第4章 不定积分

本章学习要点：

☑ 理解原函数的概念，理解不定积分的概念。
☑ 掌握不定积分的基本公式，掌握不定积分的性质。
☑ 掌握换元积分法与分部积分法。
☑ 会求有理函数、三角函数、有理式及简单无理函数的积分。

4.1 基本知识点

积分学（不定积分与定积分）和微分学一样，是高等数学的重要组成部分。微分与积分互为逆运算，都是以极限为基础的，积分是借助于极限思想来处理各种变量的求和问题。由于积分是微分的逆运算，所以读者必须牢记微分的基本公式。

4.1.1 不定积分的概念与性质

1. 原函数与不定积分的概念

原函数 若$F(x)$是区间I上的可微函数，且$F'(x)=f(x)$，则称$F(x)$是函数$f(x)$在区间I上的原函数。

不定积分 区间I上已给函数$f(x)$的所有原函数组成的集合称为$f(x)$在区间I上的不定积分，记为$\int f(x)\mathrm{d}x$，若$F(x)$是$f(x)$在区间I上的一个原函数，则

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$$

2. 不定积分的性质

（1）$\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x$

（2）$\int \mathrm{d}f(x)=f(x)$

（3）$\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x$ （其中k为常数）

（4）$\int [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x$

4.1.2. 不定积分的求解方法

1. 凑微分法（第一类换元法）

若 $F(u)$ 是 $f(u)$ 的一个原函数，$u=\varphi(x)$ 可导，则 $F(\varphi(x))$ 是 $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ 的一个原函数，则有换元公式

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = F(\varphi(x))+C=\left[\int f(u)\mathrm{d}u\right]_{u=\varphi(x)}$$

2. 代入法（第二类换元法）

设函数 $x=\varphi(t)$ 是单调的可导函数，且 $\varphi'(t)\neq 0$，又 $f[\varphi(t)]\varphi'(x)$ 具有原函数 $\Phi(t)$，则有

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t=\Phi(t)+C=\Phi[\varphi^{-1}(x)]+C$$

3. 分部积分法

设 u,v 都是连续可微函数，则 $\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u$

4.1.3 特殊类型函数的积分

1. 有理数函数的积分

有理函数的积分最终转化为真分式的积分，而真分式的积分归结为以下四种情形：

$$\int\frac{A\mathrm{d}x}{x-a}=A\ln|x-a|+C$$

$$\int\frac{A\mathrm{d}x}{(x-a)^m}=-\frac{A}{m-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{m-1}}+C\quad(m\geq 2)$$

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+bx+c}\mathrm{d}x=\frac{A}{2}\ln|x^2+bx+c|+\frac{2B-Ab}{\sqrt{4c-b^2}}\arctan\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}+C$$

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^m}\mathrm{d}x=\int\left[\left(At+B-\frac{Ab}{2}\right)\div(t^2+a^2)^m\right]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{A}{2}\int\frac{2t\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^m}+\left(B-\frac{Ab}{2}\right)\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^m}$$

$$\left(\text{其中}, m\geq 2, t=x+\frac{b}{2}, a=\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}\right)$$

上式的第二个积分可以通过递推公式获得。

2. 三角有理函数的积分

一般通过万能代换公式 $t=\tan\frac{x}{2}$ 将其转化为有理函数的积分。当然对特殊形式的三角

有理积分也有特殊的代换。将其罗列如下：

$$\int R(\sin x)\cos x\mathrm{d}x \xlongequal{\sin x=t} \int R(t)\mathrm{d}t$$

$$\int R(\cos x)\sin x\mathrm{d}x \xlongequal{\cos x=t} \int R(t)\mathrm{d}t$$

$$\int R(\sin^2 x,\cos^2 x,\tan x)\mathrm{d}x \xlongequal{\tan x=t} \int R\left(\frac{t^2}{1+t^2},\frac{1}{1+t^2},t\right)\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

$$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x \xlongequal{\tan\frac{x}{2}=t} \int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

3. 简单无理函数的积分

一般通过无理代换将其化为有理函数或三角有理函数的积分。

$$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x \xlongequal{\sqrt[n]{(ax+b)/(cx+d)}=t} \int R\left(\frac{dt^n-b}{a-ct^n},t\right)\frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(a-ct^n)^2}\mathrm{d}t$$

（当$c=0, d=1$时，令$t=\sqrt[n]{ax+b}$）

4.2 例题分析

4.2.1 选择题

【例4.1】 已知函数$y=y(x)$在任意点x处的增量$\Delta y=\dfrac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$，且当$\Delta x\to 0$时，$\alpha$是$\Delta x$的高阶无穷小，$y(0)=\pi$，则$y(1)=$______。

A. 2π　　B. π　　C. $e^{\frac{\pi}{4}}$　　D. $\pi e^{\frac{\pi}{4}}$

解 应选D。由题设知$\mathrm{d}y=\dfrac{y}{1+x^2}\mathrm{d}x$，故有$\int\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=\int\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$，即得$y=Ce^{\arctan x}$，令$x=0$得$C=\pi$，所以有$y(1)=\pi e^{\frac{\pi}{4}}$。

【例4.2】 在下列等式中，正确的结果是______。

A. $\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)$　　B. $\int \mathrm{d}f(x)=f(x)$

C. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)$　　D. $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)$

解 应选C。由$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)$，又不定积分是微分的逆运算，故$\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x$成立。

【例 4.3】 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $\mathrm{d}[\int f(x)\mathrm{d}x]=$______。

