专题 7 无穷级数

第一部分 内容概要

1. 常数项级数的基本概念

（1）常数项级数定义

由数列$\{u_n\}$构成的表达式$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$称为常数项级数（简称级数），记为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$,即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$，其中$u_n$称为级数的一般项，称$s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k=u_1+u_2+\cdots+u_n$为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的前$n$项部分和.

（2）级数的收敛与发散的定义

若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和数列$\{s_n\}$收敛，即$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s$，称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，并称$s$是该级数的和，

记为：$s=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$.

若部分和数列$\{s_n\}$发散，称该级数发散.

2. 常见的数项级数类型

（1）若$u_n\geq 0(n=1,2,\cdots)$，则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数.

（2）若$u_n>0(n\in N)$，则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n=u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots$ 或

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n=-u_1+u_2-u_3+u_4-\cdots$为交错级数.

（3）若$u_n\in R$，则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$为任意项级数.

3. 收敛级数的基本性质

（1）若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$都收敛，则对任意常数$k_1,k_2$，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(k_1u_n+k_2v_n)$亦收敛

且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(k_1u_n+k_2v_n)=k_1\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n+k_2\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$.（收敛级数可以逐项相加和逐项相减.）

（2）去掉、增加或改变级数的有限项，级数的敛散性不变.

（3）在收敛级数的项中任意加括号，级数的收敛性不变，且级数的和不变.

（4）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$．（若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散）．

4. 几个常用级数的敛散性

（1）　等比级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$，当 $|q|<1$ 时收敛，且和为 $\frac{\text{首项}}{1-\text{公比}}$，当 $|q|\geq 1$ 时发散；

（2）　调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 发散；

（3）　p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$，当 $p>1$ 时收敛，当 $0<p\leq 1$ 时发散．

（4）　推广：$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln^p n}$，当 $p>1$ 时收敛，当 $p\leq 1$ 时发散．

5. 正项级数审敛法

（1）正项级数收敛的充要条件：正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是部分和数列 $\{s_n\}$ 有上界．

（2）比较审敛法：

① 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 是两个正项级数，且 $u_n \leq v_n (n=1,2,\cdots)$，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散．

注：条件 $u_n \leq v_n (n=1,2,\cdots)$ 可改为 $u_n \leq cv_n (n\geq k, c>0)$，结论仍然成立．

② 比较审敛法的极限形式：设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 是两个正项级数，若 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = l$，则有

1) 当 $0<l<+\infty$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 同收敛或同发散；

2) 当 $l=0$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；

3) 当 $l=+\infty$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散．

【练习一】

1、设 $a_n \le c_n \le b_n$（$n=1,2,\cdots$），且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$（　　　）

（A）必收敛.（B）必发散.（C）未必收敛，但 $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$.（D）$\lim_{n\to\infty} c_n$ 存在但未必等于 0.

【A】

2、下列级数中发散的是（　　　）

（A）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}$.　　（B）$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^n}$.

（C）$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n})$.　　（D）$\sum_{n=1}^{\infty} (1-\cos\frac{\pi}{n})$.

【C】

3、已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{n^{\lambda}}$ 收敛，则 λ 取值的最大范围为______________.

【$\lambda > \frac{1}{2}$】

（3）比值审敛法：设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，若 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$，则当 $\rho < 1$ 时，级数收敛；当 $\rho > 1$ 时，级数发散；当 $\rho = 1$ 时，级数可能收敛，也可能发散.

（4）根值审敛法：设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，若 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$，则当 $\rho < 1$ 时，级数收敛；当 $\rho > 1$ 时，级数发散；当 $\rho = 1$ 时，级数可能收敛，也可能发散.

（5）积分判别法：设 $f(x)$ 为 $[1,+\infty)$ 上的非负递减函数，则正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 同时收敛或同时发散.

【练习二】

1、下列级数中收敛的是（　　）

（A）$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$.　　（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\dfrac{\sin x}{1+x}\mathrm{d}x$.

（C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n2^n}$.　　（D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{2^n\cdot n!}$.

【B】

2、若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，则下列说法错误的是（　　）

（A）如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho<1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

（B）如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho>1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

（C）如果 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

（D）如果 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

【C】

3、下列级数中发散的是（　　）

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(\ln(n+1))^n}$.　（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$.（C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\tan\dfrac{\pi}{2^n}$.　D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}$.

