第二单元　导数与微分测试题及详解

一、填空题

1、已知 $f'(3)=2$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{2h}$ =_____________。

2、 $f'(0)$ 存在，有 $f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ =________。

3、 $y=\pi^x+x^\pi+\arctan\dfrac{1}{\pi}$，则 $y'\big|_{x=1}$ =________。

4、 $f(x)$ 二阶可导， $y=f(1+\sin x)$，则 y' =______； y'' =______。

5、曲线 $y=e^x$ 在点________处切线与连接曲线上两点 $(0,1),(1,e)$ 的弦平行。

6、 $y=\ln[\arctan(1-x)]$，则 dy =________。

7、 $y=\sin^2 x^4$，则 $\dfrac{dy}{dx}$ =__________， $\dfrac{dy}{dx^2}$ =________。

8、若 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t(1+\dfrac{1}{x})^{2tx}$，则 $f'(t)$ =________。

9、曲线 $y=x^2+1$ 于点__________处的切线斜率为 2。

10、设 $y=xe^x$，则 $y''(0)=$ _________ 。

11、设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^{x+y}+\cos(xy)=0$ 确定，则 $\dfrac{dy}{dx}=$ __________ 。

12、设 $\begin{cases}x=1+t^2\\ y=\cos t\end{cases}$ 则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=$ __________ 。

二、单项选择

1、设曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 和 $y=x^2$ 在它们交点处两切线的夹角为 φ，则 $\tan\varphi$ =（　　）。

（A） -1；　　（B） 1；　　（C） -2；　　（D） 3。

3、函数 $f(x)=e^{\tan^k x}$，且 $f'(\dfrac{\pi}{4})=e$，则 $k=$（　　）。

（A）　1；　（B）　-1；　（C）　$\dfrac{1}{2}$；　（D） 2。

4、已知 $f(x)$ 为可导的偶函数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+x)-f(1)}{2x}=-2$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $(-1,2)$ 处切线的方程是________。

（A） $y=4x+6$；（B） $y=-4x-2$；（C） $y=x+3$；（D） $y=-x+1$。

5、设 $f(x)$ 可导，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f^2(x+\Delta x)-f^2(x)}{\Delta x}$ =______。

（A） 0； （B） $2f(x)$； （C） $2f'(x)$； （D） $2f(x)\cdot f'(x)$。

6、函数 $f(x)$ 有任意阶导数，且 $f'(x)=[f(x)]^2$，则 $f^{(n)}(x)$ =______。

（A） $n[f(x)]^{n+1}$；（B） $n![f(x)]^{n+1}$；（C） $(n+1)[f(x)]^{n+1}$；（D） $(n+1)![f(x)]^2$。

7、若 $f(x)=x^2$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ =（　　）

（A） $2x_0$； （B） x_0； （C） $4x_0$； （D） $4x$。

8、设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处存在 $f'_-(x_0)$ 和 $f'_+(x_0)$，则 $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$ 是导数 $f'(x_0)$ 存在的（　　）

（A）必要非充分条件；　　（B）充分非必要条件；

（C）充分必要条件；　　（D）既非充分又非必要条件。

9、设 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-99)$ 则 $f'(0)=$（　　）

（A） 99； （B） -99； （C） $99!$； （D） $-99!$。

10、若 $f(u)$ 可导，且 $y=f(-x^2)$，则有 $dy=$（　　）

（A） $xf'(-x^2)dx$；（B） $-2xf'(-x^2)dx$；（C） $2f'(-x^2)dx$；（D） $2xf'(-x^2)dx$。

11、设函数 $f(x)$ 连续，且 $f'(0)>0$，则存在 $\delta>0$，使得（　　）

（A） $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加；　　（B） $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调减少；

（C）对任意的 $x\in(0,\delta)$ 有 $f(x)>f(0)$；（D）对任意的 $x\in(-\delta,0)$ 有 $f(x)>f(0)$。

12、设 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & x>0 \\ ax+b & x\le 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，则（　　）

（A） $a=1,b=0$；　　（B） $a=0,b$ 为任意常数；

（C） $a=0,b=0$；　　（C） $a=1,b$ 为任意常数。

三、计算解答

1、计算下列各题

（1） $y=e^{\sin^2\frac{1}{x}}$，求 dy；　　（2） $\begin{cases} x=\ln t \\ y=t^3 \end{cases}$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=1}$；

（3） $x+\arctan y=y$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$；　　（4） $y=\sin x\cos x$，求 $y^{(50)}$；

（5） $y=(\dfrac{x}{1+x})^x$，求 y'；

（6） $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+2005)$，求 $f'(0)$；

（7） $f(x)=(x-a)\varphi(x)$，$\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处有连续的一阶导数，求 $f'(a)$、$f''(a)$；

