南信大 2022-2023 学年第二学期《高等数学 II-2》(文) 第一阶段月考试（改编版，用于 2023-2024 学年第二学期《高等数学 II-2》(文) 第一阶段月考试的模拟）参考答案

一、填空题（每小题 3 分，共 24 分）

1. 设$\vec{A}=2\vec{a}+3\vec{b}$，$\vec{B}=3\vec{a}-\vec{b}$，$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=4$，$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，则$\vec{A}\cdot\vec{B}=$__4__.

2. 函数$u=arc\cos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$定义域为__________.

$x^2+y^2\neq0,-1\leq\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq1$，$z^2\leq x^2+y^2$，$x^2+y^2\neq0$

3. 空间曲线$\begin{cases}z=2-x^2-y^2\\ z=x^2+y^2\end{cases}$在$xOy$面上的投影曲面方程为_$\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=0\end{cases}$__.

4. 曲线$\begin{cases}\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1\\ z=0\end{cases}$绕$y$轴旋转一周生成的旋转曲面方程为__$\frac{x^2+z^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$___.

5. 直线$\begin{cases}x+y+z+1=0\\ 2x-y+3z+4=0\end{cases}$的参数式方程为_$\begin{cases}x=1+4t\\ y=-t\\ z=-2-3t\end{cases}$___.

6. 设向量$\vec{a}$，$\vec{b}$非零，$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，则$\lim\limits_{x\to0}\frac{|\vec{a}+x\vec{b}|-|\vec{a}|}{x}=$___1___.

7. 设函数$u=xye^{\frac{x}{z}}$，则$du|_{(1,\ 1,\ -1)}=$__$\frac{1}{e}dy-\frac{1}{e}dz$____.

8. 极限$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to2}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{2x^2}{x+y}}=$___$e^2$____.

二、选择题（每小题 3 分，共 24 分）

1. 设向量$\vec{a}=(-1,\ -2,2)$，$\vec{b}=(3,\ \lambda,4)$，若$Prj_{\vec{a}}b=1$，则$\lambda=$（ C ）

（A）0　　（B）2　　（C）1　　（D）5

2. 已知$f(x,\ y)=\sin\sqrt{x^2+y^2}$，则（ D ）

(A) $f_x(0,\ 0)$，$f_y(0,\ 0)$都存在；

(B) $f_x(0,\ 0)$不存在，但$f_y(0,\ 0)$存在；

(C) $f_x(0,\ 0)$存在，但$f_y(0,\ 0)$不存在；

(D)$f_x(0,0)$，$f_y(0,0)$都不存在；.

3.设直线L：$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+3}{-1}$及平面$\prod$：$2x+y+4z+3=0$，则（ A ）

（A）L与$\prod$ 平行　（B）L与$\prod$ 垂直　（C）L在$\prod$ 上　（D）L与$\prod$ 斜交

4.设向量$\vec{a}=(3,\lambda,-2)$，$\vec{b}=(2,-1,-1)$，$\vec{c}=(\lambda,-1,-,1)$共面，则$\lambda=$（ D ）

（A）0　（B）-1　（C）1　（D）± 2

5.设$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$为非零向量，则与$\vec{a}$不垂直的向量是（ D ）

（A）$(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$　（B）$\vec{b}-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$　（C）$\vec{a}\times\vec{b}$　（D）$\vec{a}+(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}$

6.下列平面与直线$\frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{-2}$垂直的是（ C ）

（A）$x-5y+4z-12=0$　（B）$2x-y-z-6=0$

（C）$3x-y-2z+11=0$　（D）$3x+y+2z-17=0$

7.函数$z=f(x,y)$在点(x,y)处偏导函数连续是$f(x,y)$在该点可微的（ A ）

(A)充分条件；　(B)必要条件；

(C)充要条件；　(D) 既非充分又非必要条件.

