高等数学 I-1 综合练习 9

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3a}{x}\right)^{\frac{x}{3a}\cdot\frac{3a}{x}\cdot x} = e^{3a}$

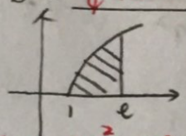
一、填空题

1. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{3a}{x}\right)^x = 3\ln 2$, 则 $a =$ <u>$\ln 2$</u>. $\ln e^{3a}=\ln 2^3 \Rightarrow e^{3a}=8 \Rightarrow 3a=\ln 8$

2. 曲线 $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$ 的垂直渐近线为 <u>$x=\pm1$</u>, 水平渐近线为 <u>$y=1$</u>. $\lim\limits_{x\to\infty} y=1$ $\lim\limits_{x\to\pm1} y=0$

3. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(1)=0$, $\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x=1$, 则 $\int_0^1 xf(x)f'(x)\,\mathrm{d}x=$ <u>$-\frac12$</u>. $\int_0^1 xf(x)df(x)=\frac12\int_0^1 x\,df^2(x)=\frac12 xf^2(x)\Big|_0^1 -\frac12\int_0^1 f^2(x)dx$

4. 设 S 为曲线 $y=x\ln x$ 与 $x=1, x=\mathrm{e}$ 及 x 轴围成的面积, 则 $S=$ <u>$\frac14(e^2+1)$</u>. 图形



$\int_1^e x\ln x\,dx = \int_1^e \ln x\,d\frac{x^2}{2} = \frac{e^2+1}{4}$ 分部积分

5. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_1^{\mathrm{e}}\ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x=$ <u>0</u>. (定积分是一个常数)

二、选择题

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

1. 若 $a^2-3b<0$, 则 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c=0$ (B).
   (A) 无实根; (B) 有唯一实根; (C) 有三个单根; (D) 有重根.

   $f'(x)=3x^2+2ax+b$
   $\Delta=4a^2-12b<0$ ∴ $f'(x)>0$ 从而 $f(x)\uparrow$

2. 设 $f(x)=\dfrac{\ln(1+2x)}{(x-1)\arcsin x}$ 的可去型间断点是 (C). $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{(x-1)x}=-2$
   (A) $x=0, x=1$; (B) $x=1$; (C) $x=0$; (D) 不存在.

3. 设函数 $f(x)$ 满足 $f''(0)=0, f'''(0)<0$, 则 (A).
   (A) $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点; (B) $(0,f(0))$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点;
   (C) $(0,f(0))$ 是否为曲线 $y=f(x)$ 的拐点与 $f'(0)$ 是否等于 0 有关;
   (D) 不能确定 $(0,f(0))$ 是否为曲线 $y=f(x)$ 的拐点, 且与 $f'(0)$ 是否等于 0 无关.

4. 设 $\int f(x)\mathrm{e}^{-\frac1x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-\frac1x}+C$, 则 $f(x)=$ (B). 两边同时求导 $f(x)e^{-\frac1x}=e^{-\frac1x}\cdot\frac{1}{x^2}$
   (A) $-\dfrac1x$; (B) $\dfrac{1}{x^2}$; (C) $\dfrac1x$; (D) $-\dfrac{1}{x^2}$.

5. 设 $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x=$ (C). $\int_0^{+\infty}\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}dx=\arctan e^x\Big|_0^{+\infty}=\frac\pi2-\frac\pi4$
   (A) $\dfrac\pi2$; (B) π; (C) $\dfrac\pi4$; (D) 发散.

