专题 4 积分学

第一部分 典型例题

1. 不定积分与定积分的计算

例 1 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}\ (x>0)$，求 $\int f(x)dx$.

【 $F(x)=\begin{cases} x+C,0<x\le 1 \\ \dfrac{x^2+1}{2}+C,1<x\le 2 \\ \dfrac{x^3+7}{6}+C,x>2 \end{cases}$ 】

例 2 不定积分 $I=\int\dfrac{e^{-\sin x}\sin 2x}{(1-\sin x)^2}dx=$ ______.（2017 国预赛）

【 $\dfrac{2e^{-\sin x}}{1-\sin x}+C$ 】

例 3 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\dfrac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}dt$.（2012 国预赛）

【0】

例 4 设 $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t}dt$ ，求 $\int_0^\pi f(x)dx$.

【2】

例 5 计算定积分 $I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}dx$.（2013 国预赛）

【$\frac{\pi^3}{8}$】

例 6 求 $\int_{-1}^{1}x\ln(1+e^x)dx$

【$\frac{1}{3}$】

例 7 求定积分 $\int_0^\pi\left[f(e^{\cos x})-f(e^{-\cos x})\right]dx.$

【0】

例 8　设 n 为正整数，计算 $I=\int_{e^{-2n\pi}}^{1}\left|\frac{d}{dx}\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right|dx$.

【 $4n$ 】

例 9 求满足方程 $\int_0^x f(t)dt=x+\int_0^x tf(x-t)dt$ 的可微函数 $f(x)$.

【 e^x 】

例 10 设可微函数 $f(x)$ 在 $x>0$ 上有定义，其反函数为 $g(x)$ 且满足

$\int_1^{f(x)} g(t)dt=\frac{1}{3}\left(x^{\frac{3}{2}}-8\right)$，试求 $f(x)$.【涉及反函数的积分方程】

【 $f(x)=\sqrt{x}-1$ 】

2、含有积分的不等式、等式的证明

例 11 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且满足 $0<m\le f(x)\le M$，试证明：

$$(b-a)^2\le\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b\frac{1}{f(x)}dx\le\frac{(m+M)^2}{4mM}(b-a)^2.$$

例 12 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上可导，$f'(x)\ge 0$，求证：对任意正整数 n，有 $\left|\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx dx\right|\le\frac{2}{n}[f(2\pi)-f(0)]$.

3、定积分的应用

例 13 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内大于零，并满足 $xf'(x)=f(x)+\frac{3a}{2}x^2$（$a$ 为常数）.又曲线 $y=f(x)$ 与 $x=1,y=0$ 所围的图形 S 的面积值为 2，求函数 $y=f(x)$，并问 a 为何值时，图形 S 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积最小.

【$f(x)=\frac{-15}{2}x^2+9x,\ a=-5$】

4、广义积分的计算

例 14 设区间 $(0,+\infty)$ 上的函数 $u(x)=\int_0^{+\infty}e^{-xt^2}dt$，则 $u(x)$ 的初等函数表达式是____________.（2015 国预赛）

【$u(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$】

5、重积分的计算

例 15 求二重积分 $\iint\limits_D \max\{xy,1\}dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 2, 0\le y\le 2\}$.

【$\frac{19}{4}+\ln 2$】

例 16 计算 $I=\iint\limits_D \frac{(x+y)\ln(1+\frac{y}{x})}{\sqrt{1-x-y}}dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\,|\,0\le x+y\le 1, x\ge 0, y\ge 0\right\}$.

【$\frac{16}{15}$】

例 17 设 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 1\}$，计算

（1）$\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2+z^2)dxdydz$；　（2）$\iiint\limits_\Omega z^2dxdydz$；

（3）$\iiint\limits_\Omega (x+y+z)^2dxdydz$；　（4）$\iiint\limits_\Omega (mx+ny+pz)^2dxdydz$（其中 m,n,p 均为常数）.

