第 5 章　定积分及其应用

本章学习要点：

☑ 理解定积分的概念。

☑ 掌握定积分的性质及定积分中值定理，掌握换元积分法与分部积分法。

☑ 理解变上限定积分定义的函数，会求它的导数，掌握牛顿-莱布尼茨公式。

☑ 了解广义积分的概念并会计算广义积分。

☑ 掌握用定积分表示和计算一些几何量与物理量（平面图形的面积、平面曲线的弧长、旋转体的体积及侧面积、平行截面面积为已知的立体体积、变力作功、引力、压力及函数的平均值等）。

5.1　基本知识点

5.1.1　定积分的概念与性质

1. 定积分的概念

定义（黎曼积分）　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有界，在 $[a,b]$ 中任意插入 $n-1$ 个分点，$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，将闭区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间 $[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$，其长度为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$，在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，作和 $S=\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$，取 $\lambda=\max\{\Delta x_i\}$，如果极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}S=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在，则称这个极限为 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分，记为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 在几何上表示由曲线 $y=f(x)$、直线 $x=a,x=b$ 以及 x 轴所围成图形面积的代数和。

函数可积性的判定

（1）若函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，则 $f(x)$ 在区间 I 上可积。

（2）若函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界，且只有有限个间断点，则 $f(x)$ 在区间 I 上可积。

（3）单调有界函数必可积。

（4）若 $f(x)$ 可积，则 $|f(x)|$ 可积。

2. 定积分的性质

（1）$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$ （$a = b$）

（2）$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$

（3）$\int_a^b [lf(x) + kg(x)]\mathrm{d}x = l\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + k\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

（4）$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$

（5）若 $\forall x \in [a,b]$ 且 $f(x) \geq 0$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$$

（6）若在区间 $[a,b]$ 上 $f(x) \geq g(x)$ 恒成立，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

（7）$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ （$a < b$）

（8）若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，且 $g(x)$ 在该区间内单调增加（或减少），则至少存在一个数 $\xi \in [a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

当 $g(x) = 1$ 时，有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

性质（8）称为定积分的第一中值定理。

（9）若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调，$g(x)$ 可积，则至少存在一个数 $\xi \in [a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(a)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x + f(b)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x$$

（10）若 $f(x)$ 在对称区间 $[-a,a]$ 上连续，则

$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a [f(x) + f(-x)]\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & f(x)\text{为奇函数} \\ 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x & f(x)\text{为偶函数} \end{cases}$$

（11）若 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上可积，则

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a f(a-x)\mathrm{d}x$$

（12）若 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，a 为任意实数，则

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x$$

（13）若 $f(x)$ 是连续函数，则

$$\int_0^{\pi} xf(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x$$

3. 变上限定积分的性质

（1）若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则变上限的函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在区间 $[a,b]$ 上可导，且有 $F'(x)=f(x)$，即变上限的函数是其被积函数的一个原函数。一般如果积分上限是 x 的函数 $\varphi(x)$，则 $F'(x)=f(\varphi(x))\varphi'(x)$。如果积分上下限都是 x 的函数，分别为 $\psi(x),\varphi(x)$，则 $F'(x)=f(\psi(x))\psi'(x)-f(\varphi(x))\varphi'(x)$。该性质称为积分基本定理。

（2）若在闭区间 $[a,b]$ 上 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$$

该公式称为牛顿-莱布尼兹公式。

5.1.2 定积分的计算

1. 换元积分法

若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$x=\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有连续的导数，且 $a=\varphi(\alpha), b=\varphi(\beta)$ 对 $\forall t\in[\alpha,\beta]$ 有 $x=\varphi(t)\in[a,b]$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

2. 分部积分法

若函数 $u(x),v(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有连续的导数，则

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

5.1.3 定积分的应用

1. 面积

（1）直角坐标方程：由曲线 $y=f(x), y=g(x)$（其中 $f(x)\ge g(x)$），直线 $x=a, x=b$（或由曲线 $x=f(y), x=g(y)$ 且 $f(y)\ge g(y)$，直线 $y=c, y=d$）所围成的平面图形的面积为

$$S=\int_a^b [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x \quad （或 S=\int_c^d [f(y)-g(y)]\mathrm{d}y）$$

（2）参数方程：由 $x=\varphi(t), y=\psi(t)\ (0\le t\le T)$ 的简单闭合曲线所围成的平面图形的面

积为
$$S=\int_0^T \varphi(t)\psi'(t)\mathrm{d}t=-\int_0^T \psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

或

$$S=\frac{1}{2}\int_0^T [\varphi(t)\psi'(t)-\psi(t)\varphi'(t)]\mathrm{d}t$$

（3）极坐标方程：由曲线 $r=r(\theta)$ 和射线 $\theta=\alpha,\theta=\beta$ 所围成的平面图形面积为

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\mathrm{d}\theta$$

2. 体积

（1）已知平行截面面积的立体体积：设有空间物体 Ω，若垂直于 x 轴的平面截此立体所得截面面积是 x 的函数 $A(x)$， $x\in[a,b]$，则此立体的体积为

$$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x$$

（2）旋转体的体积：由连续曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴以及直线 $x=a,x=b$ 所围曲边梯形绕 x 轴旋转所得的体积为

$$V=\pi\int_a^b y^2\mathrm{d}x=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$$

3. 弧长

（1）直角坐标方程：区间 $[a,b]$ 上的（连续可微）光滑曲线 $y=f(x)$ 的长度为

$$S=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$$

（2）参数方程：曲线方程为 $x=x(t),y=y(t)$ 且在 $[t_0,T]$ 上连续可导，则曲线的长度为

$$S=\int_{t_0}^T\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$$

（3）极坐标方程：曲线方程为 $r=r(\theta)\,(\alpha\le\theta\le\beta)$ 且 $r(\theta)$ 与 $r'(\theta)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续，则曲线弧长为

$$S=\int_\alpha^\beta\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta$$

4. 旋转曲面的面积

光滑的平面曲线 $y=f(x)\ (a\le x\le b)$ 绕 x 轴旋转所得的曲面的面积为

$$S=2\pi\int_a^b y\mathrm{d}s=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x$$

5. 变力作功

（1）变力沿直线所做的功：质点在变力 $F(x)$ 的作用下，沿直线从 $x=a$ 位移到 $x=b$ 所做的功为

$$W=\int_a^b F(x)\mathrm{d}x$$

（2）提升液体所做的功：设一容器，液体表面与 x 轴相截于 $x=a$，底面与 x 轴相截于 $x=b$，垂直于 x 轴的平面截容器所得的截面面积为 $S(x)$，则将容器中的液体全部抽出所作的功为

$$W=\int_a^b \rho g x S(x)\mathrm{d}x$$

其中 ρ 是液体的密度，g 是重力加速度。

（3）液体的压力：设 ρ 是液体的密度，g 是重力加速度，在液体中有一垂直平板，其在 xOy 平面内，由 $y=f(x), y=g(x)$（其中 $f(x)>g(x)$），$x=a, x=b$ 围成（x 轴垂直向下，y 轴处在液体的表面上），则液体对此平板一侧的压力为

$$P=\int_a^b \rho g[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$$

5.1.4 广义积分

1. 无穷区间上的广义积分

若 $f(x)$ 在积分区间上连续，则

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

2. 无界函数的广义积分

若 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x$$

若 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\infty$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x$$

若 $f(x)$ 在 (a,b) 连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\infty$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^c f(x)\mathrm{d}x+\lim_{\delta\to0^+}\int_c^{b-\delta}f(x)\mathrm{d}x$$

若 $f(x)$ 在 $[a,c),(c,b]$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to c}f(x)=\infty$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{c-\varepsilon}f(x)\mathrm{d}x+\lim_{\delta\to0^+}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x$$

5.2 例题分析

5.2.1 选择题

【例5.1】 设 $a_n=\dfrac{3}{2}\int_0^{\frac{n}{n+1}}x^{n-1}\sqrt{1+x^n}\,\mathrm{d}x$，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n$ 等于______。

A. $(1+\mathrm{e})^{\frac{3}{2}}+1$　　B. $(1+\mathrm{e}^{-1})^{\frac{3}{2}}-1$　　C. $(1+\mathrm{e}^{-1})^{\frac{3}{2}}+1$　　D. $(1+\mathrm{e})^{\frac{3}{2}}-1$

解 应选B。因为

$$na_n=\frac{3}{2}n\int_0^{\frac{n}{n+1}}x^{n-1}\sqrt{1+x^n}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{n}{n+1}}\sqrt{1+x^n}\,\mathrm{d}x^n\xlongequal{t=x^n}\frac{3}{2}\int_0^{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n}\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t$$

故 $$\lim_{n\to\infty}na_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2}\int_0^{\left(\frac{n}{1+n}\right)^n}\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t=\frac{3}{2}\int_0^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n}\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t=\frac{3}{2}\int_0^{\mathrm{e}^{-1}}\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t=(1+\mathrm{e}^{-1})^{\frac{3}{2}}-1$$

【例5.2】 设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x}{x}\mathrm{d}x$，　$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{x}{\tan x}\mathrm{d}x$，则______。

A. $I_1>I_2>1$　　B. $1>I_1>I_2$　　C. $I_2>I_1>1$　　D. $1>I_2>I_1$

解 应选B。因为当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ 时，有 $\tan x>x$，$\cos^2x<\cos x$，故有 $I_1>I_2$，且

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^2x\mathrm{d}x=\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=1$$

【例5.3】 设函数 $f(x)$ 连续，则下列函数中，必为偶函数的是______。

A. $\int_0^x f(t^2)\mathrm{d}t$　　　　B. $\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t$

C. $\int_0^x t[f(t)-f(-t)]\mathrm{d}t$　　　　D. $\int_0^x t[f(t)+f(-t)]\mathrm{d}t$

解 应选 D。$F(x)=\int_0^x f(x)\mathrm{d}x$ 的奇偶性与 $f(x)$ 的奇偶性的关系是：$f(x)$ 的奇偶性与 $F(x)$ 的奇偶性相反。由于 $g(t)=t[f(t)+f(-t)]=-g(-t)$ 为奇函数，故

$F(x)=\int_0^x t[f(t)+f(-t)]\mathrm{d}t$ 为偶函数。

【例 5.4】 设 $F(x)=\dfrac{x^2}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，其中 $f(x)$ 为连续函数，则 $\lim\limits_{x\to a}F(x)=$______。

A. a^2　　B. $a^2 f(a)$　　C. 0　　D. 不存在

解 应选 B。因

$$\lim_{x\to a}F(x)=\lim_{x\to a}\frac{x^2\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{x-a}=\lim_{x\to a}\left[2x\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+x^2 f(x)\right]=a^2 f(a)$$

【例 5.5】 设 $f(x),\phi(x)$ 在点 $x=0$ 的某个邻域内连续，且当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $\phi(x)$ 的高阶无穷小，则当 $x\to 0$ 时，$\int_0^x f(t)\sin t\mathrm{d}t$ 是 $\int_0^x t\phi(t)\mathrm{d}t$ 的______。

A. 低阶无穷小　　B. 高阶无穷小

C. 同阶但不等价的无穷小　　D. 等价无穷小

解 应选 B。因

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\sin t\mathrm{d}t}{\int_0^x t\phi(t)\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\sin x}{x\phi(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\phi(x)}=0$$

故 $\int_0^x f(t)\sin t\mathrm{d}t$ 是 $\int_0^x t\phi(t)\mathrm{d}t$ 的高阶无穷小。

【例 5.6】 设 $f(x)=\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\mathrm{d}t$，$g(x)=\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^6}{6}$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的______。

A. 低阶无穷小　　B. 高阶无穷小

C. 等价无穷小　　D. 同阶但不等价的无穷小

解 应选 B。因

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\mathrm{d}t}{\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^6}{6}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos x)^2\cdot\sin x}{x^4+x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos x)^2}{x^3+x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\dfrac{1}{2}x^2\right)^2}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{4}x=0$$

故 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小。

【例5.7】 设$f(x)$有连续的导数，$f(0)=0, f'(0)\neq 0, F(x)=\int_0^x (x^2-t^2)f(t)\mathrm{d}t$，且当$x\to 0$时，$F'(x)$与$x^k$是同阶无穷小，则$k$等于______。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

解 应选C。由$F'(x)$与x^k是同阶无穷小，故有

$$F'(x)=\left(x^2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x t^2 f(t)\mathrm{d}t\right)'=2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x^{k-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{2f(x)}{(k-1)x^{k-2}}=2\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{(k-1)(k-2)x^{k-3}}=C$$

其中C为常数。故$k-3=0$。

【例5.8】 设$a(x)=\int_0^{5x}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$，$b(x)=\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}\mathrm{d}t$，则当$x\to 0$时，$a(x)$是$b(x)$的______。

A. 高阶无穷小　　B. 低阶无穷小

C. 同阶但不等价的无穷小　　D. 等价无穷小

解 应选C。因

$$\lim_{x\to 0}\frac{a(x)}{b(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{5x}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t}{\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 5x}{5x}5}{(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\cos x}=\frac{5}{\mathrm{e}}$$

【例5.9】 设$f(x)$是连续函数，$F(x)$是$f(x)$的原函数，则______。

A. 当$f(x)$是奇函数时，$F(x)$必是偶函数

B. 当$f(x)$是偶函数时，$F(x)$必是奇函数

C. 当$f(x)$是周期函数时，$F(x)$必是周期函数

D. 当$f(x)$是单调增函数时，$F(x)$必是单调增函数

解 应选A。设$f(x)$是奇函数，即$f(-x)=-f(x)$；$F(x)$是$f(x)$的原函数，则

$$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$$

而

$$F(-x)=\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t+C=\int_0^x f(-u)\mathrm{d}(-u)+C=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C=F(x)$$

故当$f(x)$是奇函数时，$F(x)$必是偶函数。

【例 5.10】 设在闭区间$[a,b]$上$f(x)>0, f'(x)<0, f''(x)>0$，令$S_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，

$S_2=f(b)(b-a)$，$S_3=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)$，则______。

A. $S_1<S_2<S_3$　　B. $S_2<S_1<S_3$　　C. $S_3<S_1<S_2$　　D. $S_2<S_3<S_1$

解　应选 B。由在闭区间$[a,b]$上$f(x)>0, f'(x)<0, f''(x)>0$知，$f(x)$是位于$x$轴上方，单调减少且下凸的一条曲线，由定积分的几何意义可知$S_2<S_1<S_3$。

【例 5.11】　设$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 x\mathrm{d}x$，$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)\mathrm{d}x$，$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)\mathrm{d}x$，则______。

A. $N<P<M$　　B. $M<P<N$　　C. $N<M<P$　　D. $P<M<N$

解　应选 D。由被积函数的奇偶性和积分区间的对称性知，$M=0, N>0, P<0$，故有$P<M<N$。

【例 5.12】　设$F(x)=\int_x^{x+2\pi}\mathrm{e}^{\sin t}\sin t\mathrm{d}t$，则$F(x)$______。

A. 为正常数　　B. 为负常数　　C. 恒为零　　D. 不为常数

解　应选 A。由被积函数是以2π为周期的函数，故有

$$F(x)=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\sin t}\sin t\mathrm{d}t=-\mathrm{e}^{\sin t}\cos t\Big|_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\sin t}\cos^2 t\mathrm{d}t=0+\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\sin t}\cos^2 t\mathrm{d}t>0$$

【例 5.13】　设函数$f(x)=\begin{cases}x^2 & 0\le x\le 1\\ 2-x & 1<x\le 2\end{cases}$，记为$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，$0\le x\le 2$，则有______。

A. $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3} & 0\le x\le 1\\ \frac{1}{3}+2x-\frac{x^2}{2} & 1<x\le 2\end{cases}$　　B. $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3} & 0\le x\le 1\\ -\frac{7}{6}+2x-\frac{x^2}{2} & 1<x\le 2\end{cases}$

C. $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3} & 0\le x\le 1\\ \frac{x^3}{3}+2x-\frac{x^2}{2} & 1<x\le 2\end{cases}$　　C. $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3} & 0\le x\le 1\\ 2x-\frac{x^2}{2} & 1<x\le 2\end{cases}$

解　应选 B。因

$$F(x)=\begin{cases}\int_0^x t^2\mathrm{d}t & 0\le x\le 1\\ \int_0^1 t^2\mathrm{d}t+\int_1^x(2-t)\mathrm{d}t & 1<x\le 2\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3} & 0\le x\le 1\\ -\dfrac{7}{6}+2x-\dfrac{x^2}{2} & 1<x\le 2\end{cases}$$

【例5.14】 已知$f(x)=\begin{cases}x^2 & 0\le x<1\\ 1 & 1\le x\le 2\end{cases}$，设$F(x)=\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$，$0\le x\le 2$，则$F(x)$为______。

