南京信息工程大学
Nanjing University of Information Science & Technology

高等数学（上）

数学与统计学院　公共数学教学部

高等数学教学团队

第一节 不定积分的概念与性质

不定积分的概念与性质

知识目标

理解： 原函数与不定积分的概念

掌握： 不定积分的基本性质

基本积分公式

了解： 积分曲线族

重难点

重点： 原函数的概念、不定积分的性质、基本积分公式

难点： 原函数的概念

一、原函数与不定积分的概念

微分法: $F'(x) = (\ ?\ )$

积分法: $(\ ?\ )' = f(x)$

1、原函数的概念

定义1 设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的函数，若**存在**函数 $F(x)$，

使得对 $\forall x \in I$，恒有 $\boxed{F'(x) = f(x)}$ 或 $\boxed{\mathrm{d}F(x) = f(x)\mathrm{d}x}$，

则称函数 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的**原函数**.

➢ 原函数不唯一.

如 $(\sin x)' = \cos x$ ，$(\sin x + 3)' = \cos x$,

所以 $\sin x$ ，$\sin x + 3$ 都是 $\cos x$ 在 R 内的原函数.

又如当 $x \in (0, +\infty)$ 时，$\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ ，$\left(\sqrt{x} + C\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$,

所以 $\sqrt{x}$ ，$\sqrt{x} + C$ 都是 $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ 在 $(0, +\infty)$ 内的原函数.

问题 ① 在什么条件下, 函数的原函数存在? 原函数存在定理

② 若原函数存在, 它如何表示? 不定积分

原函数存在定理 若函数 $f(x)$ 在区间 I 上的连续，则在区间 I 上必存在可导函数 $F(x)$，使对 $\forall x \in I$ ，恒有 $F'(x) = f(x)$.

- 连续函数必有原函数.

性质1 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数，则对任意常数C， $F(x)+C$ 也是 $f(x)$ 的原函数.

证 若 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数，则 $F'(x)=f(x)$.

于是对任意常数C，有 $[F(x)+C]'=f(x)$.

即 $F(x)+C$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数.

➢ 若 $f(x)$ 有一个原函数，则 $f(x)$ 就有无穷多个原函数.

性质2 若 $F(x)$ ，$G(x)$为 $f(x)$ 在区间I 上的两个原函数，则存在某个常数 C_0， 使得 $G(x)=F(x)+C_0$.

证 若 $F(x)$ ，$G(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的两个原函数，则

$F'(x)=G'(x)=f(x)$.   即 $\left[F(x)-G(x)\right]'=0$.

所以 $F(x)=G(x)+C_0$ （C_0 为某个常数).

➢ 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I上的一个原函数，则 $f(x)$ 在区间 I上的全体原函数可表示为$F(x)+C$，其中C为任意常数.

2、不定积分的概念

定义2 在区间 I 上，函数 $f(x)$ 的原函数全体称为 $f(x)$ (或 $f(x)\mathrm{d}x$) 在区间 I 上的**不定积分**，记为 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

- 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，C 为任意常数，则 $F(x)+C$ 是 $f(x)$ 的不定积分，即 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$.
- $f(x)$ 的不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 是**函数族**，它可以表示 $f(x)$ 的任意一个原函数.

不定积分的概念与性质

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + \boxed{C.}$$

任意常数不可丢

$\int$ --积分号.　$f(x)$ --被积函数.　x --积分变量.

$f(x)\mathrm{d}x$ --被积表达式.　C --积分常数.

例1 计算 ① $\int x^2 \mathrm{d}x$；② $\int a^x \mathrm{d}x (a>0,\ a\neq 1)$.

解 ① 因为 $\left(\dfrac{x^3}{3}\right)' = x^2$，所以 $\boxed{\int x^2 \mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} + C}$.

② 因为 $\left(\dfrac{a^x}{\ln a}\right)' = a^x$，所以 $\boxed{\int a^x \mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C}$.

例2 求 $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

解 ①当 $x>0$ 时，因为 $(\ln x)'=\frac{1}{x}$，所以在 $(0,+\infty)$ 内，

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x+C$$

②当 $x<0$ 时，因为 $[\ln(-x)]'=\frac{1}{x}$，所以在 $(-\infty,0)$ 内，

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln(-x)+C$$

$$\boxed{\therefore\ \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C.}$$

例3 求 $\int \frac{-1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

不同原函数间至多相差一个常数

解 因为 $(-\arctan x)' = \frac{-1}{1+x^2}$ ，所以 $\int \frac{-1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \boxed{-\arctan x + C}$.

