2020 第一次月考试卷答案

一、填充题（每小题 3 分，共 15 分）

1、向量 $\vec{a}=(2,1,-1)$,$\vec{b}=(2,1,-2)$，则 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影 $\operatorname{Pr} j_{\vec{b}}\vec{a}=\underline{\dfrac{7}{3}}$.

2、将曲线 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{b^2}=1\\ y=0\end{cases}$ 绕 x 轴旋转一周，所得到的旋转曲面方程为 $\underline{\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{b^2}=1}$，

此曲面称为<u>旋转双叶双曲面</u>.

3、二元函数 $z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$ 的定义域为 $\underline{\left\{(x,y)\mid y^2\le 4x,\, 0<x^2+y^2<1\right\}}$.

4、球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与平面 $x+z=1$ 的交线在 xOy 面上的投影曲线方程为

$\underline{\begin{cases}2x^2-2x+y^2=8\\ z=0\end{cases}}$.

5、二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{2-\sqrt{xy+4}}=\underline{-4}$.

二、 选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、已知三点坐标 M(1,1,1)，A(2,2,1)和 B(2,1,2)，则∠AMB 等于 （ A ）

（A）$\dfrac{\pi}{3}$ （B）$\dfrac{\pi}{6}$ （C）$\dfrac{\pi}{2}$ （D）$\dfrac{\pi}{4}$

2、设直线 $L:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+3}{-1}$，平面 $\pi:2x+y+4z+3=0$，则直线 L 与平面 π 的关系为 （ B ）

（A）垂直 （B）平行 （C）直线在平面内 （D）直线与平面斜交

3、若函数 $z=2x^2+3xy-y^2$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ （ D ）

（A）$4x+1$ （B）5 （C）$7-2y$ （D）3

4、已知函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\ne 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，则函数在原点 $(0,0)$ 处 （ C ）

（A）连续且偏导数存在 （B）连续且偏导数不存在

（C）不连续且偏导数存在 （D）不连续且偏导数不存在

5、函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处具有偏导数是它在该点存在全微分的　　　（　A　）

（A）必要而非充分条件　　　　　　（B）充分而非必要条件
（C）充分必要条件　　　　　　　　（D）既非充分又非必要条件

三、计算下列各题（每小题 6 分，共 30 分）

1、已知 ΔABC 的三个顶点坐标为 $A(1,2,3),B(2,-1,2),C(3,2,4)$，求 ΔABC 的面积.

解：$\overrightarrow{AB}=(1,-3,-1),\quad \overrightarrow{AC}=(2,0,1)$，$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-3&-1\\2&0&1\end{vmatrix}=(-3,-3,6)$

ΔABC 的面积为 $\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\dfrac{3}{2}\sqrt{6}$.

2、求过点 $(1,2,-1)$ 和直线 $\begin{cases}x+y-3z+1=0\\2x-y-z+1=0\end{cases}$ 的平面方程.

解：设所求平面方程为 $x+y-3z+1+\lambda(2x-y-z+1)=0$，

将点 $(1,2,-1)$ 代入方程得 $\lambda=-\dfrac{7}{2}$，代入平面方程化简得 $12x-9y-z+5=0$.

3、求过点 $M(1,-2,4)$ 且与两平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 都平行的直线方程.

解：过点 $M(1,-2,4)$ 且平行于平面 $x+2z=1$ 的平面方程为：$x+2z-9=0$，

过点 $M(1,-2,4)$ 且平行于平面 $y-3z=2$ 的平面方程为：$y-3z+14=0$，

所求直线方程为 $\begin{cases}x+2z-9=0\\y-3z+14=0\end{cases}$.

或 $\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&0&2\\0&1&-3\end{vmatrix}=-2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}=(-2,3,1)$，方程为 $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-4}{1}$.

4、设函数 $z=x^2y^3+y\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xy^3+ye^{-x^2}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=3x^2y^2+\int_0^x e^{-t^2}dt$.

5、设 z 是由方程 $e^{x+y}\sin(x+z)=0$ 所确定的关于 x,y 的二元函数，求 dz.