A. $\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3 & 0\le x<1\\ x & 1\le x\le 2\end{cases}$　　B. $\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{3} & 0\le x<1\\ x & 1\le x\le 2\end{cases}$

C. $\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3 & 0\le x<1\\ x-1 & 1\le x\le 2\end{cases}$　　D. $\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{3} & 0\le x<1\\ x-1 & 1\le x\le 2\end{cases}$

解 应选D。因

$$F(x)=\int_1^x f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}\int_1^x t^2\mathrm{d}t=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{3} & 0\le x<1\\ \int_1^x 1\mathrm{d}t=x-1 & 1\le x\le 2\end{cases}$$

【例5.15】 设$f(x)$为已知连续函数，$I=t\int_0^{\frac{s}{t}} f(tx)\mathrm{d}x$，其中$t>0,s>0$，则$I$的值______。

A. 依赖于s和t　　B. 依赖于s，t，x

C. 依赖于s和x，不依赖于t　　D. 依赖于s，不依赖于t

解 应选D。因

$$I=t\int_0^{\frac{s}{t}} f(tx)\mathrm{d}x\xlongequal{u=tx}\int_0^s f(u)\mathrm{d}u$$

【例5.16】 设$f(x)$是连续函数，且$F(x)=\int_x^{\mathrm{e}^{-x}} f(t)\mathrm{d}t$，则$F'(x)=$______。

A. $-\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})-f(x)$　　B. $-\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})+f(x)$

C. $\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})-f(x)$　　D. $\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})+f(x)$

解 应选A。因

$$F'(x)=\left[\int_0^{\mathrm{e}^{-x}} f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]'=-\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})-f(x)$$

【例5.17】 设$f(x)$是连续函数，且$F(x)=\int_0^{x^2} f(t^2)\mathrm{d}t$，则$F'(x)=$______。

A. $f(x^4)$　　B. $x^2f(x^4)$　　C. $2xf(x^4)$　　D. $2xf(x^2)$

解　应选 C。因

$$F'(x)=\left[\int_0^{x^2}f(t^2)\mathrm{d}t\right]'=f(x^4)(x^2)'=2xf(x^4)$$

【例 5.18】　设 $f(x)$ 连续，则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=$______。

A. $xf(x^2)$　　B. $-xf(x^2)$　　C. $2xf(x^2)$　　D. $-2xf(x^2)$

解　应选 A。由

$$\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t\overset{u=x^2-t^2}{=\!=\!=}-\frac{1}{2}\int_{x^2}^0 f(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}f(u)\mathrm{d}u$$

故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}\int_0^{x^2}f(u)\mathrm{d}u\right)=xf(x^2)$$

【例 5.19】　双纽线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ 所围成的区域面积用积分表示为______。

A. $2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta$　　B. $4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta$

C. $2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos 2\theta}\mathrm{d}\theta$　　D. $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos 2\theta)^2\mathrm{d}\theta$

解　应选 A。已知双纽线的极坐标方程为 $r^2=\cos 2\theta$，其围成的区域关于坐标轴对称，

故有

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta$$

【例 5.20】　曲线 $y=\sin^{\frac{3}{2}}x\ (0\le x\le\pi)$ 与 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积为______。

A. $\dfrac{4}{3}$　　B. $\dfrac{4}{3}\pi$　　C. $\dfrac{2}{3}\pi^2$　　D. $\dfrac{2}{3}\pi$

解　应填 B。由旋转体积公式得

$$V=\pi\int_0^{\pi}(\sin^{\frac{3}{2}}x)^2\mathrm{d}x=-\pi\int_0^{\pi}(1-\cos^2x)\mathrm{d}\cos x=\frac{4}{3}\pi$$

【例 5.21】　曲线 $y=\cos x\left(-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)$ 与 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积为______。

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. π　　C. $\frac{\pi^2}{2}$　　D. π^2

解 应选 C。由旋转体积公式得

$$V=\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^2\mathrm{d}x=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\mathrm{d}x=2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{2}$$

【例 5.22】 设 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 连续，且 $g(x)<f(x)<m$（m 为常数），则曲线 $y=g(x), y=f(x), x=a$ 及 $x=b$ 所围平面图形绕直线 $y=m$ 旋转而成的旋转体体积为______。

A. $\int_a^b\pi[2m-f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$　　B. $\int_a^b\pi[2m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$

C. $\int_a^b\pi[m-f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$　　C. $\int_a^b\pi[m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$

解 应选 B。由旋转体积公式得

$$V=\pi\int_a^b[(m-g(x))^2-(m-f(x))^2]\mathrm{d}x=\int_a^b\pi[2m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$$

【例 5.23】 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，则方程 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_b^x\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t=0$ 在开区间 (a,b) 内的根有______。

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 无穷多个

解 应选 B。令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_b^x\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$，则有

$$F'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}>0,\quad x\in[a,b]$$

所以 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加；又

$$F(a)=\int_b^a\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=-\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x<0,\quad F(b)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$$

可知 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 区间上从取值为负连续单调增加到取值为正，所以 $F(x)$ 在 (a,b) 内有且只有一个零点，即方程 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_b^x\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t=0$ 在开区间 (a,b) 内的根只有一个。

【例 5.24】 设 $g(x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$，其中 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x^2+1) & 0\le x<1\\ \frac{1}{3}(x-1) & 1\le x\le 2\end{cases}$，则 $g(x)$ 在区间 $(0,2)$ 内______。

A. 无界　　B. 递减　　C. 不连续　　D. 连续

解 应选 D。由

$$g(x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=\int_0^x \frac{1}{2}(u^2+1)\mathrm{d}u=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x\text{，}\quad x\in[0,1)$$

$$g(x)=\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u+\int_1^x f(u)\mathrm{d}u=\frac{2}{3}+\int_1^x \frac{1}{3}(u-1)\mathrm{d}u=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}(x-1)^2\text{，}\quad x\in[1,2]$$

显然 $g(1-0)=\frac{2}{3}=g(1+0)$，所以 $g(x)$ 在区间 $(0,2)$ 内连续。

【例 5.25】 下列广义积分______收敛。

A. $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$　　B. $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$

C. $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^2}\mathrm{d}x$　　D. $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\mathrm{d}x$

解 应选 C。因 $$\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{\ln x}\bigg|_{\mathrm{e}}^{+\infty}=1$$

【例 5.26】 下列广义积分发散的是______。

A. $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x$　　B. $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

C. $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$　　D. $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x$

解 应选 A。因 $$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\tan\frac{x}{2}\bigg|_{\varepsilon}^{1}=+\infty$$

【例 5.27】 如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，且仅有一个间断点 $x_0\in(a,b)$，令函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则错误的结论是______。

A. $\lim\limits_{x\to x_0^+}F(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}F(x)$　　B. $F(x_0)=f(\xi)(x_0-a),\xi\in(a,x_0)$

C. $F'(x)=f(x),x\in[a,b]$　　D. $F(x)$ 是有界函数，$x\in[a,b]$

解 应选 C。如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则有 $F'(x)=\left[\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right]'=f(x)$，但 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有间断点，故 $F'(x)=f(x),x\in[a,b]$ 不能成立，因此应选 C。

【例 5.28】 设函数 $f(x)$ 的导数连续，$f(0)=0$，当 $x\to 0$ 时，$\int_0^{f(x)}f(t)\mathrm{d}t$ 与 x^2 是等价无穷小，则 $f'(0)$ 为______。

A. 0　　B. 2　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\sqrt[3]{2}$

解 应选 D。由

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{f(x)}f(t)\mathrm{d}t}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)f[f(x)]}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{f[f(x)]}{x}$$

$$=\frac{f'(0)}{2}\cdot\lim_{x\to 0}f'[f(x)]f'(x)=\frac{1}{2}[f'(0)]^3=1$$

得

$$[f'(0)]^3=2\Rightarrow f'(0)=\sqrt[3]{2}$$

【例 5.29】 设 $f(x)$ 为连续的偶函数，且 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$，令 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$，则______。

A. $F(-a)=\frac{1}{2}-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$　　B. $F(-a)=1-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$

C. $F(-a)=F(a)$　　D. $F(-a)=2F(a)-1$

解 应选 A。由已知广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}f(t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t=1$$

令 $t=-u$，可得

$$\int_{-\infty}^{0}f(t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}$$

所以

$$F(-a)=\int_{-\infty}^{-a}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0}f(t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{-a}f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}-\int_{-a}^{0}f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}-\int_{0}^{a}f(t)\mathrm{d}t$$

【例 5.30】 对于广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^p x}$，下列结论正确的是______。

A. 当 $p>1$ 时，收敛　　B. 当 $p<1$ 时，收敛

C. p 取任意实数都收敛　　D. p 取任意实数都发散

解 应选 D。由于

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^p x}=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^p x}+\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^p x}$$

前一个积分当 $0<p<1$ 时收敛，后一个积分当 $p>1$ 时收敛，而 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^p x}$ 收敛的充分必要条件是两个积分都收敛，所以选 D。

【例 5.31】 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且都大于零，则在区间 $[a,b]$ 上由曲线 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积为______。

A. $\pi\int_a^b[f^2(x)-g^2(x)]\mathrm{d}x$　　B. $\pi\left|\int_a^b[f^2(x)-g^2(x)]\mathrm{d}x\right|$

C. $\pi\int_a^b|f(x)-g(x)|^2\,\mathrm{d}x$　　D. $\pi\int_a^b\left|f^2(x)-g^2(x)\right|\mathrm{d}x$

解 应选 D。因为已知条件没有给出 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大小关系，所以选 D。

【例 5.32】 设函数 $f(x)$ 是在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续的单调增加的奇函数，且 $F(x)=\int_0^x(2t-x)f(x-t)\mathrm{d}t$，则 $F(x)$ 是______。

A. 单调增加的非奇非偶函数　　B. 单调减少的非奇非偶函数
C. 单调增加的奇函数　　D. 单调减少的奇函数

解 应选 D。利用性质：如 $f(x)$ 为连续的奇函数，则函数 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为偶函数；如 $f(x)$ 为连续的偶函数，则函数 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为奇函数。令 $x-t=u$，则

$$F(x)=\int_x^0(x-2u)f(u)(-\mathrm{d}u)=x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-2\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u$$

所以，$F(x)$ 是奇函数。又

$$F'(x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+xf(x)-2xf(x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-xf(x)<\int_0^x f(x)\mathrm{d}u-xf(x)=0$$

即 $F(x)$ 单调减少，所以选 D。

【例 5.33】 设 $f(x)$ 是连续的正函数，在区间 $[0,x]$（$x>0$）上，由曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积为 $V_1(x)$，绕 y 轴旋转一周所成的旋转体的体积为 $V_2(x)$。如果当 $x\to 0^+$ 时，$f(x)$ 与 x 是等价无穷小，则当 $x\to 0^+$ 时，______。

A. $V_1(x)$ 与 $V_2(x)$ 是等价无穷小　　B. $V_1(x)$ 与 $V_2(x)$ 是同阶但不等价无穷小
C. $V_1(x)$ 是比 $V_2(x)$ 高价的无穷小　　D. $V_1(x)$ 是比 $V_2(x)$ 低价的无穷小

解 应选 B。由已知，$V_1(x)=\pi\int_0^x f^2(x)\mathrm{d}x$，$V_2(x)=2\pi\int_0^x xf(x)\mathrm{d}x$，所以

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{V_1}{V_2}=\frac{\pi f^2(x)}{2\pi xf(x)}=\frac{1}{2}$$

故选 B。

【例 5.34】 设 $f(x),g(x)$ 在点 x=0 的某邻域内连续，且 $f(x)$ 具有连续一阶导数，满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=0$，$f'(x)=-2x^2+\int_0^x g(x-t)\mathrm{d}t$，则______。

A. $x=0$ 为 $f(x)$ 的极小值点
B. $x=0$ 为 $f(x)$ 的极大值点
C. $(0,f(0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点
D. $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(0,f(0))$ 也不是曲线有 $y=f(x)$ 的拐点

解 应选 C。由

$$f'(x)=-2x^2+\int_0^x g(x-t)\mathrm{d}t=-2x^2-\int_0^x g(u)\mathrm{d}u$$

有 $f''(x)=-4x-g(x)$，于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-4x-g(x)}{x}=-4$$

可见在点 $x=0$ 的左右两侧 $f''(x)$ 变号，因此 $(0,f(0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点。

5.2.2 填空题

【例 5.35】 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\frac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\cos\frac{n\pi}{n}}\right)=$______。

解 应填 $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$。由定积分定义可求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\frac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\cos\frac{n\pi}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\cos\frac{k\pi}{n}}\cdot\frac{\pi}{n}\right)\cdot\frac{1}{\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos u\mathrm{d}u=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$

【例 5.36】 设曲线的极坐标方程为 $r=\mathrm{e}^{a\theta}(a>0)$，则该曲线上相应于从 0 变到 2π 的一段与极轴所围成的图形的面积为______。

解 应填 $\frac{1}{4a}(\mathrm{e}^{4a\pi}-1)$。由面积公式 $S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta$ 和题设条件得

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{2a\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{4a}\mathrm{e}^{2a\theta}\Big|_0^{2\pi}=\frac{1}{4a}(\mathrm{e}^{4a\pi}-1)$$

【例 5.37】 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $f(x)=x+2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$，则 $f(x)=$______。

解 应填 $x-1$。设 $A=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$，则 $f(x)=x+2A$，且有 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+2A$，即

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

故 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}$，所以 $f(x)=x-1$。

【例 5.38】 若 $f(x)=\frac{1}{x^2+1}+\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$______。

解 应填 $\frac{\pi}{4-\pi}$。由题设令 $A=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，则有

$$f(x)=\frac{1}{x^2+1}+A\sqrt{1-x^2}$$

所以
$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x+A\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}(1+A)$$

因此
$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4-\pi}$$

【例 5.39】 $\int_{-1}^{1}(x+\sqrt{1-x^2})^2\mathrm{d}x=$______。

解 应填 2。由积分区间的对称性与被积函数的奇偶性得

$$\int_{-1}^{1}(x+\sqrt{1-x^2})^2\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}(x^2+2x\sqrt{1-x^2}+1-x^2)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}(1+2x\sqrt{1-x^2})\mathrm{d}x=2\int_0^1\mathrm{d}x=2$$

【例 5.40】 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+\sin^2 x)\cos^2 x\mathrm{d}x=$______。

解 应填$\frac{\pi}{8}$。因

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+\sin^2 x)\cos^2 x\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\sin^2 x\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\sin^2 x\mathrm{d}x$$
$$=2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{8}$$

【例 5.41】 $\int_{-2}^{2}\frac{x+|x|}{2+x^2}\mathrm{d}x=$______。

解 应填$\ln 3$。因

$$\int_{-2}^{2}\frac{x+|x|}{2+x^2}\mathrm{d}x=2\int_0^2\frac{x}{2+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^2\frac{1}{2+x^2}\mathrm{d}(x^2+2)=\ln 3$$

【例 5.42】 $\int_0^4 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=$______。

解 应填$2(\mathrm{e}^2+1)$。因

$$\int_0^4 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\xlongequal{t=\sqrt{x}}\int_0^2 2t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=2[t\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^t]_0^2=2(\mathrm{e}^2+1)$$

【例 5.43】 $\int_0^1 x\sqrt{1-x}\mathrm{d}x=$______。

解 应填$\frac{4}{15}$。因

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x}\mathrm{d}x\xlongequal{t=\sqrt{1-x}}\int_0^1(1-t^2)(-2t^2)\mathrm{d}t=\frac{4}{15}$$

【例 5.44】 $\int_0^{\pi} t\sin t\mathrm{d}t =$______。

解 应填π。因

$$\int_0^{\pi} t\sin t\mathrm{d}t = -t\cos t\big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\mathrm{d}(\sin t) = \pi$$

【例 5.45】 曲线 $y=\int_0^x (t-1)(t-2)\mathrm{d}t$ 在 $(0,0)$ 处的切线方程是______。

解 应填 $y=2x$。由 $y'=(x-1)(x-2)$，故曲线在点 $(0,0)$ 处的切线的斜率为 $y'(0)=2$，所以曲线 $y=\int_0^x (t-1)(t-2)\mathrm{d}t$ 在 $(0,0)$ 处的切线方程是 $y=2x$。

【例 5.46】 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{\cos 3x} f(t)\mathrm{d}t =$______。

解 应填 $-3\sin 3xf(\cos 3x)$。因

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{\cos 3x} f(t)\mathrm{d}t = f(\cos 3x)(\cos 3x)' = -3\sin 3xf(\cos 3x)$$

【例 5.47】 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \sin(x-t)^2\mathrm{d}t =$______。