8.函数$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，在点（0,0）处（ D ）

(A)连续但不可偏导　(B)不连续但可偏导

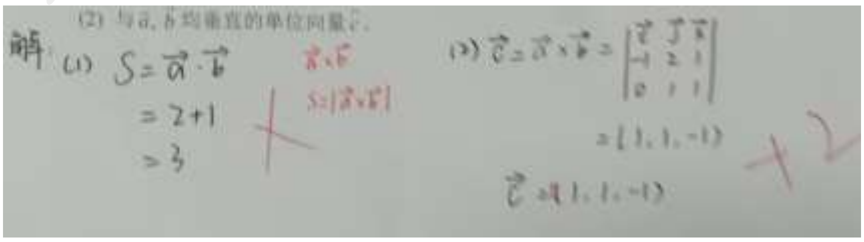
(C)可偏导且连续　(D)既不连续又不可偏导

三、计算下列各题（第一小题 7 分，第二小题 4 分，第三小题 3 分）

1.已知向量$\vec{a}=(-1,2,1)$，$\vec{b}=(0,1,1)$，求：（1）以$\vec{a}$，$\vec{b}$为邻边的平行四边形的面积S；（2）与$\vec{a}$，$\vec{b}$均垂直的单位向量$\vec{c}$.

Solution(1) $S=|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}|=\sqrt{3}$

(2) $\vec{c}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$



2. 求$z=(x^2+y^2)^{xy}$的偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{xyln(x^2+y^2)}\left(yln(x^2+y^2)+\frac{2x^2y}{x^2+y^2}\right)=(x^2+y^2)^{xy}\left(yln(x^2+y^2)+\frac{2x^2y}{x^2+y^2}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{xyln(x^2+y^2)}\left(xln(x^2+y^2)+\frac{2xy^2}{x^2+y^2}\right)=(x^2+y^2)^{xy}\left(xln(x^2+y^2)+\frac{2xy^2}{x^2+y^2}\right)$$

3. 求极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2+y^2}}\sin\left(\mathrm{e}^{\frac{-1}{x^2+y^2}}\right)=1$

四、（本题满分 9 分）平面$\prod$ 过直线L：$\begin{cases}4x-y+3z-6=0\\x+5y-z+10=0\end{cases}$且垂直于$2x-y+5z=5$，求平面$\prod$ 的方程.

Solution:设过直线L的平面束方程为$4x-y+3z-6+\lambda(x+5y-z+10)=0$

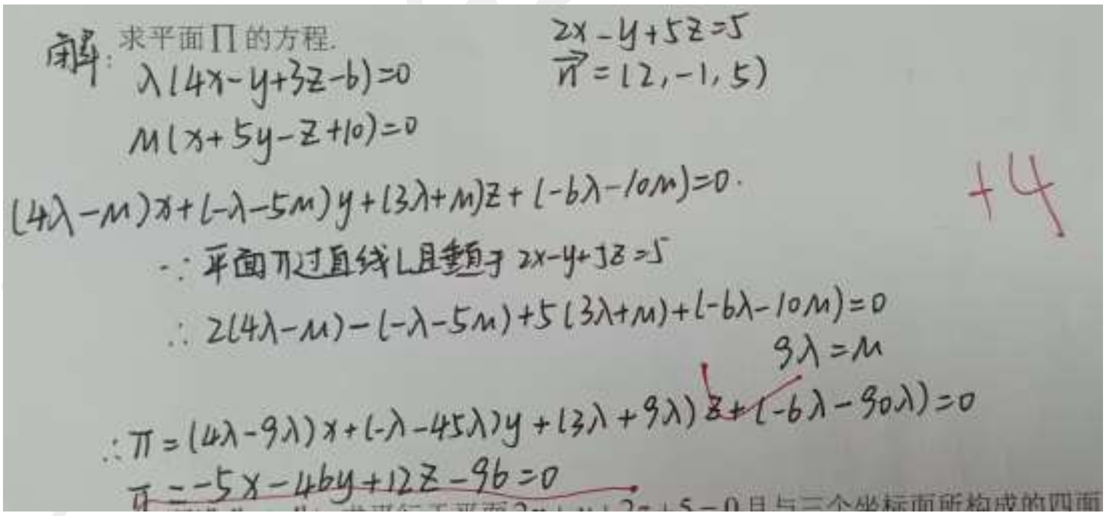
即$(4+\lambda)x+(5\lambda-1)y+(3-\lambda)z+10\lambda-6=0$

