期末试卷样卷答案

____________________ 学院 ________________ 专业 ______ 班

学号_________________ 姓名_______________ **得分**___________

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1、$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=$ __0__.

2、设 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$，则 $\oint\limits_L (x^2+y^2)^n ds=$ __$2\pi a^{2n+1}$__.

3、设 $\vec{A}=(x^2+yz)\vec{i}+(y^2+xz)\vec{j}+(z^2+xy)\vec{k}$，则 $\mathrm{div}\vec{A}=$ __$2x+2y+2z$__.

4、级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2x)^n}{n+2}$ 的收敛半径是 $R=$ __$\dfrac{1}{2}$__.

5、设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数, 在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $f(x)=x$，若 $f(x)$ 的傅立叶级数的和函数记为 $S(x)$，则 $S(-\pi)=$ __0__.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、设函数 $f(x,y)=2x^2+ax+xy^2+2y$ 在点 $(1,-1)$ 取得极值，则常数 $a=$（ D ）.

(A) -1； (B) 1； （C） 5； （D） -5.

2、函数 $f(x,y)=xy+2$ 在点 $(1,2)$ 处取得的最大方向导数值为（ B ）.

(A) 3； (B) $\sqrt{5}$； (C) 5； (D) 2.

3、设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$，则 $\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)ds=$（ A ）.

(A) $4\pi R^4$； (B) $\iiint\limits_{\Omega}R^2 dr$；

(C) $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^R r^4\sin\varphi dr$； (D) $\dfrac{4\pi R^5}{3}$.

4、函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+2x}$ 在点 $x=0$ 处的幂级数展开式为（ B ）.

(A) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n x^n$，$|x|<2$； (B) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n x^n$，$|x|<\dfrac{1}{2}$；

(C) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{n+1}x^n$ ， $|x|<\frac{1}{2}$ ；　　(D) $\sum_{n=0}^{\infty}2^{n+1}x^n$ ， $|x|<2$.

5、若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n(x-2)^n$ 在 $x=-2$ 处收敛，则此级数在 $x=5$ 处（ C ）.

(A) 一定发散；　　(B) 一定条件收敛；

(C) 一定绝对收敛；　　(D) 收敛性不能确定.

三、计算题（每小题 6 分，共 30 分）

1、设 z 是由方程 $x+y-z=e^z$ 所确定的 x,y 的函数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 及 dz .

解： 令 $F(x,y,z)=x+y-z-e^z$, 则 $F_x=1, F_y=1, F_z=-1-e^z$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{1}{-1-e^z}=\frac{1}{1+e^z},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{1}{1+e^z}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{1+e^z}\right)=\frac{-e^z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}}{(1+e^z)^2}=-\frac{e^z}{(1+e^z)^3}.$$

$$dz=\frac{1}{1+e^z}\left(dx+dy\right).$$

2、求曲面 $z-e^z+2xy=3$ 在点 $(1,2,0)$ 处的切平面方程.

解： 设 $F(x,y,z)=z-e^z+2xy-3$，

在点 $(1,2,0)$ 处的法向量： $\vec{n}=(4,2,0)$

切平面方程 $4(x-1)+2(y-2)+0\cdot(z-0)=0$

即 $2x+y-4=0$.

3、求由圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和抛物面 $z=x^2+y^2$ 所围立体的体积.

解： $V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_{r^2}^{r}dz$

$=2\pi\int_0^1(r^2-r^3)dr=\frac{\pi}{6}$.

4、判断数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{\sqrt{n^2+n}}$ 的敛散性, 若收敛, 是绝对收敛还是条件收敛?

解： $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{\sqrt{n^2+n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}$交错级数，

$\left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right\}$单调递减，且$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}=0$，

由莱布尼兹定理，级数收敛；

又$\frac{1}{n+1}<\left|\frac{\cos n\pi}{\sqrt{n^2+n}}\right|=\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$发散，

故原级数条件收敛.

5、求方程$y''+2y'+5y=0$的通解.

