专题 5　多元函数积分学（曲面积分）

第一部分　内容概要

一、对面积的曲面积分

1、定义

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$$

2、计算方法：投影法

（1）$\displaystyle\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

（2）$\displaystyle\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_{D_{yz}} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+x_y^2(y,z)+x_z^2(y,z)}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

（3）$\displaystyle\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_{D_{xz}} f(x,y(x,z),z)\sqrt{1+y_x^2(x,z)+y_z^2(x,z)}\mathrm{d}z\mathrm{d}x$

3、对称性

3.1 对称性

设函数 $f(x,y,z)$ 在分片光滑的曲面 $\sum$ 上连续，且 $\sum$ 关于 xoy 坐标面对称，则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\begin{cases} 0, & \text{若} f(x,y,-z)=-f(x,y,z),(x,y,z)\in\Sigma, \\ 2\displaystyle\iint_{\Sigma_{\text{上}}} f(x,y,z)\mathrm{d}S, & \text{若} f(x,y,-z)=f(x,y,z),(x,y,z)\in\Sigma. \end{cases}$$

其中 $\Sigma_{\text{上}}$ 是 Σ 在 xOy 坐标面上方的部分，即 $\Sigma_{\text{上}}=\{(x,y,z)\in\Sigma\mid z\ge 0\}$.

同理可得，Σ 关于坐标平面 yOz、xOz 坐标面对称时的情形.

3.2 轮换对称性

若 $x\to y\to z\to x$，曲面 Σ 的方程不变，则称 Σ 关于 x,y,z 具有轮换对称性．此时，则有 $\displaystyle\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma} f(y,z,x)\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma} f(z,x,y)\mathrm{d}S$；

特别地，$\displaystyle\iint_{\Sigma} f(x)dS=\iint_{\Sigma} f(y)\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma} f(z)\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\iint_{\Sigma}[f(x)+f(y)+f(z)]\mathrm{d}S$.

4、应用

（1）曲面面积

积分曲面 Σ 的面积 $\displaystyle\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=S$.

（2）形心坐标

设曲面 Σ 的形心为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，则

$$\iint_{\Sigma} x\mathrm{d}S=\bar{x}\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S,\quad \iint_{\Sigma} y\mathrm{d}S=\bar{y}\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S,\quad \iint_{\Sigma} z\mathrm{d}S=\bar{z}\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S.$$

二、对坐标的曲面积分

1、定义

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$，其他类似

2、性质

（1）方向性：$\iint_{\Sigma^+}=-\iint_{\Sigma^-}$，其中 Σ^+ 表示曲面的某一侧，Σ^- 表示曲面 Σ^+ 的另一侧

（2）积分曲面可加性：若 $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$，则 $\iint_{\Sigma}=\iint_{\Sigma_1}+\iint_{\Sigma_2}$

3、计算方法

（1）投影法

$$①\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\cos\gamma\mathrm{d}S=\pm\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 γ 为 Σ 的法向量与 z 轴的夹角，当 γ 时锐角时取正号，当 γ 时钝角时取负号.

$$②\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\cos\alpha\mathrm{d}S=\pm\iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 α 为 Σ 的法向量与 x 轴的夹角，当 α 时锐角时取正号，当 α 时钝角时取负号.

$$③\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\cos\beta\mathrm{d}S=\pm\iint_{D_{zx}} Q(x,y(z,x),z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x,$$

其中 β 为 Σ 的法向量与 y 轴的夹角，当 β 时锐角时取正号，当 β 时钝角时取负号.

（2）高斯公式法

设空间区域 Ω 由分片光滑的闭曲面 Σ 围成，函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在 Ω 上具有一阶连续偏导数，则

$$\oiint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v,$$

其中 Σ 取外侧.

