2019-2020 学年第二学期南京信息工程大学

《高等数学》理工科期中考试试卷参考答案

一、填空题(本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分)

1. 过点 $M(4,-1,3)$ 且垂直于平面 $2x+y+5z-22=0$ 的直线的对称式方程为 $\underline{\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{5}}$.

2. 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to4}}\dfrac{x(y-4)}{\sin(2xy)\cdot(\sqrt{y}-2)}=$____$\underline{\dfrac{1}{2}}$____.

3. 设 $z=x^2y+y^2$，那么 $\mathrm{d}z=$___$\underline{2xy\mathrm{d}x+\left(x^2+2y\right)\mathrm{d}y}$______.

4. 改变二次积分次序：$\int_1^2\mathrm{d}x\int_1^{x^2}f(x,y)\mathrm{d}y=\underline{\int_1^4\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^2 f(x,y)\mathrm{d}x}$.

5. 设 $f\left(x,y,z\right)=x+y^2+xz$，则 $f\left(x,y,z\right)$ 在 $\left(1,0,1\right)$ 沿方向 $\vec{l}=\left(2,-2,1\right)$ 的方向导数为____$\underline{\dfrac{5}{3}}$_____.

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处（ C ）

 (A) 无定义　　(B) 极限不存在　　(C) 有极限但不连续　　(D) 连续

2. 空间曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\ x+y+z=0\end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线必平行于（ C ）.

 (A) xOy 平面　　(B) yOz 平面　　(C) zOx 平面　　(D) 平面 $x+y-z=0$

3. 函数 $u=xyz$ 在点 $(1,2,-2)$ 处的梯度 $\mathrm{grad}u\big|_{(1,2,-2)}=$（ A ）

 (A) $(-4,-2,2)$　　(B) $(4,2,-2)$　　(C) -4　　(D) $4\sqrt{2}$

4. Ω 由 $x=0,y=0,z=0$ 与 $x+2y+z=1$ 所围成，则 $\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}v=$（ B ）

 (A) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{1-x-2y}f(x,y,z)\mathrm{d}z$　　(B) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1-x}{2}}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-2y}f(x,y,z)\mathrm{d}z$

 (C) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y,z)\mathrm{d}z$　　(D) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1-y}{2}}\mathrm{d}z\int_0^{1-x-2y}f(x,y,z)\mathrm{d}y$

5. 曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 包含在圆柱 $x^2+y^2=2x$ 内部的那部分曲面的面积 $S=$（ B ）

（A） $\sqrt{3}\pi$　　（B） $\sqrt{2}\pi$　　（C） $\sqrt{5}\pi$　　（D） $2\sqrt{2}\pi$

三、计算下列偏导数（本题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）

1．已知 $xyz+\mathrm{e}^{x+2y+3z}-z\ln z=0$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解： 设 $F=xyz+\mathrm{e}^{x+2y+3z}-z\ln z$，

$F_x=yz+\mathrm{e}^{x+2y+3z}$， $F_y=xz+2\mathrm{e}^{x+2y+3z}$， $F_z=xy+3\mathrm{e}^{x+2y+3z}-1-\ln z$，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{yz+\mathrm{e}^{x+2y+3z}}{xy+3\mathrm{e}^{x+2y+3z}-1-\ln z},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xz+2\mathrm{e}^{x+2y+3z}}{xy+3\mathrm{e}^{x+2y+3z}-1-\ln z}.$$

2. 设 $z=f(\mathrm{e}^x\sin y,x^2+y^2)$， f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}$， $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解： $$\frac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^x\sin y\cdot f_1'+2xf_2'$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{e}^x\cos y\cdot f_1'+2yf_2'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\mathrm{e}^x\cos y\cdot f_1'+\mathrm{e}^x\sin y\cdot\left(f_{11}''\mathrm{e}^x\cos y+2yf_{12}''\right)+2x\left(f_{21}''\mathrm{e}^x\cos y+2yf_{22}''\right)$$

$$=\mathrm{e}^x\cos y\cdot f_1'+\mathrm{e}^{2x}\sin y\cos y\cdot f_{11}''+2\mathrm{e}^x\left(x\cos y+y\sin y\right)f_{12}''+4xyf_{22}''$$

四、计算下列积分（本题共 3 小题，每小题 8 分，共 24 分）

1. $\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 y\sin\dfrac{x}{y}\mathrm{d}y$.

