专题3　一元函数积分学

第一部分 内容提要

一、不定积分

1. 原函数与不定积分的概念

(1) 原函数： 设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的函数，若存在可导函数 $F(x)$，使得对 $\forall x \in I$，恒有

$F'(x)=f(x)$ 或 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$，则称函数 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数.

➢ **原函数的性质：**

① 若 $F'(x)=f(x)$，则对于任意常数 C，$F(x)+C$ 都是 $f(x)$ 的原函数，即有无穷多个原函数；

② 若 $F(x)$ 和 $G(x)$ 都是 $f(x)$ 的原函数，则 $F(x)-G(x)=C$（C 为任意常数）.

(2) 不定积分： 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数，则称 $f(x)$ 在区间 I 上的**全体原函数** $F(x)+C$（C 为任意常数）为 $f(x)$ 在区间 I 上的不定积分，记作 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$.

2. 不定积分的性质

性质1 $\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]'=f(x)$ 或 $\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x)\mathrm{d}x$

性质2 $\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$ 或 $\int \mathrm{d}f(x)=f(x)+C$.

性质3 $\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x$

性质4 $\int[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x$

3. 可积的条件： 连续函数必可积.

4. 基本积分公式

(1) $\int k\mathrm{d}x=kx+C$（k 是常数）

(2) $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C(\alpha\neq-1)$

(3) $\int\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$

(4) $\int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x}+C$

(5) $\int a^{x}\mathrm{d}x=\dfrac{a^{x}}{\ln a}+C$

(6) $\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$

(7) $\int\sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$

(8) $\int\dfrac{1}{\cos^{2}x}\mathrm{d}x=\int\sec^{2}x\mathrm{d}x=\tan x+C$

(9) $\int\dfrac{1}{\sin^{2}x}\mathrm{d}x=\int\csc^{2}x\mathrm{d}x=-\cot x+C$

(10) $\int\dfrac{1}{1+x^{2}}\mathrm{d}x=\arctan x+C$

(11) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin x+C$　　(12) $\int \sec x\tan x\mathrm{d}x=\sec x+C$

(13) $\int \csc x\cot \mathrm{d}x=-\csc x+C$　　(14) $\int \mathrm{sh}\, x\ \mathrm{d}x=\mathrm{ch}\, x+C$

(15) $\int \mathrm{ch}\, x\mathrm{d}x=\mathrm{sh}\, x+C$　　(16) $\int \tan x\mathrm{d}x=-\ln|\cos x|+C$,

(17) $\int \cot x\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C$,　　(18) $\int \sec x\mathrm{d}x=\ln|\sec x+\tan x|+C$,

(19) $\int \csc x\mathrm{d}x=\ln|\csc x-\cot x|+C$,　　(20) $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$,

(21) $\int \frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$,　　(22) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin\frac{x}{a}+C$,

(23) $\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$　　(24) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C$,

(25) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$.

5. 不定积分的计算

（1）第一类换元积分法：凑微分

定理 1 设 $f(u)$ 具有原函数 $F(u)$，$u=\varphi(x)$ 可导，则

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x=\left[\int f(u)\mathrm{d}u\right]_{u=\varphi(x)}=F(u)\big|_{u=\varphi(x)}+C=F(\varphi(x))+C.$$

➢ **凑微分法的具体过程：**

$$\int g(x)\mathrm{d}x \overset{\text{变形}}{=\!=} \int f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)\mathrm{d}x \overset{\text{凑微分}}{=\!=} \int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x)$$

$$\overset{\text{换元 } u=\varphi(x)}{=\!=} \int f(u)\mathrm{d}u \overset{\text{积分}}{=\!=} F(u)+C \overset{\text{回代}}{=\!=} F[\varphi(x)]+C.$$

➢ **在凑微分时常用到的微分式子：**

$\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\mathrm{d}\sqrt{x}$；　$\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\mathrm{d}\frac{1}{x}$；　$\sec^2 x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\tan x)$；

$\csc^2 x\mathrm{d}x=-\mathrm{d}(\cot x)$；　$\sec x\tan x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\sec x)$；　$\csc x\cot x\mathrm{d}x=-\mathrm{d}(\csc x)$；

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\arcsin x)$；　$\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\arctan x)$.

(2) 第二类换元积分法：① 三角函数代换；② 根式代换；③ 倒代换

定理 2 设 $x=\varphi(t)$ 是单调、可导的函数且 $\varphi'(t)\neq 0$，又设 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 具有原函数 $F(t)$，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \left[\int_a^b f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\mathrm{d}t\right]_{t=\varphi^{-1}(x)} = F\left[\varphi^{-1}(x)\right]+C,$$

其中 $\varphi^{-1}(x)$ 是 $x=\varphi(t)$ 的反函数.