（3）统一坐标法

$$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint_{\Sigma}(-Pf'_x-Qf'_y+R)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $\boldsymbol{\Sigma}$ 上侧取正号，$\boldsymbol{\Sigma}$ 下侧取符号.

$$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}\left(P\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}+Q\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}+R\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

三、两类曲面积分的联系

$$\iint_{\Sigma}\left(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\right)\mathrm{d}S \overset{\text{法向量}}{=\!=\!=} \iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

第二部分 典型例题

一、对面积的曲面积分

1、计算

【例 1】设 S 为椭球面 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分，点 $P(x,y,z)\in S$， π 为 S 在点 P 处的切平面，$f(x,y,z)$ 为点 $O(0,0,0)$ 到平面 π 的距离，求 $\iint_S \frac{z}{f(x,y,z)}\mathrm{d}S$.

【答案】$\frac{3}{2}\pi$

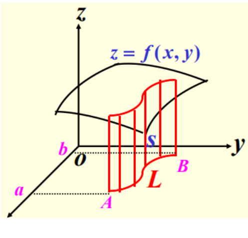
【例 2】计算 $I=\oiint_{\Sigma}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=2(x+y+z)$.

【答案】48π

2、应用：柱面面积的计算方法

当 $f(x,y)$ 表示立于平面曲线 L 上的柱面在点 (x,y) 处的高时，柱面面积为：

$$S=\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x .$$



其中平面曲线 L 的方程为 $y=y(x)(a\le x\le b)$.

【例 3】求柱面 $x^2+y^2-ax=0$ 含在球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 内的那部分的表面积（$a>0$）.

【答案】$4a^2$

二、对坐标的曲面积分

【例 4】（北京 1992）计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{2\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x\cos^2 x}+\frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{\cos^2 y}-\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z\cos^2 z}$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧.

【答案】$4\pi\tan 1$

【例 5】（江苏 2008）设 Σ 为 $x^2+y^2+z^2=1(z\geq 0)$ 的外侧，连续函数 $f(x,y)$ 满足：$f(x,y)=2(x-y)^2+\iint\limits_{\Sigma}x\left(z^2+\mathrm{e}^z\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\left(z^2+\mathrm{e}^z\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left[zf(x,y)-2\mathrm{e}^z\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，求 $f(x,y)$.

【答案】$f(x,y)=2(x-y)^2+\frac{18\pi}{5(2\pi-3)}$

【例 6】设 $\sum$ 为一光滑闭曲面，$\bar{n}$ 为 $\sum$ 上点 (x,y,z) 处的外法向量，$\bar{r}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$，在下列情形下：（1）曲面 $\sum$ 不包含原点；（2）曲面 $\sum$ 包含原点. 分别计算 $\oiint\limits_{\Sigma}\frac{\cos(\bar{r}\cdot\bar{n})}{r^2}\mathrm{d}S$.

【答案】（1）0；（2）4π

【例 7】设 $C:\begin{cases}\varphi(x,y)=0,\\ z=0\end{cases}$ 为 xOy 平面上的闭曲线，C 所围区域 D 面积为 σ，曲面 $\sum$ 为平面 $x+y+z=2$ 被柱面 $\varphi(x,y)=0$ 所截有限部分的下侧.计算

$$I=\iint_{\Sigma}(y+2z)\mathrm{d}y\mathrm{d}x+(z+3x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

【答案】-6σ

【例 8】（南大 1996）设 Σ 表示球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧位于 $x^2+y^2-x\le 0$，$z\ge 0$ 的部分，计算 $I=\iint_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

【答案】$\frac{38}{105}+\frac{5}{32}\pi$

【例 9】应用高斯公式计算曲面积分 $\oiint_{\Sigma}\left(ax^2+by^2+cz^2\right)\mathrm{d}S(a,b,c\text{为常数})$. 其中 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=2z$.

【答案】$\frac{4}{3}\pi(a+b+c)+4\pi c$

【例 10】设Σ为简单闭曲面，$\vec{a}$为任意常向量，$\vec{n}$为Σ的单位外法线向量，试证：$\oiint\limits_{\Sigma}\cos\left(\vec{n},\vec{a}\right)\mathrm{d}S=0$.

第三部分　强化练习

1.（南大 1995）设$\varphi(x,y,z)$为原点到椭球面Σ:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\ \ (a>0,b>0,c>0)$上点$(x,y,z)$处的切平面的距离，求$\iint\limits_{\Sigma}\varphi(x,y,z)\mathrm{d}S$.

