《高等数学 I（2）》（理工）阶段测试 2

一、填空题 (每小题 4 分，共 28 分)

1. 旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $y+z=1$ 的交线在 xOy 面上的投影为 $\underline{\begin{cases} x^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{5}{4} \\ z=0 \end{cases}}$.

2. 直线 $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{3}$ 在平面 $\Pi: x-y+2z=5$ 上的投影直线为 $\underline{\begin{cases} x-y+2z=5 \\ 5x-y-3z=8 \end{cases}}$.

3. 曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9 \\ xy-z=0 \end{cases}$ 在点 $(1,2,2)$ 处的法平面方程为 $\underline{\quad 4x-5y+3z=0 \quad}$.

4. 设 $z=f(\ln x,\frac{y}{x})$，其中函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ $\underline{\frac{1}{x^2}f_{12}''-\frac{1}{x^2}f_2'-\frac{y}{x^3}f_{22}''}$.

5. 已知 $L: x^2+y^2=a^2(a>0)$，则 $\int_L[x^2+y^2-\sin(xy)]\mathrm{d}s=$ $\underline{\quad 2\pi a^3}$..

6. 设 Σ 为圆柱面 $x^2+y^2=4,(0\le z\le H)$，则曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{x^2+y^2}\mathrm{d}S=$ $\underline{\quad \pi H \quad}$.

7. 设 Σ 为 $x^2+y^2+z^2=1(z\ge 0)$，取上侧，则曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$ $\underline{\qquad 0 \qquad}$.

二、选择题 (每小题 3 分，共 21 分)

1. 直线 $\frac{x-1}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+8}{1}$ 与直线 $\begin{cases} x-y=6 \\ 2y+z=3 \end{cases}$ 的夹角为 (C)

(A) $\frac{\pi}{6}$；　(B) $\frac{\pi}{4}$；　(C) $\frac{\pi}{3}$；　(D) $\frac{\pi}{2}$.

2. 已知 $f(x,y)=\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^4}}$，则 (B)

(A) $f_x'(0,0),\ f_y'(0,0)$ 都存在；　(B) $f_x'(0,0)$ 不存在，$f_y'(0,0)$ 存在；

(C) $f_x'(0,0)$ 存在，$f_y'(0,0)$ 不存在；　　(D) $f_x'(0,0)$，$f_y'(0,0)$ 都不存在.

3. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z+y\ln z-\arctan(2xy)=1$ 确定，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}$ 为(C)

(A) -1；　(B) 0；　(C) 1；　(D) 2.

4. 函数 $z=x\mathrm{e}^{2y}$ 在点 $P(1,0)$ 处沿着从点 P 到点 $Q(2,-1)$ 方向的方向导数为 (D)

(A) 1；　(B) -1；　(C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；　(D) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

5. 交换二次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y}} f(x,y)\mathrm{d}x$ 的积分次序为 (D)

(A) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x}} f(x,y)\mathrm{d}y$；　(B) $\int_0^{\sqrt{1-y}} \mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y$；

(C) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1+x^2} f(x,y)\mathrm{d}y$；　(D) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x^2} f(x,y)\mathrm{d}y$.

6. 设空间闭区域 $\Omega_1=\left\{(x,y,z)\middle| x^2+y^2+z^2\le R^2, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\right\}$，

$\Omega=\left\{(x,y,z)\middle| x^2+y^2+z^2\le R^2, z\ge 0\right\}$，则 (C)

(A) $\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_1} x\mathrm{d}v$；　(B) $\iiint\limits_{\Omega} y\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_1} y\mathrm{d}v$；

(C) $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_1} z\mathrm{d}v$；　(D) $\iiint\limits_{\Omega} xyz\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_1} xyz\mathrm{d}v$.

7. 锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在柱面 $x^2+y^2\le 2x$ 内的那部分面积为 (D)

(A) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta} \rho\mathrm{d}\rho$；　(B) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta} \rho^2\mathrm{d}\rho$；

(C) $\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta} \rho^2\mathrm{d}\rho$；　(D) $\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta} \rho\mathrm{d}\rho$.

三、计算题(每小题 7 分，共 28 分)

1. 求函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^{2x}(x+y^2+y)$ 的极值.

解: 由 $\begin{cases} f_x=2\mathrm{e}^{2x}(x+y^2+y)+\mathrm{e}^{2x}=0 \\ f_y=\mathrm{e}^{2x}(2y+1)=0 \end{cases}$，得驻点 $P(-\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{2})$.