① 三角函数代换（i） $\sqrt{a^2-x^2}$，可令 $x=a\sin t;\ t\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$

(ii) $\sqrt{a^2+x^2}$，可令 $x=a\tan t;\ t\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$

$x=\varphi(t)$ **要单调**

(iii) $\sqrt{x^2-a^2}$，可令 $x=\pm a\sec t.\ t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup(\dfrac{\pi}{2},\pi)$

② 根式代换

(i)若被积函数中含有 $\sqrt[n]{ax+b}$，$\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ 等根式，可令 $t=\sqrt[n]{ax+b},\ t=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$.

(ii)当被积函数含有两种(两种以上)的 $\sqrt[m]{ax+b}$，$\sqrt[n]{ax+b}$ 时，则令 $t=\sqrt[k]{ax+b}$ (其中 k 为 m,n 的最小公倍数)

③ 倒代换

被积函数是分式且分母比分子的幂次高得多时， 可采用倒代换 $x=\dfrac{1}{t}$.

（3）分部积分法

定理 3 设函数 $u=u(x)$， $v=v(x)$ 具有连续的导数，则有

$$\int u\mathrm{d}v = uv-\int v\mathrm{d}u \text{ 或 } \int uv'\mathrm{d}x = uv-\int vu'\mathrm{d}x$$

（4）简单有理函数的积分

① 有理函数 两个多项式的商表示的函数称之，即具有如下形式的函数：

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m} \qquad (1)$$

其中 m 、n 都是非负整数；$a_0,a_1,\cdots,a_n$ 及 $b_0,b_1,\cdots,b_m$ 都是实数，且 $a_0\neq 0$，$b_0\neq 0$.

假定分子与分母之间没有公因式，（1） $n<m$，该有理函数是真分式；（2） $n\geq m$，该有理函数是假分式.

② 有理真分式函数的分解定理

对有理真分式函数 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，若 $Q(x)=b_0(x-a)^{\alpha}\cdots(x-b)^{\beta}(x^2+px+q)^{\lambda}\cdots(x^2+rx+s)^{\mu}$

其中 $p^2-4q<0,\cdots,r^2-4s<0$，则

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)}=&\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}}+\cdots+\frac{A_{\alpha}}{(x-a)}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta}}+\frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}}+\cdots+\frac{B_{\beta}}{(x-b)}\\&+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{\lambda}}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{\lambda-1}}+\cdots+\frac{M_{\lambda}x+N_{\lambda}}{x^2+px+q}+\cdots\\&+\frac{R_1x+S_1}{(x^2+rx+s)^{\mu}}+\frac{R_2x+S_2}{(x^2+rx+s)^{\mu-1}}+\cdots+\frac{R_{\mu}x+S_{\mu}}{x^2+rx+s}\end{aligned}$$

其中 $A_i,\cdots,B_i,M_i,N_i,\cdots,R_i,S_i$ 等都是常数.

③ 有理真分式函数的分解定理

有理函数的不定积分，可归结为求多项式和以下四类分式的不定积分：

$\dfrac{A}{x-a}$，$\dfrac{A}{(x-a)^k}$，$\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$，$\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$（其中 k 是正整数，$k\geq 2$，$p^2-4q<0$）.

（5）三角函数有理式的积分

三角有理函数可表示为 $R(\sin x,\cos x)$，其中 $R(u,v)$ 表示 u、v 两个变量的有理式.

三角有理函数的积分的基本方法:

1) 利用三角恒等式化简，采用换元积分法或分部积分法.

2) 采用万能变换将其化为有理函数的积分.

作变量代换 $\tan\dfrac{x}{2}=t$，则 $\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x=\int R\left(\dfrac{2t}{1+t^2},\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)\dfrac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$，

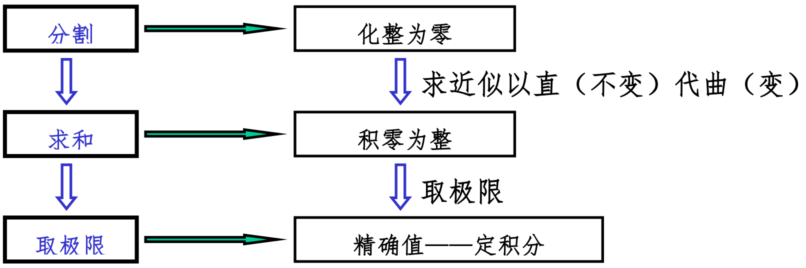
上式右端是 t 的有理函数的积分.

