begin{cases} x+2y-3z=2 \\ 2x-y+z=3 \end{cases}$ 在平面 $z=1$ 上的投影为直线 L，求点 $P(1,2,1)$ 到直线 L 的距离.

【$\frac{3}{5}\sqrt{2}$】

例 11 记曲面 $z=x^2+y^2-2x-y$ 在区域 $D:x\ge 0,y\ge 0,2x+y\le 4$ 上的最低点 P 处的切平面 Π，曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\ x+y+z=0\end{cases}$ 在点 $(1,1,-2)$ 处的切线为 l，求点 P 到 l 在 Π 上的投影 l' 的距离 d.

【$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$】

三、空间曲面与曲线

解题提示：

(1) 球面问题的讨论.（球心在球面上任意两点的垂直平分面上）

(2) 旋转曲面、锥面、柱面方程问题，利用轨迹法求解，注意曲面特征.

(3) 空间曲线投影问题，注意方法的掌握.

例 12 已知点 $A(1,2,-1),B(5,-2,3)$ 在平面 $\Pi:2x-y-2z=3$ 的两侧,过点 A,B 作球面 Σ 使其在平面 Π 上截得的圆 Γ 最小.

(1) 求球面 Σ 的球心坐标与该球面的方程；

(2) 证明:直线 AB 与平面 Π 的交点是圆 Γ 的圆心.（2012 省赛）

【(1) $O(8,-2,-6)$，$(x-8)^2+(y+2)^2+(z+6)^2=90$；(2)略】

例 13 设Γ：$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+4x-4y+2z=0 \\ 2x+y-2z=k \end{cases}$，(1) 当$k$为何值时$\Gamma$为一圆？(2) 当$k=6$时，求$\Gamma$的圆心和半径.

【(1) $-9<k<9$；(2)圆心为$(-\frac{2}{3},\frac{8}{3},-\frac{7}{3})$，半径$r=\sqrt{5}$】

例 14 已知直线$L:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$在平面$\pi:x+y+z-2=0$上的投影为直线$L_1$，

(1) 求直线L_1的方程；(2) 求直线L_1绕着直线L旋转所得到的圆锥面的方程.（2021 省赛）

【(1) $\begin{cases} x-y-1=0 \\ x+y+z-2=0 \end{cases}$；(2) $5x^2+5y^2+5z^2-6xy+6xz+6yz-16x-16z+16=0$】

例 15 求以点 $A(0,0,1)$ 为顶点，以椭圆 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1 \\ z=3 \end{cases}$ 为准线的锥面的方程.

【$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{(z-1)^2}{4}=0$】

例 16 设向量 $\vec{s}=(1,1,-1)$，球面 Σ 为 $x^2+y^2+z^2=2z$，若 Σ 不是透明的，平行于向量 $\vec{s}$ 的平行光从球面上方照射到球面上，此球面在 xOy 面留下的阴影区域为 D.

(1) 求 D 的形心坐标；(2) 求 D 的边界方程.　　(2022 省赛)

【$\begin{cases} x^2+y^2-xy-x-y=\dfrac{1}{2} \\ z=0 \end{cases}$】

例 17 1) 证明曲面$\Sigma: x=(b+a\cos\theta)\cos\varphi, y=a\sin\theta, z=(b+a\cos\theta)\sin\varphi$

（$0\quad\theta\quad 2\pi, 0\quad\varphi\quad 2\pi$）($0<a<b$)为旋转曲面；

2) 求旋转曲面Σ所围成立体的体积.　　（2008 省赛）

【$(\sqrt{x^2+z^2}-b)^2+y^2=a^2$；$2\pi^2a^2b$】

例 18 设一球面的方程为$x^2+y^2+(z+1)^2=4$，从原点向球面上任一点P处的切平面作垂线，垂足为Q.当点P在球面上连续变动时，点Q的轨迹形成一个封闭曲面Σ，试写出曲面Σ的方程，并求出它所围成的立体区域Ω的体积.

【$(x^2+y^2+z^2+z)^2=4(x^2+y^2+z^2), V=\dfrac{40}{3}\pi$】

第三部分 强化练习

1. 求过点 $A(0,3,3)$, $B(-1,3,4)$,且中心在直线 $\begin{cases} 2x+4y-z-7=0 \\ 4x+5y+z-14=0 \end{cases}$ 上的球面方程.

2. 已知点 $A\left(-4,0,0\right), B(0,-2,0), C(0,0,2)$,O 为坐标原点，求四面体 $OABC$ 的外接球面方程.

3. 证明：空间曲线 $\Gamma: x=P(t), y=Q(t), z=R(t), a\le t\le b$ 绕 z 轴旋转一周所得旋转曲面的参数方程为 $\begin{cases} x=\sqrt{P^2(t)+Q^2(t)}\cos\theta \\ y=\sqrt{P^2(t)+Q^2(t)}\sin\theta, a\le t\le b, 0\le\theta\le 2\pi \\ z=R(t) \end{cases}$ ·

4. 设有直线 L_1 和 L_2 的方程分别为：$L_1: \dfrac{x+2}{0}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+9}{8}$，$L_2: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+6}{2}=\dfrac{z+4}{12}$，

(1) 证明 L_1 与 L_2 异面；

(2) 求两直线之间的距离；
(3) 求与两直线距离相等的平面方程；
(4) 求与两直线都垂直相交的直线方程.