解 应填 $\sin x^2$。因

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \sin(x-t)^2\mathrm{d}t \xlongequal{令u=x-t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \sin u^2\mathrm{d}u = \sin x^2$$

【例 5.48】 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)} =$______。

解 应填 $\dfrac{1}{2}\ln 2$。因

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)} = \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x} - \int_1^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+1)} = \left[\ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{2}\ln 2$$

【例 5.49】 由曲线 $y=\ln x$ 与两直线 $y=(\mathrm{e}+1)-x$ 及 $y=0$ 所围成的平面图形的面积是______。

解 应填 $\dfrac{3}{2}$。由定积分的几何意义知，三曲线的交点分别为 $(\mathrm{e},1),(1,0),(\mathrm{e}+1,0)$，由曲线 $y=\ln x$ 与两直线 $y=(\mathrm{e}+1)-x$ 及 $y=0$ 所围成的平面图形的面积是

$$S=\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\mathrm{d}x + \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}+1}(\mathrm{e}+1-x)\mathrm{d}x = \frac{3}{2}$$

或

$$S=\int_0^1(\mathrm{e}+1-y-\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y = \frac{3}{2}$$

【例 5.50】 曲线 $y=xe^x$ 与直线 $y=ex$ 所围成的平面图形的面积是______。

解 应填 $\frac{e}{2}-1$。由定积分的几何意义知，二曲线的交点分别为 $(0,0),(1,e)$，曲线 $y=xe^x$ 与直线 $y=ex$ 所围成的平面图形的面积是

$$S=\int_0^1(ex-xe^x)dx=\frac{e}{2}-1$$

【例 5.51】 位于曲线 $y=xe^{-x}(0\le x<+\infty)$ 下方，x 轴上方的无界图形的面积是______。

解 应填 1。因

$$S=\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx=-\int_0^{+\infty}xde^{-x}=-\left[\frac{x}{e^x}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=1$$

【例 5.52】 函数 $y=x^2\big/\sqrt{1-x^2}$ 在区间 $[1/2,\sqrt{3}/2]$ 上的平均值为______。

解 应填 $\frac{\sqrt{3}+1}{12}\pi$。令 $x=\sin t$，则 $dx=\cos t dt$，由平均值公式得

$$\bar{y}=\frac{1}{b-a}\int_a^b ydx=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2}{\sqrt{3}-1}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=\frac{\sqrt{3}+1}{12}\pi$$

【例 5.53】 质点以速度 $t\sin t^2$ m/s 作直线运动,则从时刻 $t_1=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ s 到 $t_2=\sqrt{\pi}$ s 内质点所经过的路程等于______m。

解 应填 $\frac{1}{2}$。由积分的物理意义知，质点所经过的路程为

$$S=\int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\pi}}t\sin t^2dt=\frac{1}{2}$$

【例 5.54】 若函数 $f(t)$ 可微，且 $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=1$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+2}t\sin\frac{3}{t}\cdot f(t)dt=$______。

解 应填 6。根据积分中值定理，有

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+2}t\sin\frac{3}{t}\cdot f(t)dt=\lim_{x\to+\infty}\xi\sin\frac{3}{\xi}\cdot f(\xi)\cdot 2=6\lim_{\xi\to+\infty}\frac{\sin\frac{3}{\xi}}{\frac{3}{\xi}}\cdot f(\xi)=6$$

【例 5.55】 $I=\int_{-1}^1\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+e^{1/x}}\right)dx=$______。

解　应填$\dfrac{2}{1+\mathrm{e}}$。因

$$I=\left(\int_0^1+\int_{-1}^0\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+\mathrm{e}^{1/x}}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{1/x}}\bigg|_{-1}^{0}+\frac{1}{1+\mathrm{e}^{1/x}}\bigg|_{0}^{1}=\frac{2}{1+\mathrm{e}}$$

【例 5.56】　设θ是常数，$\forall x>0$，若$\int_0^x \ln t\mathrm{d}t=x\ln\left(\dfrac{\theta x}{2}\right)$，则$\theta=$______。

解　应填$\dfrac{2}{\mathrm{e}}$。由$\int_0^x \ln t\mathrm{d}t=x\ln\left(\dfrac{\theta x}{2}\right)$两边对$x$求导，得

$$\ln x=\ln\left(\frac{\theta x}{2}\right)+x\frac{\theta/2}{\theta x/2}\Rightarrow \ln\frac{2x}{\theta x}=\ln\frac{2}{\theta}=1\Rightarrow\theta=\frac{2}{\mathrm{e}}$$

【例 5.57】　设曲线$x=\int_1^t\dfrac{\cos u}{u}\mathrm{d}u, y=\int_1^t\dfrac{\sin u}{u}\mathrm{d}u$，则自原点到此曲线右边第一条垂直于$x$轴的切线之间的弧长=______。

解　应填$\ln\dfrac{\pi}{2}$。令$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\tan t=\infty$，得$t=\dfrac{\pi}{2}$，则所求弧长为

$$\int_1^{\pi/2}\sqrt{x'^2+y'^2}\mathrm{d}t=\int_1^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}t}{t}=\ln\frac{\pi}{2}$$

【例 5.58】　积分$\int_{-2}^2\left(x^3\cos\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}\right)\sqrt{4|x|-x^2}\mathrm{d}x=$______。

解　应填π。由奇偶函数的积分性质得

$$\int_{-2}^2\left(x^3\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{4|x|-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^2\sqrt{4x-x^2}\mathrm{d}x=\pi$$

【例 5.59】　设$f'(\ln x)=1+x$，则$\int_0^{\frac{1}{2}}f'(2x)\mathrm{d}x=$______。

解　应填$\dfrac{\mathrm{e}}{2}$。令$u=\ln x$，则$f'(u)=1+\mathrm{e}^u$，$f'(x)=1+\mathrm{e}^x$，得$f(x)=x+\mathrm{e}^x+C$。令$t=2x$，则

$$\int_0^{\frac{1}{2}}f'(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 f'(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}[f(1)-f(0)]=\frac{\mathrm{e}}{2}$$

【例 5.60】　设$f(x)$为连续函数，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t}{\ln\cos x}=$______。

解　应填$-f(0)$。因

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t}{\ln\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{-\frac{1}{2}x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{-x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{-1}=-f(0)$$

【例 5.61】 设 $f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}[nf(n)+nf(n-2)]^n=$______。

解 应填e。因

$$f(n)+f(n-2)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}x(1+\tan^2 x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}x\,\mathrm{d}(\tan x)=\frac{1}{n-1}$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}[nf(n)+nf(n-2)]^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{(n-1)\cdot\frac{n}{n-1}}=\mathrm{e}$$

5.2.3 综合训练题

【例 5.62】 求下列数列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$；

（2）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)>0$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n-1}{n}\right)f(1)}$；

（3）设有等分区间 $[a,b]$（$a>0$）分点为：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，$\Delta x=\frac{b-a}{n}$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}$。

解 凡每一项均可提出 $\frac{1}{n}$，而余下部分可用通式写成 n 项和的形式，一般采用定积分定义求解。

（1）由对数恒等式可得

$$原极限=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)}=\mathrm{e}^{\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{\int_1^2\ln u\mathrm{d}u}=\mathrm{e}^{(2\ln 2-1)}$$

（2）由对数恒等式可得

$$原极限=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\ln f\left(\frac{1}{n}\right)+\ln f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln f\left(\frac{n-1}{n}\right)+\ln f(1)\right]}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln f\left(\frac{i}{n}\right)}\cdot\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln f(1)}{n}}=\mathrm{e}^{\int_0^1\ln f(x)\mathrm{d}x}$$

（3）由对数恒等式有

$$原极限=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln x_k}$$

由已知得 $x_k = a + k\Delta x = a + k\dfrac{b-a}{n}$，于是

$$原极限 = \mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left[a+\frac{k}{n}(b-a)\right]^{\frac{1}{n}}} = \mathrm{e}^{\int_0^1 \ln[a+(b-a)x]\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{\frac{1}{b-a}\int_0^1 \ln[a+(b-a)x]\mathrm{d}[a+(b-a)x]}$$

$$= \mathrm{e}^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln u\mathrm{d}u} = \mathrm{e}^{\frac{1}{b-a}[b\ln b - a\ln a-(b-a)]} = \frac{1}{\mathrm{e}}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}}$$

【例 5.63】 求下列数列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$ （$\alpha>0$）

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}\right)$

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi}{n}\left(\cos\dfrac{\pi}{4n}+\cos\dfrac{3\pi}{4n}+\cdots+\cos\dfrac{2n-1}{4n}\pi\right)$

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

（5）$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right]$

解　（1）

$$\frac{1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}} = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha+\left(\frac{2}{n}\right)^\alpha+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^\alpha\right]$$

现将变形后的式子看作是函数 x^α 在 $[a,b]$ 上的积分和

$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[a+\frac{i(b-a)}{n}\right]^\alpha$$

比较这两个式子容易看出 $a=0, b=1$，所以

$$原式 = \int_0^1 x^\alpha\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}$$

（2）

$$\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}$$

现将其看作是函数 $\dfrac{1}{1+x}$ 在 $[0,1]$ 上的积分和，故

$$原式 = \int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = \ln 2$$

(3)
$$\frac{\pi}{n}\left(\cos\frac{\pi}{4n}+\cos\frac{3\pi}{4n}+\cdots+\cos\frac{2n-1}{4n}\pi\right)=2\cdot\frac{\pi}{2n}\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{2i-1}{4n}\pi$$
$$=2\cdot\frac{\pi/2}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{2i-1}{4n}\pi$$

现将其看作是函数$2\cos x$在$[0,\pi/2]$上的积分和。于是

$$原式=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x=2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2$$

(4)
$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\sqrt[n]{\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{3}{n}\cdots\frac{n}{n}}=\mathrm{e}^{\ln\sqrt[n]{\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{3}{n}\cdots\frac{n}{n}}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{i}{n}\right)}$$

其中可将$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{i}{n}\right)$看作$\ln x$在$[0, 1]$上的积分和，故原式$=\mathrm{e}^{\int_0^1\ln x\mathrm{d}x}$，其中

$$\int_0^1\ln x\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0}\left[x\ln x\Big|_\varepsilon^1-\int_\varepsilon^1\mathrm{d}x\right]=-1$$

故
$$原式=\frac{1}{\mathrm{e}}$$

(5)
$$\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}<\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\pi\right)$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$$
$$\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}>\frac{1}{n+1}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\pi\right)$$
$$=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$$

故原极限为$\frac{2}{\pi}$。

【例 5.64】 求$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_{\frac{1}{x}}^{1}\frac{\cos 2t}{4t^2}\mathrm{d}t$。

解 因为$\cos 2t=1-\frac{1}{2!}(2t)^2+o(t^2)$，所以$1-2t^2\le\cos 2t\le 1$。

因考虑的是$x\to\infty$的极限，不妨设$x>1$，于是有

$$\int_{\frac{1}{x}}^{1}\frac{1-2t^2}{4t^2}\mathrm{d}t \le \int_{\frac{1}{x}}^{1}\frac{\cos 2t}{4t^2}\mathrm{d}t \le \int_{\frac{1}{x}}^{1}\frac{1}{4t^2}\mathrm{d}t$$

即
$$-\frac{3}{4x}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2x^2} \le \int_{\frac{1}{x}}^{1}\frac{\cos 2t}{4t^2}\mathrm{d}t \le -\frac{1}{4x}+\frac{1}{4}$$

上式利用夹逼定理，知原式$=\frac{1}{4}$。

【例 5.65】 求极限：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n} x\mathrm{d}x$$

解 令$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n} x\mathrm{d}x$，则由分部积分法可导出递推公式

$$I_n=\frac{1}{2n-1}-I_{n-1}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n-3}+I_{n-2} \Rightarrow I_n-I_{n-2}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n-3}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}I_{2n+1}&=\lim_{n\to\infty}[(I_3-I_1)+(I_5-I_3)+\cdots+(I_{2n+1}-I_{2n-1})]+I_1\\&=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\right]+I_1\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}-1+I_1=\arctan 1-\frac{\pi}{4}=0\end{aligned}$$

因为$\lim_{n\to\infty}I_n=0$，故原式$=0$。

【例 5.66】 求下列极限：

（1）$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+1}x^2\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$； （2）$\lim_{n\to+\infty}\int_x^{x+a}\frac{\ln^n t}{t+2}\mathrm{d}t$（$a>0$，$n$为自然数）。

解 （1）由积分中值定理，有

$$\int_n^{n+1}x^2\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\xi^2\mathrm{e}^{-\xi^2}\quad（n\le\xi\le n+1）$$

两边取$n\to\infty$的极限得

$$原式=\lim_{\xi\to\infty}\xi^2\mathrm{e}^{-\xi^2}=\lim_{\xi\to\infty}\frac{\xi^2}{e^{\xi^2}}=\lim_{\xi\to\infty}\frac{2\xi}{2\xi\mathrm{e}^{\xi^2}}=0$$

（2）利用积分中值定理，有

$$\int_x^{x+a}\frac{\ln^n t}{t+2}\mathrm{d}t=a\frac{\ln^n\xi}{\xi+2}，\quad x\le\xi\le x+a$$

等式两边取$x\to+\infty$的极限得

$$原式=\lim_{\xi\to+\infty}\frac{a\ln^n\xi}{\xi+2}=a\lim_{\xi\to+\infty}\frac{n\ln^{n-1}\xi}{\xi}=a\lim_{\xi\to+\infty}\frac{n(n-1)\ln^{n-2}\xi}{\xi}=\cdots=a\lim_{\xi\to+\infty}\frac{n!}{\xi}=0$$

【例 5.67】 利用 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x=0$ 与 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x=0$（其中 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数）求下列极限：

（1）$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_0^a\frac{\cos^2\lambda x}{1+x}\mathrm{d}x$；　　（2）$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\lambda x\mathrm{d}x$。

解 （1）因 $\frac{1}{1+x}$ 在区间 $[0,a]$ 上有连续导数，所以

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^a\frac{\cos^2\lambda x}{1+x}\mathrm{d}x&=\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^a\frac{\cos^2\lambda x+1}{2(1+x)}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\lim_{c\to+\infty}\int_0^a\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x+\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^a\frac{1}{2(1+x)}\cos^2\lambda x\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\ln(1+a)+0=\frac{1}{2}\ln(1+a)\end{aligned}$$

（2）$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\lambda x\mathrm{d}x=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos^2\lambda x}{2}\mathrm{d}x=\pi-\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\cos^2\lambda x\mathrm{d}x=\pi$

【例 5.68】 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\tan t}\mathrm{d}t}{\int_0^{\tan x}\sqrt{\sin t}\mathrm{d}t}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-\int_0^{x^2}\cos(t^2)\mathrm{d}t}{\sin^{10}x}$；

（3）设 $f(x)=\int_{x^2}^{x}\frac{\sin(xt)}{t}\mathrm{d}t$，求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}$；

（4）设 $f'(x)$ 连续，$f(0)=0$，$f'(0)\neq0$，求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}f(t)\mathrm{d}t}{x^2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$；

（5）已知 $f(x)$ 是在 $x=12$ 的邻域内的可导函数，且 $\lim\limits_{x\to12}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to12}=f'(x)=999$，求 $\lim\limits_{x\to12}\frac{\int_{12}^{x}\left[t\int_x^{12}f(\theta)\mathrm{d}\theta\right]\mathrm{d}t}{(12-x)^3}$。

解 （1）由罗必达法则，得

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{\cos x\sqrt{\tan(\sin x)}}{\sec^2x\sqrt{\sin(\tan x)}}=\lim_{x\to0^+}\cos^3x\cdot\lim_{x\to0^+}\sqrt{\frac{\tan(\sin x)}{\sin(\tan x)}}=\lim_{x\to0^+}\sqrt{\frac{\sin x}{\tan x}}=\lim_{x\to0}\sqrt{\frac{x}{x}}=1$$

（2）由罗必达法则，有

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{2x-2x\cos x^4}{10x^9}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^4}{5x^8}\overset{令u=x^4}{=\!=\!=}\lim_{u\to 0}\frac{1-\cos u}{5u^2}=\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{10u}=\frac{1}{10}$$

（3）因 $$\left(\int_{x^2}^{x}\frac{\sin(xt)}{t}\mathrm{d}t\right)'\overset{令u=tx}{=\!=\!=}\left(\int_{x^3}^{x^2}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u\right)'=2x\frac{\sin x^2}{x^2}-\frac{\sin x^3}{x^3}\cdot 3x^2$$

$$=\frac{2\sin x^2}{x}-3\frac{\sin x^3}{x}$$

故 $$原式=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x^2-3\sin x^3}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{4x\cos x^2-9x^2\cos x^3}{4x}=1$$

