第一章 函数与极限

习题课

一、主要内容

二、典型例题

一、主要内容

- （一）函数的定义
- （二）极限的概念
- （三）连续的概念

基本初等函数

复合函数

初等函数

双曲函数与反双曲函数

函 数的定义

反函数

隐函数

反函数与直接函数之间关系

函 数的性质

单值与多值

奇偶性

单调性

有界性

周期性

1、函数的定义

定义 设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集. 如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$.

数集 D 叫做这个函数的定义域，x 叫做自变量，y 叫做因变量.

函数值全体组成的数集

$W=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的值域.

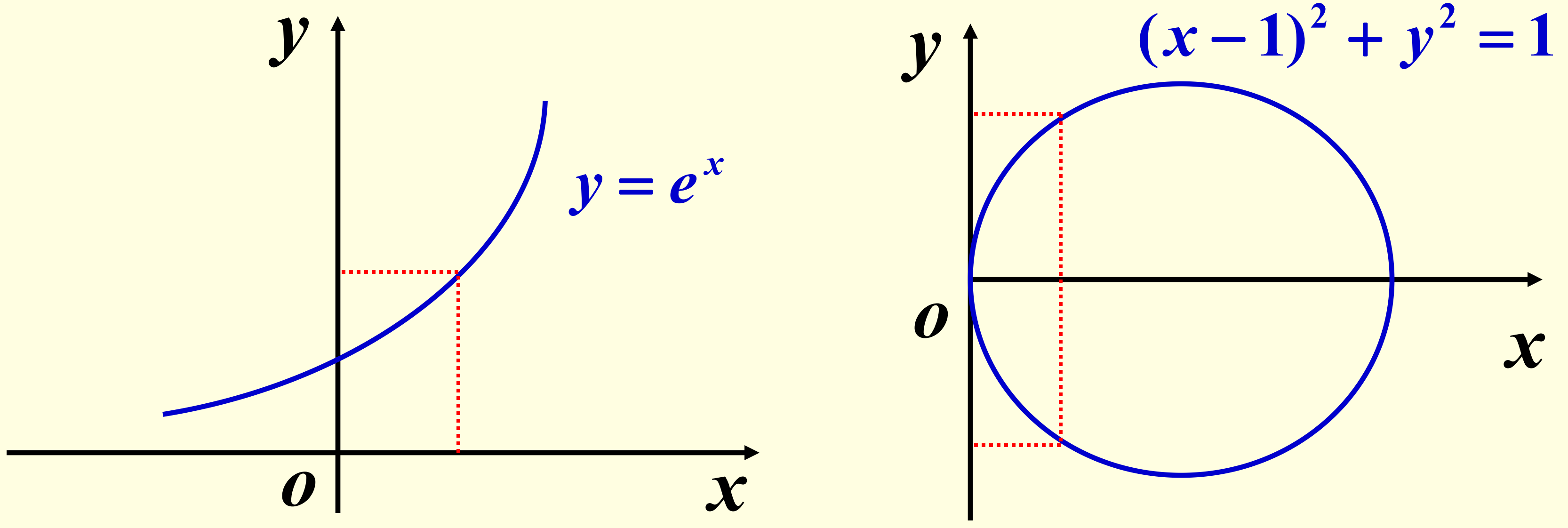
函数的分类

- 函数
  - 初等函数
    - 代数函数
      - 有理函数
        - 有理整函数(多项式函数)
        - 有理分函数(分式函数)
      - 无理函数
    - 超越函数
  - 非初等函数(分段函数, 有无穷多项等函数)

2、函数的性质

(1) 单值性与多值性:

若对于每一个$x \in D$,仅有一个值$y = f(x)$与之对应,则称$f(x)$为单值函数,否则就是多值函数.

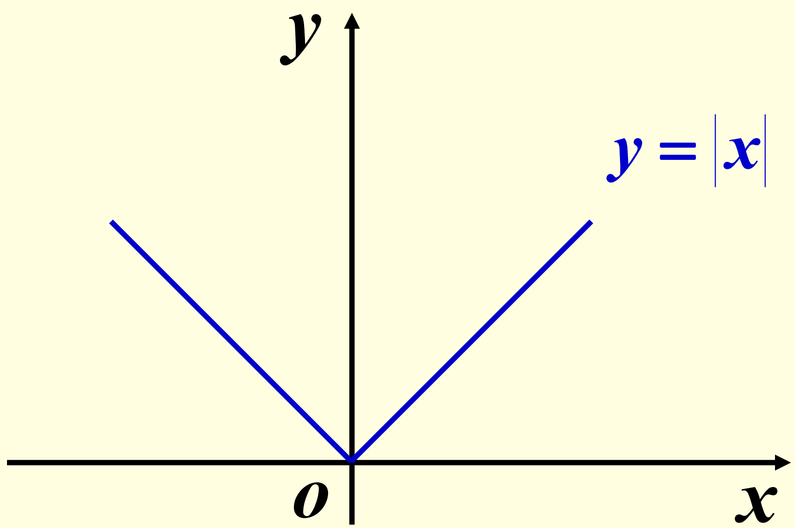


(2) 函数的奇偶性:

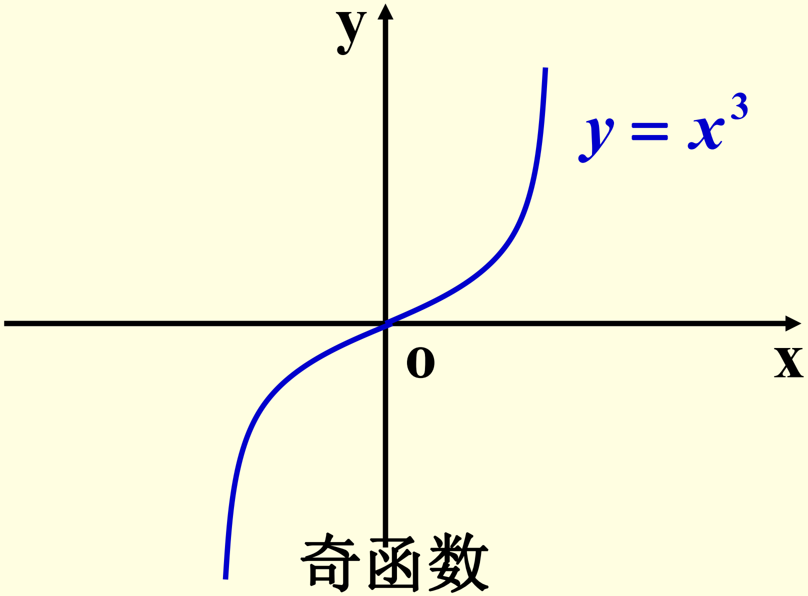
设D关于原点对称,对于$\forall x \in D$,有

$f(-x) = f(x)$　　称$f(x)$为偶函数;

$f(-x) = -f(x)$　　称$f(x)$为奇函数;