5. 已知准线方程为 $\begin{cases} x+y-z-2=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$，母线平行于直线 $x=y=z$ ，求此柱面方程.

6. 求空间曲线 $\Gamma: x=\cos t, y=\sin t, z=1, 0\le t\le 2\pi$ 在平面 $\pi: x+y+z+2=0$ 上的投影曲线方程.

7. 求直线 $L: \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{3}=z+1$ 绕直线 $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ 旋转一周所产生的旋转曲面方程.

8. 证明：到定直线及该直线上一定点的距离平方和是常数的动点的轨迹是一个旋转曲面.

9. 一平面通过点 $\left(1,2,3\right)$，它在正 x 轴、y 轴上的截距相等，问当平面的截距为何值时，它与三个坐标面围成立体体积最小？并写出此平面方程.

10. 设直线 L 在平面 $\pi: x+y+z=0$ 上且与直线 $l_1: \begin{cases} x+y=1 \\ x-y+z=-1 \end{cases}$　$l_2: \begin{cases} 2x-y+z=1 \\ x+y-z=-1 \end{cases}$ 都相交，求该直线的方程.

11. 一动直线 L 沿直线 $l_1: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z}{-1}$，　$l_2: \dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$，$l_3: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{0}=\dfrac{z}{1}$ 滑动，求动直线 L 的轨迹方程，并判定生成曲面的类型.

12. 设 P 为曲面 $S: x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的动点，若 S 在点 P 处的切平面总与 xOy 平面垂直，

(1) 求点 P 的轨迹 C 的方程；
(2) 说明 C 是平面封闭曲线，并求该 C 在平面上所围成的区域的面积.

13. 已知 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，$\angle ADB=\dfrac{\pi}{2}$，其中 D 在 AC 上，

(1) 证明 ΔBAD 的面积 $S_{\Delta BAD}=\dfrac{\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}{2\left|\vec{b}\right|^2}$；

(2) 当 $\vec{a},\vec{b}$ 间的夹角为何值时，ΔBAD 的面积最大，并求最大面积值.

14. 求经过三条平行直线 $L_1:x=y=z$，$L_2:x-1=y=z+1$，$L_3:x=y+1=z-1$ 的圆柱面的方程.

15. 已知有五个平面 $\pi_1:3x+y-z=1$，$\pi_2:x-y+2z=1$，$\pi_3:-x+7y+4z=1$，$\pi_4:3x+y-z=-1$，$\pi_5:x-y+2z=-1$，(1) 说明存在平面 π_6 使得这六个平面可以围成一个长方体，并求出使得这六个平面所围长方体体积为 4 的平面；(2) 给出判断某点 $P\left(x_0,y_0,z_0\right)$ 恰好落入所得长方体内部的判别条件.

【参考答案】

1. $\left(x+1\right)^2+\left(y-3\right)^2+(z-3)^2=1$；　2. $(x+2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=6$；　3. 略；

4. (1)略；(2)9；(3) $4x-8y+z-\dfrac{15}{2}=0$；(4) $\dfrac{x+2}{4}=\dfrac{y-4}{-8}=\dfrac{z-7}{1}$；　5. $y-z-1=0$；

6. $\begin{cases}\left(x-z+1\right)^2+\left(y-z+1\right)^2=1\\ x+y+z+2=0\end{cases}$；　7. $\left(x-2\right)^2+\left(y-3\right)^2=\left(2z+3\right)^2+\left(3z+1\right)^2$；

8. 略；　9. 截距为 $9/2,9/2,9$ 时，体积最小；$2x+2y+z-9=0$；

10. $\dfrac{x-1/2}{1}=\dfrac{y-1/2}{2}=\dfrac{z+1}{-3}$；　11. $\dfrac{x^2}{4}+y^2-z^2=1$，单叶双曲面；

12 (1) $C:\begin{cases}2z-y=0\\ x^2+\dfrac{3}{4}y^2=1\end{cases}$；(2) $\sqrt{\dfrac{5}{3}}\pi$；

13(1) 略；(2) $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 或 $\theta=\dfrac{3\pi}{4}$ 时，ΔBAD 的面积最大，最大值为 $\dfrac{1}{4}\left|\vec{a}\right|^2$；

14. $x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz-3x+3y=0$；

15(1) $\pi_6:-x+7y+4z-1=\pm 66$；

(2) $\begin{cases}\left(3x_0+y_0-z_0-1\right)\left(3x_0+y_0-z_0+1\right)<0\\ \left(x_0-y_0+2z_0-1\right)\left(x_0-y_0+2z_0+1\right)<0\\ \left(-x_0+7y_0+4z_0-1\right)\left(-x_0+7y_0+4z_0-67\right)<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\left(3x_0+y_0-z_0-1\right)\left(3x_0+y_0-z_0+1\right)<0\\ \left(x_0-y_0+2z_0-1\right)\left(x_0-y_0+2z_0+1\right)<0\\ \left(-x_0+7y_0+4z_0-1\right)\left(-x_0+7y_0+4z_0+65\right)<0\end{cases}$.