（4）由罗必达法则，有

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{2xf(x^2)}{2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+x^2f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2f(x^2)}{2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{4xf'(x^2)}{3f(x)+xf'(x)}$$

因题设中并未言明 $f''(x)$ 存在，故不能再用罗必达法则，于是由导数定义有

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{4f'(x^2)}{3\dfrac{f(x)-f(0)}{x}+f'(x)}=\frac{4f'(0)}{3f'(0)+f'(0)}=1$$

（5）由罗必达法则，有

$$原式=\lim_{x\to 12}\frac{x\int_x^{12}f(\theta)\mathrm{d}\theta}{-3(12-x)^2}=\lim_{x\to 12}\frac{\int_x^{12}f(\theta)\mathrm{d}\theta-xf(x)}{6(12-x)}$$

$$=\lim_{x\to 12}\frac{-2f(x)-xf'(x)}{-6}=2\times 999=1998$$

【例 5.69】 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\int_0^x\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^3+5x^2+2}}\mathrm{d}x}{\ln x}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x(1+t^2)\mathrm{e}^{t^2-x^2}\mathrm{d}t$。

解 （1）因 $$\lim_{x\to +\infty}x^p\frac{1}{\sqrt[3]{x^3+5x^2+2}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^p}{x\sqrt[3]{1+\dfrac{5}{x}+\dfrac{2}{x^3}}}\overset{取p=1}{=\!=\!=}1$$

由广义积分敛散性判别法可知，$\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^3+5x^2+2}}$ 发散且趋于 $+\infty$，于是

$$原极限=\lim_{x\to +\infty}\frac{1/\sqrt[3]{x^3+5x^2+2}}{1/x}=1$$

（2） 原极限$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x(1+t^2)e^{t^2}dt}{xe^{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1+x^2)e^{x^2}}{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x^2}{1+2x^2}=\dfrac{1}{2}$

【例 5.70】 设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导，且$f'(x)>0$。若极限$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(2x-a)}{x-a}$存在，证明：

（1）在(a,b)内$f(x)>0$；

（2）在(a,b)内存在点ξ，使$\dfrac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)dx}=\dfrac{2\xi}{f(\xi)}$；

（3）在(a,b)内存在与(2)中ξ相异的点η，使$f'(\eta)(b^2-a^2)=\dfrac{2\xi}{\xi-a}\int_a^b f(x)dx$。

证 （1）因为$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(2x-a)}{x-a}$存在，故$\lim\limits_{x\to a^+}f(2x-a)=f(a)=0$。又$f'(x)>0$，于是$f(x)$在$(a,b)$内单调增加，故$f(x)>f(a)=0, x\in(a,b)$。

（2）设$F(x)=x^2$，$g(x)=\int_a^x f(t)dt\ \ (a\le x\le b)$，则$g'(x)=f(x)>0$，故$F(x),g(x)$满足柯西中值定理的条件，于是在$(a,b)$内存在点$\xi$，使

$$\frac{F(b)-F(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(t)dt-\int_a^a f(t)dt}=\frac{(x^2)'}{(\int_a^x f(t)dt)'}\Big|_{x=\xi}\Rightarrow\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)dx}=\frac{2\xi}{f(\xi)}$$

（3）因$f(\xi)=f(\xi)-f(0)=f(\xi)-f(a)$，在$[a,\xi]$上应用拉格朗日中值定理，可知在$(a,\xi)$内存在一点$\eta$，使$f(\xi)=f'(\eta)(\xi-a)$，从而由（2）的结论得

$$\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)dx}=\frac{2\xi}{f'(\eta)(\xi-a)}\Rightarrow f'(\eta)(b^2-a^2)=\frac{2\xi}{\xi-a}\int_a^b f(x)dx$$

【例 5.71】 设函数$f(x)$在$x>0$处可微，若$f(x)$满足$f(x)=1+\dfrac{1}{x}\int_1^x f(t)dt$，求$f(x)$。

解 将原式变形，得

$$x[f(x)-1]=\int_1^x f(t)dt\Rightarrow[f(x)-1]+xf'(x)=f(x)$$

所以$xf'(x)=1$，即$f'(x)=\dfrac{1}{x}$，故$f(x)=\ln x+C$。

【例 5.72】 已知$f(x)=\int_1^x\dfrac{\ln(1+t)}{t}dt$（$x>0$），求$f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$。

解 设$g(x)=f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\int_1^x\dfrac{\ln(1+t)}{t}dt+\int_1^{\frac{1}{x}}\dfrac{\ln(1+t)}{t}dt$，则

$$g'(x)=\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{\ln x}{x}$$

得
$$g(x)=\int\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln^2 x+C$$

由 $g(1)=0$ 得 $C=0$，所以 $g(x)=\frac{1}{2}\ln^2 x$，故 $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}\ln^2 x$。

【例 5.73】 求满足方程 $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=x+\int_0^x tf(x-t)\,\mathrm{d}t$ 的可微函数 $f(x)$ 的表达式。

解 $\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t\xlongequal{令u=x-t}\int_x^0(x-u)f(u)(-\mathrm{d}u)=x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u$

于是原式变成
$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=x+x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u$$

两边对 x 求导得
$$f(x)=1+\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+xf(x)-xf(x)=1+\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$$

再对 x 求导得 $f'(x)=f(x)$，积分可得 $f(x)=C\mathrm{e}^x$。由 $f(0)=1$ 得 $C=1$。故所求函数为 $f(x)=\mathrm{e}^x$。

【例 5.74】 设 $f(x)$ 在 $x>0$ 时连续，$f(1)=3$，并且

$$\int_0^{xy}f(t)\mathrm{d}t=x\int_1^y f(t)\mathrm{d}t+y\int_1^x f(t)\mathrm{d}t\quad（x>0,y>0）$$

求 $f(x)$ 的表达式。

解 将原式两端对 y 求导得 $xf(xy)=xf(y)+\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$。

令 $y=1$，已知 $f(1)=3$，得 $xf(x)=3x+\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$。

对上式 x 求导，得 $f(x)+xf'(x)=3+f(x)$

故 $f'(x)=\frac{3}{x}$（$x>0$），则 $f(x)=3\ln x+C$。

令 $x=1$，由已知 $f(1)=3$ 得 $C=3$。

故所求函数为 $f(x)=3(1+\ln x)$。

【例 5.75】 设对于在 $x>0$ 上可微的函数 $f(x)$ 及其反函数 $g(x)$，满足方程 $\int_0^{f(x)}g(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\left(x^{\frac{3}{2}}-8\right)$，求 $f(x)$。

解 方程两边对 x 求导得 $g[f(x)]\cdot f'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x}$，即 $xf'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x}$，当 $x>0$ 时，有

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，积分得 $f(x)=\sqrt{x}+C$。

【例 5.76】 设 $f(0)=0$，$f'(x)=\int_0^x[f(t)+tf'(t)]\mathrm{d}t+x$，$f(x)$ 二阶可导，求 $f(x)$。

解 由题设显然 $f'(0)=0$，将方程两边对 x 求导得

$$f''(x)=f(x)+xf'(x)+1\Rightarrow[f'(x)-xf(x)]'=1\Rightarrow f'(x)-xf(x)=x+C_1$$

将 $f'(0)=0$ 代入，可得 $C_1=0$，则

$$f'(x)=(f(x)+1)x\Rightarrow\frac{\mathrm{d}[f(x)+1]}{f(x)+1}=x\Rightarrow\ln[f(x)+1]=\frac{1}{2}x^2+\ln C_2\Rightarrow f(x)+1=C_2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}$$

将 $f(0)=0$ 代入可得 $C_2=1$，故 $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}-1$。

【例 5.77】 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $f(x)=x+2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$，求 $f(x)$。

解 令 $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=A$，则 $f(x)=x+2A$，于是两端在 $[0,1]$ 上积分。得

$$A=\int_0^1(x+2A)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+2A\Rightarrow A=-\frac{1}{2}$$

故

$$f(x)=x-1$$

【例 5.78】 已知函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续且满足 $f(x)=3x-\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f^2(t)\mathrm{d}t$，求 $f(x)$。

解 因 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，则 $\int_0^1 f^2(t)\mathrm{d}t$ 存在，令 $A=\int_0^1 f^2(t)\mathrm{d}t$，于是

$$f(x)=3x-A\sqrt{1-x^2}\Rightarrow f^2(x)=9x^2-6Ax\sqrt{1-x^2}+A^2(1-x^2)$$

又

$$A=\int_0^1 f^2(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=\int_0^1[(9-A^2)x^2-6Ax\sqrt{1-x^2}+A^2]\mathrm{d}x$$

$$=\left[\frac{1}{3}(9-A^2)x^3+A^2x\right]_0^1+2A(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=3+\frac{2}{3}A^2-2A$$

即

$$2A^2-9A+9=0\Rightarrow A=\frac{3}{2}\text{ 或 }A=3$$

故

$$f(x)=3x-\frac{3}{2}\sqrt{1-x^2}\text{ 或 }f(x)=3x-3\sqrt{1-x^2}$$

【例 5.79】 设 $f(x)$ 在（$-\infty,+\infty$）上连续，且对任意 x，有 $\int_x^{x+a}f(t)\mathrm{d}t=\alpha$，$\alpha$ 是不

为 0 的常数，试证：$f(x)$ 为周期函数。

证 令
$$F(x)=\int_{x}^{x+a}f(t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{x+a}f(t)\mathrm{d}t-\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t$$

则
$$F'(x)=f(x+a)-f(x)=0$$

即 $f(x+a)=f(x)$，由 x 的任意性，得 $f(x)$ 为周期函数。

【例 5.80】 设 $\phi(x)=\int_{0}^{x}tf(t)\mathrm{d}t\Big/\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t$，其中 $f(x)$ 为连续正值函数，证明：当 $x\geq 0$ 时，$\phi(x)$ 为增函数。

证 要证明 $\phi(x)$ 在 $x\geq 0$ 时为增函数，只要证明当 $x\geq 0$ 时，$\phi'(x)>0$ 即可。因为
$$\begin{aligned}\phi'(x)&=\left[\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{0}^{x}tf(t)\mathrm{d}t-\int_{0}^{x}tf(t)\mathrm{d}t\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t\right]\Big/\left[\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t\right]^2\\&=f(x)\left[x\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t-\int_{0}^{x}tf(t)\mathrm{d}t\right]\Big/\left[\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t\right]^2\end{aligned}$$

已知 $f(x)>0$，$\left[\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t\right]^2>0$，所以 $x>0$ 时，只要证明
$$F(x)=x\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t-\int_{0}^{x}tf(t)\mathrm{d}t>0$$

即可。因为
$$F'(x)=\left[x\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t-\int_{0}^{x}tf(t)\mathrm{d}t\right]'=\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t+xf(x)-xf(x)=\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t>0$$

故 $F(x)$ 为单调增加函数；又因为 $F(0)=0$，所以 $F(x)>F(0)=0$。所以 $\phi'(x)>0$。故 $\phi(x)$ 为增函数。

【例 5.81】 设 $f'(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，求 $\int_{0}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x$。

解
$$\begin{aligned}\int_{0}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x&=\frac{1}{3}x^3f(x)\Big|_0^{+\infty}-\frac{1}{3}\int_{0}^{+\infty}x^3f'(x)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{3}x^3f(x)\Big|_0^{+\infty}-\frac{1}{3}\int_{0}^{+\infty}x^3e^{-x^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{3}x^3f(x)\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{6}(x^2e^{-x^2}+e^{-x^2}-1)\Big|_0^{+\infty}\\&=-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\lim_{x\to+\infty}x^3f(x)\\&=-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{-3}}=-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{-3x^{-4}}\\&=-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x^2}}{-3x^{-4}}=-\frac{1}{6}\end{aligned}$$

【例 5.82】 利用定积分计算$\int_0^T (V_0+gt)\mathrm{d}t$，其中$V_0$和$g$为常数。

解 将$[0,T]$分为n等分，$\Delta t_k=\dfrac{T}{n}$，取$t_k=k\dfrac{T}{n}$（$k=0,1,\cdots,n-1$），则

$$\int_0^T (V_0+gt)\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}(V_0+gt_k)\Delta t_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(V_0+gk\frac{T}{n}\right)\frac{T}{n}$$
$$=V_0T+\lim_{n\to\infty}\frac{T^2}{n^2}\cdot g\cdot n\frac{(n-1)}{2}=V_0T+g\frac{T^2}{2}$$

【例 5.83】 计算$\int_1^4 \ln\frac{x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$。

解 令$\sqrt{x}=t$，当$x=1$时，$t=1$，当$x=4$时，$t=2$，则

$$原式=\int_1^2\frac{2\ln t}{t}2t\mathrm{d}t=\int_1^2 4\ln t\mathrm{d}t=4[t\ln t-t]_1^2=4(2\ln 2-1)$$

【例 5.84】 计算$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\ln\frac{1-x}{1+x}\mathrm{d}x$

解 因为被积函数为奇函数，且积分区间关于原点对称，故原式$=0$。

【例 5.85】 计算$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^4\theta+\mathrm{e}^{\theta^2}\sin^3\theta)\mathrm{d}\theta$。

解 因为$\cos^4\theta$为偶函数，$\mathrm{e}^{\theta^2}\sin^3\theta$为奇函数，且积分区间关于原点对称，故

$$原式=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta=2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{8}\pi$$

【例 5.86】 写出$f(x)=\int_0^1|t(t-x)|\mathrm{d}x$（$x\geq 0$）的非积分型表达式。

解 当$0\leq x\leq 1$时，$f(x)=-\int_0^x t(t-x)\mathrm{d}t+\int_x^1 t(t-x)\mathrm{d}t=\dfrac{2x^3-3x+2}{6}$

当$x>1$时，$f(x)=-\int_0^1 t(t-x)\mathrm{d}t=\dfrac{3x-2}{6}$

故
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^3-3x+2}{6} & (0\leq x\leq 1)\\[2mm] \dfrac{3x-2}{6} & (x>1)\end{cases}$$

【例 5.87】 已知$f(x)=\mathrm{e}^{-|x|}$，求$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，$x\in(-\infty,+\infty)$。

解 当$x \ge 0$时，$F(x)=\int_0^x e^{-t}dt = 1-e^{-x}$

当$x<1$时，$F(x)=e^x-1$

故
$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-x} & (x\ge 0)\\ e^x-1 & (x<0)\end{cases}$$

【例5.88】 设$\Phi(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+t} & t\ge 0\\ \dfrac{1}{1+e^t} & t<0\end{cases}$，求$\int_0^2\Phi(t-1)dt$。

解 令$u=t-1$，则

$$\int_0^2\Phi(t-1)dt=\int_{-1}^1\Phi(u)du=\int_{-1}^0\frac{du}{1+e^u}+\int_0^1\frac{du}{1+u}=[\ln(1+e^{-u})]_{-1}^0+[\ln(1+u)]_0^1=\ln(1+e)$$

【例5.89】 设$f''(x)$连续，$f(\pi)=1$，满足$\int_0^1[f(x)+f''(x)]\sin x dx=3$，求$f(0)$。

解 因

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(x)\sin x dx &= -\int_0^\pi f(x)d(\cos x)=[-f(x)\cos x]\Big|_0^\pi+\int_0^\pi f'(x)\cos x dx\\ &=f(\pi)+f(0)+\int_0^\pi f'(x)\cos x dx=f(\pi)+f(0)+\int_0^\pi f'(x)d(\sin x)\\ &=f(\pi)+f(0)+[f'(x)\sin x]\Big|_0^\pi-\int_0^\pi f''(x)\sin x dx\end{aligned}$$

所以
$$1+f(0)=\int_0^\pi[f(x)+f''(x)]\sin x dx=3\Rightarrow f(0)=2$$

【例5.90】 设函数$f(x)=\begin{cases}e^{-x} & x<0\\ x & x\ge 0\end{cases}$，求$F(x)=\int_{-1}^x f(t)dt$。

解 当$x<0$时，$F(x)=\int_{-1}^x e^{-t}dt=e-e^{-x}$

当$x\ge 0$时，$F(x)=\int_{-1}^0 e^{-t}dt+\int_0^x tdt=e-1+\dfrac{x^2}{2}$

所以
$$F(x)=\begin{cases}e-e^{-x} & x<0\\ e-1+\dfrac{x^2}{2} & x\ge 0\end{cases}$$

【例5.91】 试求$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}dx$。

解 被积函数$f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}$，由于积分区间关于$x=0$对称，可利用公式

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x$$

因为 $$f(x)+f(-x)=\frac{\sin^2 x}{1+\mathrm{e}^{-x}}+\frac{\sin^2 x}{1+\mathrm{e}^{x}}=\sin^2 x\left(\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}+\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\right)=\sin^2 x$$