解：对 x 求偏导 $e^{x+y}\sin(x+z)+e^{x+y}\cos(x+z)(1+\frac{\partial z}{\partial x})=0$，

得 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\tan(x+z)-1$，

对 y 求偏导 $e^{x+y}\sin(x+z)+e^{x+y}\cos(z+x)\frac{\partial z}{\partial y}=0$，得 $\frac{\partial z}{\partial y}=-\tan(x+z)$；

所以 $dz=-(1+\tan(x+z))dx-\tan(x+z)dy$.

四、（本题满分 8 分））设函数满足 $\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ x^2+2y^2+3z^2=20 \end{cases}$，求 $\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dx}$.

解：方程两边分别对 x 求导得：$\begin{cases} \frac{dz}{dx}=2x+2y\frac{dy}{dx} \\ 2x+4y\frac{dy}{dx}+6z\frac{dz}{dx}=0 \end{cases}$，

解得 $\frac{dy}{dx}=-\frac{x(1+6z)}{2y(1+3z)}$，$\frac{dz}{dx}=\frac{x}{1+3z}$.

五、（本题满分 8 分）求过点 $M(-1,0,4)$ 且平行于平面 $3\boldsymbol{x}-4\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}-10=0$，又与直线 $\frac{\boldsymbol{x}+1}{1}=\frac{\boldsymbol{y}-3}{1}=\frac{\boldsymbol{z}}{2}$ 相交的直线方程.

解：设两直线交点为 $A(x,y,z)$，故 $\begin{cases} x=-1+t \\ y=3+t \\ z=2t \end{cases}$，

所求直线的方向向量为 $\vec{s}=\overline{MA}=(x+1,y,z-4)=(t,3+t,2t-4)$，

因为所求直线平行于平面，则 $\vec{\boldsymbol{n}}\perp\vec{\boldsymbol{s}}\Rightarrow\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{s}}=0$，$\vec{n}=(3,-4,1)$，

即 $3\cdot t-4\cdot(3+t)+1\cdot(2t-4)=0$，得 $t=16$，所以 $\vec{s}=(16,19,28)$ ，

故所求直线方程为 $\frac{\boldsymbol{x}+1}{16}=\frac{\boldsymbol{y}}{19}=\frac{\boldsymbol{z}-4}{28}$.

六、（本题满分 8 分）设有一平面，它与 xOy 面的交线是 $\begin{cases} 2x+y-2=0 \\ z=0 \end{cases}$，并且它与三个坐标面围成的四面体的体积等于 2，求这平面的方程.

解：设所求平面方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，则它与平面$\mathbf{z=0}$的交线为

$\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\\ z=0\end{cases}$，对比$\begin{cases}2x+y-2=0\\ z=0\end{cases}$得$\begin{cases}a=1\\ b=2\end{cases}$，

由$\frac{1}{6}|abc|=2$得$c=\pm 6$，所求方程为：$\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{6}=1$和$\frac{x}{1}+\frac{y}{2}-\frac{z}{6}=1$.

七、（本题满分 8 分）设函数$z=f(xy,\frac{x}{y})+g(\frac{y}{x})$，其中$f$具有二阶连续偏导数，$g$具有二阶连续导数，求$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+\frac{1}{y}f_2'-\frac{y}{x^2}g'$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+y(xf_{11}''-\frac{x}{y^2}f_{12}'')-\frac{1}{y^2}f_2'+\frac{1}{y}(xf_{21}''-\frac{x}{y^2}f_{22}'')-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^3}g''$$

$$=f_1'-\frac{1}{y^2}f_2'+xyf_{11}''-\frac{x}{y^3}f_{22}''-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^3}g''.$$

八、（本题满分 8 分）设一平面π垂直于平面$\pi_1:z=0$，并通过从点$M(1,-1,1)$到直线$l:\begin{cases}y-z+1=0\\ x=0\end{cases}$的垂线（相交垂直），求此平面$\pi$方程.

解：求得直线l的方向向量 $\vec{s}=(0,1,1)$，

过点$M(1,-1,1)$作平面π_2垂直于l，则平面方程为$\pi_2:y+z=0$，

求得l与π_2的交点坐标为$N(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，

设$\pi:Ax+By+Cz+D=0$，由$\pi\perp\pi_1$，又平面π过点M,N，

则$\begin{cases}C=0\\ A-B+C+D=0\\ -\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C+D=0\end{cases}$，$\begin{cases}A=D\\ B=2D\\ C=0\end{cases}$，代入得所求平面方程：$\pi:x+2y+1=0$.

以上答案形式不唯一，供参考!