三、解答题

1. 设函数 $f(x)=x^2\sin x$, 求 $f^{(n)}(x), f^{(n)}(0)$. (莱布尼兹公式)

$$f^{(n)}(x)=C_n^0\sin^{(n)}x\cdot x^2+C_n^1\cdot\sin^{(n-1)}x\cdot 2x+C_n^2\cdot\sin^{(n-2)}x\cdot 2$$
$$=\sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)\cdot x^2+n\cdot\sin\left(x+\frac{n-1}{2}\pi\right)\cdot 2x+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\sin\left(x+\frac{n-2}{2}\pi\right)\cdot 2$$
$$=x^2\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)+2nx\sin\left(x+\frac{n-1}{2}\pi\right)+n(n-1)\sin\left(x+\frac{n-2}{2}\pi\right)$$
$$f^{(n)}(0)=n(n-1)\sin\left(\frac{n-2}{2}\pi\right)$$

2. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-e^{-x^3}}{1-\cos\sqrt{x-\sin x}}$.

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-(-x^3)}{\frac{1}{2}(x-\sin x)}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{3x^2}{\frac{1}{2}(1-\cos x)}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{3x^2}{\frac{1}{4}x^2}=12$

3. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{x^2}(\tan\sqrt{t}-\sqrt{t})\,dt}{\int_0^x 2t(t-\sin t)dt}$.

$\overset{洛}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(\tan\sqrt{x^2}-\sqrt{x^2})\cdot 2x}{2x(x-\sin x)}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}$

$\overset{洛}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sec^2 x-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\tan^2 x}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=2$

4. $\int\dfrac{3x-1}{x^2-4x+8}\,dx$.

$=\int\dfrac{\frac{3}{2}(2x-4)+5}{x^2-4x+8}dx$

$=\frac{3}{2}\int\dfrac{1}{x^2-4x+8}d(x^2-4x+8)+5\int\dfrac{dx}{(x-2)^2+4}$

$=\frac{3}{2}\ln(x^2-4x+8)+\frac{5}{2}\arctan\frac{x-2}{2}+C$

5. $\int_{-1}^{1}\dfrac{2x^3+5x+2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. (奇偶性)

$=4\int_0^1\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$=4\arcsin x\Big|_0^1$

$=\frac{\pi}{2}\times 4$

$=2\pi$

*四、 已知函数 $f(x)$ 由方程 $3x^2-6xy+2y^2+4=0$ 确定, 求 $f(x)$ 的驻点, 并判断驻点是否为极值点. (隐函数求极值问题)

两边同时求导. $6x-6y-6x\cdot y'+4y\cdot y'=0$ (1) 令 $y'=0$ 得 $x=y$

将 $x=y$ 代入方程. $3x^2-6x^2+2x^2+4=0\Rightarrow x=\pm 2\Rightarrow x=y=\pm 2$ (驻点)

对(1)再次求导. $6-6y'-6y'-6xy''+4y'\cdot y'+4y\cdot y''=0$

$y'=0$, $x=y=2$时. 有 $y''(2)>0$

$y'=0$, $x=y=-2$时. 有 $y''(-2)<0$

$\therefore$ $x=2$时 $f(2)$是极小值、

$x=-2$时 $f(-2)$是极大值.

五、已知 $f'(\sin^2 x)=\cos 2x+\tan^2 x$，求当 $0<x<1$ 时 $f(x)$ 的表达式.

$f'(\sin^2 x)=1-2\sin^2 x+\dfrac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}$

令 $\sin^2 x=t$,

则 $f'(t)=1-2t+\dfrac{t}{1-t}$

$f(t)=\int\left(1-2t+\dfrac{t}{1-t}\right)dt=t-t^2-\ln|1-t|-t+C$

$\therefore f(x)=-x^2-\ln(1-x)+C$

$x\in(0,1)$

六、设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，且对任意的 x,y，恒有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 成立，求 $\int_{-1}^{1}(1+x^2)f(x)\,\mathrm{d}x$.

