南京信息工程大学
Nanjing University of Information Science & Technology

线性代数

数学与统计学院　公共数学教学部

线性代数教学团队

第四章 向量空间及线性方程组解的结构

目录

CONTENTS

第4.1节 n 维向量及其线性运算

目录

CONTENTS

n 维向量及其线性运算

理解： 向量的有关概念

向量的线性运算

掌握： n维向量的加法和数乘运算

重点： 维向量及其线性运算

难点： 维向量的加法和数乘运算

一、向量的基本概念

定义1 由 n 个数构成的有序数组 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 称为 n 维向量. 其中第 i 个数 $a_i (i=1,2,\cdots n)$ 称为向量的第 i 个分量.

1. 向量的分类：分量为实数的向量称为实向量，

分量为复数的向量称为复向量.

2. 向量的表示：

n 维列向量(列矩阵)

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

通常用$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \cdots$ 表示

n 维行向量(行矩阵)

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

通常用 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}, \cdots$ 表示

说明：（1）行向量和列向量总被看作是不同的向量；

(2) 当没有明确说明是行向量还是列向量时，都当作列向量.

3. 向量的相等：同维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，如果 $a_i=b_i(i=1,2,\cdots,n)$，则称这两个向量相等，记为 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.

4. 特殊的向量

(1) 零向量：分量全为零的向量 $(0,0,\cdots,0)$，记为 $\mathbf{0}$.

注1：维数不同的零向量不同.

(2) 负向量：向量 $(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$ 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 的负向量，记作 $-\boldsymbol{\alpha}$.

二、向量的运算

1. 加(减)法　设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$， $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$， 则

$$\boldsymbol{\alpha}\pm\boldsymbol{\beta}=(a_1\pm b_1,a_2\pm b_2,\cdots,a_n\pm b_n).$$

2. 数乘　设 k 是一个数，则称 $k\boldsymbol{\alpha}=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$ 为 k 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 的**数乘**.

注：矩阵的加法和数乘称为矩阵的线性运算.

线性运算的运算律

(1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$ ； 加法交换律

(2) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$ ； 加法结合律

(3) $\mathbf{0}+\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$ ， $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$ ；

(4) $k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$； 数乘的结合律

(5) $0\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0},\ 1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha},\ (-1)\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha},\ k\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}$；

(6) $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$； 对向量的分配律

(7) $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$. 对数的分配律

(8) $k\cdot\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 或 $k=0$.

3. 乘法 设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$， $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$， 则

$$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$$, 是一个数.

$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 阶方阵.

三、向量与矩阵的关系

定义2 若干个同维数的列向量(或同维数的行向量)所组成的集合叫做向量组.

$$\text{如 } m\times n \text{ 阶矩阵 } \boldsymbol{A}=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & & \boldsymbol{\alpha}_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{matrix}} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{matrix}} \end{pmatrix} \end{array} =(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$$

称 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**列向量组**.

$$m\times n\text{阶矩阵 }\boldsymbol{A}=\begin{array}{c}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} \\ \\ \boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}}\end{array}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

称 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**行向量组**.

结论： 一个 $m\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可确定一个 n 个 m 维的列向量组

和一个 m 个 n 维行向量组， 反之亦然.

内容小结

1. 向量的基本概念；

2. 向量的运算(加法和数乘).

思考题

1. 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,\ 0,3)$ 与平行 $\boldsymbol{\beta}=k\boldsymbol{\alpha}=(2,\ t,6)$，求 t.

【答：0】

2. 设 $\boldsymbol{\beta}=(3,4,-5)=3\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$,

其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0), \boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0), \boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,c)$，求 c.

【答：-5】

行动

是治愈恐惧的良药，

而犹豫、拖延

将不断滋养恐惧。

第4.2节 向量组的线性相关性

目录

CONTENTS

向量的线性相关性

理解： 向量组的线性表示

向量组线性相关（无关）的

概念及其性质

掌握： 判别向量组线性相关

（无关）的 方法

重点： 向量组线性相关性的性质

难点： 向量组线性相关（无关）

的判别法

一、向量组的线性组合与线性表示

◇ 线性组合

定义1 给定向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$, 对于任意一组实数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$, 向量

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$$

称为向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的一个**线性组合**,

$k_1,k_2,\cdots,k_m$ 称为这个线性组合的**系数**.

◇ 线性表示

定义2 给定向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$和向量$\boldsymbol{\beta}$，如果存在一组数数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m.$$

则向量$\boldsymbol{\beta}$是向量组A的线性组合，或称向量 $\boldsymbol{\beta}$ **能由向量组** A **线性表示**.

注1 若向量$\boldsymbol{\beta}$能由向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性表示，即$\boldsymbol{\beta}=k\boldsymbol{\alpha}$，则称$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$成比例.

注2 零向量是任意向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性组合, 因为

$$\mathbf{0}=0\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_m.$$

注3 任一 n 维向量均可由 n 维单位坐标向量组线性表示, 且系数即为其分量.

n 维单位坐标向量组

$$e_1=(1,0,0,\cdots,0,0)^T$$
$$e_2=(0,1,0,\cdots,0,0)^T$$
$$\vdots$$
$$e_n=(0,0,0,\cdots,0,1)^T$$

则对任意的 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$,

均有 $\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{e}_n.$

分析 向量β能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示

$\Longleftrightarrow$ 线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=\beta$ 有解

$\Longleftrightarrow$ $R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta)$

定理1 向量β能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示的充要条件是线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=\beta$ 有解, 即

$$R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta).$$

例1 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,2,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$. 问向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能否由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示, 若能, 求出其表达式.

解 $$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&-1&0&2&2\\0&0&1&1&3\\0&0&1&1&4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4-r_3}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&-1&0&2&2\\0&0&1&1&3\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta})\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&-1&0&2&2\\0&0&1&1&3\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3\neq R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta})=4$$

故方程组无解, 即

向量$\boldsymbol{\beta}$不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示.

例2 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{\beta}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$. 问向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能否由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示, 若能, 求出其表达式.

解 $$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&0&0&1\\0&1&1&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

$\therefore\ R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})=3.$ 故方程组有唯一解, 即向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一表示, 且 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$.

例3 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,4,0,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,7,1,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,-1,a)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(3,10,b,4)^{\mathrm{T}}$.

问(1) a,b 取何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？

(2) a,b 取何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示? 并写出此表示式.

解 令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})$, 对 $\boldsymbol{B}$ 施以初等行变换, 有

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&0&3\\4&7&1&10\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\end{array}\right)\xrightarrow[r_4-2r_1]{r_2-4r_1}\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&1&-1&b\\0&-1&a&-2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_4}\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&-1&a&-2\\0&1&-1&b\end{array}\right)\xrightarrow[r_4+r_2]{r_3-r_2}\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&0&a-1&0\\0&0&0&b-2\end{array}\right)$$

因此, 当 $b\neq 2$ 时, $R(\boldsymbol{A})\neq R(\boldsymbol{B})$, 从而 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

当 $b=2$ 时, $R(A)=R(\boldsymbol{B})$, 从而 $\boldsymbol{\beta}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(1) 若 $a=1$, 则

$$\boldsymbol{B} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2\times(-1)]{r_1+2r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

于是, $\boldsymbol{\beta}=-(2k+1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k+2)\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3$ (k 为任意常数).

(2) 若 $a \neq 1$，则

$$\boldsymbol{B} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 \times \frac{1}{a-1}]{\substack{r_1+2r_2 \\ r_2\times(-1)}} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{r_1-2r_3 \\ r_2+r_3}} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

于是，$\boldsymbol{\beta} = -\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2$.

注 若要处理行向量的问题，只需将其转置变成列向量即可.

◇ 两向量组等价

定义3 设有两向量组

$$A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m \text{ 与 } B:\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$$

若 向量组B 中的每一个向量都能由 向量组A 线性表示, 则称**向量组 B 能由向量组 A 线性表示**; 若向量组 B 与向量组 A 可以相互线性表示, 则称这**两个向量组等价**.