A. $f(x)$　　B. $f(x)\mathrm{d}x$　　C. $f(x)+c$　　D. $f'(x)\mathrm{d}x$

解 应选 B。设 $F'(x)=f(x)$，则由不定积分定义知

$$\mathrm{d}[\int f(x)\mathrm{d}x]=\mathrm{d}[F(x)+C]=F'(x)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x$$

【例 4.4】 若 $f(x)$ 的导数是 $\sin x$，则 $f(x)$ 有一个原函数为______。

A. $1+\sin x$　　B. $1-\sin x$　　C. $1+\cos x$　　D. $1-\cos x$

解 应选 B。由 $f'(x)=\sin x$ 得

$$f(x)=\int \sin x\mathrm{d}x+C_1=-\cos x+C_1$$

又
$$F'(x)=f(x)=-\cos x+C_1$$

故
$$F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x+C_2=\int[-\cos x+C_1]\mathrm{d}x+C_2=-\sin x+C_1x+C_2$$

其中 C_1,C_2 为任意常数，取 $C_1=0,C_2=1$，即得 $f(x)$ 的一个原函数 $1-\sin x$。

【例 4.5】 设 $f'(\cos^2 x)=\sin^2 x$，且 $f(0)=0$，则 $f(x)=$______。

A. $\cos x+\dfrac{1}{2\cos^2 x}$　　B. $\cos^2 x-\dfrac{1}{2}\cos^4 x$

C. $x+\dfrac{1}{2}x^2$　　D. $x-\dfrac{1}{2}x^2$

解 应选 D。由 $f'(\cos^2 x)=\sin^2 x=1-\cos^2 x$，故 $f'(x)=1-x$，所以有

$$f(x)=\int(1-x)\mathrm{d}x+C=x-\frac{1}{2}x^2+C$$

又 $f(0)=0$，故 $C=0$，因此 $f(x)=x-\dfrac{1}{2}x^2$。

【例 4.6】 $\int xf''(x)\mathrm{d}x=$______。

A. $xf'(x)-\int f(x)\mathrm{d}x$　　B. $xf'(x)-f'(x)+C$

C. $xf'(x)-f(x)+C$　　D. $f(x)-xf'(x)+C$

解 应选 C。因 $\int xf''(x)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}f'(x)=xf'(x)-\int f'(x)\mathrm{d}x=xf'(x)-f(x)+C$

【例 4.7】 已知 $f'(\mathrm{e}^x)=1+x$，则 $f(x)=$______。

A. $1+\ln x+c$　　B. $x+\dfrac{1}{2}x^2+c$

C. $\ln x+\dfrac{1}{2}\ln^2 x+c$　　D. $x\ln x+c$

解 应选 D。由 $f'(x)=1+\ln x$，得

$$f(x)=\int(1+\ln x)\mathrm{d}x=x+\int\ln x\mathrm{d}x=x+x\ln x-x+C=x\ln x+C$$

【例 4.8】 若 $\int f(x)\mathrm{d}x=x^2+C$，则 $\int xf(1-x^2)\mathrm{d}x=$______。

A. $2(1-x^2)^2+C$　　B. $x^2-\dfrac{1}{2}x^4+C$

C. $-2(1-x^2)+C$　　D. $\dfrac{1}{2}(1-x^2)+C$

解 应选 B。因

$$\int xf(1-x^2)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int f(1-x^2)\mathrm{d}(1-x^2)=-\frac{1}{2}(1-x^2)^2+C=-\frac{1}{2}+x^2-\frac{1}{2}x^4+C$$

4.2.2 填空题

【例 4.9】 $\int\dfrac{\tan x}{\sqrt{\cos x}}\mathrm{d}x=$______。

解 应填 $\dfrac{2}{\sqrt{\cos x}}+C$。因 $\int\dfrac{\tan x}{\sqrt{\cos x}}\mathrm{d}x=\int\dfrac{\sin x}{(\cos x)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\sqrt{\cos x}}+C$。

【例 4.10】 $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(4-x)}}=$______。

解 应填 $2\arcsin\dfrac{\sqrt{x}}{2}+C$。因

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(4-x)}}=\int\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x}{\sqrt{4-(\sqrt{x})^2}}=2\int\frac{\mathrm{d}\frac{\sqrt{x}}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2}}=2\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2}+C$$

【例 4.11】 $\int x^3\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=$______。

解 应填 $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}(x^2-1)+C$。因

$$\int x^3\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int x^2\mathrm{d}(\mathrm{e}^{x^2})=\frac{1}{2}[x^2\mathrm{e}^{x^2}-\int\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x^2]=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}(x^2-1)+C$$

【例 4.12】 $\int\dfrac{\ln\sin x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=$______。

解 应填 $-\cot x\ln\sin x-\cot x-x+C$。因

$$\int \frac{\ln \sin x}{\sin^2 x}dx = -\int \ln \sin x d(\cot x) = -\cot x \ln \sin x + \int \cot^2 x dx$$
$$= -\cot x \ln \sin x + \int (\csc^2 x - 1)dx$$
$$= -\cot x \ln \sin x - \cot x - x + C$$

【例 4.13】 $\int \frac{x+5}{x^2-6x+13}dx =$______。

解 应填$\frac{1}{2}\ln(x^2-6x+13)+4\arctan\frac{x-3}{2}+C$。因

$$\int \frac{x+5}{x^2-6x+13}dx = \int \frac{(x-3)+8}{(x-3)^2+2^2}dx = \int \frac{(x-3)}{(x-3)^2+2^2}dx + \int \frac{8}{(x-3)^2+2^2}dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{d[(x-3)^2+2^2]}{(x-3)^2+2^2} + \int \frac{4}{\left(\frac{x-3}{2}\right)^2+1}d\left(\frac{x-3}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\ln(x^2-6x+13)+4\arctan\frac{x-3}{2}+C$$