偶函数



奇函数

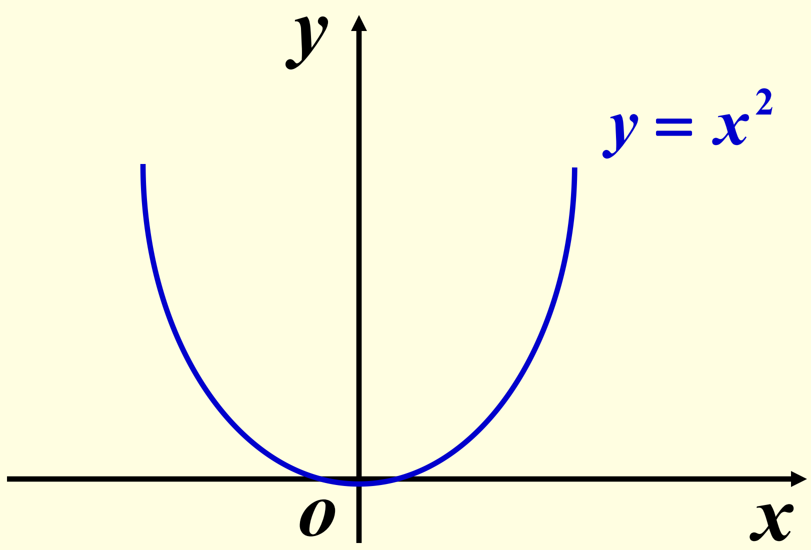
(3) 函数的单调性:

设函数$f(x)$的定义域为D，区间I $\subset$D，如果对于区间I上任意两点 x_1及 x_2，当$x_1 < x_2$时，恒有：

(1) $f(x_1) < f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间I上是<u>单调增加的</u>；

或(2) $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数$f(x)$在区间I上是<u>单调递减的</u>；

单调增加和单调减少的函数统称为<u>单调函数</u>。



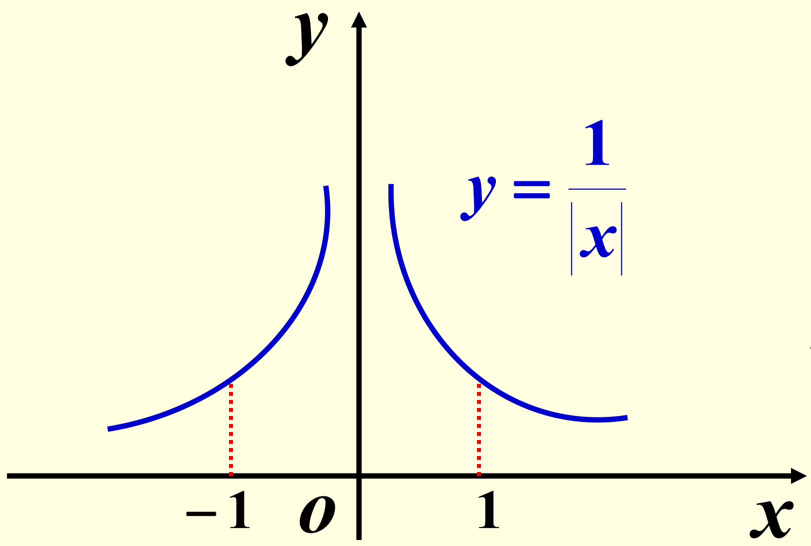
当 $x \le 0$ 时为减函数；

当 $x \ge 0$ 时为增函数；

(4) 函数的有界性:

若$X \subset D, \exists M > 0, \forall x \in X$,有 $|f(x)| \le M$ 成立,

则称函数$f(x)$在X上有界.否则称无界.



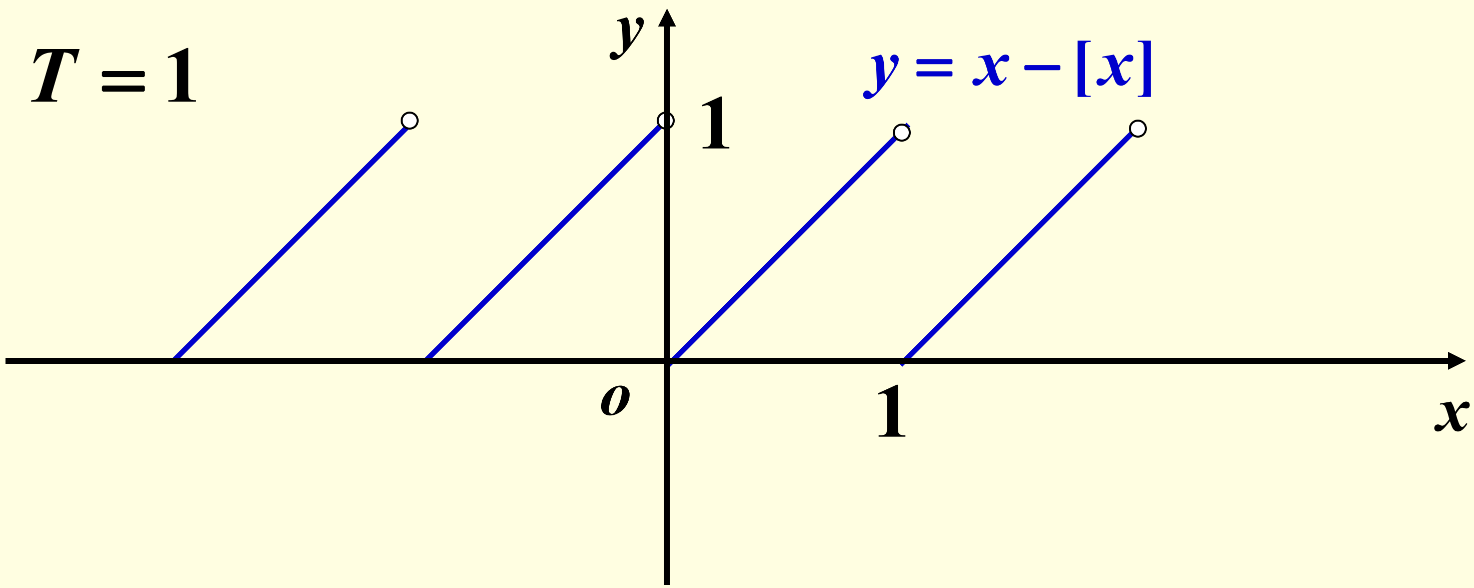
在$(-\infty,0)$及$(0,+\infty)$上无界;

在$(-\infty,-1]$及$[1,+\infty)$上有界.

(5) 函数的周期性:

设函数 $f(x)$ 的定义域为D，如果存在一个不为零的数l,使得对于任一 $x \in D$,有 $(x \pm l) \in D$.且 $f(x+l)=f(x)$ 恒成立,则称$f(x)$为周期函数,l 称为 $f(x)$ 的周期.（通常说周期函数的周期是指其最小正周期）.

$T = 1$



3、反函数

由$y=f(x)$确定的$y=f^{-1}(x)$称为反函数.

$$y=\sinh x \longrightarrow y=f^{-1}(x)=\operatorname{ar}\sinh x$$

4、隐函数

由方程$F(x,y)=0$所确定的函数

$y=f(x)$称为隐函数.

