任课教师________ 学号________ 线 姓名________ 订 班级________ 装 专业________ 学院________

2019－2020学年 第二学期 高等数学I-2 课程期末试卷（B 卷）

本试卷共 2 页；考试时间 120 分钟；出卷时间 2020 年 6 月； 理工科各专业 适用

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分. 请将答案填在答题册上对应题号后面的横线上）

（1） 函数$u=\arcsin(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z})$的定义域为___$\{(x,y,z)|\sqrt{x^2+y^2}\le|z|,\text{且}z\neq 0\}$____.

（2） 函数$z=x^2y^2-xy$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$ ________$2xy^2-y$__________.

（3） L为圆周$x^2+y^2=4$，则对弧长的曲线积分$\oint_L\sqrt{x^2+y^2}ds=$_____8π ____.

（4） 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{v_n}$___发散______.

（5） 一条曲线过点$M(0,3)$且在该曲线上每一点(x,y)的切线斜率为$3x^2$，那么该曲线方程是______ $y=x^3+3$______.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个符合题目要求，请将所选项前的字母填在答题册上对应题号后面的横线上）

（1） 函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续是函数$f(x,y)$在该点处存在偏导数的（ D ）

(A) 必要条件 (B) 充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既非充分条件，又非必要条件

（2） 设$f(x)$是周期为2π的周期函数，它在$[-\pi,\pi)$上的表达式为$f(x)=x$，则$f(x)$的傅里叶级数在$x=-\pi$处收敛于（ A ）.

(A) 0 (B) π (C) $-\pi$ (D) 2π

（3） 设D是由$|x|=2,|y|=1$所围成的闭区域，则二重积分$\iint_D xy^2dxdy$（ D ）

(A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{8}{3}$ (C) $\frac{16}{3}$ (D) 0

（4） 若$\lim_{n\to\infty}u_n=0$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ （ D ）

(A) 一定收敛 (B) 一定发散
(C) 一定条件收敛 (D) 可能收敛，可能发散

（5） 对微分方程 $y''=f(y,y')$，降阶的方法是（ C ）

(A) 设 $y' = p$，则 $y'' = p'$ (B) 设 $y' = p$，则 $y'' = \frac{dp}{dy}$

(C) 设 $y' = p$，则 $y'' = p\frac{dp}{dy}$ (D) 设 $y' = p$，则 $y'' = \frac{1}{p}\frac{dp}{dy}$

三、计算题（每小题 5 分，共 25 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤，请直接在答题册对应题号下面的空白处作答）

（1）求二元函数 $f(x,y) = x^2 + 5y^2 - 6x + 10y + 6$ 的极值.

解：因为 $f_x = 2x - 6,\ f_y = 10y + 10$，故驻点为 $(3,-1)$， 2 分

故 $A = f_{xx} = 2 > 0, B = f_{xy} = 0, C = f_{yy} = 10,$ 又 $AC - B^2 = 20 > 0,$ 4 分

故函数有极小值为： $f(3,-1) = -8$. 5 分

（2）设函数 $z = f\left(2x - y\right) + g\left(x, xy\right)$，其中函数 $f\left(t\right)$ 二阶可导，$g\left(u,v\right)$ 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解： $\frac{\partial z}{\partial x} = 2f' + g_1' + yg_2'$； 3 分

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2f'' + xg_{12}'' + g_2' + xyg_{22}''$. 5 分

（3）求 $\iint\limits_D e^{-x^2 - y^2} dxdy$， 其中 D 是由中心在原点，半径为 a 的圆周所围成的闭区域.

解：原式 $= \iint\limits_D e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a e^{-\rho^2} \rho d\rho$ 2 分

$= 2\pi[-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}]\Big|_0^a = \pi(1 - e^{-a^2})$. 5 分

（4）计算曲面积分 $\oiint\limits_\Sigma x^2 dydz + z^2 dxdy$，其中 Σ 为 $z = x^2 + y^2$ 和 $z = 1$ 所围立体边界的外侧.

解： $\oiint\limits_\Sigma x^2 dydz + z^2 dxdy = \iiint\limits_\Omega (2x + 2z) dxdydz$ 3 分

$= \iiint\limits_\Omega 2z dv = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_\rho^1 z dz = \frac{2\pi}{3}$. 5 分

(5) 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\pi}{3^n}$的收敛性.