向量的线性相关性

即对每一个向量 $\boldsymbol{\beta}_j\,(j=1,2,\cdots,s)$，存在数 $k_{1j},k_{2j},\cdots,k_{mj}$，使

$$\boldsymbol{\beta}_1=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)\begin{pmatrix}k_{11}\\k_{21}\\\vdots\\k_{m1}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_2=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)\begin{pmatrix}k_{12}\\k_{22}\\\vdots\\k_{m2}\end{pmatrix},\ \cdots\cdots\ ,\boldsymbol{\beta}_s=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)\begin{pmatrix}k_{1s}\\k_{2s}\\\vdots\\k_{ms}\end{pmatrix}.$$

按顺序拼接后可得:

$$\underbrace{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)}_{\boldsymbol{B}}=\underbrace{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)}_{\boldsymbol{A}}\underbrace{\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}&\cdots&k_{1s}\\k_{21}&k_{22}&\cdots&k_{2s}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\k_{m1}&k_{m2}&\cdots&k_{ms}\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{K}}.$$

系数矩阵

结论1 若列向量组 $B:\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 能由列向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示, 则存在 $m\times s$ 矩阵 $\boldsymbol{K}$, 使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AK}$.

反之, 可验证若存在 $m\times s$ 矩阵 $\boldsymbol{K}$ 满足 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AK}$, 则列向量 B 可由列向量组 A 线性表示.

结论2 若行向量组 $B:\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 能由行向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示, 则存在 $s\times m$ 矩阵 $\boldsymbol{M}$, 使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{MA}$.

推论1 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示的充要条件是 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{K}$. ★★★

推论2 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组可由 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性表示的充要条件是 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{K}\boldsymbol{A}$. ★★★

其中 $\boldsymbol{K}$ 为线性表示的系数矩阵.

注4 向量组的等价关系具有反身性、对称性和传递性.

向量的线性相关性

若 $C_{m\times n}=A_{m\times s}B_{s\times n}$，则

1. 矩阵C的列向量组能由矩阵A的列向量组线性表示，B为这一表示的系数矩阵.

$$(c_1,c_2,\cdots,c_n)=(a_1,a_2,\cdots,a_s)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & k_{s2} & \cdots & k_{sn} \end{pmatrix}$$

2. 矩阵C的行向量组能由矩阵B的行向量组线性表示，A为这一表示的系数矩阵.

$$\begin{pmatrix} \gamma_1^T \\ \gamma_2^T \\ \vdots \\ \gamma_m^T \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_s^T \end{pmatrix}$$

二、向量组的线性相关性

定义4 给定向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$, 如果存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$, 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$$

则称向量组 A 是**线性相关**的, 否则称它是**线性无关**.

注5 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关 $\Longleftrightarrow$ 只有当 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$ 时, 才有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$ 成立.

注6 对于任一向量组而言, 不是线性无关的就是线性相关.

注7 含有零向量的向量组一定线性相关.

注8 n 个 n 维单位坐标向量组线性无关.

注9 若 $m=1$, 即向量组只有一个向量,

则当 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$ 时, 线性无关, 当 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ 时, 线性相关.

注10 若 $m=2$, 即向量组含有两个向量,

则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关的充要条件是两向量的分量对应成例.

几何意义是两向量共线.

三、线性相关与线性表示的关系

定理2 若 $m \geq 2$，向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 中至少有一个向量能由其余 $m-1$ 个向量线性表示.

注11 至少有一个不能理解为任何一个.

◇ 线性性相关性的判别法

回忆: 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关充要条件是存在不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_m$, 使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$.

结论: 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关(无关)

$\Longleftrightarrow$ 齐次线性方程组$\boldsymbol{x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=0}$,

即 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 有非零解 (只有零解), 其中 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$.

$\Longleftrightarrow$ $R(\boldsymbol{A})<m$ $(R(\boldsymbol{A})=m)$.

定理3 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关(无关)的充要条件是它所构成的矩阵 $R(\boldsymbol{A})<m$ ($R(\boldsymbol{A})=m$)，其中 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$.

推论3 n 个 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关(无关)的充要条件是 $|\boldsymbol{A}|=0$ ($|\boldsymbol{A}|\neq 0$)，其中 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$.

例4 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,2,5)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,4,7)^{\mathrm{T}}$，判断其线性相关性.

解 (法一: 求秩法)

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&2&4\\1&5&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&2\\0&5&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\therefore R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2<3 \xrightarrow[\text{定理3}]{} \text{线性相关}$$

(法二: 求行列式法)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow{\text{推论3}} \text{线性相关}$$

例4 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关 $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,$ $\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$, 证明向量组 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ 线性无关.

证 (法一: 按照定义)

假设存在数 x_1,x_2,x_3 使得 $x_1\boldsymbol{b}_1+x_2\boldsymbol{b}_2+x_3\boldsymbol{b}_3=\mathbf{0}$

由于 $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$,

所以 $x_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+x_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+x_3(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathbf{0}$.

则有 $(x_1+x_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(x_1+x_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(x_2+x_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}.$

由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 可得 $\begin{cases} x_1+x_3=0 \\ x_1+x_2=0 \\ x_2+x_3=0 \end{cases}$

$$\because \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \quad \therefore\ x_1=x_2=x_3=0$$

因此向量组 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ 线性无关.

(法二: 等价向量组对应的矩阵秩相等)

$$\because\ \boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$$

$$\therefore\quad (\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$ 可逆.

由于右乘可逆矩阵不改变秩, 即

$$R(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)=R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$$

又因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关， 所以$R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$.

故 $R(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)=3$.

因此向量组 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ 线性无关.

四、线性相关性的性质

定理4　（1）　若向量组 $A:\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关,

则向量组 $B: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$ 也线性相关.

反言之, 若向量组B 线性无关,　则向量组A也线性无关.

部分组相关，整体相关；整体无关，部分组无关.

证明:　记 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$,　$B = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1})$.

则有: $R(B) \le R(A)+1$.

若向量组A线性相关, 则由定理得:　$R(A)<m$,

从而 $R(B)\le R(A) +1 < m+1$.

因此, 由定理得：向量组B 线性相关.

（2） m 个 n维向量组成的向量组，当 $n < m$ 时一定线性相关.

向量个数大于向量维数时，向量组线性相关.

证明: 记 m个n维向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$构成的矩阵

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)_{n \times m}.$$

则有: $R(A) \le n$.

因此，当 $n < m$ 时，有：$R(A) \le n < m$.

由定理，得向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关.

（3）设向量组 A: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关,

而向量组 B: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta$ 线性相关,

则向量β必能由向量组A线性表示, 且表示式是唯一的.

证明: 记 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$, $B=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta)$.则有$R(A)\le R(B)$

由向量组A线性无关, 根据定理, 得: $R(A)=m$.

由向量组 B线性相关, 根据定理, 得: $R(B)<m+1$,

故 $m=R(A)\le R(B)<m+1$, 所以 $R(B)=m$.

再由 $R(A)=R(B)=m$ 知, 方程组 $Ax=\beta$有唯一解.

即： 向量β能由向量组A线性表示, 且表示式唯一.

注13 该性质刻画了线性相关和线性无关与线性表示之间的一种内在联系.

(4) 若 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, 在向量组的每个向量上添加 s 个分量, 则所得到的 $n+s$ 维向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$(也称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的延伸组)仍是线性无关. 反之, 若 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 也线性相关.

注14 延伸组未必是在向量组中每个向量的最后添加分量, 前面添加、中间添加皆可.

无关向量组的延伸向量组也线性无关
(延伸向量组线性相关则原向量组也相关)

证明: 记$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)_{r\times m}$, $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)_{(r+1)\times m}$.

则有 $R(A)\le R(B)$.

由向量组A线性无关，根据定理，得$R(A)=m$.

从而有：$R(B)\ge m$.

又因为B只有m列, 得: $R(B)\le m$.

故 $R(B)=m$. 根据定理，得向量组B 线性无关.

性质（4）是对增加一个分量(即维数增加1维)而言的，增加多个分量时，结论也成立.

例5 判断下列向量组的线性相关性.

(1) $(1,2,3)^{\mathrm{T}},(4,5,6)^{\mathrm{T}},(7,8,9)^{\mathrm{T}},(9,a,0)^{\mathrm{T}}$

(2) $(1,5,0,0)^{\mathrm{T}},(0,2,3,0)^{\mathrm{T}},(2,7,2,2)^{\mathrm{T}}$

(3) $(1,1,1,1)^{\mathrm{T}},(1,-1,2,-2)^{\mathrm{T}},(1,1,4,4)^{\mathrm{T}},(1,-1,8,-8)^{\mathrm{T}}$

解 (1) 由定理4(2), 四个三维向量的向量组一定线性相关.