【例 4.14】 $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} =$______。

解 应填$-2\arctan\sqrt{1-x}+C$。因

$$\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} \overset{\sqrt{1-x}=t}{=\!=\!=\!=} -2\int \frac{dt}{1+t^2} = -2\arctan t + c = -2\arctan\sqrt{1-x}+C$$

【例 4.15】 设$\int xf(x)dx = \arcsin x + C$，则$\int \frac{1}{f(x)}dx =$______。

解 应填$-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$。因

$$xf(x) = (\int xf(x)dx)' = (\arcsin x + C)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

于是
$$\int \frac{1}{f(x)}dx = \int x\sqrt{1-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int \sqrt{1-x^2}d(1-x^2) = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$$

【例 4.16】 $\int \frac{\ln x - 1}{x^2}dx =$______。

解 应填$-\frac{\ln x}{x}+C$。因

$$\int \frac{\ln x-1}{x^2}dx = -\int (\ln x - 1)d\frac{1}{x} = -\frac{\ln x - 1}{x} + \int \frac{1}{x}d(\ln x - 1) = -\frac{\ln x}{x}+C$$

【例 4.17】 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln^2 x$，则 $\int xf'(x)\,dx =$______。

解 应填 $2\ln x-\ln^2 x+c$。由 $f(x)=(\ln^2 x)'=\dfrac{2\ln x}{x}$，得

$$\int xf'(x)\,dx = xf(x)-\int f(x)\,dx = 2\ln x-\int\frac{2\ln x}{x}dx = 2\ln x-\ln^2 x+C$$

【例 4.18】 $\int\dfrac{\ln(1+x^2)}{(1+x)^2}dx =$______。

解 应填 $-\dfrac{\ln(1+x^2)}{1+x}+\arctan x+\ln\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{1+x}+C$。因

$$\begin{aligned}\int\frac{\ln(1+x^2)}{(1+x)^2}dx &= -\int\ln(1+x^2)\,d\frac{1}{1+x} = -\frac{\ln(1+x^2)}{1+x}+\int\frac{2x}{(1+x)(1+x^2)}dx\\ &= -\frac{\ln(1+x^2)}{1+x}+\int\left(\frac{1+x}{1+x^2}-\frac{1}{1+x}\right)dx\\ &= -\frac{\ln(1+x^2)}{1+x}+\arctan x+\ln\frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x}+C\end{aligned}$$

【例 4.19】 设函数 $f(x)$与 $g(x)$可导，且有 $f'(x)=g(x)$， $g'(x)=f(x)$， $f(0)=0$，$g(x)\neq 0$，则函数 $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}=$______。

解 应填 $1-\dfrac{2}{e^{2x}+1}$。由

$$F'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}=\frac{g^2(x)-f^2(x)}{g^2(x)}=1-F^2(x)$$

即 $\dfrac{dF(x)}{1-F^2(x)}=dx$，得 $\dfrac{1+F(x)}{1-F(x)}=Ce^{2x}$，代入 $F(0)=0$，得 $F(x)=1-\dfrac{2}{e^{2x}+1}$。

4.2.3 计算题

【例 4.20】 求 $\int|x|\,dx$。

解 已知

$$\int|x|\,dx=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+C_1 & x>0\\ -\dfrac{x^2}{2}+C_2 & x<0\end{cases}$$

因为 $|x|$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，所以 $\int|x|\,dx$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内存在，在 $x=0$ 处可导，因而在 $x=0$ 处连续，所以，C_1 和 C_2 不是相互独立的常数，它们满足

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{x^2}{2}+C_1\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{x^2}{2}+C_2\right)$$

得 $C_1=C_2$，故 $$\int|x|\,dx=\frac{x|x|}{2}+C,\ x\in(-\infty,+\infty)$$

注意：此例说明了求连续的分段函数的不定积分的步骤：

（1）在不同的开区间内分段求原函数；

（2）依据在分段点处的连续性，求出各段内原函数中各任意常数之间的相互关系；

（3）综合写出分段函数的不定积分的表达式。

另外，如果 x_0 是被积函数 $f(x)$ 的第一类间断点，则在包含 x_0 的区间内 $f(x)$ 的原函数不存在，此时的 $\int f(x)dx$ 只能分区间表示。

【例 4.21】 设 $f(x)=\begin{cases}2 & x>1\\ x & 0\le x\le 1\\ \sin x & x<0\end{cases}$，求 $\int f(x)dx$。

解 由 $$\int f(x)dx=\begin{cases}\int 2dx=2x+C_1 & x>1\\ \int xdx=\dfrac{x^2}{2}+C_2 & 0<x<1\\ \int\sin xdx=-\cos x+C_3 & x<0\end{cases}$$

因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 内连续，所以 $\int f(x)dx$ 在 $(-\infty,1)$ 内存在。因 $\int f(x)dx$ 在 $x=0$ 处可导、连续，因此

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x^2}{2}+C_2\right)=\lim_{x\to 0^-}(-\cos x+C_3)$$

从而 $C_2=-1+C_3$，即 $C_3=1+C_2$。

因为 $x=1$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点，所以在包含 $x=1$ 的区间内 $f(x)$ 的原函数不存在。