（8）设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有连续的一阶导数，且 $f'(1)=2$，求 $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{d}{dx}f(\cos\sqrt{x-1})$。

2、试确定常数 a,b 之值，使函数 $f(x)=\begin{cases} b(1+\sin x)+a+2 & x\geq 0 \\ e^{ax}-1 & x<0 \end{cases}$ 处处可导。

3、证明曲线 $x^2-y^2=a$ 与 $xy=b$（a,b 为常数）在交点处切线相互垂直。

4、一气球从距离观察员 500 米处离地匀速铅直上升，其速率为 140 米/分，当此气球上升到 500 米空中时，问观察员视角的倾角增加率为多少。

5、若函数 $f(x)$ 对任意实数 x_1,x_2 有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$，且 $f'(0)=1$，证明 $f'(x)=f(x)$。

6、求曲线 $y=x^3+3x^2-5$ 上过点 $(-1,-3)$ 处的切线方程和法线方程。

第二单元　导数与微分测试题详细解答

一、填空题

1、$\underline{-1}$　　$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{2h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{-h}\cdot(-\dfrac{1}{2})=-\dfrac{1}{2}f'(3)=-1$

2、$\underline{f'(0)}$　　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$

3、$\underline{\pi\ln x+\pi}$　　$y'=\pi^x\ln\pi+\pi x^{\pi-1}$　$\therefore y'|_{x=1}=\pi\ln x+\pi$

4、$\underline{f'(1+\sin x)\cdot\cos x}$，$\underline{f''(1+\sin x)\cdot\cos^2 x-f'(1+\sin x)\cdot\sin x}$

$y'=f'(1+\sin x)\cdot\cos x$，$y''=f''(1+\sin x)\cdot\cos^2 x-f'(1+\sin x)\cdot\sin x$

5、$\underline{(\ln(e-1),e-1)}$　　弦的斜率 $k=\dfrac{e-1}{1-0}=e-1$

$\therefore y'=(e^x)=e^x=e-1\ \Rightarrow x=\ln(e-1)$，当 $x=\ln(e-1)$ 时，$y=e-1$。

6、$\underline{-\dfrac{dx}{\arctan(1-x)\cdot[1+(1-x)^2]}}$

$$dy=\frac{1}{\arctan(1-x)}d[\arctan(1-x)]=\frac{1}{\arctan(1-x)}\cdot\frac{1}{1+(1-x)^2}d(1-x)$$

$$=-\frac{dx}{\arctan(1-x)\cdot[1+(1-x)^2]}$$

7、$\underline{4x^3\sin 2x^4}$，$\underline{2x^2\sin 2x^4}$　　$\dfrac{dy}{dx}=2\sin x^4\cdot\cos x^4\cdot 4x^3=4x^3\sin 2x^4$

$$\frac{dy}{dx^2}=\frac{dy}{2xdx}=2x^2\sin 2x^4$$

8、$\underline{e^{2t}+2te^{2t}}$　　$f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t(1+\dfrac{1}{x})^{2tx}=te^{2t}$　$\therefore f'(t)=e^{2t}+2te^{2t}$

9、$\underline{(1,2)}$　　$\because y'=2x$，由 $2x_0=2\ \Rightarrow x_0=1$，$y_0=1^2+1=2$

$\therefore y=x^2+1$ 在点 $(1,2)$ 处的切线斜率为 2

10、$\underline{\quad 2\quad}$　　$\because y'=e^x+xe^x$，$y''=e^x+e^x+xe^x$

$\therefore y''(0)=e^0+e^0=2$

11、$\underline{-\dfrac{e^{x+y}-y\sin(xy)}{e^{x+y}-x\sin(xy)}}$　　方程两边对 x 求导得　$e^{x+y}(1+y')-\sin(xy)(y+xy')=0$

解得　$y'=-\dfrac{e^{x+y}-y\sin(xy)}{e^{x+y}-x\sin(xy)}$。

12、$\dfrac{\sin t-t\cos t}{4t^3}$　　由参数式求导公式得 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y_t'}{x_t'}=\dfrac{-\sin t}{2t}$，

再对 x 求导，由复合函数求导法得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(y_x')=\frac{(y_x')_t'}{x_t'}=-\frac{1}{2}\frac{t\cos t-\sin t}{t^2}\cdot\frac{1}{2t}=\frac{\sin t-t\cos t}{4t^3}。$$