由题设知：该平面与$2x-y+5z=5$垂直，则

$$2(4+\lambda)+1-5\lambda+5(3-\lambda)=0$$

即：$24-8\lambda=0$，则$\lambda=3$

则所求平面$\prod$ 方程为：$7x+14y+24=0$

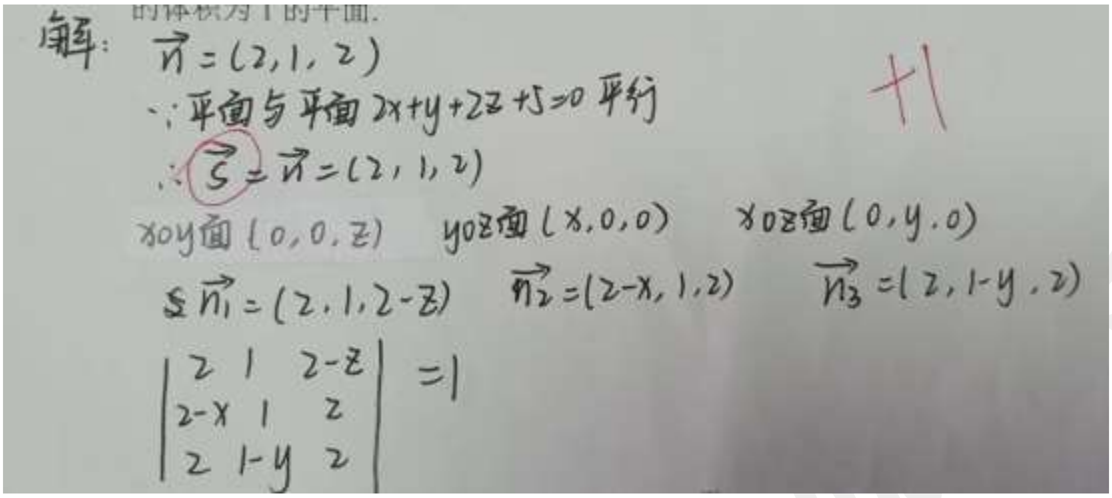

解：求平面$\prod$的方程.
$2x-y+5z=5$
$\vec{n}=(2,-1,5)$
$\lambda(4x-y+3z-6)=0$
$M(x+5y-z+10)=0$
$(4\lambda-M)x+(-\lambda-5M)y+(3\lambda+M)z+(-6\lambda-10M)=0.$
+4
∵平面π过直线L且垂直于$2x-y+3z=5$
∴$2(4\lambda-M)-(-\lambda-5M)+5(3\lambda+M)+(-6\lambda-10M)=0$
$9\lambda=M$
∴$\pi=(4\lambda-9\lambda)x+(-\lambda-45\lambda)y+(3\lambda+9\lambda)z+(-6\lambda-90\lambda)=0$
$\pi=-5x-46y+12z-96=0$

五、（本题满分 9 分）求平行于平面$2x+y+2z+5=0$且与三个坐标面所构成的四面体的体积为 1 的平面.

Solution: 由题设，该平面可以设为：$2x+y+2z-d=0$，在x轴，y轴和z轴上的截距为：$\frac{d}{2}$, d,$\frac{d}{2}$，则由题设可得$\frac{1}{3}\times\frac{d}{2}\times\frac{1}{2}\times d\times\frac{d}{2}=1$，即$d^3=24$

则$d=2\sqrt{3}$，由对称性：$d=-2\sqrt{3}$，体积也是 1

因此，所求平面方程为：$2x+y+2z\pm2\sqrt{3}=0$


的体积为 1 的平面.

