高等数学 I-1 综合练习1

一、填空题

1. 函数 $y=\mathrm{e}^{-x^2}$ 的凸区间是 ________.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\ln(1+x)}{\tan x - x}=$ ________. 等价无穷小替换+洛必达法则

3. 曲线 $y=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ 在 $x\in[0,3]$ 上的弧长为 ________. (定积分应用求弧长) $ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx=\sqrt{1+x}\,dx$

4. 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上可导，$f'(\mathrm{e}^x+1)=3\mathrm{e}^{2x}$，则 $f(x)=$ ________. "先换元再积分"

5. 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 在点 $\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 处的切线斜率是 ______. 导数的几何意义

二、选择题

1. 下列定积分为 0 的是 (D). "偶倍奇零"

(A) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^2+x)\sin x\,\mathrm{d}x$;　(B) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\,\mathrm{d}x$; 偶函数

(C) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}x\arcsin x\,\mathrm{d}x$; 偶函数　(D) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. 奇函数

2. 若 $f(x)$ 的导函数是 $\mathrm{e}^{-x}+\cos x$，则 $f(x)$ 的一个原函数为 (　　).

(A) $\mathrm{e}^{-x}-\cos x$;　(B) $-\mathrm{e}^{-x}+\sin x$;　(C) $-\mathrm{e}^{-x}-\cos x$;　(D) $\mathrm{e}^{-x}+\sin x$.

3. 设 $f(x)$ 连续，则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_0^x tf(x^2-t^2)\,\mathrm{d}t=$ (B).

令 $x^2-t^2=u$ (换元) 则 $-2t\,dt=du$

$\displaystyle\int_0^x tf(x^2-t^2)dt=-\int_{x^2}^{0}\frac{1}{2}f(u)\,du=\int_0^{x^2}\frac{1}{2}f(u)\,du$

(A) $\dfrac{1}{2}f(x^2)$;　(B) $xf(x^2)$;　(C) $2xf(x^2)$;　(D) $-2xf(x^2)$.

$\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\frac{1}{2}f(u)\,du=\frac{1}{2}f(x^2)\cdot 2x$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\mathrm{e}^t(1+t)\,\mathrm{d}t}{x\tan x}$ 的值为 (　　). (积分上限函数)

(A) 0;　(B) 1;　(C) 2;　(D) ∞.

5. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}=2$，则在点 x_0 处 $f(x)$ (C).

由局部保号性，可知 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}>0\Rightarrow f(x)-f(x_0)>0$

(A) 可导且 $f'(x_0)\neq 0$;　(B) 不可导;　(C) 取得极小值;　(D) 取得极大值.

三、解答题

1. $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{e}^{2x}+\sin x)^{\frac{1}{2x}}$. ($1^\infty$ 型)

法一. "凑重要极限2"

$$原式=\lim_{x\to 0}\left[(1+e^{2x}+\sin x-1)^{\frac{1}{e^{2x}+\sin x-1}}\right]^{\frac{e^{2x}+\sin x-1}{2x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}+\sin x-1}{2x}}$$

分拆

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}}$$

$$=e^{\frac{3}{2}}$$

法二. "e指数"

$$原式=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{2x}\ln(e^{2x}+\sin x)}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(e^{2x}+\sin x)}{2x}}\ (\tfrac{0}{0}型)$$

洛

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^{2x}+\cos x}{2(e^{2x}+\sin x)}}$$

$$=e^{\frac{3}{2}}$$

2. $\int \frac{x}{x+\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x.$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x.$

法一. 原式 $=\int \frac{x(x-\sqrt{x^2-1})}{x^2-(x^2-1)}dx$ （根式有理化）

$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}\int \sqrt{x^2-1}\, d(x^2-1)$

$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot(x^2-1)^{\frac{3}{2}} + C$

$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{2}} + C$

原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x(1-\sin x)}{1-\sin^2 x}dx$ （分子分母同乘 $1-\sin x$）

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\, dx$

凑微分　平方关系

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-1}{\cos^2 x} d\cos x - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x - 1)\, dx$

$= \frac{1}{\cos x}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - [\tan x - x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 2 + \frac{\pi}{4}$

法二. 三角代换 令 $x=\sec t$

$x>1$ 时，令 $x=\sec t$　$t\in(0,\frac{\pi}{2})$　原式 $=\int \frac{\sec t}{\sec t+\tan t}\cdot\sec t\cdot\tan t\, dt$

$= \int \frac{\sin t}{(1+\sin t)\cos^2 t}dt = \int \frac{\sin t(1-\sin t)}{\cos^4 t}dt$ （较麻烦. 不推荐）

4. $\int_2^4 x\ln x\,\mathrm{d}x.$

$= \int_2^4 \ln x\, d\frac{x^2}{2}$ （分部积分）

$= \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_2^4 - \int_2^4 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx$

$= 14\ln 2 - \frac{1}{4}x^2\Big|_2^4$

$= 14\ln 2 - 3$

5. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x.$

三角代换. 反常积分

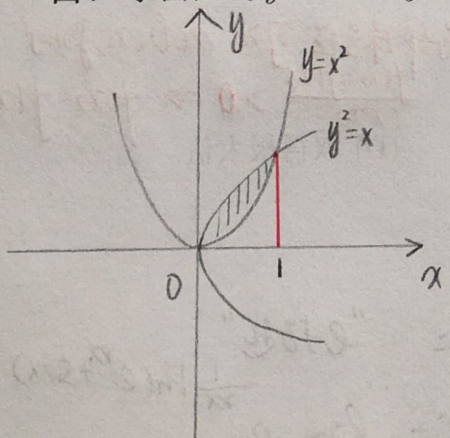
令 $x=\tan t$.