二、定积分

1. 定积分的概念

（1）定义：将 $[a,b]$ 内任意插入 $n-1$ 个分点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，把 $[a,b]$ 分成 n 个小区间 $[x_{i-1},x_i]$，其长度记作 $x_i-x_{i-1}=\Delta x_i\ (i=1,2,\cdots,n)$. 在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 ξ_i，作积 $f(\xi_i)\Delta x_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，并作和 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$，记 $\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$. 则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分定义为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$，这里右端的极限存在.

① 定积分的思想和方法：



② 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在，此时有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)$$

特别地，$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{n}k\right)$.

（2）可积条件：

① 必要条件是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界；

② 连续函数必可积；

③ 当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，且只有有限个第一类间断点时， $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

（3）几何意义： $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 在几何上表示在 x 轴上方图形的面积和减去 x 轴下方图形的面积和.

2. 定积分的性质

性质 1 $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

性质 2 $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ （k 为常数）.

性质 3 （区间可加性） $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

性质 4 （保号性） 如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\ge 0$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \ge 0$ $(a<b)$.

推论 1 （单调性） 如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\le g(x)$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

推论 2（绝对值不等式） $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ $(a<b)$

性质 5（估值定理） 设 M 及 m 分别是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值及最小值，则

$$m(b-a)\le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M(b-a).$$

性质 6（积分中值定理） 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则在积分区间 $[a,b]$ 上至少存在一个点 ξ，使 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$ $(a\le\xi\le b)$.

推广的积分中值定理 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 可积且不变号，则存在 $\xi\in[a,b]$，使得 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

3. 变限积分函数

(1) **定义**：$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

⑵设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$u(x),v(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且

$$a\le u(x),v(x)\le b,\quad x\in[a,b].$$

则积分限函数 $F(x)=\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\mathrm{d}t$ 在 $\left[a,b\right]$ 上可导，且

$$F'(x)=f\left[u(x)\right]u'(x)-f\left[v(x)\right]v'(x).$$

⑶**原函数存在定理** 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则函数 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数.

该定理的重要意义：

(1)肯定了连续函数的原函数是存在的.（第四章中原函数存在定理）

(2)初步揭示了积分学中的定积分与原函数之间的联系.

注：所有涉及可导函数的题型都可以应用到变限积分函数上,如：求导数；求极限；微分中值定理等.

4. 定积分的计算

(1) 微积分基本定理

定理 1(牛顿—莱布尼茨公式) 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，$F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$.

①该公式揭示了定积分与被积函数的原函数或不定积分之间的关系.

②该公式也叫做微积分基本公式. 求一个连续函数在区间 $[a,b]$ 上的定积分只需求出它的任意一个原函数在区间 $[a,b]$ 上的增量.（求定积分问题转化为求原函数的问题）

(2) 换元积分法

定理 2 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 函数 $x=\varphi(t)$ 满足：

（1）$\varphi\left(\alpha\right)=a,\varphi\left(\beta\right)=b$，且 $a\le\varphi(t)\le b$；

（2）$\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ (或 $\left[\beta,\alpha\right]$) 上具有连续导数，

则有　$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$.

应用换元公式时应注意:

① 换元要换限；换元后无需变量还原；

② 注意整体积分思想，即不明显写出新变量，此时积分上下限不变.

(3) 分部积分法

定理 3　若 $u=u(x)$ 、$v=v(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续导数，则有

$$\int_a^b u\mathrm{d}v=[uv]_a^b-\int_a^b v\mathrm{d}u .$$

(4) 奇偶对称性

设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，则

① $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-a}^a[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x=\int_0^a[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x$；

② 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$；

③ 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $\int_{-a}^a f(x)dx=0$.

(5)周期函数的定积分

设 $f(x)$ 是周期为 T 的连续函数，则

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x \quad (T>0,a\in\mathbf{R})$$

$$\int_a^{a+nT} f(x)\mathrm{d}x=n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x \quad (n\in\mathbf{N},a\in\mathbf{R})$$

(6)相关公式

① $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x$；

② $\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$；

③ $\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x$；

④ **华莱士公式**

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdot\cdots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} & (n\text{为大于1的正奇数})\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} & (n\text{为正偶数})\end{cases}$$

三、反常积分

(1) 两类反常积分的定义

① 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，取 $t>a$，如果极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上的反常积分，记作 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，即 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$，

也称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；否则称为发散.

② 设函数 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续，点 a 为 $f(x)$ 的瑕点，取 $t>a$，若极限 $\lim\limits_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上的反常积分，记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x$

也称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；否则称为发散.（敛散性判别：比较审敛法及其极限形式）

③ 三个基本结论

反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$：当 $p>1$ 时收敛，当 $p\le 1$ 时发散.