(2) 取出每个向量的第1个、第3个和第4个分量

$$(\boxed{1}, 5, \boxed{0}, \boxed{0})^{\mathrm{T}}, (\boxed{0}, 2, \boxed{3}, \boxed{0})^{\mathrm{T}}, (\boxed{2}, 7, \boxed{2}, \boxed{2})^{\mathrm{T}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \longrightarrow (1,0,0)^{\mathrm{T}}, (0,3,0)^{\mathrm{T}}, (2,2,2)^{\mathrm{T}} \text{ 线性无关}$$

$\xrightarrow{\text{定理4(4)}}$ 延伸组 $(1,5,0,0)^{\mathrm{T}}, (0,2,3,0)^{\mathrm{T}}, (2,7,2,2)^{\mathrm{T}}$ 线性无关

(3) 向量组对应矩阵的行列式的转置是范德蒙德行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \end{vmatrix} \neq 0$$

$\therefore$ $(1,1,1,1)^T,(1,-1,2,-2)^T,(1,1,4,4)^T,(1,-1,8,-8)^T$线性无关.

例6 证明若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(a,0,c),\boldsymbol{\alpha}_2=(b,c,0),\boldsymbol{\alpha}_3=(0,a,b)$ 线性相关, 则有 $abc=0$.

提示 $$0=\begin{vmatrix} a & 0 & c \\ b & c & 0 \\ 0 & a & b \end{vmatrix}=2abc$$

例7 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关, 向量组$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关.

证明：(1) $\boldsymbol{\alpha}_1$能由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

证 (1) 因为向量组$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关.

所以向量组$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$也线性无关.

而向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关, 则由定理4(3)可知：

$\boldsymbol{\alpha}_1$能由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

(2) (反证法)

若 α_4 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

因为 α_1 能由 α_2,α_3 线性表示.

所以 α_4 能由向量 α_2,α_3 线性表示.

即向量组 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，与已知矛盾.

故 α_4 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

内容小结

1. 线性组合与线性表示;
2. 线性相关与线性无关;
3. 线性相关与线性表示的关系;
4. 线性相关性的性质

思考题：

1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}=(a,1,1)^{\mathrm{T}}$. 已知 $\boldsymbol{A\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关，求 a 的值.

【答：-1】

2. 等价的向量组所包含的向量个数是否必须相等？

【答：不一定】

南京信息工程大学
Nanjing University of Information Science & Technology

艰难困苦，
玉汝于成，
人生的道路不会永远是坦途，
直面困难需要勇气，
挑战困难离不开坚韧，
但跨越了困难便是成长与历练！

第4.3节 向量组的秩

目录

CONTENTS

向量组的秩

理解： 最大线性无关组的概念及性质

向量组秩的概念及性质；

掌握： 矩阵的秩与向量组的秩

之间的关系

向量组的最大线性无关组

与秩的求法

重点： 向量组的最大线性无关组与 秩

向量组(矩阵)秩的性质

难点： 向量组的最大线性无关组

一、向量组的秩

定理1 向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，$B:\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 满足

(1) 向量组 A 可由向量组 B 线性表示；

(2) $s>t$，

则向量组 A 线性相关.

证 设 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}$， 即 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} = \mathbf{0}$

由条件(1)，存在矩阵 $\boldsymbol{K}_{t\times s}$， 使得

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t)\boldsymbol{K}_{t\times s},$$

从而有 $(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t)\boldsymbol{K}_{t\times s}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$

向量组的秩

又由条件(2)，$R(\boldsymbol{K}_{t\times s})\le t<s$ ，故方程组 $\boldsymbol{K}_{t\times s}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix}=\mathbf{0}$ 有非零解.

即 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

推论1 若向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由 $B:\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示，且 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则 $s\le t$.

推论2 等价的线性无关的向量组一定含有相同个数的向量.

定义1 如果向量组中有 r 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$，满足

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关；

(2) 向量组中任一向量都可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示，

则称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量组的一个极大(最大)线性无关向量组，简称极大无关组.

注 (1) 定义中的条件(2)也可表述为向量组 A 中任意 $r+1$ 个向量都线性相关.

(2) 只含零向量的向量组没有极大无关组.

(3) 线性无关的向量组的极大线性无关组是其本身.

(4) 向量组的极大无关组不唯一.

例如向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}4\\-2\\5\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\\3\end{pmatrix}$

易知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 都是该向量组的极大无关组.

(5) 向量组的任一极大无关组都与向量组本身等价.

理论证明中常用极大无关组代替向量组

(6) 向量组的任意两个极大线性无关组都等价，且包含的向量个数相同.

向量组的秩

定义2 向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的极大无关组所含向量的个数称为该**向量组的秩**. 记为 R_A.

注 (1) 只含零向量的向量组的秩为0.

(2) 若向量组 A 的秩为 r，则向量组 A 的任意 r 个线性无关的向量构成向量组 A 的一个极大无关组.

证 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量组 A 的一个极大线性无关组,

$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 是向量组 A 的一个线性无关部分组.

任取向量组 A 中的一个向量 $\boldsymbol{\gamma}$, 则存在矩阵 $\boldsymbol{K}_{r\times(r+1)}$, 使得

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r,\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)\boldsymbol{K}$$

若存在数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r,\lambda_{r+1}$, 使得

$$\lambda_1\boldsymbol{\beta}_1+\lambda_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{\beta}_r+\lambda_{r+1}\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$$

则 $\lambda_1\boldsymbol{\beta}_1+\lambda_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{\beta}_r+\lambda_{r+1}\boldsymbol{\gamma}$

$$=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r,\boldsymbol{\gamma})\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_{r+1}\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)\boldsymbol{K}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_{r+1}\end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

因为$R(\boldsymbol{K})\le r<r+1$，

所以齐次线性方程组 $\boldsymbol{K}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_{r+1}\end{pmatrix}=\mathbf{0}$ 存在非零解.

即 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r,\lambda_{r+1}$ 不全非零,

则向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r,\boldsymbol{\gamma}$ 线性相关.

又向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 是线性无关的,

于是 $\boldsymbol{\gamma}$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性表示，故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 是

向量组 A 的一个最大线性无关组.

(3) r 是向量组 A 中能找到的线性无关的向量的最大数目.

证 如果向量组 A 中存在一个线性无关的部分组 B 含有 $r+1$ 个向量. 由极大线性无关组的定义，部分组 B 可由极大无关组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示，而部分组 B 又是线性无关的.

则由推论1知 $r+1<r$，这是不可能的.

二、与向量组的秩有关的结论

定理2 向量组 A 可由向量组 B 线性表示，则 $R_A \le R_B$.

证 设向量组 A 的极大无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$,

向量组 B 的极大无关组为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$.

由已知, 得向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示,

又 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，从而由推论1，得 $s \le t$.

即 $R_A \le R_B$.

推论3 等价的向量组具有相同的秩.

定理3 矩阵的秩等于其列向量组的秩, 也等于其行向量组的秩.

证 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$, 且 $R(\boldsymbol{A})=r$.

(1) 当 $r=n$ 时, 则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关, 因而列向量组的秩为 r, 即矩阵的秩等于它的列向量组的秩.

(2) 当$r<n$时，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有一个 r 阶子式不为零，记为D_r.

不妨设D_r 位于 $\boldsymbol{A}$ 的左上角，则 D_r 对应的 r 个列向量线

线性无关，进而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 也线性无关.

又因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任意 $r+1$ 阶子式都为零，

所以 $\boldsymbol{A}$ 中任意 $r+1$ 个列向量都线性相关.

因此 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩为 r，即矩阵的秩等于它的列向

量组的秩.

又因为 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩等于矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的列向量组的秩.

由上述证明可知，矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的列向量组的秩等于 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的秩.

而 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$.

因此 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩也等于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

定理4 初等行变换不改变列向量组的线性相关性.

注 初等列变换不改变行向量组的线性相关性.

证 设 $A_{m\times n}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\xrightarrow{\text{行变换}}\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$.

其中, $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 和 $\boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_r}$ 分别是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的任意部分组.