【提示】计算二重积分过程中应用广义极坐标变换.

2. 计算$I=\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被柱面$x^2+y^2=2ax$所截成的部分$(a>0)$.

3. 设$\Sigma: x^2+y^2+z^2=a^2$，Σ_1是Σ的下半部分，Σ_2为Σ在第一卦限的部分，则有（　　）.

（A）$\iint_{\Sigma_1}x\mathrm{d}S=4\iint_{\Sigma_2}x\mathrm{d}S$　　（B）$\iint_{\Sigma_1}y\mathrm{d}S=4\iint_{\Sigma_2}y\mathrm{d}S$

（C）$\iint_{\Sigma_1}z\mathrm{d}S=4\iint_{\Sigma_2}z\mathrm{d}S$　　（D）$\iint_{\Sigma_1}z\mathrm{d}S=-4\iint_{\Sigma_2}z\mathrm{d}S$

4. 计算$\iint\limits_{\Sigma}|xyz|\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$为$z=x^2+y^2$被平面$z=1$所截下部分.

【提示】含有绝对值函数，利用对称性去掉绝对值符号. 二重积分利用极坐标，再经过二次换元.

5. 求圆柱面$x^2+\left(y-\dfrac{a}{2}\right)^2=\dfrac{a^2}{4}$介于平面$z=0$及锥面$z=\dfrac{h}{a}\sqrt{x^2+y^2}$之间的侧面积.

6. 计算$I=\iint\limits_{S}(-y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$S$是圆柱面$x^2+y^2=4$被平面$x+z=2$和$z=0$所截出部分的外侧.

7. 计算$\oiint\limits_{\Sigma}\left(x^2-yz\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(y^2-zx\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(z^2-xy\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$为平面$x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=a$, $y=a$, $z=a$所围成立体的表面的外侧.

8. 计算 $I=\oiint\limits_{\Sigma} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left[yf(yz)+y^3\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left[-zf(yz)+z^3\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 f 有一阶连续导数，而 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=2Rz\ (R>0)$ 的内侧.

9. 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma} x\left(y^2+z\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\left(z^2+x\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\left(x^2+y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=2z$ 的外侧.

10. 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}\left(x^3+az^2\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(y^3+ax^2\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(z^3+ay^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧.

11. 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为柱面 $x^2+y^2=1$ 介于 $z=0$ 与 $x+y+z=2$ 之间部分的外侧.

12、设 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是曲面 $1-\dfrac{z}{5}=\dfrac{(x-2)^2}{16}+\dfrac{(y-1)^2}{9}\ (z\geq 0)$，取上侧，计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$.

13. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}\left[f(x,y,z)+x\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left[2f(x,y,z)+y\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left[f(x,y,z)+z\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $f(x,y,z)$ 为连续函数，Σ 是平面 $x-y+z=1$ 在第四卦限部分的上侧.

14. 计算 $\iint\limits_{\Sigma} yz(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+zx(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+xy(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是上半球面 $z=\sqrt{4Rx-x^2-y^2}$ $(R\geq 1)$ 在柱面 $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+y^2=1$ 之内部分的上侧.

15.（江苏 2016）设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=2z$，试求曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\left(x^4+y^4+z^4-x^3-y^3-z^3+x^2+y^2+z^2-x-y-z\right)\mathrm{d}S.$$

16.（江苏 2016）设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=2z$，试求曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\left(x^4+y^4+z^4-x^3-y^3-z^3\right)\mathrm{d}S$.

【参考答案】

1. $4\pi abc$.	2. $\dfrac{64\sqrt{2}}{15}a^4$.	3. D.	4. $\dfrac{125\sqrt{5}-1}{420}$.
5. $2ah$.	6. -8π.	7. $3a^4$.	8. $-\dfrac{32}{5}\pi R^5$.
9. $\dfrac{52}{15}\pi$.	10. $\dfrac{29}{20}\pi a^5$.	11. $-\dfrac{3}{2}\pi$.	12. 2π.
13. $\dfrac{1}{2}$.	14. $-\dfrac{\pi}{2}R$.	15. $\dfrac{52}{5}\pi$.	16. $\dfrac{32}{5}\pi$.