解：交换积分次序

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 y\sin\frac{x}{y}\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y y\sin\frac{x}{y}\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^1 y^2\cos\frac{x}{y}\bigg|_0^y\mathrm{d}y=\int_0^1 y^2(1-\cos 1)\mathrm{d}y=\frac{1}{3}(1-\cos 1).$$

2. $\iint\limits_D\left(1+\sin\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|\,\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2\right\}$.

解：$\iint\limits_{D}\left(1+\sin\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \ \ =3\pi^3+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\pi}^{2\pi}\rho\sin\rho\mathrm{d}\rho$

$=-2\pi\int_{\pi}^{2\pi}\rho\mathrm{d}\cos\rho=-2\pi[\rho\cos\rho-\sin\rho]\Big|_{\pi}^{2\pi}=3\pi^2(\pi-2)$.

3. $\iiint\limits_{\Omega}(z^2+2x-yz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2+z^2\le 2z\right\}$.

解：法 I. 由对称性

$$\iiint\limits_{\Omega}(z^2+2x-yz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^2\cos^2\varphi r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^4\mathrm{d}r$$

$$=\frac{64\pi}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7\varphi\mathrm{d}\left(-\cos\varphi\right)=\frac{8\pi}{5}$$

法 II. 截面法.

由对称性得$\iiint\limits_{\Omega}(z^2+2x-yz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，

$\Omega:0\le z\le 2$，$D_z:x^2+y^2\le 2z-z^2$，

故 $\iiint\limits_{\Omega}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^2 z^2\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2 z^2\cdot\pi\left(2z-z^2\right)\mathrm{d}z=\frac{8\pi}{5}$.

五、求曲面$x^2+2y^2+3z^2=21$的平行于平面$x+4y+6z=0$的切平面.（**本题 10 分**）

解：设切点为坐标为 (x,y,z)，则切点处切平面的法向量为$\vec{n}=(x,2y,3z)$，

因为切平面平行于平面$x+4y+6z=0$，故$\frac{x}{1}=\frac{2y}{4}=\frac{3z}{6}=\lambda$，

则是$x=\lambda,y=2\lambda,z=2\lambda$，将它们代入曲面方程$x^2+2y^2+3z^2=21$，

解得$\lambda=\pm1$，故切点坐标为$(\pm1,\pm2,\pm2)$，$\vec{n}=(1,4,6)$ ，

于是，所求的切平面方程为

$x-1+4(y-2)+6(z-2)=0$ 或 $x+1+4(y+2)+6(z+2)=0$

即$x+4y+6z-21=0$或$x+4y+6z+21=0$.

六、旋转抛物面$z=x^2+y^2$被平面$x+y+z=1$截成一个椭圆，求这个椭圆到坐标原点的最长与最短距离.（**本题 10 分**）

解：设(x,y,z)为曲面上任一点到原点的距离为$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，

作拉格朗日函数：$L=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+u(x+y+z-1)$

由$\begin{cases} L'_x=2x+2\lambda x+u=0 \\ L'_y=2y+2\lambda y+u=0 \\ L'_z=2z+\lambda z+u=0 \\ L'_\lambda=x^2+y^2-z=0 \\ L'_u=x+y+z-1=0 \end{cases}$，

解得 $x=y=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}, z=2\mp\sqrt{3}$；

由驻点的唯一和最值的存在性，

得 $d=\sqrt{9\pm5\sqrt{3}}$ 分别为所求最长距离和最短距离.

七、设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，并设 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=A$，求 $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y$.

解：法 I. $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y\int_0^y f(x)\mathrm{d}x$ （交换积分次序）

$I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y\int_y^1 f(x)\mathrm{d}x$ （交换积分变量）

$2I=\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y\int_0^y f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y\int_y^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=A^2$,

所以 $I=\dfrac{A^2}{2}$.

法 II. 设 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $F(1)=A, F(0)=0$. 而且

$$\begin{aligned} I&=\int_0^1 f(x)\cdot F(y)\Big|_x^1\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\big(F(1)-F(x)\big)\mathrm{d}x \\ &=\int_0^1 F(1)f(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)F(x)\mathrm{d}x \\ &=F(1)\cdot A-\int_0^1 F(x)\mathrm{d}F(x) \\ &=A^2-\frac{1}{2}\left[F^2(1)-F^2(0)\right]=A^2-\frac{1}{2}A^2=\frac{1}{2}A^2. \end{aligned}$$