故 $$\int f(x)\,dx=\begin{cases}2x+C_1 & x>1\\ \dfrac{x^2}{2}+C_2 & 0\le x\le 1\\ -\cos x+1+C_2 & x<0\end{cases}$$（C_1 与 C_2 是两个相互独立的常数）

【例 4.22】 求 $\int\dfrac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$。

解 $\int\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\ln x\mathrm{d}\frac{1}{1+x^2}=-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$

$$=-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\ln x-\frac{1}{4}\ln(1+x^2)+C$$

【例 4.23】 计算不定积分$\int\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$。

解 方法 1：设$x=\tan t$，则

$$\int\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{e}^t\tan t}{(1+\tan^2 t)^{3/2}}\sec^2 t\mathrm{d}t=\int\mathrm{e}^t\sin t\mathrm{d}t$$

$$=-\int\mathrm{e}^t\mathrm{d}(\cos t)=-(\mathrm{e}^t\cos t-\int\mathrm{e}^t\cos t\mathrm{d}t)$$

$$=-\mathrm{e}^t\cos t+\mathrm{e}^t\sin t-\int\mathrm{e}^t\sin t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{e}^t(\sin t-\cos t)+C$$

因此 $$\int\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\arctan x}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)+C=\frac{(x-1)\mathrm{e}^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}}+C$$

方法 2：$\int\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x=\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{\arctan x})=\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\int\frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$

$$=\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{\arctan x})$$

$$=\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\int\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$$

移项整理得 $$\int\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x=\frac{(x-1)\mathrm{e}^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}}+C$$

【例 4.24】 求下列不定积分：

（1）$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$；　（2）$\int\frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+1)\sqrt{1-x^2}}$；

（3）$\int\frac{(1-\ln x)\mathrm{d}x}{(x-\ln x)^2}$；　（4）$\int\frac{2^x\mathrm{d}x}{1+2^x+4^x}$。

解 （1）令$x=\sec t$，得$\mathrm{d}x=\sec t\tan t\mathrm{d}t$，则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{\sec t\tan t}{\sec t\tan t}\mathrm{d}t=t+C=\arccos\frac{1}{x}+C$$

（2）令 $x=\sin t$，得 $dx=\cos t dt$，则

$$\int\frac{xdx}{(x^2+1)\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{\sin t\cos tdt}{(\sin^2 t+1)\cos t}=-\int\frac{d\cos t}{2-\cos^2 t}$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left(\frac{1}{\sqrt{2}-\cos t}+\frac{1}{\sqrt{2}+\cos t}\right)d\cos t$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\int\frac{-d(\sqrt{2}-\cos t)}{\sqrt{2}-\cos t}+\int\frac{d(\sqrt{2}+\cos t)}{\sqrt{2}+\cos t}\right]$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\cos t}{\sqrt{2}-\cos t}+C$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}-\sqrt{1-x^2}}+C$$

（3）令 $x=\frac{1}{t}$，得 $dx=\frac{-1}{t^2}dt$，则

$$\int\frac{(1-\ln x)dx}{(x-\ln x)^2}=\int\frac{\left(1-\ln\frac{1}{t}\right)}{\left(\frac{1}{t}-\ln\frac{1}{t}\right)^2}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=-\int\frac{d(1+t\ln t)}{(1+t\ln t)^2}=\frac{1}{1+t\ln t}+C=\frac{x}{x-\ln x}+C$$

（4）令 $t=2^x$，得 $dx=\frac{1}{\ln 2}\frac{dt}{t}$，则

$$\int\frac{2^x dx}{1+2^x+4^x}=\int\frac{tdt}{(1+t+t^2)t\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{d\left(\frac{t+\frac{1}{2}}{\sqrt{3}/2}\right)}{1+\left(\frac{t+\frac{1}{2}}{\sqrt{3}/2}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{3}\ln 2}\arctan\frac{2^{x+1}+1}{\sqrt{3}}+C$$

【例 4.25】 求下列不定积分：

（1）$\int\frac{x+\ln(1-x)}{x^2}dx$；　（2）$\int\frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}dx$；　（3）$\int\frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}dx$。

解　（1）$\int\frac{x+\ln(1-x)}{x^2}dx=\int\frac{1}{x}dx-\int\ln(1-x)d\frac{1}{x}=\ln x-\frac{1}{x}\ln(1-x)+\int\frac{1}{x}d\ln(1-x)$

$$=\ln x-\frac{1}{x}\ln(1-x)-\int\frac{1}{x(1-x)}dx$$

$$=\ln x-\frac{1}{x}\ln(1-x)-\ln x+\ln(1-x)+C$$

$$=\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln(1-x)+C$$

（2）$\displaystyle\int\frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}dx=\int\frac{\arctan x}{x^2}dx-\int\frac{\arctan x}{1+x^2}dx$

$$=-\frac{\arctan x}{x}+\int\frac{1}{x(1+x^2)}dx-\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C$$

$$=-\frac{\arctan x}{x}+\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx^2-\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C$$

$$=-\frac{\arctan x}{x}+\frac{1}{2}\ln x^2-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C$$

（3）$\displaystyle\int\frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}dx=-\int\ln\sin x\,d(\cot x)=-\cot x\ln\sin x+\int\cot x\,d(\ln\sin x)$

$$=-\cot x\ln\sin x+\int\cot^2 x dx$$

$$=-\cot x\ln\sin x+\int(\csc^2 x-1)dx$$

$$=-\cot x\ln\sin x-\cot x-x+C$$

【例 4.26】 求下列不定积分：

（1）$\displaystyle\int\frac{dx}{(x+1)(x+2)^2}$；　　（2）$\displaystyle\int\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$。