原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sec^4 t}\cdot\sec^2 t\, dt$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt$

华里士公式 $= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$

四、 求由曲线 $y=x^2$ 和 $y^2=x$ 所围图形绕 x 轴旋转一周所生成的旋转体体积 V. （定积分应用）



$V_x = \int_0^1 \pi \overset{y^2=x}{y^2}\, dx - \int_0^1 \pi\cdot(x^2)^2\, dx$

$= \int_0^1 \pi x\, dx - \int_0^1 \pi x^4\, dx$

$= \frac{3}{10}\pi$

五、 求抛物线 $y=x^2$ 与直线 $3x-4y=2$ 的距离最近的点. (最值问题)

令抛物线上任一点 (x,y). 则 $y=x^2$

点到直线距离 $d=\dfrac{|3x-4y-2|}{\sqrt{9+16}}=\dfrac{|3x-4x^2-2|}{5}$

即求 $f(x)=(3x-4x^2-2)^2$ 的最值.

$f'(x)=2(3x-4x^2-2)(3-8x)$

令 $f'(x)=0$ 则 $x=\frac{3}{8}$ (唯一驻点) 所以所求点为 $\left(\frac{3}{8},\frac{9}{64}\right)$

六、 已知 $f''(x)$ 连续, 且 $f(0)=1, f(2)=3, f'(2)=5$, 求 $\displaystyle\int_0^1 xf''(2x)\,\mathrm{d}x$.

$$\int_0^1 xf''(2x)dx \overset{\text{换元}}{\underset{2x=t}{=\!=}} \int_0^2 \frac{t}{2}f''(t)d\frac{t}{2}=\frac{1}{4}\int_0^2 tf''(t)dt$$

分部积分

$$\overset{\text{凑微分}}{=\!=}\frac{1}{4}\int_0^2 t\,df'(t)=\frac{1}{4}tf'(t)\Big|_0^2-\frac{1}{4}\int_0^2 f'(t)dt$$

$$=\frac{1}{2}f'(2)-\frac{1}{4}f(t)\Big|_0^2$$

$$=\frac{1}{2}f'(2)-\frac{1}{4}f(2)+\frac{1}{4}f(0)$$

$$=2$$

七、 设 $f(x)$ 是奇函数, 在 $[-1,1]$ 上可导, 且 $f(1)=1$, 证明: 至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使 $f'(\xi)=1$ 成立.

分析: $f'(\xi)=1 \Longleftrightarrow [f'(x)-1]_{x=\xi}=0 \Longleftrightarrow [f(x)-x]'=0$ 即寻找导函数的零点.

法1. 证明: 令 $F(x)=f(x)-x$, 则其在 $[-1,1]$ 上可导.

$F(1)=f(1)-1=0$

$f(x)$ 是奇函数 $\Rightarrow f(0)=0 \Rightarrow F(0)=0$

由 Rolle Th 可知, 存在 $\exists\,\xi\in(0,1)\to F'(\xi)=0$ 即 $f'(\xi)=1$

法2. 利用拉格朗日中值定理. $\exists\,\xi\in(0,1)\to f'(\xi)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=1$

 奇函数 $\Rightarrow f(0)=0$

八、设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, $F(1)=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$, 若当 $x>0$ 时, 有 $f(x)F(x)=\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}$, 试求 $f(x)$.

$\int f(x)dx = F(x)+C \Rightarrow f(x)=F'(x)$

对 $f(x)F(x)=\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}$ 两边同时积分

$\int F'(x)F(x)dx = \int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$

其中 $\int F'(x)F(x)dx \overset{凑微分}{=} \int F(x)dF(x) = \frac{1}{2}F^2(x)+C$

$\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx \xlongequal[令\sqrt{x}=t]{根式代换} \int \frac{\arctan t}{t(1+t^2)}\cdot 2t\,dt = 2\int \arctan t\, d\arctan t$

$= (\arctan t)^2 + C = (\arctan\sqrt{x})^2 + C$

$F(1)=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$ $\quad\therefore F(x)>0$

$\therefore F(x)=\sqrt{2}\arctan\sqrt{x}+C$ 且 $C=0$

$\therefore F(x)=\sqrt{2}\arctan\sqrt{x}$

$f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}(1+x)}$

参考答案 1

一、填空题 1. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. 2. 3. 3. $\frac{14}{3}$. 4. $(x-1)^3+C$.

5. $-\frac{b}{a}$.

二、选择题 D. A. B. B. C.

三、1. $e^{\frac{3}{2}}$. 2. $\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{2}}+C$. 3. $\frac{\pi}{4}-2+\sqrt{2}$. 4. $14\ln 2-3$.

5. $\frac{\pi}{4}$.

四、$\frac{3}{10}\pi$. 五、$\left(\frac{3}{8},\frac{9}{64}\right)$. 六、2.

七、提示: 构造辅助函数利用罗尔定理.

八、$F(x)=\sqrt{2}\arctan\sqrt{x}$, $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}(1+x)}$.