反常积分 $\int_0^1\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$：当 $p<1$ 时收敛，当 $p\ge 1$ 时发散.

反常积分 $\int_a^b\frac{1}{(x-a)^p}\mathrm{d}x$：当 $p<1$ 时收敛，当 $p\ge 1$ 时发散.

(2) 两类反常积分的计算

① 广义牛顿—莱布尼茨公式

当 a 为瑕点时，$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\left[F(x)\right]_a^{+\infty}=F(+\infty)-F(a)$；

当 b 为瑕点，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\left[F(x)\right]_a^b=F(b^-)-F(a)$；

当 $c(a<c<b)$ 为瑕点时，

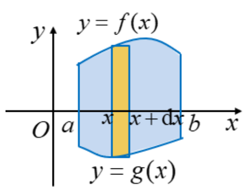
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x=\left[\lim_{x\to c^-}F(x)-F(a)\right]+\left[F(b)-\lim_{x\to c^+}F(x)\right]$$

② 广义换元积分法、分部积分法

反常积分的换元积分法、分部积分法与定积分相类似.

四、定积分的应用

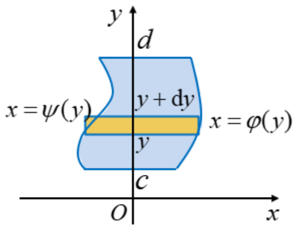
1. 平面图形的面积



(1) 若平面图形是由上下两条连续曲线 $y=f(x),y=g(x)$ 与直线 $x=a,x=b$（$a<b$）所围成的，则其面积为

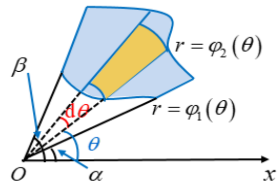
$$A=\int_a^b\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x.$$

(2) 若平面图形是由左右两条连续曲线 $x=\psi(y)$，$x=\varphi(y)$ 和直线 $y=c,y=d\ (c<d)$ 围成的，则其面积为



$$A=\int_c^d\left|\varphi(y)-\psi(y)\right|\mathrm{d}y.$$

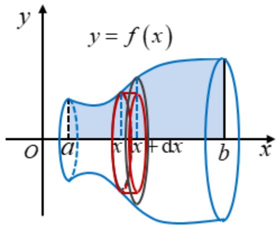
(3) 若平面图形是由**极坐标下**的两条连续曲线 $\rho=\rho_1(\theta),\rho=\rho_2(\theta)$ 与射线 $\theta=\alpha,\theta=\beta(\alpha<\beta)$ 围成的，则其面积为



$$A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\left|\rho_2^{\ 2}(\theta)-\rho_1^{\ 2}(\theta)\right|\mathrm{d}\theta.$$

2. 旋转体以及截面积已知的立体的体积

(1) 设立体介于 $x=a$、$x=b$ 且垂直于 x 轴的两平面之间，它被垂直于 x 轴的平面所截的截面面积为已知的连续函数 $A(x)$，该立体的体积为

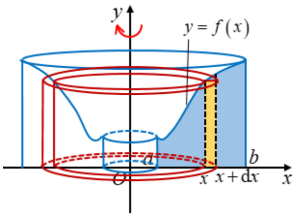


$$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 若平面图形是由连续曲线 $y=f_1(x),y=f_2(x)$（不妨设 $0\le f_1(x)\le f_2(x)$）及 $x=a,x=b$ $(a<b)$ 所围成的平面图形，则该图形绕 x 轴旋转一周所形成的立体体积

$$V=\pi\int_a^b\left[f_2^{\,2}(x)-f_1^{\,2}(x)\right]\mathrm{d}x.$$

(3) 由曲边梯形 $0\le y\le f(x),0\le a\le x\le b$ 绕 y 轴旋转一周所得立体的体积为



$$V=2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\ \text{（柱壳法）}$$

(4) 如果一个立体不是旋转体，但却知道该立体上垂直于一定轴的各个截面面积，那么该立体的体积也可用定积分来计算.

设 $A(x)$ 表示过点 x 且垂直于 x 轴的截面面积，且 $A(x)$ 为 x 的已知连续函数，则体积微元 $\mathrm{d}V=A(x)\mathrm{d}x$，立体体积 $V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x$.