如 $y-x-\varepsilon e^{y}=0$

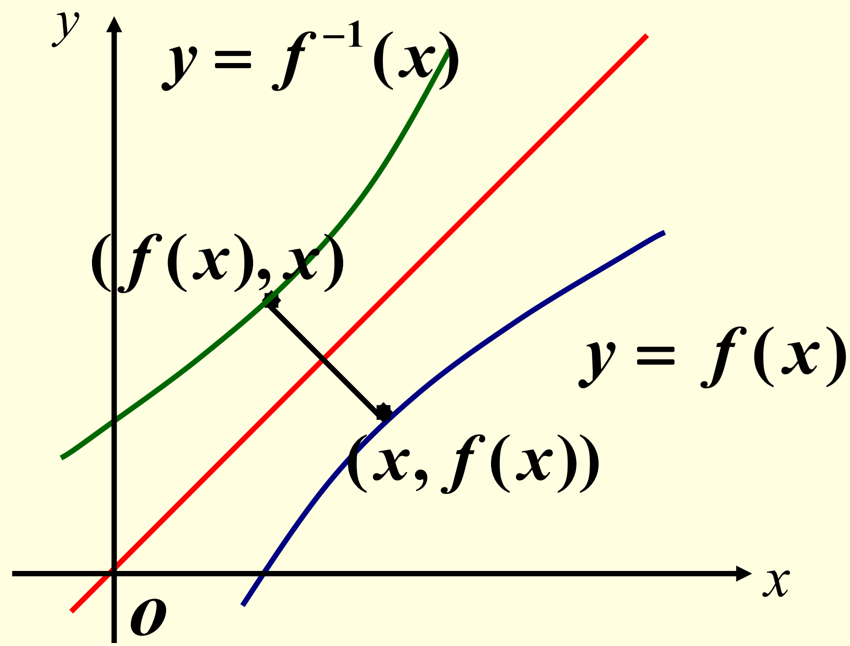
5、反函数与直接函数之间的关系

设函数$f(x)$是一一对应函数,则

(1) $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x))$

$= x \qquad\qquad x \notin D_f$

(2) $y = f(x)$与$y = f^{-1}(x)$的图象对称于直线$y = x$.



6、基本初等函数

1）幂函数 $y = x^{\mu}$ （μ是常数）

2）指数函数 $y = a^{x}$ $(a > 0, a \neq 1)$

3）对数函数 $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$

4）三角函数 $y = \sin x;$ $y = \cos x;$

$y = \tan x;$ $y = \cot x;$

5）反三角函数 $y = \arcsin x;$ $y = \arccos x;$

$y = \arctan x;$ $y = \operatorname{arccot} x$

7、复合函数

设函数$y=f(u)$的定义域D_f,而函数$u=\varphi(x)$的值域为Z_φ,若$D_f\cap Z_\varphi\neq\varnothing$,则称函数$y=f[\varphi(x)]$为$x$的<u>复合函数</u>.

8、初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用<u>一个式子表示</u>的函数,称为<u>初等函数</u>.

9、双曲函数与反双曲函数

双曲正弦 $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

双曲余弦 $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

双曲正切 $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

双曲函数常用公式

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y;$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y;$$

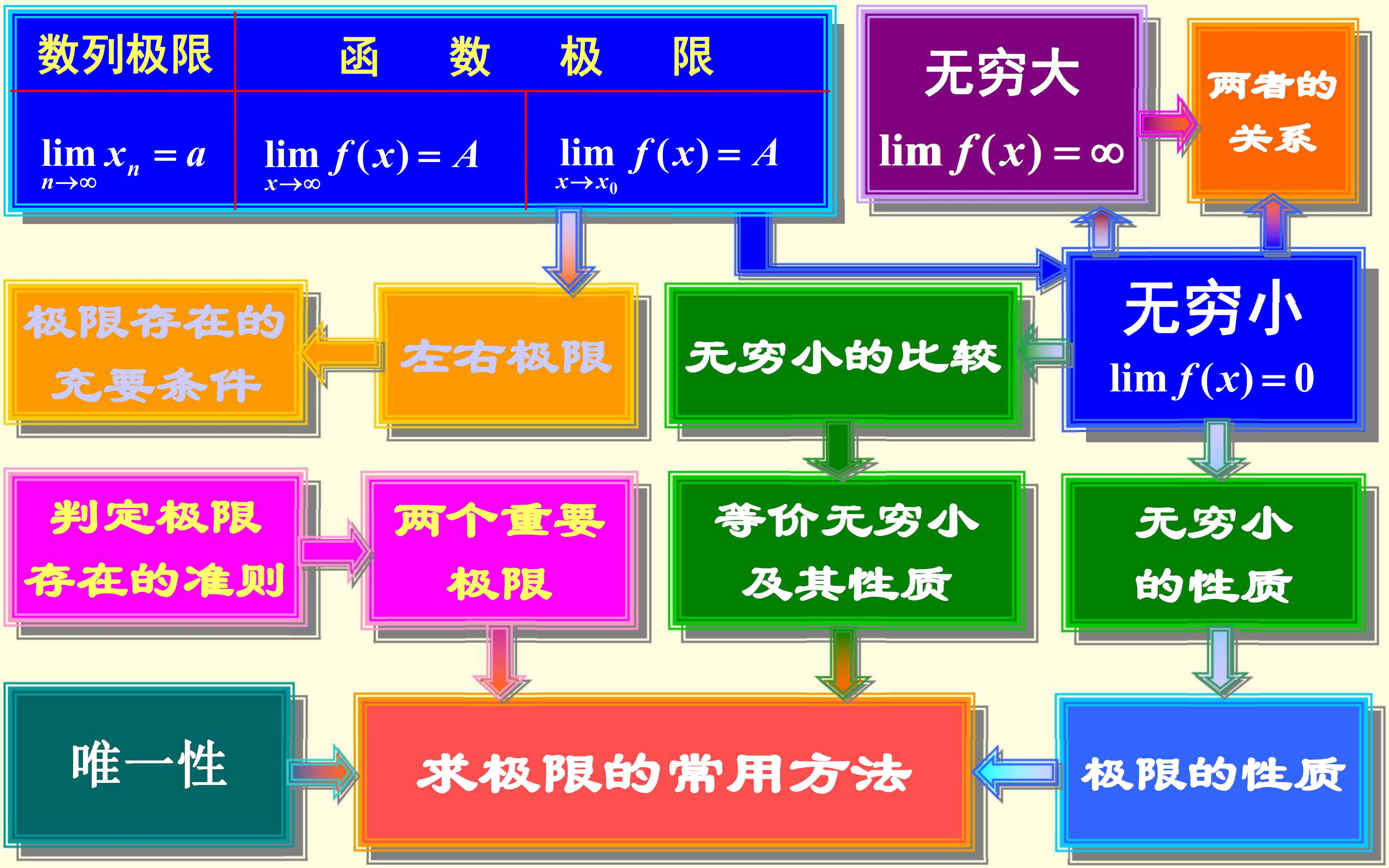
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1; \quad \sinh 2x = 2\sinh x \cosh x;$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x.$$

反双曲正弦 $y = \operatorname{ar}\sinh x$;

反双曲余弦 $y = \operatorname{ar}\cosh x$;

反双曲正切 $y = \operatorname{ar}\tan x$;


数列极限
函 数 极 限
$\lim_{n\to\infty} x_n = a$
$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$
$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$
无穷大
$\lim f(x) = \infty$
两者的关系
极限存在的充要条件
左右极限
无穷小的比较
无穷小
$\lim f(x) = 0$
判定极限存在的准则
两个重要极限
等价无穷小及其性质
无穷小的性质
唯一性
求极限的常用方法
极限的性质

