《高等数学 I-2》（理工）期末试卷 B 卷参考答

一、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1. $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{1}$；　　2. $e^2(2dx+dy)$；　　3. $\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi$；

4. $y^*=x(ax+b)$；　　5. $\int_1^4 dy\int_{\sqrt{y}}^2 f(x,y)dx$；

6. 0， $n=1,2,\cdots$（注：仅填0给全分）.

二、选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1. (B)；　2. (C)；　3. (A)；　4. (A)；　5. (B)；　6. (B).

三、计算题（每小题 6 分，共 30 分）

1. 已知 $z=x^4+y^4-4x^2y^2$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$， $\frac{\partial z}{\partial y}$， $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=4x^3-8xy^2$，　--------2 分

$\frac{\partial z}{\partial y}=4y^3-8x^2y$，　--------4 分

$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-16xy$.　--------6 分

2. 求 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中 D 是由圆周所围成的闭区域： $x^2+y^2\le 1$.

解：$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^2 d\rho$　--------3 分

$=2\pi\left(\frac{\rho^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{2\pi}{3}$.　--------6 分

3. 求 $\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)dxdydz$，其中 Ω 为曲面 $x^2+y^2=2z$ 和平面 $z=2$ 所围成的区域.

解：$\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 d\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^2\rho^3dz$　--------2 分

$$=2\pi\int_0^2 \rho^3(2-\frac{\rho^2}{2})\ d\rho=\frac{16\pi}{3}.$$ --------6 分

4. 求 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在点 $A(1,0,1)$ 处，沿 A 指向点 $B(3,-2,2)$ 方向的方向导数.

解：函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在点 $A(1,0,1)$ 处可微，且

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_A=\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\Big|_{(1,0,1)}=\frac{1}{2};\quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_A=\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}\Big|_{(1,0,1)}=0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_A=\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}\Big|_{(1,0,1)}=\frac{1}{2};$$ --------3 分

而 $\vec{l}=\overrightarrow{AB}=(2,-2,1)$，$\vec{l}^{\,0}=(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3})$，故在 A 点沿 $\vec{l}=\overrightarrow{AB}$ 方向的方向导数为：

$$\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_A=\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_A\cdot\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_A\cdot\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_A\cdot\cos\gamma$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+0\cdot(-\frac{2}{3})+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}.$$ --------6 分

5. 求微分方程 $y'+\frac{y}{x}=x^2+1$ 的通解.

解：通解为 $y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left[\int(x^2+1)e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+c_1\right]$ --------3 分

$$=e^{-\ln|x|}\left[\int(x^2+1)e^{\ln|x|}dx+c_1\right]=\frac{1}{|x|}\left[\int(x^2+1)|x|dx+c_1\right]$$

$$=\frac{1}{x}\left[\int(x^2+1)xdx+c\right]=\frac{1}{x}\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+c\right)$$

$$=\frac{x^3}{4}+\frac{x}{2}+\frac{c}{x}.$$ --------6 分

四、(**本题满分 6 分**) 求函数 $f(x,y)=2x^2-xy+3y^2+5$ 的极值.

解：由 $\begin{cases}f_x=4x-y=0\\ f_y=-x+6y=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$； --------2 分

$A=f_{xx}=4>0$，$B=f_{xy}=-1$，$C=f_{yy}=6$； --------4 分

$\Delta=AC-B^2=23>0$，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值 $f(0,0)=5$，

无极大值. --------6 分

五、（**本题满分 6 分**）将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$ 展开成 x 的幂级数.

解： $f'(x)=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)'=\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$， $|x|<1$；　　　--------3 分

又 $f(0)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}\Big|_{x=0}=\dfrac{\pi}{4}$， 则

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\int_0^x\left(\arctan\frac{1+t}{1-t}\right)'dt=\frac{\pi}{4}+\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}dt$$

$$=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^{2n}dt=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\text{ ， } |x|<1.$$　　　--------6 分

六、（**本题满分 6 分**）计算曲面积分 $\oiint\limits_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$，其中 Σ 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0$， $z=3$ 所围成的空间闭区域 Ω 的边界曲面的外侧.

解：利用高斯公式把所给曲面积分化为三重积分，再利用柱面坐标计算

$$\oiint\limits_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz=\iiint\limits_{\Omega}(y-z)dxdydz$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(r\sin\theta-z)rdrd\theta dz$$　　　--------4 分

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_0^3(r\sin\theta-z)dz=-\frac{9\pi}{2}.$$　　　--------6 分

七、（**本题满分 8 分**）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n!}x^n$ 的和函数.

解法一：由 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2\cdot\dfrac{1}{n+1}=0$，得收敛半径为 $R=+\infty$，

故幂级数的收敛域为 $(-\infty,+\infty)$；　　　--------2 分

设 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n!}x^n=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n-1)!}x^{n-1}=xf(x)$， $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n-1)!}x^{n-1}$，　　　--------4 分

$$\int_0^x f(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}\int_0^x x^{n-1}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=xe^x;$$

$f(x)=(xe^x)'=(x+1)e^x$， $s(x)=x(x+1)e^x$， $x\in(-\infty,+\infty)$.　　　--------8 分

解法二：由 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2\cdot\dfrac{1}{n+1}=0$，得收敛半径为 $R=+\infty$，

故幂级数的收敛域为$(-\infty,+\infty)$； --------2 分

设$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1+1}{(n-1)!}x^n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^n$

$=x^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}x^{n-2}+x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}$ --------6 分

$=x^2e^x+xe^x=x(x+1)e^x$，

则$s(x)=x(x+1)e^x$， $x\in(-\infty,+\infty)$． --------8 分

八、（**本题满分 8 分**） 设$f(x)$连续且满足$f(x)=e^x+\int_0^x(x-t)f(t)dt$，求$f(x)$．

解：对原方程求导得： $f'(x)=e^x+\left[x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt\right]'=e^x+\int_0^x f(t)dt$，

$f''(x)-f(x)=e^x$，且$f(0)=f'(0)=1$； --------3 分

特征方程为： $r^2-1=0$，得特征根为： $r_1=1$， $r_2=-1$；

设特解$y^*=axe^x$，代入方程得$a=\frac{1}{2}$；

则通解为$f(x)=C_1e^{-x}+C_2e^x+\frac{1}{2}xe^x$， --------6 分

$f'(x)=-C_1e^{-x}+C_2e^x+\frac{1}{2}(x+1)e^x$；

又$f(0)=f'(0)=1$，解得： $c_1=\frac{1}{4}$， $c_2=\frac{3}{4}$；

则所求函数为$f(x)=\frac{1}{4}e^{-x}+\frac{1}{2}(\frac{3}{2}+x)e^x$． --------8 分

注：有的题目有多种解法，解答过程难免有误，给分不一定合理，以上解答和评分仅供参考。