又因为 $(\operatorname{arccot} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$ ，所以 $\int \frac{-1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \boxed{\operatorname{arccot} x + C_1}$.

由于 $\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x$,

故 $\int \frac{-1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \operatorname{arccot} x + C_1 = -\arctan x + \frac{\pi}{2} + C_1 \boxed{= -\arctan x + C.}$

例4 设曲线通过点$(1,2)$，且其上任一点处的切线斜率等于这点横坐标的两倍，求此曲线方程.

解 设曲线方程为$y=f(x)$， 根据题意知：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x$

即$f(x)$ 是 $2x$ 的一个原函数. 而$\int 2x\mathrm{d}x=x^2+C$.

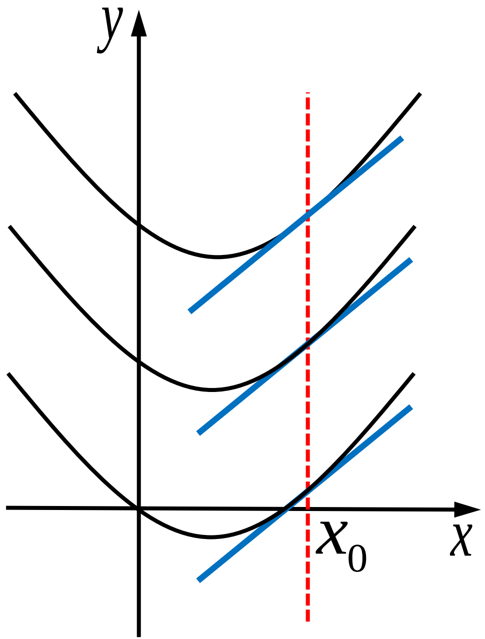
$$\therefore f(x)=x^2+C,$$

又因为曲线通过点$(1,2)$，所以 $C=1$. $\boxed{\therefore f(x)=x^2+1.}$

3、不定积分的几何意义

定义3 若 $F'(x)=f(x)$，则称 $F(x)$ 的图形是 $f(x)$ 的**积分曲线**.

- $\int f(x)\mathrm{d}x$ 的图形为 $f(x)$ 的一族积分曲线，称为**积分曲线族**.
- 积分曲线族在横坐标相同的点 x 处的**切线**彼此**平行**.



积分曲线与
积分曲线族示意图

4、不积分运算和导数运算的互逆关系

① $\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]' = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right] = f(x)$

或 $\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right] = f(x)\mathrm{d}x$.

先积后导
不积不导

② $\int F'(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$ 或 $\int \mathrm{d}F(x) = F(x)+C$.

先导后积
加上常数

- 导数运算与不定积分运算是**互逆**的.

二、不定积分的性质

1、 设函数 $f(x)$ 的原函数存在，k 为非零常数，则

$$\boxed{\int k\,f(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x.}$$

2、 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的原函数存在，则

$$\boxed{\int [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Cor1 设函数 $f_i(x)$ 的原函数都存在，k_i 为非零常数，其中 $i=1,2,\cdots,n$，且 $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{n} k_i f_i(x)$，则 $\boxed{\int f(x)\mathrm{d}x = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i \int f_i(x)\,\mathrm{d}x.}$

三、基本积分公式

(1) $\int k\mathrm{d}x = kx + C$ （k 为常数）

(2) $\int x^{\mu}\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \ (\mu \neq -1)$

(3) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$

(4) $\int \dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C$

(5) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C$

(6) $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$

(7) $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$

(8) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x \mathrm{d}x = \tan x + C$$

(9) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x \mathrm{d}x = -\cot x + C$$

(10) $$\int \sec x \tan x \mathrm{d}x = \sec x + C$$

(11) $$\int \csc x \cot x \mathrm{d}x = -\csc x + C$$

(12) $$\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$$

(13) $$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

例5 计算 ① $\int \frac{x^3+2x^2+3x+1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$; ② $\int(\mathrm{e}^x-3\cos x)\mathrm{d}x$; ③ $\int a^x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

解 ① $\int \frac{x^3+2x^2+3x+1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int\left(x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x$

$$\boxed{=\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C}$$

② $\int(\mathrm{e}^x-3\cos x)\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x-3\int\cos x\mathrm{d}x\boxed{=\mathrm{e}^x-3\sin x+C}$

③ $\int a^x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int(a\mathrm{e})^x\mathrm{d}x=\frac{(a\mathrm{e})^x}{\ln(a\mathrm{e})}+C\boxed{=\frac{a^x\mathrm{e}^x}{1+\ln a}+C.}$

例6 计算下列不定积分：

① $\int \tan^2 x\mathrm{d}x$； ② $\int \sin^2 \frac{x}{2}\mathrm{d}x$； ③ $\int \frac{1}{1+\cos 2x}\mathrm{d}x$； ④ $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x\cos^2 x}$.