【$\dfrac{4\pi}{5},\dfrac{4\pi}{15},\dfrac{4\pi}{5},(m^2+n^2+p^2)\dfrac{4\pi}{15}$】

例 18 某物体所在的空间区域为$\Omega: x^2+y^2+2z^2 \le x+y+2z$，

密度函数为$x^2+y^2+z^2$，求质量$M=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz$.（2016 国预赛）

【$\dfrac{3+2\sqrt{2}}{6}\pi$】

例 19 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，试证 $\int_0^1 dx\int_x^1 dy\int_x^y f(x)f(y)f(z)dz=\frac{1}{3!}\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^3$

6、曲线积分与曲面积分

例 20 已知平面区域 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le\pi,0\le y\le\pi\}$，$L$ 为 D 的正向边界，试证：

（1）$\oint\limits_L xe^{\sin y}\mathrm{d}y-ye^{-\sin x}\mathrm{d}x=\oint\limits_L xe^{-\sin y}\mathrm{d}y-ye^{\sin x}\mathrm{d}x$；【格林公式、对称性】

（2）$\oint\limits_L xe^{\sin y}\boldsymbol{d}y-ye^{-\sin x}\boldsymbol{d}x\ge\frac{5}{2}\pi^2$.【格林公式、对称性、泰勒公式】

例 21 计算 $\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dS$，其中 $\sum$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧，

$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 是其外法线向量的方向余弦.

【4π】

例 22　试证 $\oiint\limits_{\Sigma}(x+y+z+\sqrt{3}a)dS\geq 12\pi a^3(a>0)$，

其中 $\sum$ 是球面 $x^2+y^2+z^2-2ax-2ay-2az+2a^2=0$.

例 23 设 $I_a\left(r\right)=\oint\limits_C\frac{ydx-xdy}{\left(x^2+y^2\right)^a}$，其中 a 为常数，曲线 C 为椭圆

$x^2+xy+y^2=r^2$，取正向. 求极限 $\lim\limits_{r\to+\infty}I_a\left(r\right)$.（2013 国预赛）

【 $I_a\left(r\right)=\begin{cases}0, a>1\\-\infty, a<1\\-2\pi, a=1\end{cases}$ 】

例 24 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{2dydz}{x\cos^2 x}+\frac{dzdx}{\cos^2 y}-\frac{dxdy}{z\cos^2 z}$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧.

【利用轮换对称性计算】

【$4\pi\tan 1$】

例 25 设 Σ 为 $x^2+y^2+z^2=1(z\geq 0)$ 的外侧，连续函数 $f(x,y)$ 满足

$$f(x,y)=2(x-y)^2+\iint\limits_{\Sigma}x(z^2+e^z)dydz+y(z^2+e^z)dzdx+[zf(x,y)-2e^z]dxdy,$$

求 $f(x,y)$.【补面、高斯公式】.

【$f(x,y)=2(x-y)^2+\frac{18\pi}{5(2\pi-3)}$】

例 26 设 $\varphi(x,y,z)$ 为原点到椭圆面 Σ：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1(a>0,b>0,c>0)$ 上点 (x,y,z) 处的切平面的距离，求 $\iint\limits_{\Sigma}\varphi(x,y,z)dS$.【面Ⅰ化为面Ⅱ】

【 $4\pi abc$ 】

例 27 设 P 为椭球面 $S: x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的动点，若 S 在点 P 处的切平面与 xoy 面垂直，求点 P 的轨迹 C，并计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{(x+\sqrt{3})|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}dS$，其中 Σ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分.

【 2π 】

例 28 证明 $\dfrac{\pi(R^2-r^2)}{R+K} \le \iint\limits_D \dfrac{d\sigma}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} \le \dfrac{\pi(R^2-r^2)}{r-K}$，

其中 $0 < K = \sqrt{a^2+b^2} < r < R$，$D$：$r^2 \le x^2+y^2 \le R^2$.

例 29 设 $f(x)$ 连续，$f(0)=k$，$V_t=\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le k, x^2+y^2\le t^2\}$，求 $\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{F(t)}{t^2}$.

其中 $F(t)=\iiint\limits_{V_t}[z^2+f(x^2+y^2)]dxdydz$.

【$\dfrac{\pi}{3}k^3+\pi k^2$】

例 30 计算 $\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为内接于球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的八面体

$|x|+|y|+|z|=a$ 表面.

【$2\sqrt{3}a^4$】

例 31 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{S^+}\dfrac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$，

其中 S^+ 是 $1-\dfrac{z}{7}=\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y-1)^2}{16}(z\geq 0)$ 的上侧.