二、选择题

1、 选（D）　由 $\begin{cases} y=\dfrac{1}{x} \\ y=x^2 \end{cases}\Rightarrow$ 交点为 $(1,1)$，$k_1=(\dfrac{1}{x})'|_{x=1}=-1$，　$k_2(x^2)'|_{x=1}=2$

$$\therefore \tan\varphi=|\tan(\varphi_2-\varphi_1)|=|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}|=3$$

3、 选（C）　$f'(x)=e^{\tan^k x}\cdot k\tan^{k-1}x\cdot\sec^2 x$

由 $f'(\dfrac{\pi}{4})=e$ 得 $e\cdot k\cdot 2=e\Rightarrow k=\dfrac{1}{2}$

4、 选（A）　由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+x)-f(1)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(-1-x)-f(-1)}{2x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(-1-x)-f(-1)}{-x}\cdot(-\frac{1}{2})=f'(-1)\cdot(-\frac{1}{2})=-2\Rightarrow f'(-1)=4$$

$\therefore$ 切线方程为：$y-2=4(x+1)$ 即 $y=4x+6$

5、 选（D）　$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f^2(x+\Delta x)-f^2(x)}{\Delta x}=[f^2(x)]'=2f(x)\cdot f'(x)$

6、 选（B）　$f''(x)=\{[f(x)]^2\}'=2f(x)\cdot f'(x)=2f^3(x)$

$$f'''(x)=[2f^3(x)]'=2\times 3f^2(x)\cdot f'(x)=2\times 3f^4(x)$$

设 $f^{(n)}(x)=n!f^{n+1}(x)$，则 $f^{(n+1)}(x)=(n+1)!f^n(x)\cdot f'(x)=(n+1)!f^{n+2}(x)$

$\therefore f^{(n)}(x)=n!f^{n+1}(x)$

7、 选（C）　$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}2\cdot\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{2\Delta x}=2f'(x_0)$

又 $\because f'(x)=(x^2)'=2x$，$\therefore 2f'(x_0)=4x_0$

8、 选（C）　$\because f(x)$ 在 x_0 处可导的充分必要条件是 $f(x)$ 在 x_0 点的左导数 $f'_-(x_0)$ 和右

导数 $f'_+(x_0)$ 都存在且相等。

9、 选（D）

$\because f'(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-99)+x(x-2)\cdots(x-99)+x(x-1)(x-3)\cdots(x-99)$

$+\cdots+x(x-1)(x-2)\cdots(x-98)$

$\therefore f'(0)=(0-1)(0-2)\cdots(0-99)=(-1)^{99}\cdot 99!=-99!$

另解：由定义，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}(x-1)(x-2)\cdots(x-99)$

$=(-1)^{99}\cdot 99!=-99!$

10、 选（B） $\because [f(-x^2)]'=f'(-x^2)\cdot(-x^2)'=-2f'(-x^2)$

$\therefore dy=-2xf'(-x^2)dx$

11、由导数定义知

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}>0$，

再由极限的保号性知 $\exists\delta>0,$ 当 $x\in(-\delta,\delta)$ 时 $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}>0$，

从而 当 $x\in(-\delta,0)(x\in(0,\delta))$ 时，$f(x)-f(0)<0(>0)$，因此 C 成立，应选 C。

12、由函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，知函数在 $x=0$ 处连续

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0,\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(ax+b)=b$，所以 $b=0$。

又 $f_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=0, f_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{ax}{x}=a$，

所以 $a=0$。应选 C。

三、计算解答

1、计算下列各题

（1）$dy=e^{\sin^2\frac{1}{x}}d(\sin^2\dfrac{1}{x})=e^{\sin^2\frac{1}{x}}\cdot 2\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}\cdot(-\dfrac{1}{x^2})dx=-\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{2}{x}e^{\sin^2\frac{1}{x}}dx$

（2）$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3t^2}{\frac{1}{t}}=3t^3$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{9t^2}{\frac{1}{t}}=9t^3$，$\therefore \dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=1}=9$

（3）两边对 x 求导：$1+\dfrac{1}{1+y^2}\cdot y'=y'\Rightarrow y'=y^{-2}+1$

$$y'' = -2y^{-3} \cdot y' = -2y^{-3} \cdot (y^{-2} + 1) = -\frac{2}{y^3}(\frac{1}{y^2} + 1)$$

（4）$\because y = \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$

$\therefore y' = \cos 2x = \sin(2x + \frac{\pi}{2}) \quad y'' = 2\cos(2x + \frac{\pi}{2}) = 2\sin(2x + 2 \cdot \frac{\pi}{2})$

设 $y^{(n)} = 2^{n-1}\sin(2x + n \cdot \frac{\pi}{2})$

则 $y^{(n+1)} = 2^n \cos(2x + n \cdot \frac{\pi}{2}) = 2^n \sin(2x + (n+1)\frac{\pi}{2})$