解　（1）$\displaystyle\int\frac{dx}{(x+1)(x+2)^2}=\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{dx}{x+2}-\int\frac{dx}{(x+2)^2}=\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|-\frac{x+1}{x+2}+C$

（2）$\displaystyle\int\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{u}{\sqrt{1+u}}du=\frac{1}{2}\int\sqrt{1+u}du-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1+u}}du$

$$=\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}-(1+x^2)^{\frac{1}{2}}+C$$

【例 4.27】 求下列不定积分：

（1）$\displaystyle\int\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$；　　（2）$\displaystyle\int\frac{1}{\sin 2x\cos x}dx$。

解　（1）

$$\int\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}}{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx+\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}dx$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\right|+C$$

（2）$\displaystyle\int\frac{1}{\sin 2x\cos x}dx=\frac{1}{2}\int\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin x}\right)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos x}+\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|\right)+C$

【例 4.28】 求下列不定积分：

（1）$\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}dx$；　（2）$\int \frac{1+x}{\sqrt{x-x^2}}dx$；　（3）$\int \frac{dx}{e^{x/2}+e^x}$。

解 （1）方法 1：

$$\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}dx = \int \frac{[(1-x)-1]^2}{(1-x)^{100}}dx = \int \frac{(1-x)^2-2(1-x)+1}{(1-x)^{100}}dx$$

$$= -\left[\int \frac{1}{(1-x)^{98}} - \frac{2}{(1-x)^{99}} + \frac{1}{(1-x)^{100}}\right]d(1-x)$$

$$= -\left[-\frac{1}{97}(1-x)^{-97} + \frac{2}{98}(1-x)^{-98} - \frac{1}{99}(1-x)^{-99}\right] + C$$

$$= \frac{1}{97(1-x)^{97}} - \frac{1}{49(1-x)^{98}} + \frac{1}{99(1-x)^{99}} + C$$

方法 2：令$1-x=t$，得$x=1-t$，则

$$\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}dx = \int \frac{(1-t)^2}{t^{100}}(-dt) = -\int \frac{1-2t+t^2}{t^{100}}dt$$

$$= -\int\left(\frac{1}{t^{100}} - \frac{2}{t^{99}} + \frac{1}{t^{98}}\right)dt$$

$$= -\left(-\frac{1}{99t^{99}} + \frac{1}{49t^{98}} - \frac{1}{97t^{97}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{97(1-x)^{97}} - \frac{1}{49(1-x)^{98}} + \frac{1}{99(1-x)^{99}} + C$$

（2）
$$\int \frac{1+x}{\sqrt{x-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{(1-2x)-3}{\sqrt{x-x^2}}dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\int \frac{1-2x}{\sqrt{x-x^2}}dx - \int \frac{3}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}dx\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\int \frac{d(x-x^2)}{\sqrt{x-x^2}} - 3\int \frac{d(2x-1)}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}\right]$$

$$= -\sqrt{x-x^2} + \frac{3}{2}\arcsin(2x-1) + C$$

（3）
$$\int \frac{1}{e^{\frac{x}{2}}+e^{x}}dx=\int \frac{e^{-\frac{x}{2}}\cdot e^{-\frac{x}{2}}}{e^{-\frac{x}{2}}+1}dx=-2\int \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{e^{-\frac{x}{2}}+1}d\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)$$
$$=-2\int\left(1-\frac{1}{e^{-\frac{x}{2}}+1}\right)d\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)=-2e^{-\frac{x}{2}}+2\ln\left(e^{-\frac{x}{2}}+1\right)+C$$

【例 4.29】 求$\int \frac{\ln\tan x}{\cos x\sin x}dx$。

解 设$\varphi(x)=\tan x$，则$\varphi'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$，而被积函数恰好能分出这个因子，即得
$$\int \frac{\ln\tan x}{\cos x\sin x}dx=\int \frac{\ln\tan x}{\cos^2 x\tan x}dx=\int \frac{\ln\tan x}{\tan x}d(\tan x)$$
$$=\int \ln\tan x d(\ln\tan x)=\frac{1}{2}(\ln\tan x)^2+C$$

【例 4.30】 求下列不定积分：

（1）$\int x^3\sqrt{4-x^2}dx$　　　（2）$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}$

解 （1）

方法 1：用凑微分法，可得
$$\int x^3\sqrt{4-x^2}dx=\frac{1}{2}\int x^2\sqrt{4-x^2}d(x^2)$$
$$=\frac{1}{2}\int[(4-x^2)-4]\sqrt{4-x^2}d(4-x^2)$$
$$=\frac{1}{2}\int[(4-x^2)^{3/2}-4(4-x^2)^{1/2}]d(4-x^2)$$
$$=\frac{1}{5}(4-x^2)^{5/2}-\frac{4}{3}(4-x^2)^{3/2}+C$$

方法 2：令$\sqrt{4-x^2}=u$，得$x^2=4-u^2$，$d(x^2)=(-2u)du$，则
$$\text{原式}=\frac{1}{2}\int x^2\sqrt{4-x^2}d(x^2)=\frac{1}{2}\int(4-u^2)\cdot u\cdot(-2u)du$$
$$=-\int u^2(4-u^2)du=-\left(\frac{4}{3}u^3-\frac{1}{5}u^5\right)+C$$
$$=\frac{1}{5}(4-x^2)^{5/2}-\frac{4}{3}(4-x^2)^{3/2}+C$$