所以 $$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi-2}{8}$$

【例 5.92】 求 $I=\int_{-\pi}^{5\pi}(\cos x\cos 2x\cos 3x+\sin x\sin 2x\sin 3x)\mathrm{d}x$。

解 这里是三个余弦、正弦函数的连乘积之和的积分，用积化和差计算较麻烦，若能化为对称区间上的积分，再考虑函数的奇偶性，可能会简化运算。

由于被积函数以 2π 为周期，积分区间长度为 3 个周期，按公式

$$\int_a^{a+nT} f(x)\mathrm{d}x=n\int_c^{T+c} f(x)\mathrm{d}x$$

得 $$I=3\int_{-\pi}^{\pi}(\cos t\cos 2t\cos 3t+\sin t\sin 2t\sin 3t)\mathrm{d}t$$

显然 $$\int_{-\pi}^{\pi}\sin t\sin 2t\sin 3t\mathrm{d}t=0$$

并有 $$\begin{aligned}I&=6\int_0^{\pi}\cos t\cos 2t\cos 3t\mathrm{d}t=3\int_0^{\pi}\cos t(\cos 5t+\cos t)\mathrm{d}t\\&=3\int_0^{\pi}(\cos t\cos 5t+\cos t^2)\mathrm{d}t\\&=\frac{3}{2}\int_0^{\pi}(\cos 6t+\cos 4t+\cos 2t+1)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

而 $$\int_0^{\pi}(\cos 6t+\cos 4t+\cos 2t)\mathrm{d}t=0$$

因此 $$I=\frac{3}{2}\int_0^{\pi}\mathrm{d}t=\frac{3}{2}\pi$$

【例 5.93】 计算 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\sin x}{x^8+1}+\sqrt{\ln^2(1-x)}\right]\mathrm{d}x$。

解 被积式中 $\frac{\sin x}{x^8+1}$ 是奇函数，在对称区间 $[-1/2,1/2]$ 上定积分为零，因此

$$\text{原式}=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{\ln^2(1-x)}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|\ln(1-x)|\mathrm{d}x=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\ln(1-x)\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{1}{2}}\ln(1-x)\mathrm{d}x$$

而 $$\begin{aligned}\int\ln(1-x)\mathrm{d}x&=x\ln(1-x)+\int\frac{x}{1-x}\mathrm{d}x=x\ln(1-x)-x-\ln(1-x)+C\\&=(x-1)\ln(1-x)-x+C\end{aligned}$$

记 $$F(x)=(x-1)\ln(1-x)-x+C$$

故 $$\text{原式}=2F(0)-F\left(-\frac{1}{2}\right)-F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}(3\ln 3-4\ln 2)$$

【例 5.94】 计算 $\int_0^a \arctan\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\mathrm{d}x$（$a>0$）。

解 解法较多，请读者比较以下解法的简繁，从中体会在计算积分前，应首先分析采用哪种方法更合适。

方法 1：用分部积分法。令 $\omega(x)=\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$，则 $\omega(a)=0$，选择 $u=\arctan\omega(x)$，则 $\mathrm{d}v=\mathrm{d}x$，于是 $v=x$，得

$$\mathrm{d}u=\frac{\omega'\mathrm{d}x}{1+\omega^2}=\frac{-\mathrm{d}x}{2\sqrt{a^2-x^2}}$$

故 $$\text{原式}=x\arctan\omega(x)\Big|_0^a-\int_0^a x\frac{\omega'\mathrm{d}x}{1+\omega^2}=\int_0^a\frac{x\mathrm{d}x}{2\sqrt{a^2-x^2}}$$
$$=-\frac{1}{4}\int_0^a\frac{\mathrm{d}(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}\Big|_0^a=\frac{a}{2}$$

方法 2：用换元法和分部积分法。令 $x=a\cos t$（$0\le t\le\frac{\pi}{2}$），得

$$\arctan\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}=\arctan\sqrt{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}}=\frac{t}{2}$$

则 $$\text{原式}=a\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{t}{2}\mathrm{d}(\cos t)=a\frac{t}{2}\cos t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^0+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a}{2}\cos t\mathrm{d}t=\frac{a}{2}\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a}{2}$$

方法 3：令 $t=\arctan\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$，即 $\tan t=\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$。当 $x=0$ 时，$t=\frac{\pi}{4}$；当 $x=a$ 时，$t=0$。

又 $$\cos 2t=\frac{1-\tan^2 t}{1+\tan^2 t}=\frac{1-\frac{a-x}{a+x}}{1+\frac{a-x}{a+x}}=\frac{x}{a}$$

所以 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}(a\cos 2t)$，故

$$\text{原式}=\int_{\frac{\pi}{4}}^0 t\mathrm{d}(a\cos 2t)=at\cos 2t\Big|_{\frac{\pi}{4}}^0+a\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2t\mathrm{d}t=\frac{a}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{a}{2}$$

【例 5.95】 设 $f''(1)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=0$，记 $\varphi(x)=\int_0^1 f'[1+(x-1)t]\mathrm{d}t$，求 $\varphi(x)$ 在

$x=1$某个邻域内的导数，并讨论$\varphi'(x)$在$x=1$处的连续性。

解 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=0\Rightarrow f(1)=0, f'(1)=0$

$$\Rightarrow\varphi(x)=\int_0^{x-1}\frac{1}{x-1}f'(1+u)\mathrm{d}u=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{f(x)}{x-1}, x\neq1$$

易知 $\varphi(1)=0, \varphi'(x)=\dfrac{f'(x)}{x-1}-\dfrac{f(x)}{(x-1)^2}, x\neq1$

$$\Rightarrow\varphi'(1)=\lim_{x\to1}\frac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\varphi(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{2(x-1)}=\frac{1}{2}f''(1)$$

故$\lim\limits_{x\to1}\varphi'(x)=f''(1)-\dfrac{1}{2}f''(1)=\dfrac{1}{2}f''(1)\Rightarrow\varphi'(x)$在$x=1$处连续。

【例 5.96】 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上存在连续导数，则$f(x)$是偶函数的充分必要条件是$f'(x)$为奇函数。

证 **必要性**：设$f(x)$为偶函数，则对任意$-x\in(-\infty,+\infty)$，根据题义有

$$f'(-x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(-x+\Delta x)-f(-x)}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{-\Delta x}=-f'(x)$$

即$f'(x)$为$(-\infty,+\infty)$上的奇函数。

充分性：设$f'(x)$为$(-\infty,+\infty)$上的奇函数，则对任意$x\in(-\infty,+\infty)$，由牛顿-莱布尼兹公式有

$$f(x)=\int_0^x f'(\xi)\mathrm{d}\xi+f(0)$$

$$f(-x)=\int_0^{-x}f'(\xi)\mathrm{d}\xi+f(0)=-\int_0^x f'(-y)\mathrm{d}y+f(0)=\int_0^x f'(y)\mathrm{d}y+f(0)$$

则$f(-x)=f(x)$。故$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上偶函数。

【例 5.97】 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(x)\neq0$，证明：方程$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_b^x\dfrac{\mathrm{d}t}{f(t)}=0$在$(a,b)$内有且只有一个根。

证 令$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_b^x\dfrac{\mathrm{d}t}{f(t)}$，显然$F(x)$在$[a,b]$上连续，不妨设$f(x)>0$，则

$$F(a)=\int_b^a\frac{\mathrm{d}t}{f(t)}<0,\quad F(b)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t>0$$

由零点定理知，在(a,b)内至少存在一点ξ，使$F(\xi)=0$。即方程$F(x)=0$在(a,b)内至少存在一个根。又

$$F'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}=\frac{f^2(x)+1}{f(x)}\geq\frac{2f(x)}{f(x)}=2$$

可知在$[a,b]$上$F(x)$单调增加，故$F(x)=0$在(a,b)内只有一个根。

当$f(x)<0$时，可类似证此结论。

【例 5.98】 已知$\varphi(x)$为连续函数，令

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x\left[(t-1)\int_0^{t^2}\phi(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t}{\ln(1+x^2)} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

试讨论函数$f(x)$在$x=0$处的连续性与可微性。

解 先讨论$f(x)$的连续性，利用$\ln(1+x^2)\sim x^2$及洛必达法则，可知

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left[(t-1)\int_0^{t^2}\varphi(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)\int_0^{x^2}\varphi(u)\mathrm{d}u}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\int_0^{x^2}\varphi(u)\mathrm{d}u}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x\varphi(x^2)}{2}=0=f(0)$$

所以$f(x)$在$x=0$处连续。

再讨论$f(x)$的可微性，也利用$\ln(1+x^2)\sim x^2$及罗必达法则，可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left[(t-1)\int_0^{t^2}\varphi(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)\int_0^{x^2}\varphi(u)\mathrm{d}u}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\int_0^{x^2}\varphi(u)\mathrm{d}u}{3x^2}$$

$$=-\frac{1}{3}\varphi(0)$$

故$f'(0)=-\dfrac{1}{3}\varphi(0)$，即$f(x)$在$x=0$处可微。

【例 5.99】 求$\phi(x)=\int_0^{x^2}(1-t)\arctan t\mathrm{d}t$的极值点。

解 按求函数极值的步骤，先求驻点，

$$\phi'(x)=(1-x^2)\arctan x^2\cdot 2x$$

令$\phi'(x)=0$，得驻点$x_1=1, x_2=-1, x_3=0$。

为确定这些驻点是否为极值点，可考察$\phi'(x)$的符号，有

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
$\phi'(x)$	+	−	+	−

因此，$x=\pm1$是极大值点，$x=0$是极小值点。

【例 5.100】 设$f(x)$在$[0,2]$上连续，在$(0,2)$内具有二阶导数，且$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln[2+f(x)]}{\cos(\pi x/2)}=0$，$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=f(2)$，试证：$\exists\xi\in(0,2)$，使$f'(\xi)+f''(\xi)=0$。

证 由$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln[2+f(x)]}{\cos(\pi x/2)}=0$，可得$f(1)=-1$，且

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)+1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\ln[2+f(x)]}{\cos\frac{\pi x}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{x-1}=0$$

又由 $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=f(2)\Rightarrow\exists\xi_1\in(1,2),f(\xi_1)=f(2)\Rightarrow\exists\xi_2\in(\xi_1,2),f'(\xi_2)=0$

令$F(x)=\mathrm{e}^x f'(x)$，则$\exists\xi\in(1,\xi_2)\subset(0,2),F'(\xi)=0$，即$f'(\xi)+f''(\xi)=0$。

【例 5.101】 证明：$\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{\int_{\ln2}^{x}\frac{\mathrm{d}t}{1-\mathrm{e}^{-t}}}=1$。

证 因为 $$\int_{\ln2}^{x}\frac{\mathrm{d}t}{1-\mathrm{e}^{-t}}=\int_{\ln2}^{x}\frac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t-1}\mathrm{d}t=[\ln(\mathrm{e}^t-1)]_{\ln2}^{x}=\ln(\mathrm{e}^x-1)$$

所以 $$左边=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{\ln(\mathrm{e}^x-1)}=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+1=右边$$

【例 5.102】 设$f(x)=\int_1^x\dfrac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t$（$x>0$），求$f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，并证明：

$$f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\ln^2 2$$

解 题设给出了$f(x)$的表达式，要计算$f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，可借助于倒代换，令$u=\dfrac{1}{t}$，则

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t=\int_1^x\frac{-\ln u}{1+\frac{1}{u}}\left(-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u=\int_1^x\frac{\ln u}{u(1+u)}\mathrm{d}u=\int_1^x\frac{\ln t}{t(1+t)}\mathrm{d}t$$

所以 $$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\int_1^x\ln t\left[\frac{1}{1+t}+\frac{1}{(1+t)t}\right]\mathrm{d}t=\int_1^x\ln t\cdot\frac{\mathrm{d}t}{t}=\frac{1}{2}\ln^2 x$$

当$x=2$时，有 $$f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\ln^2 2$$

【例 5.103】 对于一切实数x，函数$f(x)$恒满足$\int_0^x[2f(t)-1]\mathrm{d}t=f(x)-1$，求$f(0)$之值，另外，将$f(x)$作为$x$的函数表示出来，这里$f(x)$是可微的。

解 令$x=0$，则有$f(0)-1=0$，即$f(0)=1$。对已知式两边求导，得$2f(x)-1=f'(x)$，从而

$$\frac{f'(x)}{2f(x)-1}=1 \Rightarrow \ln[2f(x)-1]=2x+\ln C \Rightarrow 2f(x)-1=Ce^{2x}$$

由$f(0)=1$，得$C=1$，故

$$f(x)=\frac{e^{2x}+1}{2}$$

【例5.104】 设在$[1,+\infty)$上，$0<f'(x)<\frac{2}{x^3}$，证明：$f(x)$在$[1,+\infty)$上有界。

证 因$0<f'(x)<\frac{2}{x^3}$，根据积分性质，得

$$\int_1^x 0\mathrm{d}x<\int_1^x f'(t)\mathrm{d}t<\int_1^x \frac{2}{t^3}\mathrm{d}t \quad (x>1)$$

即
$$0<f(x)-f(1)<-\frac{1}{x^2}+1 \quad (x>1)$$

亦即
$$f(1)<f(x)<-\frac{1}{x^2}+1+f(1) \quad (x>1)$$

所以$f(x)$在$[1,+\infty)$上有界。

【例5.105】 设$f(x)$在$[0,1]$上可微，且$f(0)=0$，$0<f'(x)<1$，证明：

$$\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]^2>\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x$$

证 令$F(x)=\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]^2-\int_0^x f^3(t)\mathrm{d}t$，则证明$F(1)>0$即可。可求

$$F'(x)=2f(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^3(x)=f(x)[2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^2(x)]$$

由于$f'(x)>0$，即$f(x)$单调增加，所以，当$x>0$时，$f(x)>f(0)=0$。

令$g(x)=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^2(x)$，由于$f'(x)<1$，因此

$$g'(x)=2f(x)-2f(x)f'(x)=2f(x)(1-f'(x))>0 \quad (x>0)$$

得$g(x)$单调增加，即当$x>0$时，$g(x)>g(0)=0$。所以，当$x>0$时，$F'(x)>0$，即$F(x)$单调增加，因此，$F(1)>F(0)=0$，即原不等式成立。

【例5.106】 设$f(x)$在$[0,1]$上连续、单调减少且取正值，证明：对于满足$0<\alpha<\beta<1$的任何α,β，有$\beta\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x>\alpha\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x$。

证 方法 1：由积分中值定理知

$$\beta\int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x=\alpha\beta f(\xi)\ （\xi\in[0,\alpha]）$$

$$\alpha\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\mathrm{d}x=\alpha(\beta-\alpha)f(\eta)\ （\eta\in[\alpha,\beta]）$$

由于 $\xi\le\eta$，而 $f(x)$ 单调减少，有 $f(\xi)\ge f(\eta)$，又 $f(x)>0$，所以

$$\alpha\beta f(\xi)\ge\alpha\beta f(\eta)>\alpha(\beta-\alpha)f(\eta)$$

故
$$\beta\int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x>\alpha\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\mathrm{d}x$$

方法 2：要证本题结论，只要证函数 $F(\alpha)=\beta\int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x-\alpha\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\mathrm{d}x>0$ 即可。显然 $F(0)=0$，只要证得 $F'(\alpha)>0$，即有 $F(\alpha)$ 在 $[0,\beta]$ 上单调增加，从而 $F(\alpha)>F(0)=0$。可求

$$F'(\alpha)=\left[\beta\int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x-\alpha\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,\mathrm{d}x\right]'=\beta f(\alpha)-\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\mathrm{d}x+\alpha f(\alpha)$$

应用积分中值定理，并整理得

$$F'(\alpha)=(\beta+\alpha)f(\alpha)-(\beta-\alpha)f(\eta)=\beta[f(\alpha)-f(\eta)]+\alpha[f(\alpha)+f(\eta)]$$

其中 $\alpha<\eta<\beta$，由于 $f(x)$ 单调减少取正值，故 $F'(\alpha)>0$，从而 $F(\alpha)>F(0)=0$，故

$$\beta\int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x>\alpha\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\mathrm{d}x$$

【例 5.107】 设函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 单调增加，证明：对 $b>a$，有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)<\frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{b-a}<\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

证 （1）设 $x>a$，$\Phi(x)=(x-a)f\left(\frac{x+a}{2}\right)-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则

$$\begin{aligned}\Phi'(x)&=f\left(\frac{x+a}{2}\right)+(x-a)f'\left(\frac{x+a}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}-f(x)\\&=f'(\xi)\frac{a-x}{2}+\frac{x-a}{2}f'\left(\frac{x+a}{2}\right)\\&=\frac{x-a}{2}\left[f'\left(\frac{x+a}{2}\right)-f'(\xi)\right]<0\end{aligned}$$