又因为 $A=f_{xx}(x,y)\big|_P=4\mathrm{e}^{2x}(x+y^2+1)\big|_P=2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$；

$$B=f_{xy}(x,y)\big|_P=\mathrm{e}^{2x}(4y+2)\big|_P=0\text{；}\quad C=f_{yy}(x,y)\big|_P=2\,\mathrm{e}^{2x}\big|_P=2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$$

所以 $AC-B^2>0, A>0$，

因此 $f_{极小}\left(-\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

2. 设区域 $D=\left\{(x,y)\big|\dfrac{1}{2}\le x\le 2,\dfrac{1}{2}\le y\le 2\right\}$，求二重积分 $\iint\limits_D \max\{xy,1\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解：原式 $=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}\,x\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}\,y+\int_{\frac{1}{2}}^{2}x\,\mathrm{d}\,x\int_{\frac{1}{x}}^{2}y\,\mathrm{d}\,y$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{2}(\frac{1}{x}-\frac{1}{2})\,\mathrm{d}\,x+\int_{\frac{1}{2}}^{2}x[\frac{1}{2}y^2]_{\frac{1}{x}}^{2}\,\mathrm{d}\,x=[\ln x-\frac{1}{2}x]_{\frac{1}{2}}^{2}+\int_{\frac{1}{2}}^{2}x(2-\frac{1}{2x^2})\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\ln 2-1-(\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+[x^2-\frac{1}{2}\ln x]_{\frac{1}{2}}^{2}=3+\ln 2.$$

3. 求 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 为曲面 $x^2+y^2=2z$ 与平面 $z=1$，$z=2$ 所围成的闭区域.

解法一：原式 $=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\rho\,\mathrm{d}\rho\int_1^{2}\rho^2\,\mathrm{d}\,z+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\sqrt{2}}^{2}\rho\,\mathrm{d}\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^{2}\rho^2\,\mathrm{d}\,z$

$$=\frac{14\pi}{3}.$$

解法二：原式 $=\int_1^{2}\mathrm{d}\,z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2z}}\rho^2\cdot\rho\,\mathrm{d}\,\rho=\dfrac{14\pi}{3}$.

4. 求 $\iiint\limits_{\Omega}(x^3+y^3+z^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是半球面 $x^2+y^2+z^2=2z\ (z\ge 1)$ 与锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 围成的区域.

解: $\iiint\limits_{\Omega}(x^3+y^3+z^3)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z=\iiint\limits_{\Omega}z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^3\cos^3\varphi\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\,r$$

$=\dfrac{31\pi}{15}$.

四、(本题满分 8 分) 确定 λ 的值，使曲线积分 $\int_L (x^2+4xy^\lambda)\mathrm{d}x+(6x^{\lambda-1}y^2-2y)\mathrm{d}y$ 在 xOy 面上与路径无关，并当起点为 $(0,0)$，终点为 $(3,1)$ 时，求此曲线积分的值.

解: 设 $P(x,y)=x^2+4xy^\lambda, Q(x,y)=6x^{\lambda-1}y^2-2y,$

因为积分与路径无关，所以 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, 经计算得 $\lambda=3$.

代入计算积分，有

$$原式=\int_{(0,0)}^{(3,1)}(x^2+4xy^\lambda)\,\mathrm{d}\,x+(6x^{\lambda-1}y^2-2y)\,\mathrm{d}\,y$$

$$=\int_0^3 x^2\,\mathrm{d}\,x+\int_0^1(54y^2-2y)\,\mathrm{d}\,y=26.$$

五、(本题满分 8 分) 试在第一卦限的椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 上求一点，使该点处的切平面与三坐标面所围四面体体积最小，并求此最小体积.

解: 设 $P(x_0,y_0,z_0)$ 为椭球面上一点，在 $P(x_0,y_0,z_0)$ 点的切平面方程为:

$$\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{z_0}{c^2}(z-z_0)=1,$$

即 $\dfrac{x_0}{a^2}x+\dfrac{y_0}{b^2}y+\dfrac{z_0}{c^2}z=1$，该切平面在三个坐标轴上的截距为 $\dfrac{a^2}{x_0},\dfrac{b^2}{y_0},\dfrac{c^2}{z_0}$，所围四面体的体积为 $\dfrac{1}{6}\dfrac{a^2}{x_0}\dfrac{b^2}{y_0}\dfrac{c^2}{z_0}$.

设 $F(x,y,z)=\ln x+\ln y+\ln z+\lambda(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1)$,

令 $F_x=0,\ F_y=0,\ F_z=0,$

解得 $\dfrac{x^2}{a^2}=\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}$,

代入 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 得 $x_0=\dfrac{a}{\sqrt{3}}, y_0=\dfrac{b}{\sqrt{3}}, z_0=\dfrac{c}{\sqrt{3}}$

$V_{\min}=\dfrac{1}{6}\dfrac{a^2}{x_0}\dfrac{b^2}{y_0}\dfrac{c^2}{z_0}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}abc$.

六、（本题满分 7 分）已知平面区域$D=\left\{(x, y)\middle|0\le x\le\pi, 0\le y\le\pi\right\}$，$L$为$D$的正向边界，证明：

(1) $\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x=\oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x$；

(2) $\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x\ge 2\pi^2$.

证明：(1) 由格林公式左边：$\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x=\iint_D(\mathrm{e}^{\sin y}+\mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

右边：$\oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x=\iint_D(\mathrm{e}^{-\sin y}+\mathrm{e}^{\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

因为D关于$y=x$对称，由轮换性(1)成立.

(2) $\oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x=\iint_D(\mathrm{e}^{-\sin y}+\mathrm{e}^{\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\iint_D(\mathrm{e}^{-\sin x}+\mathrm{e}^{\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ge 2\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi^2.$$

注：有的题目有多种解法，以上解答和评分标准仅供参考.