方法 3：设$x=2\sin t$，得$dx=2\cos tdt$，$\cos t=\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$，则

$$\int x^3\sqrt{4-x^2}\,dx=\int(2\sin t)^3\cdot 2\cos t\cdot 2\cos t\,dt$$
$$=32\int\sin^3 t\cos^2 t dt=-32\int\sin^2 t\cos^2 t d(\cos t)$$
$$=-32\int(1-\cos^2 t)\cos^2 t d(\cos t)$$
$$=-32\int(\cos^2 t-\cos^4 t)d(\cos t)$$
$$=-32\left(\frac{\cos^3 t}{3}-\frac{\cos^5 t}{5}\right)+C$$
$$=-32\left[\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right)^3-\frac{1}{5}\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right)^5\right]+C$$
$$=\frac{1}{5}(4-x^2)^{5/2}-\frac{4}{3}(4-x^2)^{3/2}+C$$

（2）方法 1：用第二类换元法。

在 $x>2$ 时，令 $x=2\sec t$ ， $0<t<\frac{\pi}{2}$ ，则

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}=\int\frac{1}{(2\sec t)^2\sqrt{4\sec^2 t-4}}\cdot 2\sec t\tan t\,dt$$
$$=\frac{1}{4}\int\cos t\,dt=\frac{1}{4}\sin t+C=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}+C$$

容易验证，上述结果在 $x<-2$ 时也适用。

方法 2：令 $x=\frac{1}{t}$，当 $x>2$ 时，$0<t<\frac{1}{2}$，则

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}=\int\frac{1}{(1/t)^2\sqrt{(1/t)^2-4}}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt$$
$$=-\int\frac{t}{\sqrt{1-4t^2}}dt=\frac{1}{8}\int\frac{1}{\sqrt{1-4t^2}}d(1-4t^2)$$
$$=\frac{1}{4}\sqrt{1-4t^2}+C=\frac{\sqrt{x^2-4}}{4x}+C$$

【例 4.31】 设 $f(x)$ 的原函数 $F(x)>0$，且 $F(0)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$，$f(x)F(x)=\frac{1}{e^x+e^{-x}}$，求 $f(x)$。

解 由 $$\int f(x)F(x)dx=\int\frac{1}{e^x+e^{-x}}dx=\int\frac{d(e^x)}{1+(e^x)^2}=\arctan e^x+C_1$$
$$\int f(x)F(x)dx=\int F(x)dF(x)=\frac{1}{2}F^2(x)+C_2$$

得 $F^2(x)=2\arctan e^x+C$；由 $F(0)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$，可得 $C=0$，则 $F(x)=\sqrt{2\arctan e^x}$，故

$$f(x)=F'(x)=\frac{1}{(e^x+e^{-x})\sqrt{2\arctan e^x}}$$

【例 4.32】 求下列各式的原函数：

（1）设 $f'(x^2)=\frac{1}{\sqrt{x}}$，求 $f(x)$；

（2）设 $f'(\ln x)=\begin{cases}1 & 0<x\le 1\\ x & x>1\end{cases}$，且 $f(0)=1$，求 $f(x)$。

解 （1）对这种类型的题，一般可用下列两种解法：

方法 1：设 $x^2=t,\sqrt{x}=\sqrt[4]{t}$，原式变为 $f'(t)=\frac{1}{\sqrt[4]{t}}$，所以

$$f(t)=\int f'(t)dt=\int\frac{1}{\sqrt[4]{t}}dt=\frac{4}{3}t^{\frac{3}{4}}+C$$

故
$$f(x)=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}+C$$

方法 2：由 $$f(x^2)=\int f'(x^2)d(x^2)=\int\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot 2xdx=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}+C$$

令 $x^2=t$，则 $x=\pm\sqrt{t}$，由于 $x>0$，故取 $x=\sqrt{t}$。所以

$$f(t)=\frac{4}{3}(\sqrt{t})^{\frac{3}{2}}+C=\frac{4}{3}t^{\frac{3}{4}}+C$$

故
$$f(x)=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}+C$$

方法 2 中应注意 $f'(x^2)$ 的涵义，它是函数 $f(x^2)$ 对变量 $x^2=t$（而不是 x）的导数，故不能写作 $f(x^2)=\int f'(x^2)dx$。

（2）设 $\ln x=t,x=e^t$，于是原式变成

$$f'(t)=\begin{cases}1 & t\le 0\\ e^t & t>0\end{cases}$$

所以
$$f(t)=\int f'(t)dt=\begin{cases}\int 1dt=t+C_1 & t\le 0\\ \int e^t dt=e^t+C_2 & t>0\end{cases}$$

由于 $f'(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续（包括 $t=0$），所以其原函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内存在且

连续。由于$f(t)$在$t=0$连续，所以

$$\lim_{t\to 0^-} f(t)=\lim_{t\to 0^+} f(t)=f(0)$$

而$f(0)=1$，则得$C_1=1+C_2=1$，可求$C_1=1$，$C_2=0$，所以

$$f(t)=\begin{cases} t+1 & t\le 0 \\ e^t & t>0 \end{cases}$$

故
$$f(x)=\begin{cases} x+1 & x\le 0 \\ e^x & x>0 \end{cases}$$

【例4.33】 设$f(x)$的原函数为$\dfrac{\sin x}{x}$，求$\int xf'(x)\mathrm{d}x$。

解 可求
$$\int xf'(x)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}f(x)=xf(x)-\int f(x)\mathrm{d}x$$