解：因为$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n \sin\frac{\pi}{3^n}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\pi$，而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$收敛， 3 分

由比较审敛法知：级数$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\pi}{3^n}$收敛. 5 分

四、(本题满分 8 分) 求曲线$\begin{cases} 2x^2+3y^2+z^2=9 \\ z^2=3x^2+y^2 \end{cases}$在点$(1,-1,2)$处的切线方程.

解：方程两边对x求导，得$\begin{cases} 3y\dfrac{dy}{dx}+z\dfrac{dz}{dx}=-2x \\ y\dfrac{dy}{dx}-z\dfrac{dz}{dx}=-3x \end{cases}$， 2 分

得 $\frac{dy}{dx}=-\frac{5x}{4y},\frac{dz}{dx}=\frac{7x}{4z}$. 4 分

该曲线在$(1,-1,2)$处的切向量为$\vec{T}=(1,\frac{5}{4},\frac{7}{8})=\frac{1}{8}(8,10,7)$ 6 分

故所求的切线方程为$\frac{x-1}{8}=\frac{y+1}{10}=\frac{z-2}{7}$. 8 分

五、(本题满分 8 分) 计算$\oint_L (y^2+2x\sin y)dx+x^2(\cos y+x)dy$，其中$L$是以$A(1,0)$，$B(0,1)$，$E(-1,0)$，$F(0,-1)$为顶点的逆时针方向的正方形.

解：设所围正方形区域为D，由格林公式，

原式=$\iint_D (3x^2-2y)dxdy=3\iint_D x^2dxdy-2\iint_D ydxdy$ 4 分

又根据奇偶函数在对称区域上重积分的性质，得$\iint_D ydxdy=0$ 6 分

所以原式=$3\iint_D x^2dxdy-0=4$. 8 分

六、(本题满分 8 分) 设$f(x)=x+\int_0^x f(u)du$，$f(x)$为可微函数，求$f(x)$.

解： 将$f(x)=x+\int_0^x f(u)du$两边对x求导并整理得，

$f'(x)-f(x)=1$，一阶线性微分方程， 2 分

$f(x)=e^{\int dx}(\int e^{-\int dx}dx+C)=e^{x}(\int e^{-x}dx+C)=e^{x}(-e^{-x}+C)$， 6 分

又由 $f(x)=x+\int_0^x f(u)du$ 可知 $f(0)=0$，从而 $C=1$，

所以所求函数 $f(x)=e^x-1$. 8 分

七、(本题满分 8 分) 求由曲面 $z=2x^2+2y^2$ 及 $z=6-x^2-y^2$ 所围成的立体的体积.

解： 交线 C：$\begin{cases} z=2x^2+2y^2 \\ z=6-x^2-y^2 \end{cases}$ 在 xOy 坐标面上的投影为 $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ z=0 \end{cases}$

则立体 Ω 在 xOy 坐标面上的投影区域为 D_{xy}：$x^2+y^2\le 2$. 2 分

所求体积 $V=\iiint\limits_{\Omega}dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\rho d\rho\int_{2\rho^2}^{6-\rho^2}dz$ 5 分

$=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\rho(6-3\rho^2)d\rho=6\pi$. 8 分

八、(本题满分 8 分) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}(|x|<1)$ 的和函数，并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)4^n}$ 的和.

解： 设和函数 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, $|x|<1$，

$s'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}$, $|x|<1$； 3 分

又 $s(0)=0$， $s(x)=\int_0^x s'(t)dt=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, $|x|<1$， 6 分

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)4^n}=\frac{1}{2}s(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}\ln 3$. 8 分

九、(本题满分 5 分) 设函数 $u=f(z)$ 为连续函数，证明：

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1}f(z)dv=\pi\int_{-1}^{1}f(t)(1-t^2)dt.$$

证明： $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1}f(z)dv=\int_{-1}^{1}f(z)dz\iint\limits_{D_Z}dxdy$ 2 分

$=\pi\int_{-1}^{1}f(z)(1-z^2)\ dz$

$$= \pi \int_{-1}^{1} f(t)(1-t^2)dt$$

即 $$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \le 1} f(z)dv = \pi \int_{-1}^{1} f(t)(1-t^2)dt \, .$$ 5 分