命题即为证明:

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_{i_1}+k_2\boldsymbol{\alpha}_{i_2}+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_{i_r}=\mathbf{0}\Leftrightarrow k_1\boldsymbol{\beta}_{i_1}+k_2\boldsymbol{\beta}_{i_2}+\cdots+k_r\boldsymbol{\beta}_{i_r}=\mathbf{0}.$$

由题设, 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PA}$. 即

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n).$$

向量组的秩

$$\text{于是，}\boldsymbol{P}(k_1\boldsymbol{\alpha}_{i_1}+k_2\boldsymbol{\alpha}_{i_2}+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_{i_r})=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2}\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r})\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_r\end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_r})\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_r\end{pmatrix}=k_1\boldsymbol{\beta}_{i_1}+k_2\boldsymbol{\beta}_{i_2}+\cdots+k_r\boldsymbol{\beta}_{i_r}=\mathbf{0}.$$

$$\text{从而，}k_1\boldsymbol{\alpha}_{i_1}+k_2\boldsymbol{\alpha}_{i_2}+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_{i_r}=\mathbf{0}\Leftrightarrow k_1\boldsymbol{\beta}_{i_1}+k_2\boldsymbol{\beta}_{i_2}+\cdots+k_r\boldsymbol{\beta}_{i_r}=\mathbf{0}.$$

注 向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的秩记为 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$.

求向量组秩和极大无关组的方法：

列向量组 → 矩阵 → **行最简形**

行最简形 → 列向量组

利用行最简形求原向量组的秩等

向量组的秩

例1 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\0\\7\\14\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}2\\1\\5\\10\end{pmatrix}.$

(1) 求向量组的秩；

(2) 向量组的一个极大无关组；

行阶梯形

行最简形

(3) 将其余向量用此极大无关组线性表示.

向量组的秩

解 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-2&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&0&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

$=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5)$

所以 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=3.$

由 β_1,β_2,β_4 线性无关，可得 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 也线性无关的.

因此 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 是向量组的一个极大无关组.

向量组的秩

$$A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-2&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&0&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

进而，有 $\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_5=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$.

注　易见 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 或者 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 也是极大线性无关组. 但我们往往取行最简形竖线后第一个元素所在的列为极大无关组.

例2 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\-3\\5\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\\p+2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-2\\-6\\10\\p\end{pmatrix}$. 问 p 为何值时，该向量组线性相关，并在此时求出该向量组的一个极大无关组及将其余向量用此极大无关组线性表示.

解 记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$.

$$\because \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 2 & -6 \\ 1 & 5 & -1 & 10 \\ 3 & 1 & p+2 & p \end{vmatrix} = 14(p-2),$$

所以, 当 $p=2$ 时, 向量组线性相关.

向量组的秩

此时，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & -2\\ 1 & -3 & 2 & -6\\ 1 & 5 & -1 & 10\\ 3 & 1 & 4 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是向量组的一个极大无关组，且 $\boldsymbol{\alpha}_4=2\boldsymbol{\alpha}_2$.

三、矩阵的秩的性质

性质1 $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \le R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B}).$

性质2 $R(\boldsymbol{AB}) \le \min\{R(\boldsymbol{A}),\ R(\boldsymbol{B})\}.$

性质3 $\max\{R(\boldsymbol{A}), R(\boldsymbol{B})\} \le R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \le R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B}).$

课后作业： 总结矩阵秩的各种性质.

性质1的证明 $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\le R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B}).$

证 设$\boldsymbol{A}_{m\times n},\boldsymbol{B}_{m\times n}$ ，$R(\boldsymbol{A})=r,R(\boldsymbol{B})=s.$

对 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 作列分块，即 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$, $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n).$

则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\beta}_n).$

显然$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\beta}_n$ 可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$, $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$

线性表示.

所以 $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\le R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n).$

又设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的极大无关组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$

向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的极大无关组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$

由于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\ \boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,$

$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示.

所以 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$

$$\leq R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)\leq r+s=R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B}).$$

综上所述可得：$R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leq R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B}).$

性质2的证明 $R(\boldsymbol{AB}) \le \min\{R(\boldsymbol{A}), R(\boldsymbol{B})\}$

证 记 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$， 则 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组可以由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示.

故 $R(\boldsymbol{AB})=R(\boldsymbol{C})\le \boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩 $=R(\boldsymbol{A})$.

另一方面, 则 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组可以由 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性表示.

故 $R(\boldsymbol{AB})=R(\boldsymbol{C})\le \boldsymbol{B}$ 的行向量组的秩 $=R(\boldsymbol{B})$.

因此 $R(\boldsymbol{AB})\le \min\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}$.

例3 向量组 B 可由向量组 A 线性表示，且$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$，证明向量组 A 与向量组 B 等价.

证　设$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=r$.

取向量组 A 的一个极大线性无关组：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$，

向量组 B 的一个极大线性无关组：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$.

因为向量组 B 可由向量组 A 线性表示，所以$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$

可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$表示.

则存在 r 阶矩阵 $\boldsymbol{K}$， 使得 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)\boldsymbol{K}$.

由性质2得 $r=R(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r)=R(\boldsymbol{K})$.

因此 $R(\boldsymbol{K})=r$， 即矩阵 $\boldsymbol{K}$ 可逆.

$\therefore\ (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r)\boldsymbol{K}^{-1}$.

这表明$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示， 即向量组 A 也可由向量组 B 线性表示.

所以向量组 A 与向量组 B 等价.

例4 已知 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \\ -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)=\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 6 & -4 \\ -5 & 3 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}$,

证明：向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 与 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 等价.

分析：只需证明存在 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ 使得

$$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)\boldsymbol{X}, \quad (\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{Y}$$

证 法1 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 4 \\ 0 & -2 & 6 & -4 \\ -1 & 1 & -5 & 3 \\ 3 & -1 & 9 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

得 $X=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$

由于 $|X|=7\neq 0.$ 故 X 可逆. 所以 $Y=X^{-1}.$

因此向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 与 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 等价.

法2 $$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)=\begin{pmatrix}2&3&-5&4\\0&-2&6&-4\\-1&1&-5&3\\3&-1&9&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-3&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

得 $R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)=R(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)=R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)=2.$

所以向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 与 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 都是向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 极大无关组.

因此向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 与 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 等价.

内容小结

1. 向量组的秩；
2. 利用初等变换求向量组的秩；
3. 利用向量组的秩处理矩阵的秩的证明.

思考题:

1. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,k,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(0,-4,5,-2)^{\mathrm{T}}$ 的秩为2，求k.

【答：3 】

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(0,1,2),\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

【答：1 】

南京信息工程大学
Nanjing University of Information Science & Technology

珍惜当下，

把握当下，

让自律成为一种习惯，

一点一滴的积累终将铸就

不一样的你！

第4.4节 向量空间

目录

CONTENTS

向量空间

理解： 向量空间的基、维数

坐标的概念及其关系

重点： 向量空间的基和维数

过渡矩阵和坐标变换公式

掌握： 过渡矩阵与坐标变换

之间的关系

难点： 过渡矩阵与坐标变换

之间的关系

一、向量空间

引言 前面我们学习了向量的概念，定义了向量的加法和数乘两种线性运算；并知道了对于一个向量组来说，有个重要的问题是找出它的极大线性无关组。

本节要讨论的向量空间，是**具有某种特性的向量组**，这种特性与向量的线性运算有关。

1. 向量空间的定义

定义1 设 V 是由 n 维向量构成的一个非空集合，k 为实数，

若(1) 对任意的 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$ 都有 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V$;

(2) 对任意的 $\boldsymbol{\alpha}\in V$ 都有 $k\boldsymbol{\alpha}\in V$.

即 V 对向量的加法和数乘运算封闭，则称 V 是向量空间.

注 由所有 n 维向量构成的集合是向量空间，称为 n 维向量空间，记为 $\mathbf{R}^n$.

例1 判断下列集合是否为向量空间.

(1) $V_1=\left\{\boldsymbol{x}=(0,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\middle| x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}\right\}$;

(2) $V_2=\left\{\boldsymbol{x}=(1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\middle| x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}\right\}$.

解题思路 判断一个向量组是不是向量空间，只需考察此向量组对向量的加法和数乘运算是否封闭，只要有一条不符合便不是向量空间.

解 (1) 对任意的 $\boldsymbol{\alpha}=(0,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}=(0,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$, 及 $k\in\mathbf{R}$.

显然，有 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(0,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)^{\mathrm{T}}\in V$,

$$k\boldsymbol{\alpha}=(0,ka_2,\cdots,ka_n)^{\mathrm{T}}\in V.$$

因此 V_1是向量空间.