3. 平面曲线的弧长

(1) 曲线 $y=f(x)\ (a\le x\le b)$，其中 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有一阶连续导数，所求弧长为

$$s=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x.$$

（2）曲线$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$，$t\in[\alpha,\beta]$，其中$\varphi(t),\psi(t)$都是连续可导函数，所求弧长为

$$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\mathrm{d}t.$$

（3）曲线$r=r(\theta)\ (\alpha\le\theta\le\beta)$，其中$r(\theta)$在$[\alpha,\beta]$上具有连续导数，所求弧长为

$$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\theta)+[r'(\theta)]^2}\mathrm{d}\theta.$$

4. 旋转曲面的面积

曲线$y=f(x)$在$[a,b]$上具有一阶连续导数，则曲线绕x轴旋转一周的旋转曲面面积为

$$A=2\pi\int_\alpha^\beta |f(x)|\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x.$$

五、积分不等式

设$f(x)$，$g(x)$在$[a,b]$连续，则

（1）$\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2\le\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$　（柯西—施瓦兹不等式）

（2）$\left[\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)^2\mathrm{d}x\right]^{\frac12}\le\left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac12}+\left[\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac12}$　（闵可夫斯基不等式）

第二部分 典型例题

1、不定积分

1.1 求原函数

例 1. 已知定义于 R 的函数$f(x)$满足$f'(\ln x)=\begin{cases} 1, x\in(0,1], \\ x, x\in(1,+\infty), \end{cases}$ 又$f(0)=1$，则$f(x)=$

____________________.

【$f(x)=\begin{cases} x+1, x\le 0 \\ \mathrm{e}^x,\ x>0 \end{cases}$】

例 2. 设$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续，在$(0,+\infty)$内可导，$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义且可导，$g(0)=1$，又当$x>0$时，$f(x)+g(x)=3x+2$，$f'(x)-g'(x)=1$，

$f'(2x)-g'(-2x)=-12x^2+1$，求$f(x)$与$g(x)$的表达式.（江苏省 1991 年）

【 $f(x)=2x+1\left(x\geq 0\right), g(x)=\begin{cases} x+1, & x\geq 0 \\ x^3+x+1, & x<0 \end{cases}$ 】

1.2 形如 $\int \frac{a\sin x+b\cos x}{c\sin x+d\cos x}\mathrm{d}x\ \left(a^2+b^2+c^2+d^2\neq 0\right)$ 的不定积分

例 3. 求不定积分 $\int \frac{3\sin x+4\cos x}{2\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$.

【 $2x+\ln\left|2\sin x+\cos x\right|+C$ 】

1.3 换元积分法

例 4. $\int \frac{x^{14}}{\left(x^5+1\right)^4}\mathrm{d}x=$ ________________________.（江苏省 2000 年）

【 $\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{x^5+1}+\frac{1}{\left(x^5+1\right)^2}-\frac{x^5}{3\left(x^5+1\right)^3}\right]+C$ 】

例 5. 求 $\int \frac{x^5-x}{x^8+1}\mathrm{d}x$.（江苏省 2000 年）

【 $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x^2-x^4-1}{\sqrt{2}x^2+x^4+1}\right|+C$ 】

例 6. $\int \frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{(x-\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}x=$______________________. (江苏省 2004 年)

【$\frac{x}{x-\mathrm{e}^x}+C$】

例 7. 求$\int \frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2(\ln x-1)^2}}\mathrm{d}x$. (浙江省 2009)

【$\ln\left|x\ln x-x+\sqrt{1+(x\ln x-x)^2}\right|+C$】

例 8. $\int \frac{x+\sin x\cos x}{(\cos x-x\sin x)^2}\mathrm{d}x=$______________________. (江苏省 2004 年)

【$\frac{1}{1-x\tan x}+C$】

1.4 分部积分法

例 9. $\int \arcsin x\cdot\arccos x\mathrm{d}x=$______________________. (江苏省 2002 年)

【$x\arcsin x\cdot\arccos x+(\arccos x-\arcsin x)\sqrt{1-x^2}+2x+C$】

例 10. $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x=$______________.

【$\frac{x(1-\cos x)}{\sin x}+C$】

1.5 积分过程中有相互抵消的不定积分

例 11. 设 $f(x)$ 可导，且 $\int x^3 f'(x)\mathrm{d}x=x^2\cos x-4x\sin x-6\cos x+C$，求 $f(x)$.

【$-\frac{\sin x}{x^2}+\frac{\cos x}{x}+C$】

例 12. 求 $\int \frac{\mathrm{e}^{-\sin x}\sin 2x}{\sin^4\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}\mathrm{d}x$.

