高等数学期中考试试卷

一、填空题

1、已知球面的一条直径的两个端点为 $(2,-3,5)$ 和 $(4,1,-3)$，则该球面的方程为__________.

2、

3、曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $2x+4y-z=0$ 平行的切平面方程为__________

4、$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{(1-\cos(x^2+y^2))\sin xy}{(x^2+y^2)^2 e^{x^2+y^2}}=$__________

5、设二元函数 $z=xy^2+x^3y$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$__________

二、选择题

1、旋转曲面 $x^2-y^2-z^2=1$ 是（　　）

（A）xOz 坐标面上的双曲线绕 Ox 轴旋转而成；

（B）xOy 坐标面上的双曲线绕 Oz 轴旋转而成；

（C）xOy 坐标面上的椭圆绕 Oz 轴旋转而成；

（D）xOz 坐标面上的椭圆绕 Ox 轴旋转而成.

2、

3、已知直线 $L:\dfrac{x-2}{\sqrt{2}}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{-\sqrt{2}\pi}$ 与平面 $\pi: x+\sqrt{2}y-\pi z=4$,则（　　）

(A). L 在 π 内;　　(B). L 与 π 不相交;

(C). L 与 π 正交;　　(D). L 与 π 斜交.

4、下列说法正确的是（　　）

(A) 两向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行的充要条件是存在唯一的实数 λ，使得 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$；

(B) 二元函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 在区域 D 内连续，则在该区域内两个二阶混合偏导必相等；

(C) 二元函数 $z=f(x,y)$ 的两个偏导数在点 (x_0,y_0) 处连续是函数在该点可微的充分条件；

(D) 二元函数 $z=f(x,y)$ 的两个偏导数在点 (x_0,y_0) 处连续是函数在该点可微的必要条件.

5、设 $z=f(2x+y,x-2y)$, 且 $f\in C^2$（即函数具有连续的二阶连续偏导数），则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$（　　）

(A) $2f_{11}-2f_{22}-3f_{12}$;　　(B) $2f_{11}+f_{22}+3f_{12}$;

(C) $2f_{11}+f_{22}+5f_{12}$;　　(D) $2f_{11}-2f_{22}-f_{12}$.

三、计算题

1、

2、设 $z=uv^2+t\cos u$，$u=e^t$，$v=\ln t$，求全导数 $\frac{dz}{dt}$。

3、

四、应用题

五、综合题

1、已知直线 l_1： $\begin{cases}\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\\ x=0\end{cases}$，$l_2$： $\begin{cases}\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=1\\ y=0\end{cases}$，求过 l_1 且平行于 l_2 的平面方程.

六、证明题

1、设函数 $u=x^kF\left(\frac{z}{x},\ \frac{y}{x}\right)$，其中 k 是常数，函数 F 具有连续的一阶偏导数．试证明: $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=kx^kF\left(\frac{z}{x},\ \frac{y}{x}\right)$

第二学期高等数学期中考试试卷答案

一、填空题（本题满分 15 分，共有 5 道小题，每道小题 3 分）

1.、 $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=21$

2、$\frac{1}{2}$.

3、$\underline{2x+4y-z-5=0}$.

4、<u>0</u>

5、$2y+3x^2$；

二、选择题

1（A）

2（B）
3（C）
4（C）
5（A）

三、计算题

2、解：$\dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{\partial}{\partial u}\left(uv^2+t\cos u\right)=v^2-t\sin u$，

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial}{\partial v}\left(uv^2+t\cos u\right)=2uv，\quad \frac{\partial z}{\partial t}=\cos u$$

依复合函数求导法则，全导数为

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}+\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{dt}{dt}$$

$$=\left(v^2-t\sin u\right)e^t+2uv\cdot\frac{1}{t}+\cos u\cdot 1$$

$$=\left(\ln^2 t-t\sin e^t\right)e^t+\frac{2}{t}e^t\ln t+\cos e^t$$

四、应用题

五、综合题

1、解：直线 l_1 与 l_2 的方向向量分别为

$$\vec{\mathbf{s}}_1=\left\{0,\quad \frac{1}{b},\quad \frac{1}{c}\right\}\times\{1,\quad 0,\quad 0\}=\left\{0,\quad \frac{1}{c},\quad -\frac{1}{b}\right\},$$

$$\vec{\mathbf{s}}_2=\left\{\frac{1}{a},\quad 0,\quad -\frac{1}{c}\right\}\times\{0,\quad 1,\quad 0\}=\left\{\frac{1}{c},\quad 0,\quad \frac{1}{a}\right\},$$

作 $\vec{\mathbf{n}}=\vec{\mathbf{s}}_1\times\vec{\mathbf{s}}_2=\left\{\dfrac{1}{ca},\quad -\dfrac{1}{bc},\quad -\dfrac{1}{c^2}\right\}$，

取直线 l_1 上的一点 $P_1(0,\quad 0,\quad c)$，则过点 P_1 且以 $\vec{\mathbf{n}}=\left\{\dfrac{1}{ca},\quad -\dfrac{1}{bc},\quad -\dfrac{1}{c^2}\right\}$ 为法向量的平面

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}-\frac{z}{c}+1=0\ ，$$

就是过 l_1 且平行于 l_2 的平面方程.

六、证明题：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=kx^{k-1}F\left(\frac{z}{x},\quad \frac{y}{x}\right)+x^kF_1'\left(\frac{z}{x},\quad \frac{y}{x}\right)\left(-\frac{z}{x^2}\right)+x^kF_2'\left(\frac{z}{x},\quad \frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$=kx^{k-1}F\left(\frac{z}{x},\quad \frac{y}{x}\right)-zx^{k-2}F_1'\left(\frac{z}{x},\quad \frac{y}{x}\right)-yx^{k-2}F_2'\left(\frac{z}{x},\quad \frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^{k}F_2'\left(\frac{z}{x},\quad \frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}=x^{k-1}F_2'\left(\frac{z}{x},\quad \frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=x^{k}F_1'\left(\frac{z}{x},\quad \frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}=x^{k-1}F_1'\left(\frac{z}{x},\quad \frac{y}{x}\right)$$

所以，$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}$

$$=x\cdot\left[kx^{k-1}F\left(\frac{z}{x},\quad \frac{y}{x}\right)-zx^{k-2}F_1'\left(\frac{z}{x},\quad \frac{y}{x}\right)-yx^{k-2}F_2'\left(\frac{z}{x},\quad \frac{y}{x}\right)\right]$$

$$+y\cdot x^{k-1}F_2'\left(\frac{z}{x},\quad \frac{y}{x}\right)+z\cdot x^{k-1}F_1'\left(\frac{z}{x},\quad \frac{y}{x}\right)$$

$$=kx^{k}F\left(\frac{z}{x},\quad \frac{y}{x}\right)$$