$\therefore y^{(50)} = 2^{49}\sin(2x + 50 \cdot \frac{\pi}{2}) = -2^{49}\sin 2x$

（5）两边取对数：$\ln y = x[\ln x - \ln(1+x)]$

两边求导：$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln x - \ln(1+x) + 1 - \frac{x}{1+x}$

$\therefore y' = (\frac{x}{1+x})^x[\ln x - \ln(1+x) + 1 - \frac{x}{1+x}]$

（6）利用定义：

$$f'(0) = \lim_{x \to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0}(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+2005) = 2005!$$

（7）$\because f'(x) = \varphi(x) + (x-a)\varphi'(x) \quad \therefore f'(a) = \varphi(a)$

又 $f''(a) = \lim_{x \to a}\frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} = \lim_{x \to a}\frac{\varphi(x) + (x-a)\varphi'(x) - \varphi(a)}{x - a}$

$= \lim_{x \to a}[\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} + \varphi'(x)] = \varphi'(a) + \varphi'(a) = 2\varphi'(a)$

［注：因 $\varphi(x)$ 在 $x = a$ 处是否二阶可导不知，故只能用定义求。］

（8）$\lim_{x \to 1^+}\frac{d}{dx}f(\cos\sqrt{x-1}) = \lim_{x \to 1^+}[f'(\cos\sqrt{x-1}) \cdot (-\sin\sqrt{x-1}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}}]$

$= \lim_{x \to 1^+}f'(\cos\sqrt{x-1}) \cdot \lim_{x \to 1^+}\frac{-\sin\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}} = f'(1) \cdot (-\frac{1}{2}) = -1$

2、易知当 $x \neq 0$ 时，$f(x)$ 均可导，要使 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导

则 $f'_+(0) = f'_-(0)$， 且 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续。即 $\lim_{x \to 0^-}f(x) = \lim_{x \to 0^+}f(x) = f(0)$

而 $\left.\begin{aligned}\lim_{x \to 0^-}f(x) = b + a + 2 \\ \lim_{x \to 0^+}f(x) = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow a + b + 2 = 0$

又 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(1+\sin x)+a+2-b-a-2}{x}=b$

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{ax}-1-b-a-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{ax}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{ax}{x}=a$

由 $\begin{cases} a=b \\ a+b+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases}$

3、证明：设交点坐标为 (x_0,y_0)，则 $x_0^2-y_0^2=a \quad x_0y_0=b$

对 $x^2-y^2=a$ 两边求导：$2x-2y\cdot y'=0\Rightarrow y'=\dfrac{x}{y}$

$\therefore$ 曲线 $x^2-y^2=a$ 在 (x_0,y_0) 处切线斜率 $k_1=y'|_{x=x_0}=\dfrac{x_0}{y_0}$

又由 $x\ y\ =b\Rightarrow y=\dfrac{b}{x}\Rightarrow y'=-\dfrac{b}{x^2}$

$\therefore$ 曲线 $xy=b$ 在 (x_0,y_0) 处切线斜率 $k_2=y'|_{x=x_0}=-\dfrac{b}{x_0^2}$

又 $\because k_1k_2=\dfrac{x_0}{y_0}\cdot(-\dfrac{b}{x_0^2})=-\dfrac{b}{x_0y_0}=-1$

$\therefore$ 两切线相互垂直。

4、设 t 分钟后气球上升了 x 米，则 $\tan\alpha=\dfrac{x}{500}$

两边对 t 求导：$\sec^2\alpha\cdot\dfrac{d\alpha}{dt}=\dfrac{1}{500}\cdot\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{140}{500}=\dfrac{7}{25}$

$\therefore \dfrac{d\alpha}{dt}=\dfrac{7}{25}\cdot\cos^2\alpha$

$\because$ 当 $x=500$ m 时， $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$

$\therefore$ 当 $x=500$ m 时， $\dfrac{d\alpha}{dt}=\dfrac{7}{25}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{50}$（弧度/分）

5、证明：$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x)\cdot f(h)-f(x+0)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x)\cdot f(h)-f(x)\cdot f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}f(x)\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$

$=f(x)\cdot f'(0)=f(x)$

6、解：由于 $y'=3x^2+6x$，于是所求切线斜率为

$k_1=3x^2+6x|_{x=-1}=-3$，

从而所求切线方程为 $y+3=-3(x+1)$ ，即 $3x+y+6=0$

又法线斜率为 $k_2=-\frac{1}{k_1}=\frac{1}{3}$

所以所求法线方程为 $y+3=\frac{1}{3}(x+1)$ ，即 $3y-x+8=0$