因为$f(x)$的一个原函数为$\dfrac{\sin x}{x}$，所以

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{\sin x}{x}+C$$

又
$$f(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$$

于是
$$\int xf'(x)\mathrm{d}x=x\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}-\frac{\sin x}{x}+C=\cos x-\frac{2\sin x}{x}+C$$

【例4.34】 设$f'\left(x\tan\dfrac{x}{2}\right)=(x+\sin x)\cdot\tan\dfrac{x}{2}+\cos x$，求$f(x)$。

解 因为
$$f'\left(x\tan\frac{x}{2}\right)=(x+\sin x)\cdot\tan\frac{x}{2}+\cos x$$

$$=x\tan\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}+2\cos^2\frac{x}{2}-1=x\tan\frac{x}{2}+1$$

所以
$$f'(u)=u+1$$

从而
$$f(u)=\int(u+1)\mathrm{d}u=\frac{u^2}{2}+u+C$$

故
$$f(x)=\frac{1}{2}x^2+x+C$$

【例4.35】 求$\int x^3\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$。

解 求无理函数积分的基本思想就是作变换，去掉被积函数的根号。

令$\sqrt{1+x^2}=t$，则$x\mathrm{d}x=t\mathrm{d}t$，于是

$$原式=\int(t^2-1)t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{3}t^3+C=\frac{1}{5}(1+x^2)^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+C$$

【例4.36】 求$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}\cdot(x-b)^{n-1}}}$，其中$n$为自然数，$a\neq b$。

解 由
$$原式=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-b)^2\sqrt[n]{\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{n+1}}}$$

令$t=\frac{x-a}{x-b}$，则$t-1=\frac{b-a}{x-b}$，$\mathrm{d}t=\frac{a-b}{(x-b)^2}\mathrm{d}x$，于是

$$原式=\frac{1}{a-b}\int t^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)}\mathrm{d}t=\frac{n}{b-a}t^{-\frac{1}{n}}+C=\frac{n}{b-a}\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}+C$$

【例4.37】 求$\int\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\mathrm{d}x$。

解 令$\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}=t$，则$\sin^2 t=\frac{x}{1+x}$，$\cos^2 t=\frac{1}{1+x}$，从而$x=\tan^2 t, \mathrm{d}x=\mathrm{d}(\tan^2 x)$，

故
$$原式=\int t\mathrm{d}(\tan^2 t)=t\cdot\tan^2 t-\int\tan^2 t\mathrm{d}t=t\cdot\tan^2 t-\int(\sec^2 t-1)\mathrm{d}t$$
$$=t\cdot\tan^2 t-\tan t+t+C=(x+1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}-\sqrt{x}+C$$

【例4.38】 求$\int\sqrt{a^2+x^2}\mathrm{d}x$。

解 方法1：令$x=a\tan t$，则$\mathrm{d}x=a\sec^2 t\mathrm{d}t$，从而

$$原式=a^2\int\sec^3 t\mathrm{d}t=a^2\int\frac{\cos t}{\cos^4 t}\mathrm{d}t=a^2\int\frac{\mathrm{d}(\sin t)}{(1-\sin^2 t)^2}$$

因为
$$\mathrm{d}\left(\frac{\sin t}{1-\sin^2 t}\right)=\frac{1+\sin^2 t}{(1-\sin^2 t)}\mathrm{d}(\sin t)$$

所以
$$I=\int\frac{\mathrm{d}(\sin t)}{(1-\sin^2 t)^2}=\int\frac{1+\sin^2 t+1-\sin^2 t-1}{(1-\sin^2 t)^2}\mathrm{d}(\sin t)$$
$$=\int\mathrm{d}\left(\frac{\sin t}{1-\sin^2 t}\right)+\int\frac{\mathrm{d}(\sin t)}{1-\sin^2 t}-I=\frac{\sin t}{1-\sin^2 t}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right|-I$$
$$=\frac{\sin t}{\cos^2 t}+\ln|\sec t+\tan t|-I$$

从而得
$$I=\frac{1}{2}\tan t\cdot\sec t+\frac{1}{2}\ln|\sec t+\tan t|+C_1$$

故
$$原式=\frac{a^2}{2}\tan t\cdot\sec t+\frac{a^2}{2}\ln|\sec t+\tan t|+C_2$$
$$=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|+C$$

其中
$$C=C_2-\frac{a^2}{2}\ln a$$

方法 2：令 $x=a\tan t$，则 $\mathrm{d}x=a\sec^2 t\mathrm{d}t$，从而
$$I=a^2\int\sec^3 t\mathrm{d}t=a^2\int\sec t\mathrm{d}(\tan t)$$
$$=a^2\sec t\cdot\tan t-a^2\int\tan^2 t\cdot\sec t\mathrm{d}t$$
$$=a^2\sec t\cdot\tan t-a^2\int(\sec^2 t-1)\sec t\mathrm{d}t$$
$$=a^2\sec t\cdot\tan t-I+a^2\int\sec t\mathrm{d}t$$
$$=a^2\sec t\cdot\tan t+a^2\ln|\sec t+\tan t|-I$$

于是
$$原式=\frac{a^2}{2}\sec t\cdot\tan t+\frac{1}{2}a^2\ln|\sec t+\tan t|+C_2$$
$$=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|+C$$