解：$\vec{n}=(2,1,2)$

∵平面与平面 $2x+y+2z+5=0$ 平行

∴ $\vec{s}=\vec{n}=(2,1,2)$

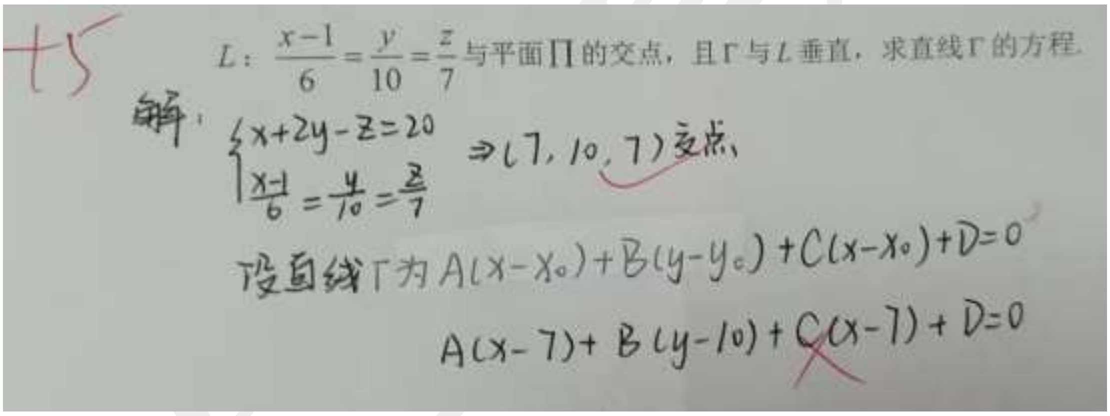
xoy面 $(0,0,z)$　yoz面 $(x,0,0)$　xoz面 $(0,y,0)$

$\vec{n_1}=(2,1,2-z)$　$\vec{n_2}=(2-x,1,2)$　$\vec{n_3}=(2,1-y,2)$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2-z \\ 2-x & 1 & 2 \\ 2 & 1-y & 2 \end{vmatrix}=1$$

+1

六、（本题满分 10 分）在平面$\prod$：$x+2y-z=20$上作一直线Γ，使直线Γ过另一直线L：$\frac{x-1}{6}=\frac{y}{10}=\frac{z}{7}$与平面$\prod$ 的交点，且Γ与L垂直，求直线Γ的方程.


+5

L：$\frac{x-1}{6}=\frac{y}{10}=\frac{z}{7}$ 与平面$\prod$的交点，且Γ与L垂直，求直线Γ的方程.

解：$\begin{cases} x+2y-z=20 \\ \frac{x-1}{6}=\frac{y}{10}=\frac{z}{7} \end{cases} \Rightarrow (7,10,7)$ 交点，

设直线Γ为 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(x-x_0)+D=0$

$A(x-7)+B(y-10)+C(x-7)+D=0$

Solution: 由题设可知：交点为：$\begin{cases} x+2y-z=20 \\ \frac{x-1}{6}=\frac{y}{10}=\frac{z}{7} \end{cases}$ 得$(7,10,7)$，

可设所求直线方程为：$\frac{x-7}{m}=\frac{y-10}{n}=\frac{z-7}{1}$

由题设可得：$\begin{cases} m+2n-1=0 \\ 6m+10n+7=0 \end{cases}$解得$m=-12$，$n=\frac{13}{2}$

则Γ得方向向量：$(24,-13,-2)$，方程为$\frac{x-7}{24}=\frac{y-10}{-13}=\frac{z-7}{-2}$

七、（本题满分 10 分）证明函数$f(x,y)=\begin{cases} \frac{ln(1+xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$ 在点$(0,0)$处连续，偏导数存在但不可微

Proof: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{\ln(1+xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

∵ $0 \le \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \left|\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow[y\to0]{x\to0} 0$

∴ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)=0$. 即 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

$f_x(0,0) = \lim\limits_{\Delta x\to0} \frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = 0$.

$f_y(0,0) = \lim\limits_{\Delta y\to0} \frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y} = 0$

则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的偏导数存在

又∵ $\lim\limits_{\Delta\rho\to0} \frac{\Delta z-(f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y)}{\Delta\rho} = \lim\limits_{\Delta\rho\to0} \frac{\frac{\ln(1+\Delta x\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$

$= \lim\limits_{\Delta\rho\to0} \frac{\Delta x\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}$

令 $\Delta y = k\Delta x$, 其极限为 $\frac{k}{1+k^2}$, 即不存在

∴ $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微.