【 2π 】

例 32 计算 $I=\oint_L\dfrac{4x-y}{4x^2+y^2}dx+\dfrac{x+y}{4x^2+y^2}dy$，其中 $L:x^2+y^2=2$，取逆时针方向.

【 π 】

例 33 设 $f(x)$ 具有连续导数，求 $\int_L \frac{1+y^2 f(xy)}{y}dx+\frac{x\left[y^2 f(xy)-1\right]}{y^2}dy$，其中 L 是从点 $A(3,\frac{2}{3})$ 到点 $B(1,2)$ 的直线段。

【-4】

例 34 设半径为 R 的球面 Σ 的球心在定球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$ 上，问当 R 取何值时，球面 Σ 在定球内部的面积最大？

【$R=\dfrac{4}{3}a$】

例 35 设 Σ 为平面 $x-y+z=1$ 介于三坐标平面间的有限部分，法向量与 z 轴交角为锐角，函数 $f(x,y,z)$ 连续，计算

$$I=\iint_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]dydz+[2f(x,y,z)+y]dzdx+[f(x,y,z)+z]dxdy.$$

【统一坐标法】

【$\dfrac{1}{2}$】

第二部分 强化训练

1. 求 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}$ 的表达式 .

2. $\displaystyle\int\frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x}dx.$

3. 求 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\int_x^{x+1}\frac{dt}{\sqrt{t+\sin t+x}}$.

4.求定积分 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\cdot\arctan e^x}{1+\sin^2 x}dx$.

5. 计算 $I=\int_0^{n\pi}x\,|\sin x|\,dx$（$n$ 为正整数）.

6.设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，$f(0)=0$，且当 $x\in(0,1)$ 时，$0<f'(x)<1$.试证：当 $a\in(0,1)$ 时，$\left(\int_0^a f(x)dx\right)^2>\int_0^a f^3(x)dx$.（2016 国预赛）

7. 求 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}dx$.

8. 求 $\displaystyle\iint_D \operatorname{sgn}(xy-1)dxdy$，其中 $D=\{(x,y)|0\le x\le 2,0\le y\le 2\}$.（2011 国预赛）

9. 设 S 为椭球面 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分，点 $P(x,y,z)\in S$，$\prod$ 为 S 在点 P 处的切平面，$\rho(x,y,z)$ 为点 $O(0,0,0)$ 到平面 $\prod$ 的距离，求 $\displaystyle\iint_S\frac{z}{\rho(x,y,z)}dS$.

10. 设函数 $f(x)$ 连续，　$F(t)=\displaystyle\iiint_\Omega[z^2+f(x^2+y^2)]dv$，其中

$\Omega:0\le z\le h, x^2+y^2\le t^2$，求 $\dfrac{dF}{dt}$ 和 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{F(t)}{t^2}$.

11. 计算积分 $\displaystyle\iint_\Sigma(x-y+z)dydz+(y-z+x)dzdx+(z-x+y)dxdy$，

其中 Σ 是 $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$ 所围立体表面外侧.

12. 计算 $\iint\limits_{\Sigma} \dfrac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$，

其中 Σ 为曲面 $1-\dfrac{z}{5}=\dfrac{(x-2)^2}{16}+\dfrac{(y-1)^2}{9}(z>0)$ 的上侧.

【参考答案】

1. $f(x)=\begin{cases} 1, & -1<x\le 1 \\ x, & 1<x\le 2 \\ \dfrac{x^2}{2}, & |x|>2 \end{cases}$　　2. $\dfrac{e^x \sin x}{1+\cos x}+C$.　　3. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

4. $\dfrac{\pi^2}{8}$　　5. $I=n^2\pi$　　6. 略

7. $\dfrac{\pi \ln a}{2a}$　　8. $2-4\ln 2$　　9. $\dfrac{3\pi}{2}$

10. $\dfrac{dF}{dt}=\dfrac{2}{3}\pi h^3 t+2\pi h f(t^2)t$ ；$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{F(t)}{t^2}=\dfrac{1}{3}\pi h^3+\pi h f(0)$

11. 1　　12. 2π