$f(x+y)=f(x)+f(y)$

$y=-x$ 时 $f(0)=f(x)+f(-x)$

$x=y=0$ 时 $f(0)=2f(0)\Rightarrow f(0)=0$

$\therefore f(x)=-f(-x)$

$\therefore f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上奇函数

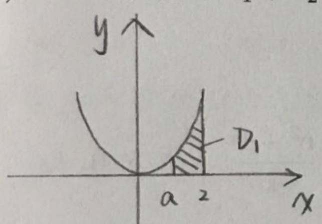
从而 $\int_{-1}^{1}(1+x^2)f(x)dx=0$

七、设 $D_1: y=2x^2, x=a, x=2, y=0$; $D_2: y=2x^2, y=0, x=a, 0<a<2$, 试求

(1) D_1 绕 x 轴旋转得旋转体体积 V_1; D_2 绕 y 轴旋转得旋转体体积 V_2;

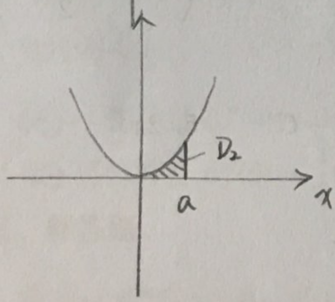
定积分应用+最值问题

(2) 当 a 取何值时 V_1+V_2 取得最大值? 并求该最大值.



$V_1=\pi\int_a^2(2x^2)^2dx=4\pi\int_a^2x^4dx=4\pi\cdot\frac{1}{5}x^5\Big|_a^2=$

$=\frac{4}{5}\pi(32-a^5)$



$V_2=2\pi\int_0^a x\cdot 2x^2\,dx=4\pi\int_0^a x^3dx=\pi a^4$ (柱壳法)

$V_1+V_2=\frac{4}{5}\pi(32-a^5)+\pi a^4$, $0<a<2$

令 $f(a)=\frac{4}{5}\pi(32-a^5)+\pi a^4$

$f'(a)=-4\pi a^4+4\pi a^3=0\Rightarrow a=1$ (唯一驻点)
$(0,2)$ 内

$f''(a)=-16\pi a^3+12\pi a^2$ $f''(1)<0$

$\therefore a=1$ 时 $f(1)$ 为 $(0,2)$ 内唯一的极大值.

即为所求最大值. $f(1)=\frac{129}{5}\pi$

八、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f'(x)\le 0$, $F(x)=\dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. 证明: 在 (a,b) 内, 总有 $F'(x)\le 0$.

$$F'(x)=\frac{f(x)(x-a)-\int_a^x f(t)dt}{(x-a)^2}$$

$$=\frac{f(x)(x-a)-f(\xi)(x-a)}{(x-a)^2}$$

$$=\frac{f(x)-f(\xi)}{x-a}\quad (a\le\xi\le x)$$

$\because f(x)<0 \quad \therefore f(x)\downarrow$ 从而 $f(\xi)\geq f(x)$

$\therefore F'(x)\le 0$

参考答案 9

一、填空题 1. $\ln 2$. 2. $x=\pm1, y=1$. 3. $-\dfrac{1}{2}$. 4. $\dfrac{\mathrm{e}^2+1}{4}$. 5. 0.

二、选择题 B. C. A. B. C.

三、1. $f^{(n)}(x)=x^2\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)+2nx\sin\left(x+\dfrac{(n-1)\pi}{2}\right)+n(n-1)\sin\left(x+\dfrac{(n-2)\pi}{2}\right)$.

$f^{(n)}(0)=n(n-1)\sin\dfrac{(n-2)\pi}{2}$.

2. 12. 3. 2. 4. $\dfrac{3}{2}\ln\left(x^2-4x+8\right)+\dfrac{5}{2}\arctan\dfrac{x-2}{2}+C$. 5. 2π.

四、驻点 $x=\pm2$; $f(2)=2$ 为极小值, $f(-2)=-2$ 为极大值.

五、$f(x)=-x^2-\ln(1-x)+C$. 提示: $f'(u)=1-2u+\dfrac{u}{1-u}$.

六、0. 提示: 证明 $f(x)$ 为奇函数.

七、$V_1=\dfrac{4}{5}\pi\left(32-a^5\right)$, $V_2=\pi a^4$, 最大值 $\dfrac{129}{5}\pi$.

八、提示：利用函数的单调性.