【$\frac{8\mathrm{e}^{\sin x}}{1-\sin x}+C$】

2. 定积分

2.1 利用定积分的定义求极限

例 13. 已知 $f(x)=a^{x^3}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\ln\left[f(1)\cdot f(2)\cdots f(n)\right]$.（江苏省 2006 年）

【$\frac{1}{4}\ln a$】

例 14. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\dfrac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

【$\dfrac{1}{\ln 2}$】

2.2 确定函数表达式

例 15. 设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=x+x^2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+x^3\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$，求 $f(x)$.（江苏省 1998 年）

【$x+\dfrac{3}{8}x^2-x^3$】

2.3 分段函数的定积分

例 16. 设 $[x]$ 表示实数 x 的整数部分，试求定积分 $\int_{\frac{1}{6}}^{6}\dfrac{1}{x}\cdot\left[\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right]\mathrm{d}x$.（江苏省 2017 年）

【$2\ln 3$】

2.4 分部积分法求定积分

例 17. 已知 $f(x)=\int_1^{x^2}\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$，求定积分 $\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x$.

【$\dfrac{1}{2}(\cos 1-1)$】

例 18. 求积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\left(1+\tan\dfrac{x}{2}\right)^2\mathrm{d}x$.（江苏省 2002 年）

【$2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$】

2.5 换元积分法求定积分

例 19. $\int_0^1 \frac{\arctan x}{\left(1+x^2\right)^2}\mathrm{d}x=$______________. (江苏省 2006 年)

【$\frac{\pi^2}{64}+\frac{\pi}{16}-\frac{1}{8}$】

例 20. 求积分$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

【$\frac{\pi}{8}\ln 2$】

例 21. 求定积分$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\,x}{1+\tan^{2010}x}$.

【$\frac{\pi}{4}$】

例 22. 求积分$\int_0^{\pi} \frac{x\sin^2 x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$. (江苏省 2016 年)

【$\frac{\sqrt{2}-1}{2}\pi^2$】

2.6 利用对称区间上函数的奇偶性

例 23. 求积分$\int_{-1}^1 x\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x$.

【$\dfrac{1}{3}$】

例 24. 计算$\int_0^{\pi}\dfrac{\pi+\cos x}{x^2-\pi x+2023}\mathrm{d}x$.

【$\dfrac{2\pi}{\sqrt{2023-\frac{\pi^2}{4}}}\arctan\dfrac{\pi}{2\sqrt{2023-\frac{\pi^2}{4}}}$】

2.7 周期函数的定积分

例 25. 求$I=\int_{\mathrm{e}^{-2n\pi}}^{1}\left|\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)\right|\mathrm{d}x, n\in\mathrm{N}$.（全国大学生 2014 年预赛题）

【$4n$】

例 26. 求积分$\int_0^{2\pi}\dfrac{1}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

【$\sqrt{2}\pi$】

2.8 与变限积分有关

例 27. 设$F(x)=\int_x^{x+2\pi}\mathrm{e}^{\sin t}\sin t\mathrm{d}t$，则$F(x)$（　　　　）

A. 为正常数；　　B. 为负常数；　　C. 恒为零；　　D. 不为常数.

【A】

例 28. 已知 $g(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，且 $g(0)=1$， $f(x)=\int_0^{2\pi}|x-t|g(t)\mathrm{d}t$，求 $f'(T)$.

【 $2T$ 】

例 29. 设 $f(t)=t|\sin t|$，(1) 求 $\int_0^{2\pi}f(t)\mathrm{d}t$；(2) 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x^2}$.（江苏省 2019 年）

【 $4\pi,\dfrac{1}{\pi}$ 】

例 30. 设 $f(x)=x$， $g(x)=\begin{cases}\sin x, 0\le x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0,\quad x>\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$ 求 $F(x)=\int_0^x f(t)g(x-t)\mathrm{d}t$.（江苏省 2000 年）

【 $F(x)=\begin{cases}x-\sin x, 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\\ x-1,\quad x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ 】

例 31. 设 $F(a)=\int_0^{\pi}\ln\left(1-2a\cos x+a^2\right)\mathrm{d}x$，求 $F(-a),F\left(a^2\right)$.

【 $F\left(-a\right)=F(a),F\left(a^2\right)=2F(a)$ 】

例 32. 设可微函数 $f(x)$ 在 $x>0$ 上有定义，其反函数为 $g(x)$ 且满足 $\int_1^{f(x)} g(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\left(x^{\frac{3}{2}}-8\right)$，试求 $f(x)$.（江苏省 2000 年）

【 $f(x)=\sqrt{x}-1$ 】

3. 有关积分等式与不等式的证明

常见不等式：

(1) $|a|-|b|\le|a+b|\le|a|+|b|$；

(2) $\dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\le\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\le\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$，$\left(a_i>0,i=1,2,\cdots,n\right)$；

(3) 柯西不等式：$\left(\sum\limits_{i=1}^n a_ib_i\right)^2\le\sum\limits_{i=1}^n a_i^2\cdot\sum\limits_{i=1}^n b_i^2$，$\left(a_i,b_i\in\mathrm{R}\right)$；

柯西施瓦兹不等式：$\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2\le\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$.