其中 $\xi\in\left(\frac{x+a}{2},x\right)$，于是 $\Phi(x)$ 单调减少（$x>a$），即 $\Phi(x)<\Phi(a)=0\ (x>a)$，亦即

$$f\left(\frac{a+x}{2}\right)<\frac{\int_a^x f(x)\mathrm{d}x}{x-a}$$

令 $x=b$，即有
$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)<\frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{b-a}$$

（2）同理，设 $\Phi(x)=\frac{f(a)+f(x)}{2}(x-a)-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$（$x>a$），则

$$\Phi'(x)=\frac{f(a)+f(x)}{2}+\frac{f'(x)}{2}(x-a)-f(x)=\frac{1}{2}(f(a)-f(x))+\frac{1}{2}f'(x)(x-a)$$
$$=\frac{1}{2}f'(\xi)(a-x)+\frac{1}{2}f'(x)(x-a)=\frac{1}{2}(x-a)(f'(x)-f'(\xi))>0$$

其中 $\xi\in(a,x)$，于是 $\Phi(x)$ 单调增加（$x>a$），即 $\Phi(x)>\Phi(a)=0\,(x>a)$，亦即

$$\frac{\int_a^x f(x)\mathrm{d}x}{x-a}<\frac{f(a)+f(x)}{2}$$

令 $x=b$，即有
$$\frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{b-a}<\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

【例 5.108】 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：

$$\int_a^b|f(x)g(x)|\mathrm{d}x\le\frac{1}{2}\left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right]$$

证 因为 $[|f(x)|-|g(x)|]^2\ge0$，所以 $|f(x)g(x)|\le\frac{f^2(x)+g^2(x)}{2}$，故

$$\int_a^b|f(x)g(x)|\mathrm{d}x\le\frac{1}{2}\left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right]$$

【例 5.109】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(0)=3$，而且对于 $[0,1]$ 上的一切 x 和 y，不等式 $|f(x)-f(y)|\le|x-y|$ 成立，试估计积分 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 的值。

解 设 $y=0$，$x\in[0,1]$，则由题设不等式知

$$|f(x)-f(y)|=|f(x)-f(0)|\le|x|=x$$

即 $|f(x)-3|\le x$，从而 $3-x\le f(x)\le3+x$，于是由比较性质知

$$\int_0^1(3-x)\mathrm{d}x\le\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\le\int_0^1(3+x)\mathrm{d}x$$

故
$$\frac{5}{2}\le\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\le\frac{7}{2}$$

【例 5.110】 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(x)$ 连续，$f(a)=0$，则有不等式

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{2}(b-a)^2\int_a^b [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x$$

证 $$\left[\int_a^x f'(x)\mathrm{d}x\right]^2 \le \int_a^x [f'(t)]^2\,\mathrm{d}t\cdot\int_a^x \mathrm{d}t=(x-a)\int_a^x [f'(t)]^2\,\mathrm{d}t$$

而 $$\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t=f(x)-f(a)=f(x)$$

所以 $$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\left[\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t\right]^2\mathrm{d}x \le \int_a^b\left((x-a)\int_a^x [f'(t)]^2\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b\left(\int_a^x [f'(t)]^2\,\mathrm{d}t\right)\frac{\mathrm{d}(x-a)^2}{2}$$

$$=\left[\frac{(x-a)^2}{2}\cdot\int_a^x [f'(t)]^2\,\mathrm{d}t\right]_a^b-\int_a^b\frac{(x-a)^2}{2}[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b [f'(t)]^2\,\mathrm{d}t-\int_a^b\frac{(x-a)^2}{2}[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x\le\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x$$

【例 5.111】 求 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_x^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right]$。

解 方法 1： 原式 $=\mathrm{e}^{-x^4}(x^2)'-\mathrm{e}^{-x^2}(x)'=2x\mathrm{e}^{-x^4}-\mathrm{e}^{-x^2}$

方法 2：设 $F(t)$ 为 e^{-t^2} 的一个原函数，则

$$原式=[F(x^2)-F(x)]'=2xF'(x^2)-F'(x)=2x\mathrm{e}^{-x^4}-\mathrm{e}^{-x^2}$$

【例 5.112】 设 $y=y(x)$，由参数方程 $x=\int_1^t u\ln u\mathrm{d}u$，$y=\int_t^1 u^2\ln u\mathrm{d}u$ 所确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

解 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}\frac{-t^2\ln t}{t\ln t}=-t$$

【例 5.113】 已知 $f(x)=\begin{cases}x+1 & x<0\\ x & x\ge 0\end{cases}$，求 $F(x)=\int_{-1}^x f(t)\mathrm{d}t$（$-1\le x\le 1$）的表达式，并研究 $F(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的连续性和可导性。

解 因为 $f(x)$ 是分段函数，因此

当 $-1\le x<0$ 时，$F(x)=\int_{-1}^x (t+1)\mathrm{d}t=\dfrac{x^2}{2}+x+\dfrac{1}{2}$

当 $0\le x\le 1$ 时，$F(x)=\int_{-1}^0 (t+1)\mathrm{d}t+\int_0^x t\mathrm{d}t=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}$

故
$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+x+\dfrac{1}{2} & (-1\le x<0)\\ \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2} & (0\le x\le 1)\end{cases}$$

显然 $F(x)$ 在 $[-1,0)\cup(0,1]$ 连续。因为

$$\lim_{x\to 0^+}F(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}=F(0)$$

$$\lim_{x\to 0^-}F(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}=F(0)$$

所以 $F(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续。

当 $-1\le x<0$ 时，$F'(x)=x+1$；当 $0\le x\le 1$ 时，$F'(x)=x$。所以

$$F_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{F(0+\Delta x)-F(0)}{\Delta x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{(\Delta x)^2}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}}{\Delta x}=0$$

$$F_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{F(0+\Delta x)-F(0)}{\Delta x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\dfrac{(\Delta x)^2}{2}+\Delta x+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}}{\Delta x}=1$$

故 $F(x)$ 在 $x=0$ 处不可导。

【例 5.114】 证明：函数 $f(x)=\int_0^x(1-t)\ln(1+nt)\mathrm{d}t$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上的最大值不超过 $n/6$，其中 n 为正整数。

证 $f'(x)=(1-x)\ln(1+nx)$，令 $f'(x)=0$，则在 $x\in(0,+\infty)$ 内得惟一驻点 $x_1=1$。

因为当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$。所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取极大值 $f(1)$，从而 $\max f(x)=f(1)$。令 $\varPhi(t)=\ln(1+nt)-nt$，$0\le t\le 1$，则 $\varPhi(0)=0$，且

$$\varPhi'(t)=\frac{n}{1+nt}-n=-n^2\frac{t}{1+nt}<0$$

从而 $\varPhi(t)$ 在 $[0,1]$ 上单调减少。所以 $\varPhi(t)<\varPhi(0)=0$，即 $\ln(1+nt)<nt$。

于是由定积分的比较性质可知

$$\max f(x)=f(1)=\int_0^1(1-t)\ln(1+nt)\mathrm{d}t\le\int_0^1 nt(1-t)\mathrm{d}t=n\left(\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{n}{6}$$

【例 5.115】 已知在 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 连续，$g(x)$ 有连续导数，且 $g'(x)\ge 0$，试证明：存在 $\xi(a\le\xi\le b)$，使 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(a)\int_a^{\xi}f(x)\mathrm{d}x+g(b)\int_{\xi}^b f(x)\mathrm{d}x$。

证 设 $F(x)=\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$，则 $\mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$，$F(a)=0$。因为

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}F(x)=g(b)F(b)-\int_a^b F(x)g'(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b F(x)g'(x)\mathrm{d}x=F(\xi)\int_a^b g'(x)\mathrm{d}x=[g(b)-g(a)]F(\xi)$$

其中$a<\xi<b$，所以

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(b)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-[g(b)-g(a)]\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x$$
$$=g(a)\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x+g(b)\int_{\xi}^b f(x)\mathrm{d}x$$

【例 5.116】 设$f(x)$是$[0,1]$上连续、可导函数，且满足$0\le f'(x)\le 1$，$f(0)=0$，求证：

$$\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x\le\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]^2$$

证 令 $$F(t)=\left[\int_0^t f(x)\mathrm{d}x\right]^2-\int_0^t f^3(x)\mathrm{d}x\quad(0\le t\le 1)$$

则 $$F'(t)=2f(t)\int_0^t f(x)\mathrm{d}x-f^3(t)=f(t)\left[2\int_0^t f(x)\mathrm{d}x-f^2(t)\right]$$

令 $$G(t)=2\int_0^t f(x)\mathrm{d}x-f^2(t)$$

则 $$G'(t)=2f(t)-2f(t)f'(t)=2f(t)[1-f'(t)]$$

因为$0\le f'(t)\le 1$，所以$f(t)$在$[0,1]$上单调增加，即$f(t)\ge f(0)=0$。从而$G'(t)\ge 0$，这说明$G(t)$在$[0,1]$上单调增加，即$G(t)\ge G(0)=0$。所以$F'(t)\ge 0$，这说明$F(t)$在$[0,1]$上单调增加，即$F(1)\ge F(0)=0$。

故 $$\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x\le\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]^2$$

【例 5.117】 求$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+x\sqrt{x}}$。

解 令$\sqrt{x}=t$，则

$$原式=\int_0^{+\infty}\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}=(2\arctan t)\Big|_0^{+\infty}=\pi$$

【例 5.118】 判别积分$\displaystyle\int_{\mathrm{e}^{-1}}^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$的敛散性。

解 $$原式=\int_{\mathrm{e}^{-1}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}+\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$$

因为 $$\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{1+\varepsilon}^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}[\ln\ln x]_{1+\varepsilon}^{\mathrm{e}}=\infty$$

故原积分发散。

【例 5.119】　求$\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(2-x)}}$。

解
$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-(x-1)^2}}+\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\\&=[\arcsin(x-1)]_0^1+[\arcsin(x-1)]_1^2\\&=-\arcsin(-1)+\arcsin 1=\pi\end{aligned}$$

【例 5.120】　求$\int_1^3 x\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x^2-4|}}$。

解　原式$=\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}+\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-4}}=(-\sqrt{4-x^2})\Big|_1^2+(\sqrt{x^2-4})\Big|_2^3=\sqrt{3}+\sqrt{5}$

【例 5.121】　设$f(x)$在$[0,1]$上可导，且$f(1)=0$，$\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x=1$，证明：至少存在$\xi\in(0,1)$，使$f'(\xi)=2$。

证　由　$\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x=xf(x)\big|_0^1-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1\Rightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-1$

令$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，有$F(0)=0$，$F(1)=-1$，$F'(1)=f(1)=0$。由泰勒公式，得

$$F(0)=F(1)+F'(1)(0-1)+\frac{1}{2}F''(\xi)\text{，其中}\xi\in(0,1)$$

即$F''(\xi)=2$。又$F''(x)=f'(x)$，所以，至少存在$\xi\in(0,1)$，使$f'(\xi)=2$。

【例 5.122】　设$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上连续，且$f(x)=\frac{x}{1+\cos^2 x}+\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin x\mathrm{d}x$，求$f(x)$。

解　令$A=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin x\mathrm{d}x$，则$f(x)=\frac{x}{1+\cos^2 x}+A$，

$$A=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}A\sin x\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x\xrightarrow{\text{令}x=\pi-t}$$
$$A=2\int_{\pi}^{0}\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}(-\mathrm{d}t)=2\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t-2\int_0^{\pi}\frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t$$

即$A=\pi^2-A$，$A=\frac{\pi^2}{2}$，所以

$$f(x)=\frac{x}{1+\cos^2 x}+\frac{\pi^2}{2}$$

【例 5.123】　试确定常数a，b，c的值，使极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\frac{b}{x^5}\int_c^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)$存在，并求该极限值。

解 由已知，有

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{a}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\frac{b}{x^5}\int_c^x e^{-t^2}dt\right)=\lim_{x\to0}\frac{ax^3+x+b\int_c^x e^{-t^2}dt}{x^5}=\lim_{x\to0}\frac{3ax^2+1+be^{-x^2}}{5x^4}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{6ax-2bxe^{-x^2}}{20x^3}=\lim_{x\to0}\frac{3a-be^{-x^2}}{10x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2bxe^{-x^2}}{20x}=\frac{b}{10}$$

并且有
$$\lim_{x\to0}\left(ax^3+x+b\int_c^x e^{-t^2}dt\right)=b\int_c^0 e^{-t^2}dt=0$$

$$\lim_{x\to0}(3ax^2+1+be^{-x^2})=1+b=0$$

$$\lim_{x\to0}(3a-be^{-x^2})=3a-b=0$$

所以，$a=-\dfrac{1}{3}$，$b=-1$，$c=0$，极限值为$-\dfrac{1}{10}$。

【例 5.124】 设n为自然数，求$I=\int_0^{n\pi}x|\sin x|dx$。

解
$$I=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}x|\sin x|dx=\sum_{k=0}^{n-1}a_k$$

其中
$$a_0=\int_0^{\pi}x\sin xdx=\pi$$

$$a_{k+1}=\int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi}x|\sin x|dx\overset{t=x-\pi}{=\!=\!=}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}(t+\pi)|\sin t|dt$$

$$=a_k+\pi\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|dt=a_k+\int_0^{\pi}\sin tdt=a_k+2\pi$$

从而$a_n=a_0+n\cdot2\pi=(2n+1)\pi$，可得

$$I=\sum_{k=0}^{n-1}a_k=\pi[1+3+5+\cdots+(2n-1)]=n^2\pi$$

【例 5.125】 设$f(x)$在$x=0$的某邻域内二阶可导，且$f''(0)\neq0,\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，又已知$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x^\alpha-\sin x}=\beta\neq0$，求$\alpha$与$\beta$的值。

解 由$\lim\limits_{x\to0^+}(x^\alpha-\sin x)=0$，即$\lim\limits_{x\to0^+}x^\alpha=0$，所以$\alpha>0$；又$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，可得$f(0)=0,f'(0)=0$。对于极限$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{\alpha x^{\alpha-1}-\cos x}$，有

（1）如果$0<\alpha<1$，有 $\lim\limits_{x\to0^+}(\alpha x^{\alpha-1}-\cos x)=\infty$，则 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{\alpha x^{\alpha-1}-\cos x}=0$，由罗必达法则，有 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x^\alpha-\sin x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{\alpha x^{\alpha-1}-\cos x}=0$，这与已知相矛盾；

（2）如果$\alpha>1$，有 $\lim\limits_{x\to0^+}(\alpha x^{\alpha-1}-\cos x)=-1$，同理有 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x^\alpha-\sin x}=0$，矛盾。

所以$\alpha=1$。于是

$$\beta=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x^\alpha-\sin x}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{1-\cos x}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{\frac{1}{2}x^2}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=f''(0)$$

故
$$\alpha=1,\beta=f''(0)$$

【例 5.126】 已知$f(x)$在$[0,+\infty]$有二阶连续导数，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$且$f''(x)\neq0$。若对$\forall x>0$，函数$u(x)$表示曲线$y=f(x)$在切点$(x,f(x))$处的切线在$x$轴上的截距，求

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x u(x-t)\mathrm{d}t}{\ln\cos x}$$

解 由$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，有$f(0)=0,f'(0)=0$，点$(x,f(x))$处的切线方程是

$$Y=f(x)+f'(x)(X-x)$$

令$Y=0$，得切线在x轴上的截距为

$$u(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}\quad(x>0)$$

由
$$f''(x)\neq0\,(x\geq0)\Rightarrow f'(x)=f'(x)-f'(0)=f''(\xi)x\neq0\ \ (x>0)$$

于是
$$\lim_{x\to0^+}u(x)=-\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{f'(x)}=-\lim_{x\to0^+}\frac{f'(x)}{f''(x)}=-\frac{f'(0)}{f''(0)}=0$$

故
$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x u(x-t)\mathrm{d}t}{\ln\cos x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x u(t)\mathrm{d}t}{\ln[1+(\cos x-1)]}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x u(t)\mathrm{d}t}{\cos x-1}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{u(x)}{-x}=-\lim_{x\to0^+}u'(x)=-\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)}$$

$$=-f''(0)\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{f'^2(x)}=-f''(0)\lim_{x\to0^+}\frac{f'(x)}{2f'(x)f''(x)}=-\frac{1}{2}$$

【例 5.127】 设 $f(x)$ 在[0, 1]上连续，则

（1）证明至少存在一个 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)(1-\xi)=\int_0^{\xi}f(x)\mathrm{d}x$；