解 ① $\int \tan^2 x\mathrm{d}x \xlongequal{\tan^2 x=\sec^2 x-1} \int(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x=\int \sec^2 x\mathrm{d}x-\int \mathrm{d}x$

$\boxed{=\tan x-x+C}$

② $\int \sin^2 \frac{x}{2}\mathrm{d}x \xlongequal{\text{倍角公式降幂}} \int \frac{1-\cos x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(1-\cos x)\mathrm{d}x$

$\boxed{=\frac{1}{2}(x-\sin x)+C}$

例6 计算下列不定积分：

① $\int \tan^2 x\mathrm{d}x$; ② $\int \sin^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x$; ③ $\int \frac{1}{1+\cos 2x}\mathrm{d}x$; ④ $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x\cos^2 x}$.

解 ③ $$\int \frac{1}{1+\cos 2x}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{1+2\cos^2 x-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

倍角公式化分母两项为一项

$$=\frac{1}{2}\int \sec^2 x\mathrm{d}x \boxed{=\frac{1}{2}\tan x+C}$$

④ $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x\cos^2 x}\overset{\text{“1”的拆分}}{=\!=\!=}\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}+\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}\boxed{=\tan x-\cot x+C.}$$

例7 计算不定积分：① $\int\left(\frac{3}{1+x^2}-\frac{2}{\sqrt{9-9x^2}}\right)dx$; ② $\int\frac{x^4}{1+x^2}dx$.

解 ① $\int\left(\frac{3}{1+x^2}-\frac{2}{\sqrt{9-9x^2}}\right)dx=3\int\frac{1}{1+x^2}dx-\frac{2}{3}\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$\boxed{=3\arctan x-\frac{2}{3}\arcsin x+C}$$

② $\int\frac{x^4}{1+x^2}dx \overset{\text{凑项拆分因式}}{=\!=\!=\!=} \int\frac{x^4-1+1}{1+x^2}dx=\int\frac{(x^2+1)(x^2-1)+1}{1+x^2}dx$

$$=\int\left(x^2-1+\frac{1}{1+x^2}\right)dx\ \boxed{=\frac{1}{3}x^3-x+\arctan x+C.}$$

例8 设 $f(x)=\mathrm{e}^{|x|}$，求 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

分段函数求原函数

解 $\because f(x)=\mathrm{e}^{|x|}=\begin{cases}\mathrm{e}^{x}, & x\geq 0\\ \mathrm{e}^{-x}, & x<0\end{cases}$,

显然 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内**连续**,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内**必存在原函数**，记为 $F(x)$.

当 $x\geq 0$ 时，$\int f(x)\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x}+C_1$,

当 $x<0$ 时，$\int f(x)\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}+C_2$,

即有 $F(x)=\begin{cases} e^x+C_1, & x\geq 0 \\ -e^{-x}+C_2, & x<0 \end{cases}$.

又 $F'(x)=f(x)$，故 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，

特别地，$F(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

由 $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} F(x)=F(0)}$，得 $C_1+2=C_2$.

则 $\boxed{F(x)=\begin{cases} e^x+C_1, & x\geq 0 \\ -e^{-x}+C_1+2, & x<0 \end{cases}}$，其中 C_1 为任意常数.

四、内容小结与思考题

- 原函数、不定积分的概念. $\boxed{\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C}$
- 基本积分公式.
- 不定积分的性质.

思考题：

1、若 $f(x)$ 的导函数是 $e^{-x}+\cos x$，则 $f(x)$ 的原函数是

__________________.

【答：$e^{-x}-\cos x+C$】

2、若 $f(x)$ 的一个原函数为 xe^{x}，则 $\int f'(x)\mathrm{d}x=$__________.

【答：$(x+1)e^{x}+C$】

南京信息工程大学
Nanjing University of Information Science & Technology

思维自疑问和惊奇开始。

——亚里士多德