解： 特征方程为$r^2+2r+5=0$，

有一对共轭复根 $r_1=-1+2i$， $r_2=-1-2i$

所求通解为$y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$.

四、（本题 8 分） 求方程$xy'+(1-x)y=e^{2x}(0<x<+\infty)$满足$\lim_{x\to 0^+}y(x)=1$的解.

解： $y'+(\frac{1}{x}-1)y=\frac{1}{x}e^{2x}$

$$\Rightarrow y=e^{\int(1-\frac{1}{x})dx}(\int\frac{1}{x}e^{2x}e^{\int(\frac{1}{x}-1)dx}dx+C)$$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{x}e^{2x}+\frac{1}{x}e^{x}\cdot C$$

$$\lim_{x\to 0^+}y(x)=1\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{2x}+Ce^{x}}{x}=1\Rightarrow C=-1$$

所求解为：$y=\frac{1}{x}(e^{2x}-e^{x})$.

五、（本题 8 分） 设曲线积分$\int_c xy^2dx+y\varphi(x)dy$与路径无关，其中$\varphi(x)$具有连续的导数，且$\varphi(0)=0$，计算$\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2dx+y\varphi(x)dy$的值.

解： 设$P=xy^2,Q=y\varphi(x),\frac{\partial P}{\partial y}=2xy,\frac{\partial Q}{\partial x}=y\varphi'(x)$

因为积分与路径无关，则 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$,即$2xy=y\varphi'(x),\varphi'(x)=2x$

$\varphi(x)=x^2+C$,将$\varphi(0)=0$代入,得$\varphi(x)=x^2$

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2dx+y\varphi(x)dy=\int_{(0,0)}^{(1,0)}xy^2dx+y\varphi(x)dy+\int_{(1,0)}^{(1,1)}xy^2dx+y\varphi(x)dy$$

$$=0+\int_0^1 y\varphi(1)dy=\frac{1}{2}y^2\big|_0^1=\frac{1}{2}.$$

六、(本题 8 分) 求$\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy$，$\Sigma$是$z=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$介于$z=0$及$z=2$之间部分的下侧.

解： 补平面$\Sigma_1:z=2$，取上侧，

由 Gauss 公式，$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}\left(z^2+x\right)dydz-zdxdy=0$

原式$=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}\left(z^2+x\right)dydz-zdxdy-\iint\limits_{\Sigma_1}\left(z^2+x\right)dydz-zdxdy$

$$=0+\iint\limits_{\Sigma_1}zdxdy=2\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}dxdy=8\pi.$$

七、(本题 8 分) 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{3n}$的收敛域及和函数.

解： $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=|x|^2$，当$|x|<1$时，幂级数收敛；

当$x=\pm 1$时，级数化为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}$发散，因而幂级数收敛域为$(-1,1)$；

设和函数$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{3n}$, $|x|<1$；

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3}x^{2n-1}=\frac{2}{3}x\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=\frac{2}{3}\frac{x}{1-x^2},\ |x|<1；$$

又 $s(0)=0$， $s(x)=\int_0^x s'(t)dt=-\frac{1}{3}\ln(1-x^2)$，$|x|<1$.

八、(本题 8 分) 设 $f(t)$ 连续可导，且

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2} f\left(t-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy+t\text{，求 } f(t).$$

解: $f(t)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2} f\left(t-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy+t$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t rf(t-r)dr+t$$

$$=\int_0^t rf(t-r)dr+t$$

令 $t-r=u$，则 $\int_0^t rf(t-r)dr=-\int_t^0 (t-u)f(u)du=t\int_0^t f(u)du-\int_0^t uf(u)du$，

从而 $f(t)=t\int_0^t f(u)du-\int_0^t uf(u)du+t$，

两边求导得： $f'(t)=\int_0^t f(u)du+1$，

再求导： $f''(t)-f(t)=0$，

通解为： $f(t)=C_1e^{-t}+C_2e^t$，

又 $f(0)=0$， $f'(0)=1$，带入通解中解得 $C_1=-\frac{1}{2}$， $C_2=\frac{1}{2}$，

所以 $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}(=shx)$.