【D】

6. 交错级数审敛法

莱布尼茨判别法：设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 为交错级数，且满足条件

（1） $u_n\ge u_{n+1}$；　　**（2）** $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 收敛，且其和 s 满足 $s\le u_1$，余项有 $|r_n|\le u_{n+1}$.

7. 任意项级数的审敛法

（1）绝对收敛与条件收敛的定义

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛.

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛.

（2）任意项级数的审敛法步骤：

方法一：利用级数收敛的必要条件：当 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$ 时，原级数发散；

方法二：判别正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 是否收敛，若收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为绝对收敛；若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，再看原级数是否条件收敛. 这时：若原级数为交错级数，常用莱布尼茨判别法判别原级数是否收敛，若收敛，则原级数是条件收敛.

方法三：若对正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 用比值审敛法（达朗贝尔比值判别法），若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\rho$，

则当 $\rho<1$ 时，原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛； 当 $\rho>1$ 时，原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

若用根值审敛法（柯西判别法）有类似的结果.

【练习三】

1、级数 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n\ln n}$ 的敛散性为（　　）

（A）条件收敛.　（B） 发散.　（C） 绝对收敛.　（D）不能确定.

【A】

2、下列级数中条件收敛的是（　　）

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{n+1}$.　（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}$.

（C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{3^n}{n!}$.　（D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln\dfrac{n+1}{n}$.

【D】

3、设 $0\le a_n\le\dfrac{1}{n}$（$n=1,2,\cdots$），则下列级数中肯定收敛的是（　　）

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.（C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$.（D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n^2$.

【D】

4、设a为常数，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin na}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$敛散性为（　　）

（A）　条件收敛.　　（B）　发散.　　（C）　绝对收敛.　　（D）　敛散性与a有关.

【B】

第二部分　典型例题

例 1. 判断下列正项级数的敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{3^n-2^n}$. (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(3-\frac{1}{n}\right)^n\sin\frac{1}{3^n}$. (3) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln\sqrt[3]{n}}$.

【收敛；发散；发散】

例 2. 讨论下列正项级数的收敛性

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^2}$.

【收敛】

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)\sin\frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

【发散】

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\ln\frac{1}{n}-\ln\sin\frac{1}{n}\right)$.

【收敛】

例 3. 用适当的方法判别下列级数的敛散性：

（1） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{\ln(1+n)}(a>0)$.　　（2） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\tan\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)$.　　（3） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

【$a\geq1$时级数发散，$0<a<1$时级数收敛；收敛；收敛】.

例4. 设a是常数，讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|a|^n n!}{n^n}$的敛散性.

【分析】 通项$\dfrac{|a|^n n!}{n^n}$中含有$n!$，一般用比值法试之. u_n中含有n^n，也可用根值法试之.

【当$|a|<e$时，原级数收敛；当$|a|\geq e$时，原级数发散】

例5. 设$\alpha>1$，求证级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{1^{\alpha}+2^{\alpha}+\cdots+n^{\alpha}}$收敛.

提示：和p级数比.

例6. 设x_n是方程$x=\tan x$的正根（按递增顺序排列），证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{x_n^{\ 2}}$收敛.

例7. 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sin(n+k)$　(k为常数)（　　　　）

（A）绝对收敛；　（B）条件收敛；　（C）发散；　（D）收敛性与k有关.

【 **A** 】

例 8. 设 $a_n > 0(n=1,2,\ldots)$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，λ 为常数 $(0<\lambda<\dfrac{\pi}{2})$，

证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(n\tan\dfrac{\lambda}{n}\right)a_{2n}$ 绝对收敛.

例 9. 设 $f(x)$ 是偶函数，在 $x=0$ 的某邻域内具有连续的二阶导数且 $f(0)=1$.

证明：级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right)-1\right]$ 绝对收敛.

例 10.（2022 预赛）设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，证明：存在收敛的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=0$.

例 11.（2023/研 1）已知 $a_n < b_n\ (n=1,2...)$，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均收敛，则“$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛”是“$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛”的（　　）

（A）充分必要条件　（B）充分不必要条件

（C）必要不充分条件　（D）既不充分也不必要条件

【A】