（2）若 $f(x)$ 为可导函数且满足 $(1-x)f'(x)>2f(x)$，证明 ξ 是惟一的。

证 （1）令 $F(x)=(1-x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$（由分部积分得到），则 $F(0)=F(1)$，由罗尔定理知，存在 ξ，使

$$F'(\xi)=0\Rightarrow f(\xi)(1-\xi)=\int_0^{\xi}f(x)\mathrm{d}x$$

（2）令 $\phi(x)=f(x)(1-x)-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则

$$\phi'(x)=f'(x)(1-x)-f(x)-f(x)=f'(x)(1-x)-2f(x)>0$$

即严格单调增加，所以 ξ 必惟一。

【例 5.128】 求心形线 $r=1-\cos\theta$ 所围成的图形与圆盘 $r\le\cos\theta$ 的公共部分的面积。

解 由解析几何知识可知，所围图形对称于 x 轴，所以只须求它在第一象限内的面积 A_1 即可。先求交点，由 $\begin{cases}r=\cos\theta\\ r=1-\cos\theta\end{cases}$ 得交点 C 的极坐标 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，于是所求面积为

$$\begin{aligned}A=2A_1&=2\left[\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}(1-\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\right]\\&=2\left[\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{2}-\cos\theta+\frac{1+\cos2\theta}{4}\right)\mathrm{d}\theta+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos2\theta}{4}\right]\mathrm{d}\theta\\&=\left[\frac{3}{2}\theta-2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+\left[\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin2\theta\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\\&=\frac{7}{12}\pi-\sqrt{3}\end{aligned}$$

【例 5.129】 求曲线 $y=\sin x$ 在 $\left[\dfrac{\pi}{2},2\pi\right]$ 上的弧段与直线 $x=\dfrac{\pi}{2},y=0$ 所围成的图形的面积。

解 由对称性知，所求面积为

$$S=3\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=-3\cos x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=3$$

【例 5.130】 求由曲线 $|\ln x|+|\ln y|=1$ 所围成图形的面积。

解 原曲线可看作是由曲线 $xy=\mathrm{e},xy=\dfrac{1}{\mathrm{e}},y=\mathrm{e}x,y=\dfrac{x}{\mathrm{e}}$ 构成的闭曲线，它们的交点为

$A\left(\frac{1}{e},1\right), B\left(1,\frac{1}{e}\right), C(e,1), D(1,e)$，于是所求面积为

$$S=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(ex-\frac{1}{xe}\right)dx+\int_{1}^{e}\left(\frac{e}{x}-\frac{x}{e}\right)dx=\left(\frac{1}{2}ex^2-\frac{1}{e}\ln x\right)\Bigg|_{\frac{1}{e}}^{1}+\left(e\ln x-\frac{1}{2e}x^2\right)\Bigg|_{1}^{e}=e-\frac{1}{e}$$

【例5.131】 设M为曲线$\begin{cases}x=\cos t\\ y=2\sin^2 t\end{cases}\left(0\le t\le\frac{\pi}{2}\right)$上的一点，此曲线与直线$OM$及$x$轴所围图形的面积为$S$，求$\frac{dS}{dt}$取最大值时，点$M$的坐标。

解 方法1：由题设过点M作x轴的垂线，垂足为N，曲线与x轴的交点为P，则所围图形面积分成两部分，直角三角形OMN的面积（S_1），由曲线及x轴和直线$x=\cos t$所围成曲边三角形NMP的面积（S_2），故$S=S_1+S_2$。又

$$S_1=\frac{1}{2}\cos t\cdot(2\sin^2 t)=\sin^2 t\cos t$$

$$S_2=\int_{\cos t}^{1}y\,dx=\int_{\cos t}^{1}2(1-x^2)\,dx$$

（此处将参数方程化为直角坐标方程$y=2(1-x^2)$）

所以
$$\frac{dS}{dt}=\frac{dS_1}{dt}+\frac{dS_2}{dt}=[\sin^2 t\cos t]'-\left[\int_{1}^{\cos t}2(1-x^2)dx\right]'$$
$$=2\sin t\cos^2 t-\sin^3 t+2(1-\cos^2 t)\sin t=2\sin t-\sin^3 t$$

令$\frac{d^2S}{dt^2}=2\cos t-3\sin^2 t\cos t=0$，得$t_1=\frac{\pi}{2},t_2=\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$，因为

$$\left.\frac{dS}{dt}\right|_{t=0}=0,\quad \left.\frac{dS}{dt}\right|_{t=t_1}=1,\quad \left.\frac{dS}{dt}\right|_{t=t_2}=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}>1$$

所以，当$t=\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$时，$\frac{dS}{dt}$取得最大值，这时$M$点的坐标为$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{4}{3}\right)$。

方法2：对应$[t,t+dt]$，有中心角为$d\theta$的曲边扇形OMN，其面积为

$$\Delta S=S(t+dt)-S(t)\approx dS=\frac{1}{2}r^2d\theta$$
$$=\frac{1}{2}(x^2+y^2)d\left(\arctan\frac{y}{x}\right)$$
$$=\frac{1}{2}(x^2+y^2)\frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\frac{xdy-ydx}{x^2}$$
$$=\frac{1}{2}(xdy-ydx)$$

所以 $$\frac{dS}{dt}=\frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=\frac{1}{2}(4\cos^2 t\sin t+2\sin^3 t)=2\sin t-\sin^3 t$$

以下解法同方法 1。

【例 5.132】 求曲线 $y=\ln x$（$2\le x\le 6$）的一条切线，使得该切线与直线 $x=2, x=6$ 及曲线 $y=\ln x$ 所围成的图形面积 A 为最小。

解 本题的关键是找出目标函数，即所围成面积与切点坐标之间的函数关系。设 $(\xi,\ln\xi)$ 为曲线 $y=\ln x$ 上任意一点，则此点处的切线方程为 $y=\frac{1}{\xi}(x-\xi)+\ln\xi$，即 $y=\frac{x}{\xi}+\ln\xi-1$，于是所求面积为

$$A=\int_2^6\left[\frac{x}{\xi}+\ln\xi-1-\ln x\right]dx=\left[\frac{x^2}{2\xi}+x\ln\xi-x\ln x\right]_2^6=4\left(\ln\xi+\frac{4}{\xi}\right)+2\ln 2-6\ln 6$$

令 $\frac{dA}{d\xi}=4\left(\frac{1}{\xi}-\frac{4}{\xi^2}\right)=0$，得 $\xi=4$。又当 $\xi<4$ 时，$\frac{dA}{d\xi}<0$；当 $\xi>4$ 时，$\frac{dA}{d\xi}>0$。故 $\xi=4$ 时，A 取得极小值，也是最小值，从而得到所求的切线方程为 $y=\ln 4+\frac{1}{4}(x-4)$。

【例 5.133】 在区间 $[0, 1]$ 上给定函数 $y=x^2$，问 t 为何值时，如图 5-1 中的阴影部分 S_1 与 S_2 的面积之和最小？

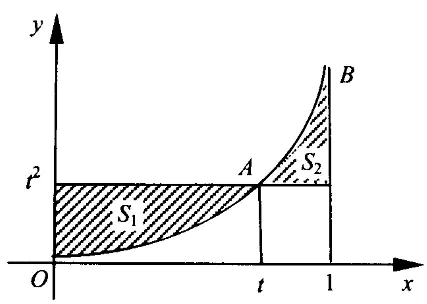

图 5-1

解 设 A 点坐标为 (t,t^2)，所以

$$S_1(t)=\frac{2}{3}t^3$$

$$S_2(t)=\int_t^1 x^2dx-(1-t)t^2=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}t^3-t^2$$

从而 $$S(t)=S_1(t)+S_2(t)=\frac{1}{3}+\frac{4}{3}t^3-t^2\qquad(0\le t\le 1)$$

令 $\frac{dS}{dt}=2t(2t-1)=0$，则在 $[0, 1]$ 内驻点为 $t=\frac{1}{2}$。

因为
$$S(0)=\frac{1}{3}, S(1)=\frac{2}{3}, S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

故当 $t=\frac{1}{2}$ 时，S_1+S_2 取最小值；当 $t=1$ 时，S_1+S_2 取最大值。

【例 5.134】 求一立体的体积，此立体的底是介于 $y=x^2-1$ 和 $y=0$ 之间的平面区域，而它垂直于 x 轴的任一截面是一个等边三角形。

解 先求平行截面的面积，再按平行截面面积为已知的立体求其体积。由题意知等边三角形的面积为

$$A(x)=\frac{1}{2}|x^2-1|^2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}(x^2-1)^2$$

于是体积为

$$V=\int_{-1}^{1}A(x)dx=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^2 dx=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\int_{0}^{1}(x^2-1)^2 dx$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+x\right]_0^1=\frac{4}{15}\sqrt{3}$$

【例 5.135】 求正椭圆锥的体积，其底面是长、短半轴分别等于 a, b 的椭圆，而高等于 h。

解 以底面椭圆中心为原点，短轴为 x 轴，长轴为 y 轴，椭圆中心与锥顶之连线为 z 轴，建立空间直角坐标系，则过 $(0, 0, z)$ 与 xOy 平行的平面与正椭圆锥的截面为一椭圆面。设该椭圆面的长、短轴分别为 a_1, b_1，于是有

$$\frac{a_1}{a}=\frac{h-z}{h},\quad \frac{b_1}{b}=\frac{h-z}{h}$$

即
$$a_1=a\cdot\frac{h-z}{h}=a\left(1-\frac{z}{h}\right),\quad b_1=b\left(1-\frac{z}{h}\right)$$

从而，其面积为 $S(z)=\pi a_1b_1=\pi ab(1-z/h)^2$，故所求体积为

$$V=\int_0^h S(z)dz=\pi ab\int_0^h(1-z/h)^2dz=\frac{1}{3}\pi abh$$

【例 5.136】 求由曲线 $y=x^2+3$ 及 $y=3x^2+1$ 所围成的平面图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积。

解 所求的体积为

$$V=\int_{-1}^{1}\pi(x^2+3)^2dx-\int_{-1}^{1}\pi(3x^2+1)^2dx=\pi\int_{-1}^{1}(8-8x^4)dx=\frac{64}{5}\pi$$

【例 5.137】 计算曲线 $y=e^x$ 与 x 轴之间位于第二象限的平面图形的面积 S 以及该图形绕 y 轴旋转而成的旋转体体积 V。

解
$$S=\int_{-\infty}^{0}e^x dx=e^x\Big|_{-\infty}^{0}=1$$
$$V=\pi\int_0^1 x^2 dy=\pi\int_0^1(\ln y)^2 dy=\pi\left[y\ln^2 y\Big|_0^1-2\int_0^1\ln y dy\right]$$
$$=-\pi\cdot 2[y\ln y-y]\Big|_0^1=2\pi$$

【例 5.138】 设曲线 $y=\sin x$（$0\le x\le\frac{\pi}{2}$），$y=1$ 和 $x=0$ 围成的平面图形为 D，试求平面图形 D 绕 $x=\frac{\pi}{2}$ 旋转而成的旋转体的体积。

解 方法 1：切片法。取 y 为积分变量，积分区间为 $[0,1]$，对应于任一小区间 $[y,y+dy]$，平面区域 D 上有宽度为 dy 的窄条，此窄条绕 $x=\frac{\pi}{2}$ 旋转，得到厚度为 dy 的圆环，其体积为
$$dV=\left[\pi\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-\pi\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2\right]dy=\pi[\pi x-x^2]dy=\pi[\pi\arcsin y-(\arcsin y)^2]dy$$
故所求旋转体的体积为
$$V=\pi^2\int_0^1\arcsin y dy-\pi\int_0^1(\arcsin y)^2 dy$$
$$=\pi^2\left[y\arcsin y+\sqrt{1-y^2}\right]\Big|_0^1-\pi\left[y(\arcsin y)^2+2\sqrt{1-y^2}\arcsin y-2y\right]\Big|_0^1$$
$$=\pi^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)-\pi\left(\frac{\pi^2}{4}-2\right)=\frac{\pi^3}{4}-\pi^2+2\pi$$

方法 2：剥壳法。取 x 为积分变量，其积分区间为 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，对应于任一区间 $[x,x+dx]$，平面区域 D 上有高为 $1-y$、宽为 dx 的窄条，它绕 $x=\frac{\pi}{2}$ 旋转得到高为 $1-y$，厚为 dx，半径为 $\frac{\pi}{2}-x$ 的圆筒薄壳，其体积为
$$dV=(1-y)2\pi\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx=2\pi(1-\sin x)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx$$
故旋转体的体积为
$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\pi(1-\sin x)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx$$
令 $u=\frac{\pi}{2}-x$，可得

$$V=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}u(1-\cos u)\mathrm{d}u=2\pi\left[\frac{u^2}{2}-u\sin u-\cos u\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^3}{4}-\pi^2+2\pi$$

【例 5.139】 把曲线 $y=\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}$ 绕 x 轴旋转得一旋转体，它在点 $x=0$ 与 $x=\xi$ 之间的体积记作 $V(\xi)$，问 a 等于何值时，能使 $V(a)=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{\xi\to\infty}V(\xi)$？

解 因为

$$V(\xi)=\int_0^{\xi}\pi y^2\mathrm{d}y=\pi\int_0^{\xi}\frac{x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\Bigg|_0^{\xi}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+\xi^2}$$

所以

$$\lim_{\xi\to\infty}V(\xi)=\frac{\pi}{2}$$

从而

$$V(a)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+a^2}=\frac{\pi}{4}$$

由此可得 $1+a^2=2$，故 $a=1$ 或 $a=-1$。

【例 5.140】 过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线，该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴围成平面区域 D。求：

（1）D 的面积 A；

（2）D 绕直线 $x=\mathrm{e}$ 旋转一周所得旋转体的体积 V。

解 先求出切点坐标及切线方程，再用定积分求面积 A；旋转体体积可用一大立体（圆锥）体积减去一小立体体积进行计算。为了帮助理解，可画一草图。

如图 5-2 所示，设切点的横坐标为 x_0，则曲线 $y=\ln x$ 在点 $(x_0,\ln x_0)$ 处的切线方程是 $y=\ln x_0+\dfrac{1}{x_0}(x-x_0)$。由该切线过原点知 $\ln x_0-1=0$，从而 $x_0=\mathrm{e}$，所以该切线的方程为 $y=\dfrac{1}{\mathrm{e}}x$。

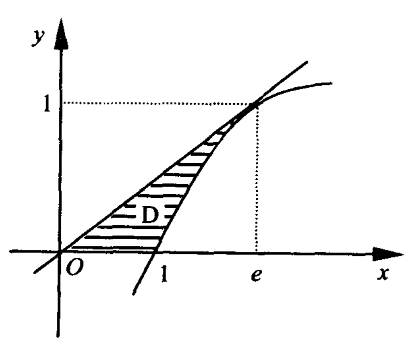

图 5-2

（1）平面图形 D 的面积为

$$A=\int_0^1(\mathrm{e}^y-\mathrm{e}y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\mathrm{e}-1$$

（2）切线 $y=\frac{1}{\mathrm{e}}x$ 与 x 轴及直线 $x=\mathrm{e}$ 所围成的三角形绕直线 $x=\mathrm{e}$ 旋转所得的圆锥体积为

$$V_1=\frac{1}{3}\pi\mathrm{e}^2$$

曲线 $y=\ln x$ 与 x 轴及直线 $x=\mathrm{e}$ 所围成的图形绕直线 $x=\mathrm{e}$ 旋转所得的旋转体体积为

$$V_2=\int_0^1\pi(\mathrm{e}-\mathrm{e}^y)^2\,\mathrm{d}y$$

因此，所求旋转体的体积为

$$V=V_1-V_2=\frac{1}{3}\pi\mathrm{e}^2-\int_0^1\pi(\mathrm{e}-\mathrm{e}^y)^2\mathrm{d}y=\frac{\pi}{6}(5\mathrm{e}^2-12\mathrm{e}+3)$$

【例 5.141】 有等腰梯形水闸，上底 6m，下底 2m，高 10m，试求当水面与上底相接时闸门所受的水压力。

解 取横轴为 y 轴，纵轴为 x 轴（方向朝下）建立坐标系。选 x 为积分变量，由两点 $A(0,3)$、$B(10,1)$ 建立直线 AB 的方程为

$$y=-\frac{1}{5}x+3$$

闸门上对应小区间 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 的窄条上所受水压力为 $\mathrm{d}P=2xy\rho g\mathrm{d}x$，其中，$\rho$ 是水的密度，g 是重力加速度。因此闸门上所受水压力为

$$P=2\rho g\int_0^{10}x\left(-\frac{1}{5}x+3\right)\mathrm{d}x=\frac{500}{3}\rho g$$