其中
$$C=C_2-\frac{a^2}{2}\ln a$$

【例 4.39】 求 $\int\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}x$。

解
$$原式=\int\frac{\ln x}{\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}(1+\ln x)=\int\frac{\ln x+1-1}{\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}(1+\ln x)$$
$$=\int\sqrt{1+\ln x}\mathrm{d}(1+\ln x)-\int(1+\ln x)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1+\ln x)$$
$$=\frac{2}{3}(1+\ln x)^{\frac{3}{2}}-2\sqrt{1+\ln x}+C$$

【例 4.40】 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$。

解
$$原式=\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2-1}{x^4+1}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right|+C$$

【例 4.41】 求$\int\frac{\ln^3 x\cdot\sqrt{1-\ln^2 x}}{x}dx$。

解
$$原式=\int\ln^3 x\cdot\sqrt{1-\ln^2 x}\,d(\ln x)=\frac{1}{2}\int(-\ln^2 x)\cdot\sqrt{1-\ln^2 x}\,d(-\ln^2 x)$$

$$=\frac{1}{2}\int(1-\ln^2 x-1)\cdot\sqrt{1-\ln^2 x}\,d(1-\ln^2 x)$$

$$=\frac{1}{2}\int\left[(1-\ln^2 x)^{\frac{3}{2}}-(1-\ln^2 x)^{\frac{1}{2}}\right]d(1-\ln^2 x)$$

$$=\frac{1}{5}(1-\ln^2 x)^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{3}(1-\ln^2 x)^{\frac{3}{2}}+C$$

【例 4.42】 求$\int x^x(1+\ln x)dx$。

解
$$原式=\int e^{x\ln x}(1+\ln x)dx=\int e^{x\ln x}d(x\ln x)=e^{x\ln x}+C=x^x+C$$

【例 4.43】 求$\int\frac{\sin x\cdot\cos x}{1+\sin^4 x}dx$。

解 记$R(\sin x,\cos x)=\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}$，则$R(\sin x,\cos x)=-R(\sin x,-\cos x)$。

令$t=\sin x$，则$dt=\cos x dx$，于是

$$原式=\int\frac{t}{1+t^4}dt=\frac{1}{2}\int\frac{dt^2}{1+t^4}=\frac{1}{2}\arctan t^2+C=\frac{1}{2}\arctan(\sin^2 x)+C$$

【例 4.44】 一质点作直线运动，已知其加速度为$a=12t^2-3\sin t$，如果$V(0)=5,S(0)=-3$，求：

（1）速度V与时间t的关系；

（2）位移S与时间t的关系。

解 （1）由题设得

$$V=\int a\mathrm{d}t=\int(12t^2-3\sin t)\mathrm{d}t=4t^3+3\cos t+C_1$$

由$V(0)=5$可得$C_1=2$，故

$$V=4t^3+3\cos t+2$$

（2）已知 $S=\int V\mathrm{d}t=\int(4t^3+3\cos t+2)\mathrm{d}t=t^4+3\sin t+2t+C_2$

由$S(0)=-3$可得$C_2=-3$，故

$$S=t^4+3\sin t+2t-3$$

【例 4.45】 设$y=y(x)$是由方程$y^2(x-y)=x^2$所确定的隐函数，试求$\int\frac{\mathrm{d}x}{y^2}$。

解 从方程解出y或x都不方便，可试将y和x均表示为t参数的函数，先对参数t积分，设$y=tx$，代入方程得$t^2x^2(x-tx)=x^2$，即

$$x=\frac{1}{t^2(1-t)},\quad \mathrm{d}x=\frac{3t-2}{t^3(1-t)^2}\mathrm{d}t,\quad y=\frac{t}{t^2(1-t)}=\frac{1}{t(1-t)}$$

于是 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{y^2}=\int t^2(1-t)^2\frac{3t-2}{t^3(1-t)^2}\mathrm{d}t=\int\left(3-\frac{2}{t}\right)\mathrm{d}t=3t-2\ln t+C=\frac{3y}{x}-2\ln\frac{y}{x}+C$$

【例 4.46】 试证：$\int\left[\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f^2(x)f''(x)}{f'^3(x)}\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right]^2+C$。

证 因为

$$\left(\frac{1}{2}\left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right]^2+C\right)'=\frac{f(x)}{f'(x)}\cdot\frac{f'^2(x)-f(x)\cdot f''(x)}{f'^2(x)}=\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f^2(x)f''(x)}{f'^3(x)}$$

故原式成立。

【例 4.47】 设单调的连续函数$y=f(x)$和$x=\varphi(y)$互为反函数，且$\varphi'(y)>0$，证明：

$$\int\sqrt{f'(x)}\mathrm{d}x=\int\sqrt{\varphi'(y)}\mathrm{d}y$$

证 因为$y=f(x)$和$x=\varphi(y)$互为反函数，且$\varphi'(y)\neq0$，于是

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)},\quad \mathrm{d}x=\varphi'(y)\mathrm{d}y$$

令 $\varphi(x)=\int\sqrt{f'(x)}\mathrm{d}x-\int\sqrt{\varphi'(y)}\mathrm{d}y$，则

$$\begin{aligned}\varphi'(x)&=\sqrt{f'(x)}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[\int\sqrt{\varphi'(y)}\mathrm{d}y\right]\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\\&=\sqrt{f'(x)}-\sqrt{\varphi'(y)}\cdot f'(x)\\&=\sqrt{f'(x)}-\frac{1}{\sqrt{f'(x)}}\cdot f'(x)=0\end{aligned}$$

从而 $\varphi(x)=C$，于是由原函数的性质可知

$$\int\sqrt{f'(x)}\mathrm{d}x=\int\sqrt{\varphi'(y)}\mathrm{d}y$$