1、极限的定义

定义 如果对于任意给定的正数ε(不论它多么小),总存在正数N,使得对于$n > N$时的一切x_n,不等式$|x_n - a| < \varepsilon$都成立,那末就称常数a是数列x_n的极限,或者称数列x_n收敛于a,记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,\text{或}\ x_n \to a \quad (n \to \infty).$$

$\boxed{\text{"}\varepsilon - N\text{"定义}}$

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists N > 0,$ 使$n > N$时,恒有$|x_n - a| < \varepsilon.$

定义 2　如果对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正数 δ，使得对于适合不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的一切 x，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

那末常数 A 就叫函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A(当 x \to x_0)$$

"$\varepsilon - \delta$"定义　$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，

恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon.$

极限定义的等价形式 (以 $x \to x_0$ 为例)

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \rightleftarrows \lim_{x\to x_0}[f(x)-A] = 0$$

$\boxed{"\varepsilon-\delta"}$

(即 $\alpha = f(x) - A$ 为无穷小)

$$\rightleftarrows f(x_0^-) = f(x_0^+) = A$$

$$\rightleftarrows \forall\{x_n\}(x_n \ne x_0),\ x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0,$$

有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$

左极限 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 使当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时,

恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

记作 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0-0\\(x\to x_0^-)}} f(x)=A$ 或 $f(x_0-0)=A$.

右极限 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 使当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时,

恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

记作 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0+0\\(x\to x_0^+)}} f(x)=A$ 或 $f(x_0+0)=A$.

定理 : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$.

2、无穷小与无穷大

无穷小：极限为零的变量称为无穷小.

记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0 \quad (\text{或}\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0).$

无穷大：绝对值无限增大的变量称为无穷大.

记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty \quad (\text{或}\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty).$

无穷小与无穷大的关系

在同一过程中,无穷大的倒数为无穷小;恒不为零的无穷小的倒数为无穷大.

无穷小的运算性质

定理1 在同一过程中,有限个无穷小的代数和仍是无穷小.

定理2 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

推论1 在同一过程中,有极限的变量与无穷小的乘积是无穷小.

推论2 常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论3 有限个无穷小的乘积也是无穷小.

3、极限的性质

定理 设 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$,则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$;

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$;

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$, 其中$B\neq 0$.

推论1 如果$\lim f(x)$存在,而c为常数,则

$$\lim[cf(x)]=c\lim f(x).$$

推论2 如果$\lim f(x)$存在,而n是正整数,则

$$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n.$$

4、求极限的常用方法

a.多项式与分式函数代入法求极限;

b.消去零因子法求极限;

c.无穷小因子分出法求极限;

d.利用无穷小运算性质求极限;

e.利用左右极限求分段函数极限.

5、判定极限存在的准则

准则 I′ 如果当 $x \in \overset{0}{U}(x_0, r)$(或 $|x| > M$)时,有

(1) $g(x) \le f(x) \le h(x)$,

(2) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} g(x) = A$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} h(x) = A$,

那末 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x)$ 存在,且等于 A. (夹逼准则)

准则 II 单调有界数列必有极限.

6、两个重要极限

(1) $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$ $\lim_{某过程}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1;$

(2) $\boxed{\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e}$

$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e}$ $\lim_{某过程}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e.$

7、无穷小的比较

定义: 设α,β是同一过程中的两个无穷小,且$\alpha \neq 0$.

(1) 如果$\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=0$,就说$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷小,

记作$\beta = o(\alpha)$;

(2) 如果$\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=C\,(C\neq 0)$,就说$\beta$与$\alpha$是同阶的无穷小;

特殊地 如果$\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=1$,则称$\beta$与$\alpha$是等价的无穷小;

记作$\alpha \sim \beta$;

(3) 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = C(C \neq 0, k > 0)$,就说$\beta$是$\alpha$是$k$阶的无穷小.

8、等价无穷小的性质

定理(等价无穷小替换定理)

设 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$ 且 $\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在,则 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$.

9、极限的唯一性

定理 若 $\lim f(x)$ 存在,则极限唯一.

常用等价无穷小:

$\sin x \sim x$; $\tan x \sim x$; $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$;

$\arctan x \sim x$; $\arcsin x \sim x$; $\ln(1+x) \sim x$;

$e^x - 1 \sim x$; $a^x - 1 \sim x\ln a$; $(1+x)^\mu - 1 \sim \mu x$;

$\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2}$

求极限的基本方法

判断极限不存在的方法

连续定义

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

间断点定义

第一类

可去间断点 跳跃间断点

第二类

无穷间断点 振荡间断点

左右连续

连续的充要条件

在区间[a, b]上连续

连续函数的运算性质

非初等函数的连续性

初等函数的连续性

连续函数的性质

1、连续的定义

定义1 设函数$f(x)$在点x_0的某一邻域内有定义，如果当自变量的增量Δx趋向于零时，对应的函数的增量Δy也趋向于零，即

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \quad 或 \quad \lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$$

那末就称函数$f(x)$在点x_0连续，x_0称为$f(x)$的连续点.

定义2 $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$

函数连续的等价形式

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \Longleftrightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$$

$$\left(\Delta x=x-x_0,\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right)$$

$$\Longleftrightarrow f(x_0^+)=f(x_0^-)=f(x_0)$$

$$\Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{当}\left|x-x_0\right|<\delta\text{时，有}$$

$$\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon$$

2、单侧连续

若函数$f(x)$在$(a, x_0]$内有定义,且$f(x_0-0)=f(x_0)$,
则称$f(x)$在点x_0处左连续;

若函数$f(x)$在$[x_0, b)$内有定义,且$f(x_0+0)=f(x_0)$,
则称$f(x)$在点x_0处右连续.

3、连续的充要条件

定理 函数$f(x)$在 x_0 处连续$\Leftrightarrow$是函数$f(x)$在 x_0 处既左连续又右连续.

4、间断点的定义

函数$f(x)$在点x_0处连续必须满足的三个条件：

(1) $f(x)$在点x_0处有定义;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

如果上述三个条件中只要有一个不满足,则称函数$f(x)$在点x_0处不连续(或间断),并称点x_0为$f(x)$的不连续点(或间断点).

5、间断点的分类

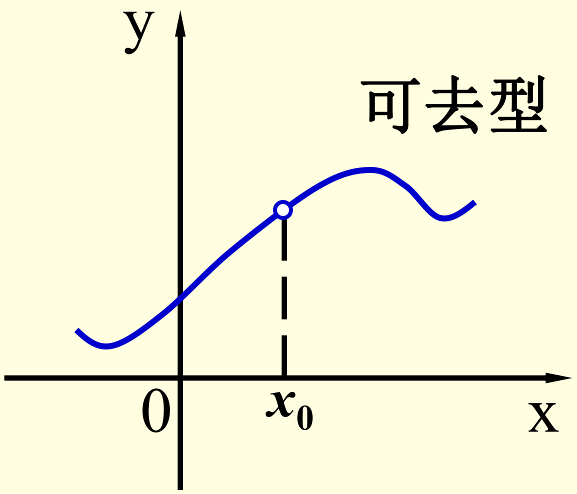
(1) 跳跃间断点 如果$f(x)$在点x_0处左,右极限都存在,但$f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$,则称点x_0为函数$f(x)$的跳跃间断点.