(2) 任取 $\boldsymbol{\alpha}=(1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}\in V_2$ ， 但是

$$2\boldsymbol{\alpha}=\{2,2a_2,\cdots,2a_n\}\notin V_2,$$

即 V_2 对向量的数乘运算不封闭，所以不是向量空间.

2. 子空间的定义

定义2 如果 V_1, V_2 都是向量空间，并且 $V_2 \subseteq V_1$，那么称 V_2 是 V_1 的一个子空间.

注1 例1中的向量空间 V_1 是 $\mathbf{R}^n$ 的子空间.

注2 只含有零向量的集合 $\{\mathbf{0}\}$ 是向量空间，它是任意一个向量空间的子空间，称为**零子空间**.

由向量组生成的向量空间

设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中一组向量，用V表示$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的全部线性组合所构成的集合：

$$V=\left\{k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\,\middle|\,k_1,k_2,\cdots,k_s\in\mathbf{R}\right\}$$

问　集合V是一个向量空间吗？

答　是，因为V对向量的线性运算封闭.

证 显然 V 非空. 对任意

$$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s,\ \boldsymbol{\beta}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_s\boldsymbol{\alpha}_s\in V.$$

以及 $k\in\mathbf{R}$ 都有

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(k_1+l_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2+l_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_s+l_s)\boldsymbol{\alpha}_s\in V;$$

$$k\boldsymbol{\alpha}=kk_1\boldsymbol{\alpha}_1+kk_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+kk_s\boldsymbol{\alpha}_s\in V.$$

因此集合 V 是一个向量空间，称为由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 生成的向量空间，记为 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$.

例2 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 等价，记

$$V_1=\{\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\mid k_1,k_2,\cdots,k_n\in\mathbf{R}\},$$

$$V_2=\{\boldsymbol{\beta}=l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+l_t\boldsymbol{\beta}_t\mid l_1,l_2,\cdots,l_t\in\mathbf{R}\},$$

试证: $V_1=V_2$.

证 对任意 $\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\in V_1$, 根据题意可知

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示，

则 $\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$

$$=k_1(l_{11}\boldsymbol{\beta}_1+l_{21}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+l_{t1}\boldsymbol{\beta}_t)+k_2(l_{12}\boldsymbol{\beta}_1+l_{22}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+l_{t2}\boldsymbol{\beta}_t)$$

$$+\cdots+k_s(l_{1s}\boldsymbol{\beta}_1+l_{2s}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+l_{ts}\boldsymbol{\beta}_t)$$

$$=(k_1l_{11}+k_2l_{12}+\cdots+k_sl_{1s})\boldsymbol{\beta}_1+(k_1l_{21}+k_2l_{22}+\cdots+k_sl_{2s})\boldsymbol{\beta}_2$$

$$+\cdots+(k_1l_{t1}+k_2l_{t2}+\cdots+k_sl_{ts})\boldsymbol{\beta}_t\in V_2$$

即 $V_1\subseteq V_2$，同理可证 $V_2\subseteq V_1$， 因此 $V_1=V_2$.

命题得证.

由例2的证明过程可得如下结论.

定理1 (1) 若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$可由向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$线性表示，则

$$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\subseteq L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t).$$

(2) 两个向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 生成相同向量空间的充分必要条件是这两个向量组等价.

二、向量空间的基与维数

1. 向量空间的基

极大线性无关组对一个向量组来说至关重要，向量空间是特殊的向量组，因此其**最大线性无关组**极为重要，被称为**向量空间的基**.

定义3 设 V 是向量空间，如果 V 中的 r 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$

满足 (1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关；

(2) V 中每个向量都可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示；

则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量空间 V 的一个基，称 r 是向量空间 V 的维数，并称 V 为 r 维向量空间.

注1 零子空间没有基，规定其维数为0.

注2 向量空间的基本质上是其作为向量组的一个极大线性无关组，向量空间的维数就是其作为向量组的秩.

注3 向量空间的维数，不超过向量的维数.

注4 任意 n 个线性无关的 n 维向量都是 $\mathbf{R}^n$ 的一个基.

分析 n 个 n 维单位坐标向量组 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个基，显然 $\mathbf{R}^n$ 的维数是 n.

由于任意 n 个线性无关的 n 维向量都与 n 维单位坐标向量组等价，所以任意 n 个线性无关的 n 维向量都是 $\mathbf{R}^n$ 的一个基.

注5 若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$是向量空间$V$的一个基，则$V$可表示为 $V=\{k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r \mid k_1,k_2,\cdots,k_r\in\mathbf{R}\}$.

如 找出例1中向量空间$V_1=\{\boldsymbol{x}=(0,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}} \mid x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}\}$的一个基，并求出$V_1$的维数.

2. 向量在某个基下的坐标

定义4 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量空间 V 的一个基，对于任意 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，若有 $\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_r\boldsymbol{\alpha}_r$，则称有序数组 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 下的坐标，记为 $(x_1,x_2,\cdots,x_r)^{\mathrm{T}}$.

注1 向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 下的坐标是唯一的，且正好是非齐次线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_r\boldsymbol{\alpha}_r=\boldsymbol{\alpha}$ 的唯一解.

例3 判断下列向量组是不是 $\mathbf{R}^3$ 的基, 如果是, 求出向量 $\boldsymbol{\alpha}=(2,1,2)^{\mathrm{T}}$在这个基下的坐标.

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$;

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,-1,3)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2=(2,-3,4)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3=(-2,-1,-2)^{\mathrm{T}}$.

思路 由于$\mathbf{R}^3$的维数是3, 因此只要是$\mathbf{R}^3$中的3个线性无关的向量就可以构成$\mathbf{R}^3$的一个基.

解 (1) 由于 $|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关.

所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是$\mathbf{R}^3$的一个基.

设$\boldsymbol{\alpha}$ 在$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$下的坐标为$(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$, 那么$\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3$.

即求解如下方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{解得} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

所以$\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为$(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$.

(2) 由于 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

则 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$, 那么 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,

因此 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 不是 $\mathbf{R}^3$ 的基.

三、过渡矩阵与坐标变换

1. 过渡矩阵的定义

定义5 若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 和$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是向量空间$\mathbf{R}^n$ 的两个基,

则由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 等价，因此存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$,

使得
$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{P},$$

称矩阵$\boldsymbol{P}$ 为从基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵.

注1 矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的每一个列向量就是对应的向量 $\boldsymbol{\beta}_j$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标.

注2 定义5可知: $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$.

2. 坐标变换

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是向量空间$\mathbf{R}^n$ 的两个基,

那么对任意 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^n$ 有

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=y_1\boldsymbol{\beta}_1+y_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+y_n\boldsymbol{\beta}_n.$$

即 $$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}.$$

由于向量$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$下的坐标是唯一的，

因此 $\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}$ 即 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$.

称为坐标变换公式. 其中 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

分别为向量$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$和基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$下的坐标.

例4 求 $\mathbf{R}^2$ 中从基 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 的过渡矩阵.

解　设从基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}$,

则 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\boldsymbol{P}$,

因此 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\-1&-2\end{pmatrix}.$$

内容小结

1. 向量空间的概念（会判断）；
2. 向量空间的基和维数（会求）；
3. 过渡矩阵与坐标变换（会求）.

思考题:

1. 求向量空间 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$ 的基和维数.

【答：基为极大无关组，维数为向量组的秩】

2. 证明：向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1,1)^{\mathrm{T}}$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(2,-1,3,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(0,1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$ 生成的相同的向量空间.

今天的成功

是因为昨天的积累，

明天的成功

则依赖于今天的努力。

第4.5节 向量内积与正交矩阵

目录

CONTENTS

向量的内积与正交矩阵

理解： 向量内积

规范正交基

正交矩阵的基本概念

掌握： 施密特正交化方法

求规范正交基矩阵

重点： n维规范正交基

正交矩阵的性质

难点： 施密特正交化方法

求规范正交基

一、向量内积的基本概念与性质

1. 内积的概念

定义1 设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 都是 n 维向量，记

$$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n,$$

称 $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积.

注　内积的表达式：$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 或 $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$.

内积的性质： 设 α,β,γ 为 n 维向量，k 为实数，则

(1) $[\alpha,\beta]=[\beta,\alpha]$；

(2) $[k\alpha,\beta]=k[\alpha,\beta]$；

(3) $[\alpha+\beta,\gamma]=[\alpha,\gamma]+[\beta,\gamma]$；

(4) $[\alpha,\alpha]\geq 0$，等号成立当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

2. 向量的长度

定义2 设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$ 为 n 维向量，记

$$|\boldsymbol{\alpha}|=\sqrt{[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}]}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2},$$

称 $|\boldsymbol{\alpha}|$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的**长度**或**范数**.

