用定义证明函数极限方法总结：

用定义来证明函数极限式$\lim\limits_{x\to a} f(x)=c$，方法与用定义证明数列极限式类似，只是细节不同。

方法 1： 从不等式$|f(x)-c|<\varepsilon$中直接解出（或找出其充分条件）$|x-a|<h(\varepsilon)$，从而得$\delta=h(\varepsilon)$。

方法 2： 将$|f(x)-c|$放大成$\varphi(|x-a|)$，解$\varphi(|x-a|)<\varepsilon$，得$|x-a|<h(\varepsilon)$，从而得$\delta=h(\varepsilon)$。

部分放大法： 当$|f(x)-c|$不易放大时，限定$0<|x-a|<\delta_1$，得$|f(x)-c|\le\varphi(|x-a|)$，解$\varphi(|x-a|)<\varepsilon$，得：$|x-a|<h(\varepsilon)$，取$\delta=\min\{\delta_1,h(\varepsilon)\}$。

用定义来证明函数极限式$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=c$，方法：

方法 1： 从不等式$|f(x)-c|<\varepsilon$中直接解出（或找出其充分条件）$|x|>h(\varepsilon)$，从而得$A=h(\varepsilon)$。

方法 2： 将$|f(x)-c|$放大成$\varphi(|x-a|)$，解$\varphi(|x-a|)<\varepsilon$，得$|x|>h(\varepsilon)$，从而得$A=h(\varepsilon)$。

部分放大法： 当$|f(x)-c|$不易放大时，限定$|x|>A_1$，得$|f(x)-c|\le\varphi(|x-a|)$，解$\varphi(|x-a|)<\varepsilon$，得：$|x|>h(\varepsilon)$，取$A=\max\{A_1,h(\varepsilon)\}$。

平行地，可以写出证明其它四种形式的极限的方法。

例 1 证明：$\lim\limits_{x\to 2}(2x+3)=7$。

证明： $\forall\varepsilon>0$，要使：

$|(2x+3)-7|=2|x-2|<\varepsilon$，只要　$2|x-2|<\varepsilon$，即$0<|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，

取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$，即可。

例 2 证明：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\dfrac{2}{3}$。

分析：因为，$\left|\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}-\dfrac{2}{3}\right|=\left|\dfrac{x+1}{2x+1}-\dfrac{2}{3}\right|=\dfrac{|x-1|}{3|2x+1|}$放大时，只有限制

$0<|x-1|<1$，即$0<x<2$，才容易放大。

证明：$\forall\varepsilon>0$，限制$0<|x-1|<1$，即$0<x<2$，要使；

$$\left|\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{x+1}{2x+1}-\frac{2}{3}\right|=\frac{|x-1|}{3|2x+1|}=\frac{|x-1|}{3(2x+1)}\le\frac{|x-1|}{3}<\varepsilon\text{，只要 }\frac{|x-1|}{3}<\varepsilon\text{，}$$

即$0<|x-1|<3\varepsilon$，取$\delta=\min(1,3\varepsilon)$，即可。

例 3 证明：$\lim\limits_{x\to a}\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-a^2}$，（$|a|<1$）。

证明：$\forall\varepsilon>0$，限制$0<|x-a|<\dfrac{1-|a|}{2}$，所以$|x|<\dfrac{1+|a|}{2}<1$，要使：

$$\left|\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-a^2}\right|=\frac{|x^2-a^2|}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-a^2}}\le\frac{|x+a||x-a|}{\sqrt{1-a^2}}\le\frac{2|x-a|}{\sqrt{1-a^2}}<\varepsilon\text{，}$$

只要 $\dfrac{2|x-a|}{\sqrt{1-a^2}}<\varepsilon$，即$0<|x-a|<\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{2}\varepsilon$，取$\delta=\min\left(\dfrac{1-|a|}{2},\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{2}\varepsilon\right)$，即可。

例 4 设 $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\ne1\\ 2, & x=1\end{cases}$，证明：$\lim\limits_{x\to1}f(x)=1$。

证明：当$x\ne1$时，$|f(x)-1|=|x^3-1|=|x-1||x^2+x+1|$

限制$0<|x-1|<1$，则$|x|\le|x-1|+1<2$，$\therefore|x^2+x+1|<7$。$\forall\varepsilon>0$，要使：

$$|f(x)-1|=|x-1||x^2+x+1|\le7|x-1|<\varepsilon\text{，}$$

只要 $7|x-1|<\varepsilon$，即 $|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{7}$，取 $\delta=\min\left\{1,\dfrac{\varepsilon}{7}\right\}$，当 $0<|x-1|<\delta$ 时，有：

$|f(x)-1|<\varepsilon$，

$$\therefore\lim_{x\to1}f(x)=1$$

说明:这里限制自变量x的变化范围$0<|x-1|<1$,必须按自变量x的变化趋势来设计，$x\to a$时，只能限制x在a点的某邻域内，不能随便限制！

错解：设$|x|\le1$，则$|x^2+x+1|<3$，要使：

$$|f(x)-1|=|x-1||x^2+x+1|\le3|x-1|<\varepsilon\text{，只要}0<|x-1|<\frac{\varepsilon}{3}\text{，取}\delta=\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{3}\right\}\text{，}$$