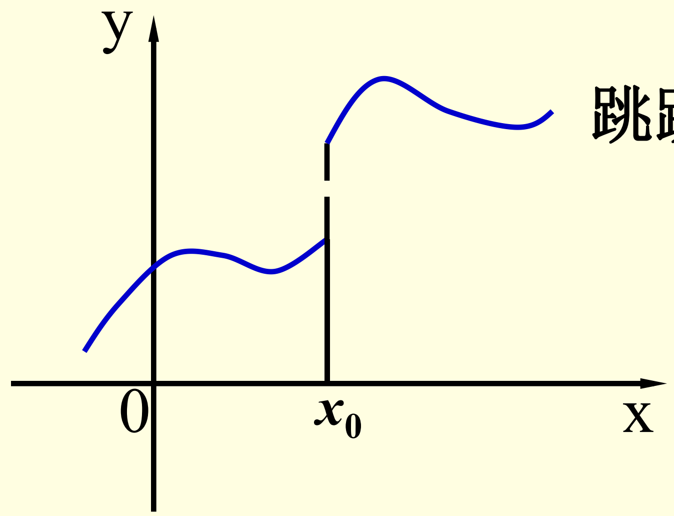
(2)可去间断点 如果$f(x)$在点x_0处的极限存在,但$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\neq f(x_0)$,或$f(x)$在点$x_0$处无定义则称点$x_0$为函数$f(x)$的可去间断点.

跳跃间断点与可去间断点统称为第一类间断点.

特点：函数在点x_0处的左,右极限都存在.

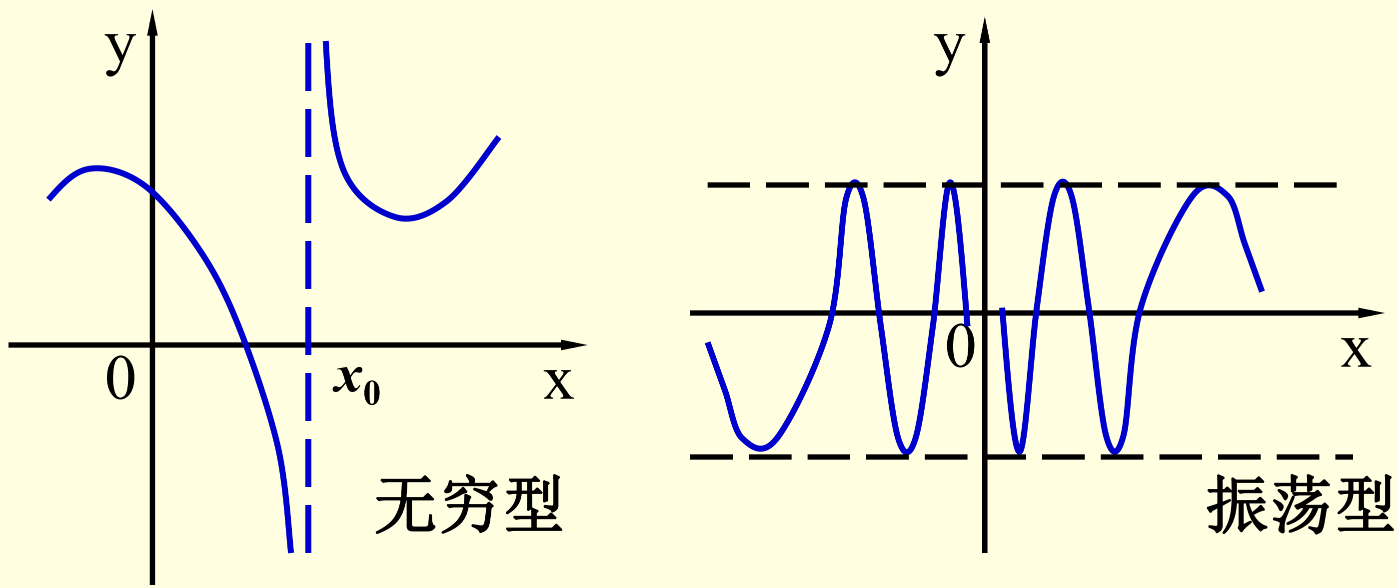
第一类间断点





第二类间断点 如果$f(x)$在点x_0处的左,右极限至少有一个不存在,则称点x_0为函数$f(x)$的<u>第二类间断点</u>.

第二类间断点



- 函数间断点
  - 第一类间断点
    - 可去间断点
    - 跳跃间断点
  - 第二类间断点
    - 无穷间断点
    - 振荡间断点

6、闭区间的连续性

如果函数在开区间(a,b)内连续,并且在左端点$x=a$处右连续,在右端点$x=b$处左连续,则称函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续.

7、连续性的运算性质

定理 若函数$f(x),g(x)$在点x_0处连续,则

$$f(x)\pm g(x),\ f(x)\cdot g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}\ (g(x_0)\neq 0)$$

在点x_0处也连续.

8、初等函数的连续性

定理1 严格单调的连续函数必有严格单调的连续反函数.

定理2 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，函数$f(u)$在点$a$连续，则有

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f(a)=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)].$$

定理3 设函数$u=\varphi(x)$在点$x=x_0$连续，且$\varphi(x_0)=u_0$，而函数$y=f(u)$在点$u=u_0$连续，则复合函数$y=f[\varphi(x)]$在点$x=x_0$也连续.

定理4 基本初等函数在定义域内是连续的.

定理5 一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

定义区间是指包含在定义域内的区间.

9、闭区间上连续函数的性质

定理1（最大值和最小值定理）在闭区间上连续的函数一定有最大值和最小值.

定理2(有界性定理) 在闭区间上连续的函数一定在该区间上有界.

定理 3(零点定理) 设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$f(a)$与$f(b)$异号(即$f(a)\cdot f(b)<0$)，那末在开区间(a,b)内至少有函数$f(x)$的一个零点,即至少有一点$\xi(a<\xi<b)$，使$f(\xi)=0$.

定理 4（介值定理） 设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且在这区间的端点取不同的函数值

$$f(a)=A \text{ 及 } f(b)=B,$$

那末，对于A与B之间的任意一个数C，在开区间(a,b)内至少有一点ξ，使得$f(\xi)=c \quad (a<\xi<b)$.

推论 在闭区间上连续的函数必取得介于最大值M与最小值m之间的任何值.

二、典型例题

例1 求函数$y=\log_{(x-1)}(16-x^2)$的定义域.

解

$$\left.\begin{array}{l} 16-x^2>0, \\ x-1>0, \\ x-1\neq 1, \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{cases} |x|<4 \\ x>1 \\ x\neq 2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow 1<x<2 \text{及} 2<x<4,$$

即$(1,2)\cup(2,4)$.

例2 设$f(x)+f(\frac{x-1}{x})=2x$，其中$x\neq 0, x\neq 1$.

求$f(x)$.

