一、填空题

1、$e^{\frac{\pi}{2}}$　　2、$\dfrac{2}{\ln 3}$　　3、$-\dfrac{f''(x)}{\left[f'(x)\right]^3}$.　　4、$\dfrac{x}{x-\mathrm{e}^x}+C$.　　5、36.　　6、$\dfrac{\pi^2}{64}+\dfrac{\pi}{16}-\dfrac{1}{8}$.

二、选择题

1-6:　C　C　B　C　B　A

三、解答题

1、解：原式 $\overset{t=\sin x}{=} \lim\limits_{t\to 0}\left[\dfrac{1}{f(t)}-\dfrac{1}{f'(0)\cdot t}\right]=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t\cdot f'(0)-f(t)}{t\cdot f'(0)\cdot f(t)}$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{f'(0)}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{tf'(0)-f(t)}{tf(t)}=\frac{1}{f'(0)}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{f'(0)-f'(t)}{f(t)+tf'(t)}=\frac{1}{f'(0)}\lim_{t\to 0}\frac{-f''(t)}{2f'(t)+tf''(t)}$$

$$=\frac{1}{f'(0)}\cdot\frac{-f''(0)}{2f'(0)}=-\frac{1}{\left[f'(0)\right]^2}$$

2、解：（1）当$x\neq 0$时，由方程得

$\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\dfrac{3}{2}a$，则$\left[\dfrac{f(x)}{x}\right]'=\dfrac{3}{2}a$，

积分得：$f(x)=\dfrac{3}{2}ax^2+Cx$，

又由$2=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\dfrac{3}{2}ax^2+Cx\right)\mathrm{d}x=\dfrac{a}{2}+\dfrac{C}{2}$，解得$C=4-a$，故

$f(x)=\dfrac{3}{2}ax^2+(4-a)x$.

(2) 旋转体体积$V=\int_0^1\pi f^2(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{3}\left(\dfrac{1}{10}a^2+a+16\right)$,

令$V'=\dfrac{\pi}{3}\left(\dfrac{1}{5}a+1\right)=0$，得$a=-5$，又$V''\Big|_{a=-5}=\dfrac{\pi}{15}>0$,

$\therefore$ $a=-5$为唯一极小值点，因此 $a=-5$时 V 取最小值.

3、证明：（1）$a_{n+1}-a_n=\int_0^1 x^n(x-1)\sqrt{1-x^2}\,dx<0$，所以数列$\{a_n\}$单调递减.

$n\geq 2$时，$a_n=-\dfrac{1}{3}\int_0^1 x^{n-1}\mathrm{d}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}=-\dfrac{1}{3}x^{n-1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1+\dfrac{n-1}{3}\int_0^1 x^{n-2}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$

$$=\frac{n-1}{3}\int_0^1 x^{n-2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(1-x^2)\mathrm{d}x=\frac{n-1}{3}a_{n-2}-\frac{n-1}{3}a_n.$$

所以 $a_n = \dfrac{n-1}{n+2} a_{n-2} \left(n = 2,3,\cdots\right)$.

（2）因为 $\dfrac{n-1}{n+2} < \dfrac{a_n}{a_{n-1}} < 1$，

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n+2} = 1$，由夹逼准则可得 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = 1$.

4、**解：** 由方程得 $3f(-\dfrac{1}{x}) + \dfrac{4}{x^2} f(x) - 7x = 0,$

由题目条件及上式可消去 $f(-\dfrac{1}{x})$，得 $f(x) = 4x^3 + \dfrac{3}{x},$

由 $f'(x) = 12x^2 - \dfrac{3}{x^2} = \dfrac{12(x^4 - \frac{1}{4})}{x^2}$ 得可能得极值点 $x = 0, \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2},$

$(-\infty, -\dfrac{\sqrt{2}}{2})$ 上单增，$(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ 上单减，$(0, \dfrac{\sqrt{2}}{2})$ 上单减，$(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$ 单增

极大值为 $f(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}) = -4\sqrt{2}$ ，极小值为 $f(\dfrac{\sqrt{2}}{2}) = 4\sqrt{2}.$

5、证:（1）设 $\forall k \in (0,1)$，应用介值定理，$\exists c \in (0,1)$ 使得 $f(c) = k$，在 $[0,c]$ 与 $[c,1]$ 上分别应用拉格朗日中值定理，$\exists \xi \in (0,c) \subset (0,1), \eta \in (c,1) \subset (0,1),$ 且 $\xi \neq \eta$，使得

$f(c) - f(0) = f'(\xi)(c-0)$， $f(1) - f(c) = f'(\eta)(1-c)$

即 $\dfrac{k}{f'(\xi)} = c, \dfrac{1-k}{f'(\eta)} = 1-c,$ 取 $k = \dfrac{a}{a+b},$ 代入上式，可得 $\dfrac{a}{f'(\xi)} + \dfrac{b}{f'(\eta)} = a+b.$

（2） $\dfrac{a}{a+b} \in (0,1),$ 对 $f(x)$ 在 $[0, \dfrac{a}{a+b}]$ 与 $[\dfrac{a}{a+b}, 1]$ 上分别应用拉格朗日中值定理，

$\exists \xi \in (0, \dfrac{a}{a+b}), \eta \in (\dfrac{a}{a+b}, 1),$ 使得

$f(\dfrac{a}{a+b}) - f(0) = f'(\xi)\dfrac{a}{a+b}$， $f(1) - f(\dfrac{a}{a+b}) = f'(\eta)(1 - \dfrac{a}{a+b})$

上述两式相加，得 $f(1) - f(0) = \dfrac{a}{a+b} f'(\xi) + \dfrac{b}{a+b} f'(\eta).$

即 $af'(\xi) + bf'(\eta) = a+b.$