注 若 $|\boldsymbol{\alpha}|=1$，称向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 为单位向量.

向量长度的性质： 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 n 维向量，k 为实数，则

(1) 非负性 $|\boldsymbol{\alpha}| \geq 0$，等号成立当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$；

(2) 齐次性 $|k\boldsymbol{\alpha}|=|k||\boldsymbol{\alpha}|$；

(3) 柯西不等式 $\left|[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]\right| \leq |\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|$；

(4) 三角不等式 $|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}| \leq |\boldsymbol{\alpha}|+|\boldsymbol{\beta}|$.

3. 向量的夹角

定义3 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 n 维向量，当 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$, $\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$ ，记

$\theta=\arccos\dfrac{[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]}{|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|}$，称其为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角.

规定：$0\leq\theta\leq\pi$.

二、规范正交基

1. 正交向量组

定义4 设 α, β 为 n 维向量，如果 $[\alpha, \beta] = 0$，则称向量 α 与 β 正交.

注 零向量与任何向量都正交.

定义5 称两两正交的非零向量组为正交向量组.

定理1 两两正交的非零向量组一定线性无关.

证 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是一个正交向量组，且有一组数

$k_1,k_2,\cdots,k_m$ ，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$.

等式两侧与 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,m)$ 作内积得 $k_i[\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_i]=0$，亦即

$k_i[\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_i]=k_i|\boldsymbol{\alpha}_i|^2=0$. 由 $\boldsymbol{\alpha}_i\neq\mathbf{0}$ 知 $|\boldsymbol{\alpha}_i|^2\neq 0$，所以

$k_i=0(i=1,2,\cdots,m)$，因此 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

2. 向量空间的正交基与规范正交基

定义6 如果用正交向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$作为向量空间的一个基，则称$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$为向量空间的**正交基**. 如果向量空间的正交基中每个向量都是单位向量，则称其为向量空间的**规范(标准)正交基**.

注 n个n维的单位坐标向量组 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是$\mathbf{R}^n$ 的一组规范正交基.

3. 向量在规范正交基下的坐标表示

设 $e_1, e_2, \cdots, e_r$ 为向量空间 V 的一组规范正交基，则 V 中任意

向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可表示为 $\boldsymbol{\alpha} = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_r e_r$ ，

上式两边与 e_i 作内积得 $[\boldsymbol{\alpha}, e_i] = \lambda_i [e_i, e_i] = \lambda_i |e_i|^2 = \lambda_i$,

即 $\lambda_i = [\boldsymbol{\alpha}, e_i] (i = 1, 2, \cdots, r)$.

向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在规范正交基下的坐标

例1 判断$\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$是否为$\mathbf{R}^3$一组规范正交基？

解　因为$|e_i|=1(i=1,2,3)$

且$[\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j]=0(i\neq j)$

故$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$是$\mathbf{R}^3$的一组规范正交基.

例2 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$, 试求$\boldsymbol{\alpha}_3$使$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$构成三维空间的一组正交基.

解 设 $\boldsymbol{\alpha}_3=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$, 由于$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]=0$， 要使 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$构成三维空间的一组正交基，则 $\begin{cases}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3]=0\\[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=0\end{cases}$.

即 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$，所以 $\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$.

令 $x_3 = k$，则 $\boldsymbol{\alpha}_3 = (k, 0, k)^{\mathrm{T}} (k \neq 0)$.

三、施密特正交化方法

设正交向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$是向量空间$V$的一组基, 现在的问题是如何从这组基出发，求出$V$中的一组规范正交基?

即要找一组两两正交的单位向量$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r$, 使得$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$等价. 这个过程称为把基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$规范正交化.

这个方法称为施密特(Schmidt)正交化方法.

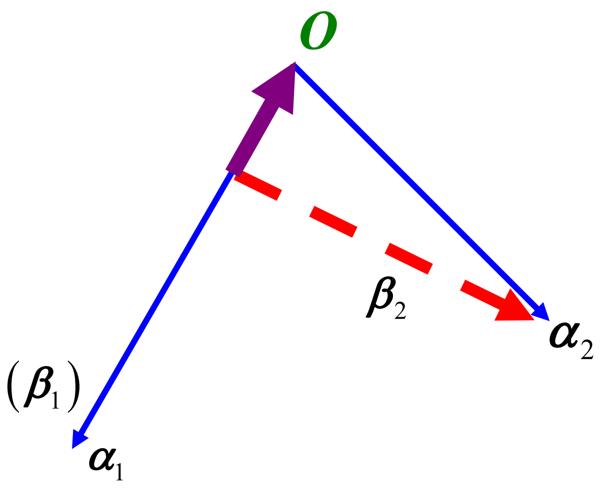
施密特正交化方法:

1. 正交化

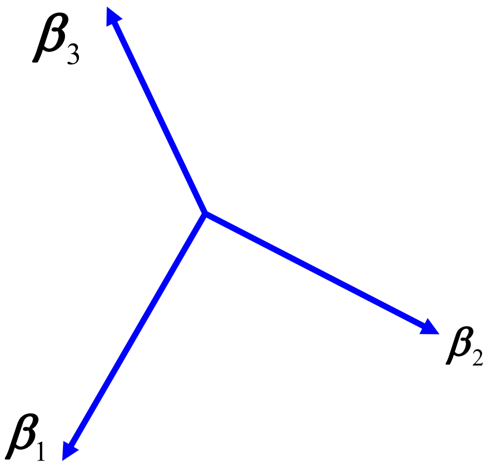
取 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，　令 $\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_1\boldsymbol{\beta}_1$，

要使 $[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_1]=0$，解得 $\lambda_1=-\dfrac{[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}$.

代入得 $\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\dfrac{[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1$.



再令 $\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 + \lambda_1 \boldsymbol{\beta}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{\beta}_2$,



要使 $[\boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_1] = 0, [\boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_2] = 0$,

解得 $\lambda_1 = -\dfrac{[\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}$, $\quad \lambda_2 = -\dfrac{[\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2]}$.

代入得 $\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 - \dfrac{[\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1 - \dfrac{[\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2$.

再重复做下去，便得

$$\beta_r = \alpha_r - \frac{[\alpha_r, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]}\beta_1 - \frac{[\alpha_r, \beta_2]}{[\beta_2, \beta_2]}\beta_2 - \cdots - \frac{[\alpha_r, \beta_{r-1}]}{[\beta_{r-1}, \beta_{r-1}]}\beta_{r-1}.$$

这样就得到一个正交向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$.

2. 单位(规范)化

令 $\gamma_i = \dfrac{\beta_i}{|\beta_i|}(i=1,2,\cdots,r)$ ，

则向量组 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r$ 是与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 等价的正交单位向量组，

也就是向量空间 V 的一个规范正交基.

例3 用施密特正交化方法，将向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\4\\9\end{pmatrix}$ 规范正交化.

解 先正交化：

令 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{[\alpha_3,\beta_1]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1-\frac{[\alpha_3,\beta_2]}{[\beta_2,\beta_2]}\beta_2=\begin{pmatrix}1\\4\\9\end{pmatrix}-\frac{14}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

再单位化：

令 $e_1=\dfrac{\beta_1}{|\beta_1|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$e_2=\dfrac{\beta_2}{|\beta_2|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，$e_3=\dfrac{\beta_3}{|\beta_3|}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$.

则 e_1,e_2,e_3 就是所求的规范正交基.

四、正交矩阵

1. 正交矩阵的概念

定义7 设$\boldsymbol{A}$为n阶方阵，如果$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，则称$\boldsymbol{A}$为**正交矩阵**.

2. 正交矩阵的判别方法

定理2 n阶方阵$\boldsymbol{A}$为正交矩阵的充分必要条件是$\boldsymbol{A}$的列(行)向量组是$\mathbf{R}^n$的一组规范正交基.

证 把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按列分块 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$， 有

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n \end{pmatrix}=\boldsymbol{E}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_j = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} (i, j = 1,2,\cdots,n).$$

即$\boldsymbol{A}$的列向量组是一组两两正交的单位向量组，即$\mathbf{R}^n$的一组规范正交基.