解 利用函数表示法的无关特性

令 $t=\frac{x-1}{x}$, 即 $x=\frac{1}{1-t}$, 代入原方程得

$f(\frac{1}{1-t})+f(t)=\frac{2}{1-t}$, 即$f(x)+f(\frac{1}{1-x})=\frac{2}{1-x}$,

令 $\frac{1}{1-x}=\frac{u-1}{u}$, 即 $x=\frac{1}{1-u}$, 代入上式得

$f(\frac{1}{1-u})+f(\frac{u-1}{u})=\frac{2(u-1)}{u}$, 即 $f(\frac{1}{1-x})+f(\frac{x-1}{x})=\frac{2(x-1)}{x}$,

解联立方程组

$$\begin{cases} f(x)+f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=2x \\ f(x)+f\left(\dfrac{1}{1-x}\right)=\dfrac{2}{1-x} \\ f\left(\dfrac{1}{1-x}\right)+f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=\dfrac{2(x-1)}{x} \end{cases}$$

$$\therefore f(x)=x+\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}-1.$$

例3. 设 $x_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\cdots\frac{2n-1}{2n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解. $x_n^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdots\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-1}{2n}$

$$< \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdots\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$$

$$\Rightarrow \quad 0 < x_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} x_n = 0. \qquad \left(\because \ \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \to 0 \right)$$

例4 当$|x|<1$时，

求$\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$.

解 将分子、分母同乘以因子(1-x), 则

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^{2^n})(1+x^{2^n})}{1-x}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$$

$$=\frac{1}{1-x}.\qquad (\because \text{当}|x|<1\text{时},\lim_{n\to\infty}x^{2^{n+1}}=0.)$$

例4 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$.

解 解法讨论

设 $\lim f(x)=0, \lim g(x)=\infty$, 则

$$\lim[1\pm f(x)]^{g(x)}=e^{\lim g(x)\ln[1\pm f(x)]}=e^{\lim g(x)[\pm f(x)]}$$

$$(\because \ln[1\pm f(x)]\sim \pm f(x)) \qquad =e^{\pm\lim g(x)f(x)}.$$

$$原式=\lim_{x\to 0}[1+(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}-1)]^{\frac{1}{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to 0}[1+\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}]^{\frac{1}{x^3}}$$

$$\because \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\cdot\frac{1}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{(1+\sin x)\cos x}\cdot\frac{1}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{(1+\sin x)\cos x}=\frac{1}{2}.$$

$$\therefore 原式=e^{\frac{1}{2}}.$$

练习1. 求下列极限：

$$(1)\ \lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$$

$$(2)\ \lim_{x\to1}\frac{1-x^2}{\sin\pi x}$$

$$(3)\ \lim_{x\to0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\cot x}$$

提示:

(1) $\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}$

$$=2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$$

$$=2\sin\underbrace{\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}}_{\text{无穷小}}\cos\underbrace{\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}}_{\text{有界}}$$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}$

令 $t = x - 1$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{-t(t+2)}{\sin\pi(t+1)}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{t(t+2)}{\sin\pi t} = \lim_{t\to 0}\frac{t(t+2)}{\pi t} = \frac{2}{\pi}$$

复习: 若 $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=0,\ \lim\limits_{x\to x_0} v(x)=\infty,$ 则有

$$\lim_{x\to x_0}\left[1+u(x)\right]^{v(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)u(x)}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)\ln\left[1+u(x)\right]}$$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\cot x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{2x}{1-x}\right)^{\cot x}$

$\boxed{1^{\infty}}$

$\ln\left(1+\dfrac{2x}{1-x}\right) \sim \dfrac{2x}{1-x}$

$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{2x}{1-x}\right)} = e^{2}$

例5 设$p(x)$是多项式，且$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{p(x)-x^3}{x^2}=2$,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{p(x)}{x}=1$,求$p(x)$.

解 $\because \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{p(x)-x^3}{x^2}=2,$

$\therefore$ 可设$p(x)=x^3+2x^2+ax+b$(其中a,b为待定系数)

又$\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{p(x)}{x}=1,$

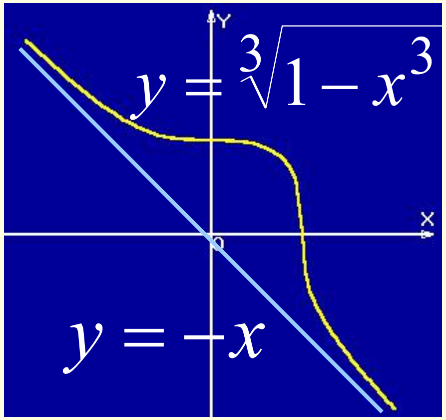
$\therefore\ p(x)=x^3+2x^2+ax+b\sim x \quad (x\to 0)$

从而得 $b=0, a=1.$ 故 $p(x)=x^3+2x^2+x$

练习2. 确定常数 a , b , 使 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}-ax-b)=0$

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-1}-a-\frac{b}{x}\right)=0$

$\therefore\quad \lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-1}-a-\frac{b}{x}\right)=0$



故 $-1-a=0$, 于是 $a=-1$, 而

$$b=\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}+x)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}\underbrace{-x\sqrt[3]{1-x^3}}_{+}+x^2}=0$$

练习3. 当 $x \to 0$ 时，$\sqrt[3]{x^2+\sqrt{x}}$ 是x 的几阶无穷小？

解： 设其为 x 的 k 阶无穷小，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2+\sqrt{x}}}{x^k}=C\neq 0$$

因
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2+\sqrt{x}}}{x^k}=\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{\frac{x^2+\sqrt{x}}{x^{3k}}}$$

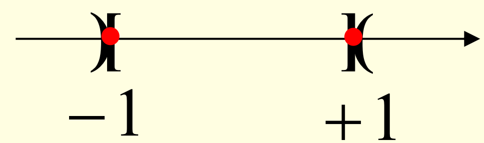
$$=\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{x^{\frac{1}{2}-3k}(1+x^{\frac{3}{2}})}$$

故 $k=\dfrac{1}{6}$

例6 讨论$f(x)=\begin{cases}|x-1|, & |x|>1 \\ \cos\dfrac{\pi x}{2}, & |x|\le 1\end{cases}$的连续性.

解 将$f(x)$改写成

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & x<-1 \\ \cos\dfrac{\pi x}{2}, & -1\le x\le 1 \\ x-1, & x>1\end{cases}$$



显然$f(x)$在$(-\infty,-1),(-1,1),(1,+\infty)$内连续.

当$x=-1$时,

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(1-x)=2.\because \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\cos\dfrac{\pi x}{2}=0.$ 故$f(x)$在$x=-1$间断.

当$x=1$时,

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\cos\dfrac{\pi x}{2}=0.$ $\because \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=0.$ 故$f(x)$在$x=1$连续.

$\therefore f(x)$在$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$连续.

练习4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a(1-\cos x)}{x^2}, & x<0\\ 1, & x=0\\ \ln(b+x^2), & x>0\end{cases}$

在 $x=0$ 连续，则 $a=$ __2__，$b=$ __e__.

提示: $f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{a(1-\cos x)}{x^2}=\dfrac{a}{2}$

$f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(b+x^2)=\ln b$

$\dfrac{a}{2}=1=\ln b$

$$\boxed{1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2}$$

练习5. 设函数$f(x)=\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}$ 有无穷间断点 $x=0$ 及可去间断点 $x=1$,试确定常数 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}$.