【例 5.142】 求垂直放在水中的平面薄片一侧所受的水压力，薄片上半部是高为 4m 的等腰三角形，下半部是半径为 3m 的半圆。

解 选取坐标系，薄片上半部分与下半部分受到的压力的元素分别为

$$\mathrm{d}P_1=x\cdot2\cdot\frac{3}{4}x\cdot\mathrm{d}x=\frac{3}{2}x^2\mathrm{d}x \qquad (0\le x\le4)$$

$$\mathrm{d}P_2=x\cdot2\cdot\sqrt{3^2-(x-4)^2}\,\mathrm{d}x \qquad (4\le x\le7)$$

从而

$$P_1=\int_0^4\frac{3}{2}x^2\mathrm{d}x=32(\mathrm{t})$$

$$P_2=2\int_4^7x\sqrt{3^2-(x-4)^2}\,\mathrm{d}x=2\int_0^3(t+4)\sqrt{3^2-t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^3\sqrt{3^2-t^2}\,\mathrm{d}t^2+8\int_0^3\sqrt{3^2-t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{2}{3}(3^2-t^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3+8\left(\frac{3^2}{2}\arcsin\frac{t}{3}+\frac{1}{2}t\sqrt{3^2-t^2}\Big|_0^3\right)$$

$$=18+18\pi(\mathrm{t})$$

故所求压力为 $$P=P_1+P_2=50+18\pi(\mathrm{t})=(50+18\pi)g\times10^3(\mathrm{N})$$

【例 5.143】 一开口容器的侧面和底面分别由曲线弧段 $y=x^2-1$（$1\le x\le 2$）和直线段 $y=0$（$0\le x\le 1$）绕 y 轴旋转而成，坐标轴长度单位为 m，现以 $2\,\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$ 的速度向容器内注水，试求当水面高度达到容器深度一半时，水面上长的速度。

解 这是利用定积分求相变化度的问题。由题设知 $x=2$ 时，$y=3$，即容器的深度为 3m，当水深为 H 时，水的体积 V 可由旋转体计算公式表示为

$$V=\pi\int_0^H(\sqrt{y+1})^2\mathrm{d}y=\pi\int_0^H(y+1)\mathrm{d}y$$

所以
$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\pi(H+1)\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}$$

$$当\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=2时，\quad\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=\frac{2}{\pi(H+1)}$$

因 $H=\dfrac{3}{2}(\mathrm{m})$ 为容器深度的一半，于是

$$\left.\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\right|_{H=\frac{3}{2}}=\frac{4}{5\pi}(\mathrm{m/min})$$

【例 5.144】 半径为 R 的半球形水池充满水，将水从池中抽出，当抽出的水所作的功为将水全部抽空所作的功的一半时，试问水面下降的深度 H 为多少？

解 取横轴为 y 轴，纵轴为 x 轴（方向朝下）建立坐标系（画图）。取 x 作积分变量，对应 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 一薄层水，其体积 $\mathrm{d}V=\pi y^2\mathrm{d}x=\pi(R^2-x^2)\mathrm{d}x$，把这层水抽出所作的功为 $\mathrm{d}W=\rho g\pi(R^2-x^2)x\mathrm{d}x$，故水面下降的深度为 H 时，所作的功为

$$W(H)=\int_0^H\rho g\pi(R^2-x^2)x\mathrm{d}x=\frac{\pi\rho g}{4}H^2(2R^2-H^2)$$

其中 ρ 是水的密度，g 是重力加速度。由 $W(H)=\dfrac{1}{2}W(R)$ 得

$$\frac{\pi\rho g}{4}H^2(2R^2-H^2)=\frac{\pi\rho g}{8}R^4$$

即
$$H^4-2R^2H^2+\frac{R^4}{2}=0$$

解得 $H^2=\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)R^2$，于是 $H=\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}R$，即当抽出的水所作的功为将水全部抽空所作的功的一半时，液面下降的深度为 $\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}R$。

【例 5.145】 在 x 轴上，从原点到点 $P(l,0)$ 有一线密度为常数 ρ 的细棒，在点 $A(0,a)$ 处有一质量为 m 的质点，试求：

（1）细棒对质点的引力的大小和方向；

（2）当 $l\to+\infty$ 时，细棒对质点的引力的大小和方向。

解 对应 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 一小段细棒，其质量为 $\rho\,\mathrm{d}x$，它对质点的引力记作 $\mathrm{d}F$，其大小为 $|\mathrm{d}F|=\frac{km\rho\mathrm{d}x}{x^2+a^2}$，故它在两坐标轴上的分量为

$$\mathrm{d}F_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}|\mathrm{d}F|=\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\cdot\frac{km\rho\mathrm{d}x}{x^2+a^2}=\frac{km\rho x\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

$$\mathrm{d}F_y=\frac{-a}{\sqrt{x^2+a^2}}|\mathrm{d}F|=\frac{-kam\rho\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

从而（1）

$$F_x=\int_0^l\frac{km\rho x\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{3/2}}=-km\rho\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\bigg|_0^l$$

$$=km\rho\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\sqrt{l^2+a^2}}\right)=km\rho\frac{\sqrt{l^2+a^2}-a}{a\sqrt{l^2+a^2}}$$

$$F_y=-\int_0^l\frac{km\rho a\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{3/2}}\xlongequal{x=a\tan t}\frac{-km\rho}{a}\int_0^{\arctan\frac{l}{a}}\cos t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{-km\rho}{a}\frac{l}{\sqrt{l^2+a^2}}=\frac{-klm\rho}{a\sqrt{l^2+a^2}}$$

故 F 的大小为

$$|F|=\sqrt{F_x^2+F_y^2}=km\rho\sqrt{\frac{2}{a^2}-\frac{2}{a\sqrt{a^2+l^2}}}$$

设 F 与 x 轴的夹角为 α，于是

$$\tan\alpha=\left|\frac{F_y}{F_x}\right|=\frac{l}{\sqrt{l^2+a^2}-a}=\frac{\sqrt{l^2+a^2}+a}{l}$$

（2）当 $l\to+\infty$ 时，$F_x\to\frac{km\rho}{a}$，$F_y\to\frac{-km\rho}{a}$，因此 $|F|\to\frac{\sqrt{2}km\rho}{a}$，$\tan\alpha\to1$，$\alpha\to\frac{\pi}{4}$。

【例 5.146】 由物理学可知，质量为 m 的质点，速度为 v 时，具有的动能为 $\frac{1}{2}mv^2$；作圆周运动的质点，当转动半径为 r，角速度为 ω 时，它的线速度的大小为 $v=r\omega$。设有水平放置的直杆 AB 绕过 A 点的铅垂轴旋转，角速度 $\omega=10\pi/\mathrm{s}$，直杆的截面积 $S=4\mathrm{cm}^2$，杆长 $l=20\,\mathrm{cm}$，材料密度 $\rho=7.5\,\mathrm{g/cm^3}$；试求杆的动能。

解 取横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴（方向朝上），A 点与原点重合，建立坐标系（画图），取积分变量 $x, x\in[0,l]$，根据物理学中质点的动能公式，对应小区间 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 的一小段杆的动能为

$$\mathrm{d}E=\frac{v^2\mathrm{d}m}{2}=\frac{(x\omega)^2\rho S\mathrm{d}x}{2}$$

所以杆 AB 绕铅垂轴（y 轴）旋转时的动能为

$$\begin{aligned}E&=\int_0^l\frac{(x\omega)^2\rho S\mathrm{d}x}{2}=\int_0^l\frac{\rho S\omega^2}{2}x^2\mathrm{d}x=\frac{\rho S\omega^2l^3}{6}\\&=\frac{1}{6}(7.5)\cdot4\cdot(10\pi)^2\cdot(20)^3\,\mathrm{g\cdot cm^2/s^2}\\&=0.4\pi^2\mathrm{kg\cdot m^2/s^2}=0.4\times9.8698\mathrm{J}\approx3.95\mathrm{J}\end{aligned}$$

【例 5.147】 求长度为 l 的均匀细棒对距其一端距离为 a 的单位质点 M 的引力，假设单位质点位于过细棒一端且与细棒垂直的直线上。

解 细棒对质点 M 的引力是一个向量 $F(x,y)=(F_x,F_y)$。在细棒上取一典型小区间 $[x, x+\mathrm{d}x]$，设细棒的线密度为 ρ，则这一小段的质量为 $\rho\mathrm{d}x$，这一小段对质点的引力大小近似为 $|\mathrm{d}F|=\frac{k\cdot1\cdot\rho\mathrm{d}x}{x^2+a^2}$，$MN=(x-0,0-a)=(x,-a)$，$\boldsymbol{e}_{MN}=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}},\frac{-a}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)$，$\mathrm{d}F$ 的方向与 $\boldsymbol{e}_{MN}$ 方向相同，故

$$\mathrm{d}F=|\mathrm{d}F|\cdot\boldsymbol{e}_{MN}=\left(\frac{k\rho x\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{3/2}},\frac{-k\rho a\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{3/2}}\right)$$

$$F=\left(\int_0^l\frac{k\rho x\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{3/2}},\int_0^l\frac{-k\rho a\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{3/2}}\right)=\left[k\rho\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\sqrt{l^2+a^2}}\right),\frac{-k\rho l}{a\sqrt{a^2+l^2}}\right]$$

说明 对于向量函数 $F(t)=(x(t),y(t),z(t))$，其导数为 $F'(t)=(x'(t),y'(t),z'(t))$，其微分为 $\mathrm{d}F(t)=(\mathrm{d}x(t),\mathrm{d}y(t),\mathrm{d}z(t))$，其积分为

$$\int_a^bF(t)\mathrm{d}t=\left(\int_a^bx(t)\mathrm{d}t,\int_a^by(t)\mathrm{d}t,\int_a^bz(t)\mathrm{d}t\right)$$

【例 5.148】 设有一质量为 M，长为 l 的均匀杆 AB，一质量为 m 的质点 C 位于杆 AB 的中垂线上，且与 AB 的距离为 a。

（1）求杆 AB 对质点 C 的引力。

（2）当质点 C 在杆 AB 的中垂线上从 C 点移向无穷远处时，求克服引力所作的功。

解 以杆 AB 的中点为原点，杆 AB 为 x 轴，杆 AB 的中垂线为 y 轴建立直角坐标系。

（1）根据对称性，引力 F 的方向为 y 轴负方向，杆 AB 在 $[x, x+\Delta x]$ 上微元的质量为 $\frac{M}{l}\mathrm{d}x$，它与质点 C 的引力在 y 轴方向的分力为

$$\mathrm{d}F = k\frac{mM\mathrm{d}x}{l(x^2+a^2)}\cdot\frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

所以 $F = 2\int_0^{\frac{l}{2}}\mathrm{d}F = \frac{2kmM}{a\sqrt{4a^2+l^2}}$，其中 k 为引力常数

（2）根据（1），当质点 C 位于坐标 y 处时，引力 $F = \frac{2kmM}{y\sqrt{4y^2+l^2}}$，所以，克服引力所作的功为

$$W = \int_a^{+\infty}\frac{2kmM}{y\sqrt{4y^2+l^2}}\mathrm{d}y = \frac{2kmM}{l}\ln\frac{\sqrt{4a^2+l^2}+l}{a}$$

【例 5.149】 一个容器，内壁和外壁的形状分别为抛物线 $y=\frac{x^2}{10}+1$ 和 $y=\frac{x^2}{10}$ 绕 y 轴旋转而成的旋转面。容器的外高为 10cm，比重为 $\frac{25}{19}\mathrm{g/cm^3}$，把它铅直地浮在水中，再注入比重为 $3\mathrm{g/cm^3}$ 的重溶液，问要保持容器不沉没，注入的溶液的最大深度是多少？（长度单位为 cm。）

解 设容器的外观体积为 V，容器的容积为 V_1，则

$$V = \int_0^{10}\pi x^2\mathrm{d}y = 10\pi\int_0^{10}y\mathrm{d}y = 500\pi(\mathrm{cm^3})$$

$$V_1 = \int_1^{10}\pi x^2\mathrm{d}y = 10\pi\int_1^{10}(y-1)\mathrm{d}y = 405\pi(\mathrm{cm^3})$$

故容器的重量为 $$(V-V_1)\times\frac{25}{19} = (500\pi-405\pi)\times\frac{25}{19} = \frac{2375}{19}\pi$$

设注入溶液的深度为 h cm，则所注入的溶液的重量为

$$3\int_1^h\pi x^2\mathrm{d}y = 30\pi\int_1^h(y-1)\mathrm{d}y = 15\pi(h-1)^2\ (\mathrm{g})$$

要保持容器在水中不沉没，必须溶液与容器形成一体的比重为 ≤ 1，即

$$\frac{\frac{2375}{19}\pi+15\pi(h-1)^2}{500\pi}\leq 1$$

解之得$|h-1|\le 5$，于是溶液的最大深度$h\le 6\text{cm}$。

【例 5.150】 某建筑工程打地基时，需用汽锤将桩打进土层。汽锤每次击打，都将克服土层对桩的阻力而作功。设土层对桩的阻力的大小与桩被打进地下的深度成正比（比例系数为k，$k>0$）。汽锤第一次击打将桩打进地下a m（m 表示长度单位米）。根据设计方案，要求汽锤每次击打桩时所作的功与前一次击打时所作的功之比为常数$r\,(0<r<1)$。问：

（1）汽锤击打桩 3 次后，可将桩打进地下多深？

（2）若击打次数不限，汽锤至多能将桩打进地下多深？

解 本题属变力做功问题，可用定积分进行计算，而击打次数不限，相当于求数列的极限。

（1）设第n次击打后，桩被打进地下x_n，第n次击打时，汽锤所作的功为$W_n(n=1,2,3,\cdots)$。由题设，当桩被打进地下的深度为x时，土层对桩的阻力的大小为kx，所以

$$W_1=\int_0^{x_1}kx\mathrm{d}x=\frac{k}{2}x_1^2=\frac{k}{2}a^2$$

$$W_2=\int_{x_1}^{x_2}kx\mathrm{d}x=\frac{k}{2}(x_2^2-x_1^2)=\frac{k}{2}(x_2^2-a^2)$$

由$W_2=rW_1$可得$x_2^2-a^2=ra^2$，即$x_2^2=(1+r)a^2$，所以

$$W_3=\int_{x_2}^{x_3}kx\mathrm{d}x=\frac{k}{2}(x_3^2-x_2^2)=\frac{k}{2}[x_3^2-(1+r)a^2]$$

由$W_3=rW_2=r^2W_1$可得$x_3^2-(1+r)a^2=r^2a^2$，从而$x_3=\sqrt{1+r+r^2}a$，即汽锤击打 3 次后，可将桩打进地下$\sqrt{1+r+r^2}a$ m。

（2）由归纳法，设$x_n=\sqrt{1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}}a$，则

$$W_{n+1}=\int_{x_n}^{x_{n+1}}kx\mathrm{d}x=\frac{k}{2}(x_{n+1}^2-x_n^2)=\frac{k}{2}[x_{n+1}^2-(1+r+\cdots+r^{n-1})a^2]$$

由于$W_{n+1}=rW_n=r^2W_{n-1}=\cdots=r^nW_1$，故得$x_{n+1}^2-(1+r+\cdots+r^{n-1})a^2=r^na^2$，从而

$$x_{n+1}=\sqrt{1+r+\cdots+r^n}a=\sqrt{\frac{1-r^{n+1}}{1-r}}a$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\sqrt{\frac{1}{1-r}}a$$

即若击打次数不限，汽锤至多能将桩打进地下$\sqrt{\frac{1}{1-r}}a$ m。

【例 5.151】 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程

$$\begin{cases} x=1+2t^2 \\ y=\int_1^{1+2\ln t}\dfrac{e^u}{u}du \end{cases} \quad (t>1)$$

所确定，求 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=9}$。

解 由

$$\frac{dy}{dt}=\frac{e^{1+2\ln t}}{1+2\ln t}\cdot\frac{2}{t}=\frac{2et}{1+2\ln t}, \quad \frac{dx}{dt}=4t$$

得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{\dfrac{2et}{1+2\ln t}}{4t}=\frac{e}{2(1+2\ln t)}$$

所以

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{1}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{e}{2}\cdot\frac{-1}{(1+2\ln t)^2}\cdot\frac{2}{t}\cdot\frac{1}{4t}=-\frac{e}{4t^2(1+2\ln t)^2}$$

当 $x=9$ 时，由 $x=1+2t^2$ 及 $t>1$ 得 $t=2$，故

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=9}=-\left.\frac{e}{4t^2(1+2\ln t)^2}\right|_{t=2}=-\frac{e}{16(1+2\ln 2)^2}$$