高等数学 I-1 综合练习 4

一、填空题

1. 当 $a=$ ________ 时, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}, & x<0\\ -\dfrac{1}{2}, & x=0\\ 3^{-\frac{1}{x}}+a, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续.

2. 设点 $(1,3)$ 是曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点, 则 $a=$ ________, $b=$ ________ $\begin{cases} y''(1)=0\\ y(1)=3\end{cases}$

3. $\int xf(x)\,\mathrm{d}x=\arctan x+C$, 则 $\int \dfrac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x=$ ________.

$xf(x)=(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

4. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{\sqrt{\pi}} 2x\sin x^2\,\mathrm{d}x=$ ________. 定积分是一个常数，从而导数为0.

5. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+4^n+5^n}=$ ________.

$\sqrt[n]{5^n}<\sqrt[n]{3^n+4^n+5^n}<\sqrt[n]{3\cdot 5^n}=\sqrt[n]{3}\cdot 5$

"夹逼准则"

二、选择题

定义 而来

1. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域内有定义, 则 $f(x)$ 在 $x=a$ 可导的充要条件为 (　　).

$\frac{1}{h}\to 0^+$

(A) $\lim\limits_{h\to+\infty} h\left[f\left(a+\dfrac{1}{h}\right)-f(a)\right]$ 存在;　(B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ 存在;

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$ 存在;　(D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在.

和的极限存在 推不出分拆后的各部分极限存在.

2. 满足方程 $f'(x)=0$, $f''(x)>0$ 的 x 是函数 $y=f(x)$ 的 (A).

(A) 极小值点;　(B) 极大值点;　(C) 拐点;　(D) 间断点.

3. 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x^2}{2}, & 0\le x\le 1,\\ \dfrac{1}{x}, & 1\le x<+\infty\end{cases}$ 在 $[0,2]$ 上使用拉格朗日中值定理结论成立的可能的 ξ 是 (　　).

$x=1$ 间断点.

对 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 及 $[1,2]$ 用 Lagrange 中值定理.

(A) $\dfrac{1}{2}$;　(B) 2;　(C) 0;　(D) $\dfrac{1}{2}$ 或 $\sqrt{2}$.

4. 下列定积分中积分值不为 0 的是 (　　).

(A) $\int_{-1}^{1}\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\,\mathrm{d}x$;　(B) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\cos x)\ln\dfrac{1-x}{1+x}\,\mathrm{d}x$;

(C) $\int_{-\pi}^{\pi}(x^2+\cos x)\,\mathrm{d}x$;　(D) $\int_{-\pi}^{\pi}(x^3+\sin x)\,\mathrm{d}x$.

5. 设 $f'(x)=g(x)$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(\cos^2 x)=$ (D).

$f'(\cos^2 x)\cdot 2\cos x\cdot(-\sin x)=-\sin 2x\,g(\cos^2 x)$

(A) $2g(\cos^2 x)\cos x$;　(B) $-g(\cos^2 x)\cos 2x$;

(C) $-2g(\cos^2 x)\cos x$;　(D) $-g(\cos^2 x)\sin 2x$.

三、解答题

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sin x}{\sqrt{1+x^3}}$.

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^3}}\sin x$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{\frac{1}{x^3}+1}}\sin x$

其中 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{\frac{1}{x^3}+1}}=0$ ∴原式$=0$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}\right)$.

令 $S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$ ① "求和"是关键

$2S_n=1+\frac{3}{2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n-1}}$ ②

$n\geq 2$时 ②-①得 $S_n=1+2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{2n-1}{2^n}$

$=1+2\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{2n-1}{2^n}$

$=3-\frac{2n+3}{2^n}$ $n=1$时 $S_1=\frac{1}{2}$也符合

∴原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{2n+3}{2^n}\right)=3$

3. $x=\int_1^t u\ln u\,\mathrm{d}u,\ y=\int_t^2 u^2\ln u\,\mathrm{d}u$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y},\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}$.

$\frac{dx}{dt}=t\ln t$ $\frac{dy}{dt}=-t^2\ln t$ (变积分上限求导)

$\frac{dx}{dy}=\dfrac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}}=\dfrac{t\ln t}{-t^2\ln t}=-\frac{1}{t}$, $\frac{d^2x}{dy^2}=\dfrac{d\left(\frac{dx}{dy}\right)}{dt}\cdot\frac{dt}{dy}=\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{-t^2\ln t}=-\frac{1}{t^4\ln t}$

易错点！(勿忘)

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{x+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$.

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{1+\cos x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-1}{1+\cos x}d\cos x$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,d\tan\frac{x}{2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos x}d(1+\cos x)$

$=x\tan\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[\ln|1+\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$

5. $\int\dfrac{1}{x(2+x^{10})}\mathrm{d}x$.

$=\int\frac{x^9}{x^{10}(2+x^{10})}dx$

$=\frac{1}{20}\int\left(\frac{1}{x^{10}}-\frac{1}{2+x^{10}}\right)dx^{10}=\frac{1}{20}\ln\frac{x^{10}}{x^{10}+2}+C$

四、 讨论函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}$ 的间断点, 并指出其类型.