解: $\because\ x=0$ 为无穷间断点, 所以

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}=\infty \Longrightarrow \lim_{x\to0}\frac{(x-a)(x-1)}{e^x-b}=\frac{a}{1-b}=0$$

$$\Longrightarrow a=0\,,\,b\neq1$$

$\because x=1$ 为可去间断点 , $\therefore \lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^x-b}{x(x-1)}$ 极限存在

$$\Longrightarrow \lim_{x\to1}(e^x-b)=0 \Longrightarrow b=\lim_{x\to1}e^x=e$$

练习6. 设 $f(x)$ 定义在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上，且对任意实数 x, y 有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，若 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，证明 $f(x)$ 对一切 x 都连续 .

提示:

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x)+f(\Delta x)]$$

$$=f(x)+f(0)$$

$$=f(x+0) \quad =f(x)$$

练习7.设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ 2-x, & x>1 \end{cases}$，$\varphi(x)=\begin{cases} x, & x\le 1 \\ x+4, & x>1 \end{cases}$

讨论复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的连续性 .

解:

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases} \varphi^2(x), & \varphi(x)\le 1 \\ 2-\varphi(x), & \varphi(x)>1 \end{cases} = \begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ -2-x, & x>1 \end{cases}$$

$x \neq 1$时 $f[\varphi(x)]$为初等函数，故此时连续；而

$$\lim_{x\to 1^-} f[\varphi(x)] = \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f[\varphi(x)] = \lim_{x\to 1^+} (-2-x) = -3$$

故 $f[\varphi(x)]$在点 $x = 1$ 不连续，$x = 1$为第一类间断点．

P73 题5. 证明: 若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 必在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

证: 令 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$, 则给定 $\varepsilon>0, \exists X>0$, 当 $|x|>X$ 时, 有 $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$

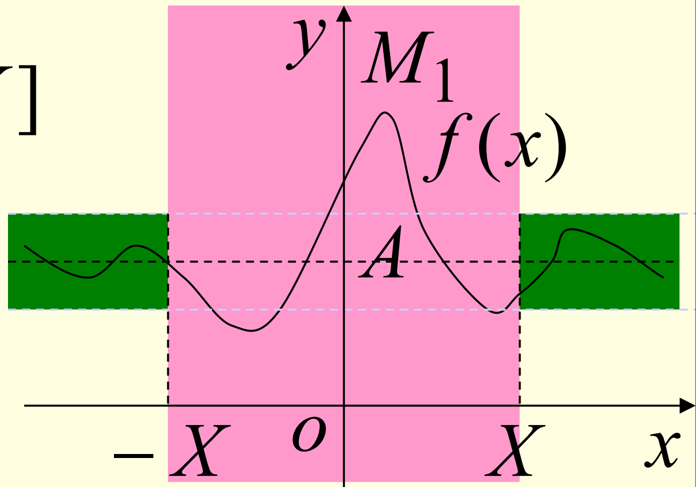
又 $f(x)\in C[-X,X]$, 根据有界性定理, $\exists M_1>0$, 使

$$\left|f(x)\right|\le M_1\,,\quad x\in[-X,X]$$

取

$$M=\max\left\{\left|A+\varepsilon\right|,\left|A-\varepsilon\right|,M_1\right\}$$

则 $\left|f(x)\right|\le M\,,\ x\in(-\infty,\infty)$



例7 设$f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续，且$f(0)=f(1)$，证明必有一点$\xi\in[0,1]$使得$f(\xi+\frac{1}{2})=f(\xi)$.

证明 令 $F(x)=f(x+\frac{1}{2})-f(x)$，

则 $F(x)$在$[0,\frac{1}{2}]$上连续.

$\because F(0)=f(\frac{1}{2})-f(0)$, $\quad F(\frac{1}{2})=f(1)-f(\frac{1}{2})$,

讨论：若$F(0)=0$，则 $\xi=0$， $f(0+\frac{1}{2})=f(0)$;

若$F(\frac{1}{2})=0$，则 $\xi=\frac{1}{2}$， $f(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})$;

若$F(0)\neq 0, F(\frac{1}{2})\neq 0$, 则

$$F(0)\cdot F(\frac{1}{2}) = -[f(\frac{1}{2}) - f(0)]^2 < 0.$$

由零点定理知，$\exists\xi\in(0,\frac{1}{2})$, 使$F(\xi)=0$.

即 $f(\xi+\frac{1}{2}) = f(\xi)$成立.

综上，必有一点$\xi\in[0,\frac{1}{2}]\subset[0,1]$,

使 $f(\xi+\frac{1}{2}) = f(\xi)$ 成立.

思考与练习

1. 下列各组函数是否相同？为什么?

(1) $f(x)=\cos(2\arccos x)$ 与 $\varphi(x)=2x^2-1,\ x\in[-1,1]$

相同

(2) $f(x)=\begin{cases} x, & x\le a \\ a, & x>a \end{cases}$ 与 $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}\left[a+x-\sqrt{(a-x)^2}\,\right]$

相同

(3) $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ x, & x>0 \end{cases}$ 与 $\varphi(x)=f[f(x)]$ **相同**

2. 下列各种关系式表示的 *y* 是否为 *x* 的函数? 为什么?

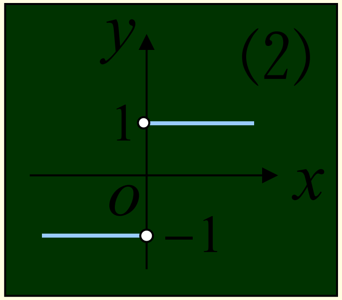
(1) $y = \dfrac{1}{\sqrt{\sin x - 1}}$ 不是

(2) $y = \max\{\sin x, \cos x\},\ x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 是

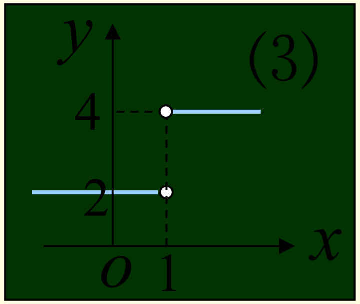
(3) $y = \arcsin u,\ u = 2 + x^2$ 不是

提示: (2) $y = \begin{cases} \cos x, & 0 \le x \le \frac{\pi}{4} \\ \sin x, & \frac{\pi}{4} < x \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$

3. 下列函数是否为初等函数？为什么？



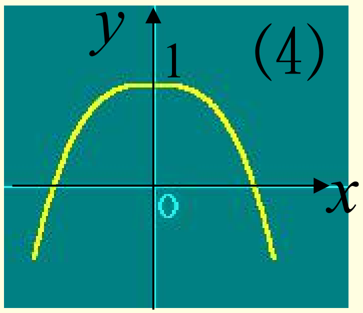
(1) $f(x)=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}=\sqrt{x^2}$



(2) $f(x)=\begin{cases} -1, & x<0 \\ 1, & x>0 \end{cases}=\dfrac{\sqrt{x^2}}{x},\quad x\neq 0$

$$(3)\ f(x)=\begin{cases}2, & x<1\\ 4, & x>1\end{cases}=3+\begin{cases}-1, & x<1\\ 1, & x>1\end{cases}=3+\frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}\quad x\neq 1$$

$$(4)\ f(x)=\begin{cases}1-x^3, & x>0\\ 1+x^3, & x\le 0\end{cases}=1-\sqrt{x^6},\quad x\in \mathrm{R}$$



以上各函数都是初等函数.