当$0<|x-1|<\delta$时，有：$|f(x)-1|<\varepsilon$。$\therefore \lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$。

例 5 证明：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{2x-1}=1$。

证明：考察$\left|\dfrac{1}{2x-1}-1\right|=\dfrac{2|x-1|}{|2x-1|}$，$\because |2x-1|=|2(x-1)+1|\ge 1-2|x-1|$

限制$0<|x-1|<\dfrac{1}{4}$，则$|2x-1|\ge 1-2|x-1|\ge 1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$，。$\forall\varepsilon>0$，要使：

$\left|\dfrac{1}{2x-1}-1\right|=\dfrac{2|x-1|}{|2x-1|}\le 4|x-1|<\varepsilon$，只要$4|x-1|<\varepsilon$，即$|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{4}$，

取$\delta=\min\left\{\dfrac{1}{4},\dfrac{\varepsilon}{4}\right\}$，当$0<|x-1|<\delta$时，有：$\left|\dfrac{1}{2x-1}-1\right|<\varepsilon$，

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{1}{2x-1}=1。$$

说明：在以上放大$|f(x)-A|$（即缩小$|2x-1|$）的过程中，先限制$0<|x-1|<\dfrac{1}{4}$，则得：$|2x-1|\ge\dfrac{1}{2}$。其实任取一个小于$\dfrac{1}{2}$的正数δ_1，先限制$0<|x-1|<\delta_1$，则$|2x-1|\ge 1-2|x-1|\ge 1-2\delta_1=m>0$（如果是限制$0<|x-1|<\dfrac{1}{2}$或$0<|x-1|<1$，则不能达到以上目的）。

例 6 证明：$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x}{4x-7}=2$。

证明：考察$\left|\dfrac{x}{4x-7}-2\right|=\dfrac{7|x-2|}{|4x-7|}$，$\because \dfrac{1}{|4x-7|}$仅在$x=\dfrac{7}{4}$的邻域内无界，所以，限制$0<|x-2|<\dfrac{1}{8}$（此邻域不包含$x=\dfrac{7}{4}$点），则$|4x-7|=|4(x-2)+1|\ge 1-4|x-2|\ge\dfrac{1}{2}$。$\forall\varepsilon>0$，要使：

$\left|\dfrac{x}{4x-7}-2\right|=\dfrac{7|x-2|}{|4x-7|}\le\dfrac{7|x-2|}{1-4|x-2|}\le 14|x-2|<\varepsilon$，只要$14|x-2|<\varepsilon$，即$|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{14}$，

取$\delta=\min\left\{\dfrac{1}{8},\dfrac{\varepsilon}{14}\right\}$，当$0<|x-2|<\delta$时，有：$\left|\dfrac{x}{4x-7}-2\right|<\varepsilon$，

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{x}{4x-7}=2。$$

例 7 用定义证明极限式：$\lim\limits_{x\to 0}a^x=1$，（$a>1$）

证明：$\forall\varepsilon>0$（不妨$\varepsilon<1$），要使：

$|a^x-1|<\varepsilon \Leftarrow 1-\varepsilon<a^x<1+\varepsilon \Leftarrow \log_a(1-\varepsilon)<x<\log_a(1+\varepsilon)$（由对数函数

$f(x)=\log_a x$是单调增函数)。于是，取$\delta=\min\{-\log_a(1-\varepsilon),\ \log_a(1+\varepsilon)\}>0$，

当$0<|x-0|<\delta$时，有：$|a^x-1|<\varepsilon$。故$\lim\limits_{x\to0}a^x=1$。证毕

例8 设$f(x)>0$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，证明：$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{A}$，其中$n\geq2$为正整数。

证明:（用定义证明）因为，$f(x)>0$，由极限保不等式性知，$A\geq0$；当$A>0$时，

$\forall\varepsilon>0$，由$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，知：$\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有：$|f(x)-A|<\varepsilon$

$$\therefore\ \left|\sqrt[n]{f(x)}-\sqrt[n]{A}\right|=\frac{|f(x)-A|}{\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)^{n-1}+\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)^{n-2}\left(\sqrt[n]{A}\right)+\cdots+\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)\left(\sqrt[n]{A}\right)^{n-2}+\left(\sqrt[n]{A}\right)^{n-1}}$$

$\leq\dfrac{|f(x)-A|}{\left(\sqrt[n]{A}\right)^{n-1}}<\dfrac{\varepsilon}{\left(\sqrt[n]{A}\right)^{n-1}}$，故：$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{A}$。

当$A=0$时：$\forall\varepsilon>0$，由$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，知：$\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有：$f(x)<\varepsilon$

$\therefore\ \left|\sqrt[n]{f(x)}-0\right|<\sqrt[n]{\varepsilon}$，故：$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=0$。证毕