同理由$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E}$知：$\boldsymbol{A}$的行向量组也是$\mathbf{R}^n$的一组规范正交基.

例4 判断下列矩阵是否为正交矩阵：

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$；　　(2) $\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$.

解 (1) 列向量组不是正交向量组，所以不是正交矩阵；

(2) 列向量组为正交单位向量组，所以正交矩阵.

3. 正交矩阵的性质

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶正交矩阵，则

(1) $|\boldsymbol{A}|=1$ 或 $|\boldsymbol{A}|=-1$；

(2) $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$；

(3) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{A}^{*},\boldsymbol{A}^{k}$（$k$是大于1的整数）也是正交矩阵；

(4) $\boldsymbol{AB}$ 也是正交矩阵.

证 由正交矩阵的定义可知：$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$.

(1) 两边取行列式有 $1=|\boldsymbol{E}|=\left|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right|=|\boldsymbol{A}|\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right|=|\boldsymbol{A}|^{2}$，

则 $|\boldsymbol{A}|=1$ 或 $|\boldsymbol{A}|=-1$.

(2) 由可逆矩阵的定义可知 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

(3) 因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$；

$$\boldsymbol{A}^{*}(\boldsymbol{A}^{*})^{\mathrm{T}}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\left(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}=|\boldsymbol{A}|^{2}\boldsymbol{A}^{-1}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

$$=|\boldsymbol{A}|^{2}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)^{-1}=|\boldsymbol{A}|^{2}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}.$$

$$A^k(A^k)^{\mathrm{T}} = A^{k-1}AA^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})^{k-1} = A^{k-1}(A^{\mathrm{T}})^{k-1}$$

$$= \cdots = AA^{\mathrm{T}} = E.$$

所以 $A^{\mathrm{T}}, A^{*}, A^{k}$(k 是大于1的整数)也是正交矩阵;

(4) 因为 $AB(AB)^{\mathrm{T}} = ABB^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = AA^{\mathrm{T}} = E$.

所以 AB 也是正交矩阵.

4. 正交变换

定义8 设 $\boldsymbol{P}$ 是正交矩阵，则称线性变换 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ 为**正交变换**.

性质： 正交变换保持向量的长度不变.

证 设 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ 为正交变换，则有

$$|\boldsymbol{y}|=\sqrt{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}}=\sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}}=\sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}=|\boldsymbol{x}|.$$

内容小结

1. 向量的内积，长度，夹角：
   - 概念；
   - 计算公式.
2. 向量空间的正交基与规范正交基
3. 施密特正交化方法
4. 正交矩阵与正交变换

思考题：

1. 已知 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，求非零向量 $\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$，使 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 成为正交向量组.

【答：$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}-1/2\\1\\-1/2\end{pmatrix}$】

2. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶正交矩阵，且 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|<0$，证明：$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0$.

【提示：构造矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，再利用正交矩阵定义求证】

南京信息工程大学
Nanjing University of Information Science & Technology

当你无法从一楼蹦到三楼时，

不要忘记走楼梯.

要记住伟大的成功

往往不是一蹴而就的，

必须学会分解你的目标，

逐步实施.

第4.6节 线性方程组解的结构

目录

CONTENTS

线性方程组解的结构

理解： 线性方程组解与解之间的关系

齐次（非齐次）线性方程组

解的结构

掌握： 用初等变换求解齐次线性方程组

的基础解系

求非齐次线性方程组的特解

重点： 齐次（非齐次）线性方程组

的解的结构

难点： 齐次线性方程组的基础解系、

通解及解空间

非齐次线性方程组解的结构

及通解

线性方程组解的结构

回忆:非齐次线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

若记
$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

则线性方程组(1)可表示为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$.

其中 $\boldsymbol{A}$ 称为线性方程组的系数矩阵，向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 分别称为线性方程组的未知向量和常数项向量.

令 $\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$,

称矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 为线性方程组的增广矩阵.

线性方程组解的结构

若常数项 $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$，即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

则称方程组(2)为非齐次方程组(1)的**对应齐次线性方程组**或**导出组**，其矩阵形式 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$.

非齐次线性方程组解的判定定理

1）n元线性非齐次方程组有唯一解的充要条件是

$$R(A)=R(\overline{A})=n(\text{未知量个数})；$$

2）n元线性非齐次方程组有无穷个解的充要条件是

$$R(A)=R(\overline{A})<n(\text{未知量个数})；$$

3）n元线性非齐次方程组无解的充要条件是

$$R(A)\neq R(\overline{A}).$$

齐次线性方程组的解的判定定理

1）n元线性齐次方程组有零解的充要条件是

$$R(A)=n(\text{未知量个数})；$$

2）n元线性齐次方程组有非零解的充要条件是

$$R(A)<n(\text{未知量个数}).$$

一、 齐次线性方程组解的结构

1. 解向量的定义

定义1 若 $x_1=\xi_1,\ x_2=\xi_2,\cdots,\ x_n=\xi_n$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解，则称 n 维向量 $x=(\xi_1,\ \xi_2,\cdots,\ \xi_n)^T$ 为该方程组的**解向量**.

2. 解向量的性质

性质1 若 $\xi_1, \ \xi_2$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的两个解向量，

则 $\xi_1+\xi_2$ 也是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解向量.

性质2 若 ξ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解向量,.

则 $k\xi$ 也是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解向量，其中 k 是任意常数.

注 齐次线性方程组的全体解向量组成的集合构成了一个向量空间，称为该齐次线性方程组的**解空间**，记为 S.

3. 基础解系的定义

定义2 若向量组 $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_r$ 是齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解空间的一组基，则称向量组$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_r$ 为方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系.

基础解系的另一定义：

定义2′ 若向量组 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 满足如下条件：

(1) $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解；

(2)ξ_1，$\xi_2,\cdots$，ξ_r线性无关；

(3) 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的任一解都可以用$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 线性表示.

则称向量组$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 为方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的**基础解系**.

注 (1) 若齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 仅有零解，则它没有基础解系.

(2) 若齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 有基础解系，则必有无穷多种不同的基础解系.

结论1 若向量组$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 为方程组$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的一组基础解系，则齐次线性方程组的**通解**为

$$\boldsymbol{x}=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_r\xi_r\text{(其中}k_1,k_2,\cdots,k_r\text{是任意常数)}$$

4. 基础解系的求法

设齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的系数矩阵的秩为$R(\boldsymbol{A})=r$，

第一步：把 $\boldsymbol{A}$ 用初等行变换化为**行最简形**，即

$$\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{r1} & \cdots & b_{r,n-r} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

线性方程组解的结构

第二步：确定$n-r$个自由未知量

由第一步可得，线性方程组$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 等价于

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{r1} & \cdots & b_{r,n-r} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1}-\cdots-b_{1,n-r}x_n \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1}-\cdots-b_{r,n-r}x_n \end{cases}$$

称 $x_{r+1},\ldots,x_n$ 为自由变量.

第三步：确定 $n-r$ 个基础解系，并写出通解

分别令 $$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

则有 $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ -b_{21} \\ \vdots \\ -b_{r1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b_{12} \\ -b_{22} \\ \vdots \\ -b_{r2} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ -b_{2,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \end{pmatrix}$$

进而得到 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的 $n-r$ 个解

$$\xi_1=\begin{pmatrix}-b_{11}\\-b_{21}\\\vdots\\-b_{r1}\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-b_{12}\\-b_{22}\\\vdots\\-b_{r2}\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\xi_{n-r}=\begin{pmatrix}-b_{1,n-r}\\-b_{2,n-r}\\\vdots\\-b_{r,n-r}\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

(可以验证 $\xi_1,\ \xi_2,\cdots,\ \xi_{n-r}$ 为解空间的一个基础解系)

则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$.

下证 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系:

首先，由于 $\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ 线性无关，

所以在每个向量前面添加 r 个分量后所得到的向量 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 也线性无关.

其次，证明方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的任一解都可由 ξ_1，$\xi_2,\cdots$，ξ_{n-r} 线性表示.