4. 设 $f(x)=e^{x^2}, f[\varphi(x)]=1-x$, 且 $\varphi(x)\geq 0$, 求 $\varphi(x)$ 及其定义域 .

解: $\because f(x)=e^{x^2}, \therefore f[\varphi(x)]=e^{\varphi^2(x)}$

由 $e^{\varphi^2(x)}=1-x$

得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$, $x\in(-\infty,0]$

5. 已知 $f(x)=\begin{cases} x-3, & x\geq 8 \\ f[f(x+5)], & x<8 \end{cases}$，求 $f(5)$.

解: $f(5)=f[f(10)]=f(10-3)=f(7)=f[f(12)]$

$=f(12-3)=f(9)=6$

6. 设$f(\sin x+\frac{1}{\sin x})=\csc^2 x-\cos^2 x$，求 $f(x)$.

解: $\because \quad f(\sin x+\frac{1}{\sin x})=\frac{1}{\sin^2 x}+\sin^2 x-1$

$$=(\sin x+\frac{1}{\sin x})^2-3$$

$\therefore \quad f(x)=x^2-3$

1. 求 $f(x)=\dfrac{(1+x)\sin x}{|x|(x+1)(x-1)}$ 的间断点, 并判别其类型.

解: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\cancel{(1+x)}\sin x}{|x|\cancel{(x+1)}(x-1)}=\dfrac{1}{2}\sin 1$

$x=-1$ 为第一类可去间断点

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\infty$

$x=1$ 为第二类无穷间断点

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-1,\quad \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1,$

$x=0$ 为第一类跳跃间断点

2. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$. (2000考研)

解:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=1$$

$\Longrightarrow$ 原式 $=1$

3. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+2^x+3^x)^{\frac{1}{x}}$.

解: 令 $f(x)=(1+2^x+3^x)^{\frac{1}{x}}=3\left[\left(\frac{1}{3}\right)^x+\left(\frac{2}{3}\right)^x+1\right]^{\frac{1}{x}}$

则 $$3<f(x)<3\cdot 3^{\frac{1}{x}}$$

利用夹逼准则可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=3$.

作业

P74 3 (1) , (4) ; 4 ; 7 ;

8 (2) , (3) , (6) ;

9; 10 ; 11 ; 12

测验题

一、选择题：

1．函数 $y=\sqrt{1-x}+\arccos\frac{x+1}{2}$ 的定义域是（　）

(A) $x\le 1$；

(B) $-3\le x\le 1$；

(C) $(-3,1)$；

(D) $\{x|x<1\}\cap\{x|-3\le x\le 1\}$.

2. 函数 $f(x)=\begin{cases} x-3, -4\le x\le 0 \\ x^2+1, 0<x\le 3 \end{cases}$ 的定义域是（　）

(A) $-4\le x\le 0$；

(B) $0<x\le 3$；

(C) $(-4,3)$；

(D) $\{x|-4\le x\le 0\}\cup\{x|0<x\le 3\}$.

3、函数 $y = x\cos x + \sin x$ 是（　）

(A)偶函数；　　(B)奇函数；

(C)非奇非偶函数；(D)奇偶函数.

4、函数 $f(x) = 1 + \cos\frac{\pi}{2}x$ 的最小正周期是（　）

(A) 2π；　　(B) π；

(C)　4　；　　(D) $\frac{1}{2}$.

5、函数 $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ 在定义域为（　）

(A)有上界无下界；　　(B)有下界无上界；

(C)有界，且 $\frac{1}{2} \le f(x) \le \frac{1}{2}$ ；

(D)有界，且 $-2 \le \frac{x}{1+x^2} \le 2$.

6、与 $f(x)=\sqrt{x^2}$ 等价的函数是（　　）

（A） x；　　　　（B） $(\sqrt{x})^2$；

（C） $(\sqrt[3]{x})^3$；　　　　（D） $|x|$.

7、当 $x\to 0$时，下列函数哪一个是其它三个的高阶无穷小（　　）

（A） x^2；　　　　（B） $1-\cos x$；

（C） $x-\tan x$；　　　　（D） $\ln(1+x)$.

8、设$a_0, b_0\neq 0$,则当（　　）时有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\dots\dots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\dots\dots+b_n}=\frac{a_0}{b_0}\quad .$$

(A) $m>n$　；　　　　(B) $m=n$　；

(C) $m<n$　；　　　　(D) m,n任意取 .

9、设 $f(x)=\begin{cases} x-1,-1<x\le 0 \\ x,0<x\le 1 \end{cases}$

则 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=$（ ）

(A)-1 ；　　(B)1 ；

(C)0 ；　　(D)不存在 .

10、 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{|x|}=$ （ ）

(A)1；　　(B)-1；

(C)0；　　(D)不存在.

二、求下列函数的定义域：

1、$y=\sin(2x+1)+\arctan x$;

2、$\varphi(x)=\sqrt{\lg(\frac{9x-x^2)}{2}-1}$.

三、设 $g(x-1)=2x^2-3x-1$

（1）试确定 a,b,c 的值使

$$g(x-1)=a(x-1)^2+b(x-1)+c \quad ;$$

（2）求 $g(x+1)$ 的表达式 .

四、求 $f(x)=(1+x^2)\operatorname{sgn}x$ 的反函数 $f^{-1}(x)$.

五、求极限：

1、$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+n+1}{(1-n)^2}$ ；

2、$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{1+x}-2}{x-3}$ ；

3、$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{2}{x}}$ ；

4、$\lim\limits_{x\to\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)$ ；

5、当 $x \neq 0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$ ；

6、$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sqrt{2x^2-1}}$.

六、设有函数 $f(x)=\begin{cases}\sin ax, x<1\\ a(x-1)-1, x\geq 1\end{cases}$ 试确定 a 的值使 $f(x)$ 在 $x=1$ 连续 .

七、讨论函数 $f(x)=\dfrac{x\arctan\dfrac{1}{x-1}}{\sin\dfrac{\pi}{2}x}$ 的连续性，并判断其间断点的类型 .

八、证明奇次多项式：

$P(x)=a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n+1}\ (a_0\neq 0)$ 至少存在一个实根 .

测验题答案

一、1、B；　2、D；　3、B；　4、C；　5、C；
6、D；　7、C；　8、B；　9、D；　10、D；

二、1、$(-\infty,+\infty)$；　2、$[4,5]$.

三、$a=2, b=1, c=0, g(x+1)=2x^2+5x+3$.

四、$f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1}, x>1\\ 0, x=0\\ -\sqrt{-(x+1)}, x<-1\end{cases}$.

五、1、2；　2、$\dfrac{1}{4}$；　3、e^2；　4、1；　5、$\dfrac{\sin x}{x}$；
6、$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

六、$a=-\dfrac{\pi}{2}\pm 2k\pi \quad (k=0,1,2,\cdots)$

七、$x=0$可去间断点， $x=1$跳跃间断点,

$x=2n(n=\pm1,\pm2,\cdots)$无穷间断点,

x 为其它实数时 $f(x)$连续.