闵可夫斯基不等式：$\left[\int_a^b\left(f(x)+g(x)\right)^2\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}\le\left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}$.

3.1 通过讨论被积函数的大小证明

例 33. 试证明：$\ln\left(1+\sqrt{2}\right)<\int_0^1\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}\mathrm{d}x<1$.（江苏省 1994 年）

例 34. 已知函数 $f(x)$ 在 $\left[-\dfrac{1}{a},a\right]$ 上连续 $\left(a>0\right)$，且 $f(x)\geq 0$，$\int_{-\frac{1}{a}}^{a} xf(x)\mathrm{d}x=0$，求证：

$$\int_{-\frac{1}{a}}^{a} x^2 f(x)\mathrm{d}x \leq \int_{-\frac{1}{a}}^{a} f(x)\mathrm{d}x.$$

3.2 利用柯西施瓦兹不等式证明

例 35. 证明：$\int_0^{\pi} xa^{\sin x}\mathrm{d}x\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{-\cos x}\mathrm{d}x \geq \dfrac{\pi^3}{4}$，$a>0$ 为常数.

例 36. 设 $f(x)$ 是区间 $\left[0,1\right]$ 上的连续可微函数，且当 $x\in\left(0,1\right)$ 时，$0<f'(x)<1$，$f(0)=0$，证明：

$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x > \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 > \int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x$.（北京市 1996 年，全国 2016 年）

3.3 利用泰勒公式证明

例 37. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续的二阶导数，求证：$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{24}(b-a)^3f''(\xi).$$

例 38. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续的二阶导数，求证：$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[f(a)+f(b)\right](b-a)-\frac{1}{12}(b-a)^3f''(\xi).$$

3.4 其他情形

例 39. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续的导数，求证：

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)|\le\frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|+\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x.$$（江苏省 2008 年）

例 40. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可导，求证：

$$\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x \le \max\left\{\int_0^1 |f'(x)|\mathrm{d}x, \left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|\right\}.$$

4. 定积分的应用

例 41.　求曲线 $L: y=\dfrac{1}{3}x^3+2x\left(0\le x\le 1\right)$ 绕直线 $y=\dfrac{4}{3}x$ 旋转一周生成的旋转曲面的面积.（全国大学生 2017 年）

【$\dfrac{\sqrt{5}}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)\pi$】

例 42. 求直线 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-1}$ 绕 y 轴旋转一周后的旋转曲面方程，并求该曲面与 $y=0, y=2$ 所包围的立体的体积.（江苏省 2002 年）

【$x^2+z^2=5y^2+4y+1, V=\dfrac{70}{3}\pi$】

5. 反常积分

例 43. 求 $\int_0^2 \sqrt{\dfrac{x}{2-x}}\mathrm{d}x=$____________.

【π】

例 44. 求反常积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^{\alpha}\right)}\mathrm{d}x$，$\left(\alpha\neq 0\right)$.

【$\frac{\pi}{4}$】

例 45. 求反常积分 $\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x\left(a,b>0\right)$.

【$\ln\frac{b+1}{a+1}$】

第三部分 强化训练

1. 求 $\int|\ln x|\mathrm{d}x$.（江苏省 1998 年）

2. 求 $\int\frac{1+x}{x\left(1+x\mathrm{e}^x\right)}\mathrm{d}x$.

3. 求 $\int x\arctan x\ln\left(1+x^2\right)\mathrm{d}x$.（全国大学生 2013 年决赛）

4. 求 $\int\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}\mathrm{d}x$.

5. 求 $\int\ln\left[(x+a)^{x+a}\cdot(x+b)^{x+b}\right]\frac{1}{(x+a)(x+b)}\mathrm{d}x$.

6. 已知 $f''(x)$ 连续， $f'(x)\neq 0$，求 $\int\left[\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f^2(x)f''(x)}{\left[f'(x)\right]^3}\right]\mathrm{d}x$.

7. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n\left(n+1\right)\cdots\left(2n-1\right)}$.

8. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

9. 设 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上连续，满足 $f(x)=x^2\sin x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x$，求 $f(x)$.

10. 设 $x>-1$，试求 $\int_{-1}^{x}(1-|t|)\mathrm{d}x$.