设方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的任一解为 $\boldsymbol{x}=(\lambda_1,\cdots,\lambda_r,\lambda_{r+1},\cdots,\lambda_n)^{\mathrm{T}}$

作向量 $\xi=\lambda_{r+1}\xi_1+\lambda_{r+2}\xi_2+\cdots+\lambda_n\xi_{n-r}$,

由于 $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-r}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解,所以 ξ 也是该方程组的解,

比较 ξ 与 $\boldsymbol{x}$ 知后面 $n-r$ 个分量对应相等,

由于它们都满足方程组(2), 即前面 r 个分量由后面 $n-r$ 个分量完全确定, 所以它们前面 r 个分量必定对应相等, 因此 $\boldsymbol{x}=\xi.$

故 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 解空间的一个基础解系,

且其解空间的维数为$n-r.$

5. 基础解系的存在性

定理1 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的全体解所构成的集合是一个向量空间 S, 当系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})=r$, 解空间 S 的维数为 $n-r$.

注 齐次线性方程组基础解系的个数+系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})$ 等于 n. ★★★★★

例1 求齐次线性方程组方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4=0 \\ 3x_1+6x_2-x_3-3x_4=0 \\ 5x_1+10x_2+x_3-5x_4=0 \end{cases}$ 的通解.

解 对系数矩阵施行初等行变换，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & -3 \\ 5 & 10 & 1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-5r_1]{r_2-3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\left(-\frac{1}{4}\right)\times r_2]{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

行最简形

可得$R(\boldsymbol{A})=2$，而 $n=4$,故方程组有非零解,

原方程组的同解方程组为 $\begin{cases} x_1+2x_2-x_4=0, \\ x_3=0. \end{cases}$

取 x_2,x_4 为自由未知量(一般取行最简形矩阵非零行的第一个非零元对应的未知量为非自由的),则有

$$\begin{cases} x_1=-2x_2+x_4, \\ x_3=0. \end{cases}$$

令 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 得方程组的基础解系为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，

则方程组的通解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(k_1, k_2$ 为任意常数$)$.

练1 求齐次线性方程组方程组$\begin{cases} x_1+x_2-x_3+2x_4-x_5=0 \\ x_1+x_2+x_3+3x_5=0 \\ x_3+3x_4+6x_5=0 \end{cases}$的通解.

解 对系数矩阵施行初等行变换，有

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ 行最简形

令 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 得方程组的基础解系为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

则方程组的通解为 $\boldsymbol{x} = k_1\xi_1 + k_2\xi_2$ （k_1, k_2 为任意常数).

例2　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times s$ 矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，

证明：$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\le n.$

证　将按列分块得：$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_s).$

由 $AB=A(b_1,\ b_2,\cdots,\ b_s)=O$ 知： $Ab_i=0(i=1,2,\cdots,s)$

所以每一列都是 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解，而 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系里含有 $n-R(\boldsymbol{A})$ 个线性无关的解，所以 $R(\boldsymbol{B})\le n-R(\boldsymbol{A})$，即：

$$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\le n.$$

例3 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\ (n \ge 2)$ 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为的伴随矩阵，证明：

$$R(\boldsymbol{A}^*) = \begin{cases} n, & R(\boldsymbol{A}) = n \\ 1, & R(\boldsymbol{A}) = n-1 . \\ 0, & R(\boldsymbol{A}) < n-1 \end{cases}$$

★★★

证 (1) 当 $R(\boldsymbol{A}) = n$ 时，则 $|\boldsymbol{A}| \ne 0$，进而 $|\boldsymbol{A}^*| \ne 0$，故 $R(\boldsymbol{A}^*) = n$.

(2) 当 $R(\boldsymbol{A}) = n-1$ 时，则 $|\boldsymbol{A}| = 0$，但矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中至少存在一个 $n-1$ 阶非零子式.

故 $R(\boldsymbol{A}^*) \ge 1$.

又因为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$，所以 $R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{A}^*) \le n$，

故 $R(\boldsymbol{A}^*) \le n - R(\boldsymbol{A}) = 1.$

因此 $R(\boldsymbol{A}^*) = 1.$

(3) 当 $R(\boldsymbol{A}) < n-1$ 时，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中所有的$n-1$ 阶子式都为零.

则 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{O}.$

故 $R(\boldsymbol{A}^*) = 0.$

例4 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，且 $R(\boldsymbol{A})=3$，求 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系的个数.

解 $\because R(A^*)=1$

$\therefore$ $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系的个数为 $4-1=3$.

二、非齐次线性方程组

1. 解向量的性质

性质3 若$\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的两个解向量，

则$\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$是其导出组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解向量.

性质4 若$\boldsymbol{\eta}$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解向量，$\xi$是其导出组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解向量, 则$\xi+\eta$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$解向量.

2. 非齐次线性方程组的通解

结论2 若$\boldsymbol{\eta}^*$是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的一个特解，

$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 是相应的齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系，

则非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解可表示为

$$x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} + \eta^*$$

例5 求非齐次线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 + 10x_4 = 8 \end{cases}$ 的通解.

解 对增广矩阵施行初等行变换，有

行最简形

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -5 & 4 & 2 \\ 7 & -5 & -9 & 10 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3-2r_1,\ r_4-7r_1 \\ r_3-r_2,\ r_4-2r_2}]{r_1\leftrightarrow r_3,\ r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 13 & -9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

可得$R(\boldsymbol{A})=R(\overline{\boldsymbol{A}})=2$，而 $n=4$，故方程组有无穷多解.

(1) 先求与原方程对应的**齐次线性方程组的基础解系**

由增广矩阵的行最简形(1)知：相应齐次线性方程组为

$$\begin{cases} x_1+8x_3-5x_4=0 \\ x_2+13x_3-9x_4=0 \end{cases}，\quad 即 \begin{cases} x_1=-8x_3+5x_4 \\ x_2=-13x_3+9x_4 \end{cases}.$$

令 x_3, x_4 为自由变量，并取 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

则 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$.

得齐次线性方程组的基础解系为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -8 \\ -13 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\xi_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(2) 再求非齐次线性方程组的一个特解.

由行最简形(1)知：非齐次线性方程组等价于

$$\begin{cases} x_1 + 8x_3 - 5x_4 = -1 \\ x_2 + 13x_3 - 9x_4 = -3 \end{cases}，即 \begin{cases} x_1 = -1 - 8x_3 + 5x_4 \\ x_2 = -3 - 13x_3 + 9x_4 \end{cases}.$$

取 $x_3 = x_4 = 0$，得非齐次线性方程组的特解为 $\boldsymbol{\eta}^* = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

故原方程的通解为 $\boldsymbol{x} = k_1 \begin{pmatrix} -8 \\ -13 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (k_1, k_2 为任意常数)

例6 设四元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为3，且它的三个解 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 满足 $\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2=(2,0,-2,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_3=(3,1,0,5)^{\mathrm{T}}$. 求该方程组的通解.

解 因为 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 是方程组的三个解，即 $\boldsymbol{A\eta}_i=\boldsymbol{b}(i=1,2,3)$.

则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2)=2\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_3)=2\boldsymbol{b}$,

故 $\boldsymbol{A}[(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_3)-(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2)]=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{A}\left(\dfrac{\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2}{2}\right)=\boldsymbol{b}$.

因此$(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_3)-(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2)=(3,1,0,5)^{\mathrm{T}}-(2,0,-2,4)^{\mathrm{T}}=(1,1,2,1)^{\mathrm{T}}\neq\mathbf{0}$.

$$\frac{\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2}{2}=(1,0,-1,2)^{\mathrm{T}}.$$

分别为齐次和非齐次线性方程组的解.

又因为四元非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的系数矩阵$\boldsymbol{A}$的秩为3,

所以相应齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$的基础解系个数为1.

线性方程组解的结构

故齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\xi}=(1,1,2,1)^{\mathrm{T}}$.

则非齐次线性方程组的通解为 $\boldsymbol{x}=k\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix}(k\in\mathrm{R})$.

内容小结

1. 齐次线性方程组解的结构：
   - 概念；
   - 计算公式.
2. 非齐次线性方程组解的结构：
   - 概念；
   - 计算公式.

思考题:

1. 设 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 为 4 阶正交矩阵, 若矩阵$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, k 为任意常数, 求线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

【答: $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+k\boldsymbol{\alpha}_4$ 】

2. λ 取何值时, 线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1\\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda\\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2\end{cases}$ 无解; 有唯一解; 有无穷多个解?

【答: $\lambda=-2$ 时无解; $\lambda\neq-2,\lambda\neq1$ 时有唯一解; $\lambda=1$ 时有无穷多解.】

南京信息工程大学
Nanjing University of Information Science & Technology

行动

是治愈恐惧的良药，

而犹豫、拖延

将不断滋养恐惧.