$1-x=0\Rightarrow x=1$ (分母为0的点)

$1-e^{\frac{x}{1-x}}=0\Rightarrow x=0$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}=\infty$

∴$x=0$是第二类无穷型间断点

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}=1$ ($\frac{x}{1-x}\to-\infty$)

$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}=0$ ($\frac{x}{1-x}\to+\infty$)

∴$x=1$是第一类跳跃型间断点

五、 已知 $f(x)=\int_1^{x^2} e^{-t^2}\,dt$, 求 $\int_0^1 xf(x)\,dx$.

(积分上限求导)

$\because f(x)=\int_1^{x^2} e^{-t^2}dt \quad \therefore f'(x)=e^{-x^4}\cdot 2x \qquad f(1)=0$

$\int_0^1 xf(x)dx \overset{\text{凑微分}}{=} \int_0^1 f(x)\,d\frac{x^2}{2} \overset{\text{分部积分}}{=} \frac{x^2}{2}f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 df(x)$

$=\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\cdot 2xe^{-x^4}dx=\frac{1}{4}\int_0^1 e^{-x^4}d(-x^4)=\frac{1}{4}e^{-x^4}\Big|_0^1=\frac{1}{4}(e^{-1}-1)$

六、 设 $f(x)$ 是在 $[0,+\infty)$ 内单调递减的连续函数, 证明: 当 $x\ge 0$ 时,

$$\int_0^x x^2 f(t)\,dt \ge 3\int_0^x t^2 f(t)\,dt.$$

令 $F(x)=\int_0^x x^2f(t)dt-3\int_0^x t^2f(t)dt$，则 $F(0)=0$ (证明 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)\uparrow$)

$F'(x)=2x\int_0^x f(t)dt+x^2f(x)-3x^2f(x)$

$=2x\left[\int_0^x f(t)dt-xf(x)\right]=2x\left[f(\xi)\cdot x-xf(x)\right] \quad 0\le\xi\le x$

由于 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内 $\downarrow$ 所以 $f(\xi)\geq f(x)\Rightarrow F'(x)\geq 0$

$\therefore F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内 $\uparrow$ 从而 $F(x)\geqslant F(0)$ $x\in[0,+\infty)$

七、 设函数 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 证明: 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f(\xi)\int_\xi^b g(x)\,dx = g(\xi)\int_a^\xi f(x)\,dx.$$

设 $F(x)=\int_a^x f(t)dt\cdot\int_x^b g(t)dt$ (辅助函数的构造)

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. (a,b) 内可导. 且 $F(a)=F(b)=0$

由罗尔 Th, $\exists\xi\in(a,b)\rightarrow F'(\xi)=0$

即 $f(\xi)\int_\xi^b g(t)dt-g(\xi)\int_a^\xi f(t)dt=0$

$\therefore f(\xi)\int_\xi^b g(x)dx=g(\xi)\int_a^\xi f(x)dx$

八、设 $f(x)=\begin{cases} x^n\sin\dfrac{1}{x}(n\in\mathbf{N}), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, 问:

(1) 当 n 为何值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导;

(2) 当 n 为何值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 但导函数不连续;

(3) 当 n 为何值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处导函数连续.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^n\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}x^{n-1}\sin\frac{1}{x}$$

$n-1\leq 0$时 $f(x)$在$x=0$处不可导. 即 $n=0$或1

$n>1$时 $f'(0)$存在.

$$f'(x)=\begin{cases} nx^{n-1}\sin\frac{1}{x}-x^{n-2}\cos\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}nx^{n-1}\sin\frac{1}{x}-x^{n-2}\cos\frac{1}{x}$$

$n-2\leq 0$时 该极限不存在.

∴ $1<n\leq 2$时 即 $n=2$时 $f(x)$在$x=0$处可导, 但导函数不连续.

$n-2>0$时 即 $n>2$时, 导函数在$x=0$处连续.

参考答案 4

一、填空题 1. $-\dfrac{1}{2}$. 2. $-\dfrac{3}{2};\dfrac{9}{2}$. 3. $\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{4}x^4+C$. 4. 0. 5. 5.

二、选择题 D. A. D. C. D.

三、1. 0. 2. 3. 3. $\dfrac{dx}{dy}=-\dfrac{1}{t},\ \dfrac{d^2x}{dy^2}=-\dfrac{1}{t^4\ln t}$. 4. $\dfrac{\pi}{2}$. 5. $\dfrac{1}{20}\ln\dfrac{x^{10}}{x^{10}+2}+C$.

四、$x=0$ 为第二类无穷间断点, $x=1$ 为第一类跳跃间断点.

五、$\dfrac{1}{4}(e^{-1}-1)$. 六、略. 七、略.

八、(1) $n\leq 1$ 或 $n=0,1$; (2) $n=2$; (3) $n>2$.