11. 设 $f(t)=\int_1^t \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$，求 $\int_0^1 t^2 f(t)\mathrm{d}t$.（江苏省 1996 年）

12. 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$.（江苏省 2002 年）

13. 求定积分 $\int_0^{\sqrt[2n]{3}}\dfrac{x^{3n-1}}{\left(x^{2n}+1\right)^2}\mathrm{d}x$.

14. 求积分 $\int_0^{\pi}\dfrac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

15. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x}, x\geq 0,\\ \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}, x<0,\end{cases}$ 求 $\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x$.（江苏省 2000 年）

16. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续的二阶导数，且 $f'(a)=f'(b)=0$，求证：$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}+\frac{1}{6}(b-a)^3 f''(\xi).$$

17. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有连续的二阶导数，且 $f'(0)=f'(1)=0$，求证：$\exists\xi\in(0,1)$，使得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[f(0)+f(1)\right]+\frac{1}{6}f''(\xi).$$

18. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续的二阶导数，且 $f'(a)=f'(b)$，求证：$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[f(a)+f(b)\right](b-a)+\frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\xi).$$

19. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，$f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且 $f(a)=f(b)=0$，求证：对 $\forall x\in[a,b]$，有 $|f(x)|\leq\dfrac{1}{2}\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x$.

20. 设 $D: y^2-x^2\leq 4, y\geq x, x+y\geq 2, x+y\leq 4$. 在 D 的边界 $y=x$ 上任取点 P，设 P 到原点的距离为 t，作 PQ 垂直于 $y=x$，交 D 的边界 $y^2-x^2=4$ 于 Q.

（1）试将 P,Q 的距离 $|PQ|$ 表示为 t 的函数；

（2）求 D 绕 $y=x$ 旋转一周的旋转体的体积.

21. 过原点$(0,0)$作曲线$y=-\ln x$的切线，求该切线、曲线$y=-\ln x$与x轴所围的图形绕x轴旋转一周所得的旋转体的体积.（江苏省 2010 年）

22. 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内大于零，并满足$xf'(x)=f(x)+\dfrac{3a}{2}x^2$（$a$为常数），又曲线$y=f(x)$与$x=1,y=0$所围图形$S$的面积为$2$，求函数$y=f(x)$，并问$a$为何值时，图形$S$绕$x$轴旋转一周所得的旋转体的体积最小.

23. 计算$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}\arccos\frac{1}{x}\mathrm{d}x.$

【参考答案】

1. $\displaystyle\int|\ln x|\mathrm{d}x=\begin{cases}x(\ln x-1)+2+C, x\geq 1\\ x(1-\ln x)+C, 0<x<1\end{cases}$，其中$C$为任意常数.

2. $\ln\left|\dfrac{x\mathrm{e}^x}{1+x\mathrm{e}^x}\right|+C$.

3. $\dfrac{1}{2}\left[\left(1+x^2\right)\ln\left(1+x^2\right)-x^2-3\right]\arctan x-\dfrac{1}{2}x\ln\left(1+x^2\right)+\dfrac{3}{2}x+C$.

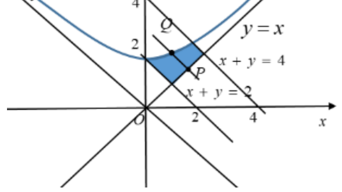
4. $\dfrac{x}{\ln x}+C$.　　5. $\ln(x+a)\ln(x+b)+C$.　　6. $\dfrac{f^2(x)}{2[f'(x)]^2}+C$.

7. $\mathrm{e}^{2\ln 2-1}$.　　8. $\dfrac{2}{\pi}$.　　9. $x^2\sin x-2$.

10. 当$-1\leq x<0$时，$\displaystyle\int_{-1}^{x}(1-|t|)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(1+x)^2$；当$x\geq 0$时，$\displaystyle\int_{-1}^{x}(1-|t|)\mathrm{d}x=1-\frac{1}{2}(1-x)^2$.

11. $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$.　　12. $\dfrac{1}{3\mathrm{e}}-\dfrac{1}{6}$.　　13. $\dfrac{1}{2n}\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

14. $\dfrac{\pi^2}{4}$.　　15. $\ln(1+\mathrm{e})$.　　16-19. 略



20. $|PQ|=\dfrac{2}{t},V=\sqrt{2}\pi$.（几何图形见右图）

21. $2\pi\left(1-\dfrac{\mathrm{e}}{3}\right)$.

22. $f(x)=\dfrac{3}{2}ax^2+(4-a)x,a=-5$.　　23. 1.