南京信息工程大学
Nanjing University of Information Science & Technology

高等数学（上）

数学与统计学院　公共数学教学部

高等数学教学团队

第三节 函数的极限

函数的极限

理解：**函数极限的精确定义**

掌握：**函数极限的性质**

知识目标

重难点

重点：**函数极限的定义与性质**

难点：**函数极限定义的理解**

一、函数极限的定义

数列极限：自变量 n 的变化过程只有 $n \to \infty$ 一种，

函数极限：自变量 x 的变化过程主要有以下两种情形：

（1）x趋于有限值 x_0 时，记作“$x \to x_0$”.

（2）$|x|$ 趋于无穷大 ∞ 时，记作“$x \to \infty$”.

函数极限考察：在自变量的某一变化过程中，

所对应的函数值 $f(x)$的变化趋势.

1、自变量趋于有限值时函数的极限

当 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限就是

描述当 x 无限接近于x_0 时，函数 $f(x) \to a$ 的变化趋势.

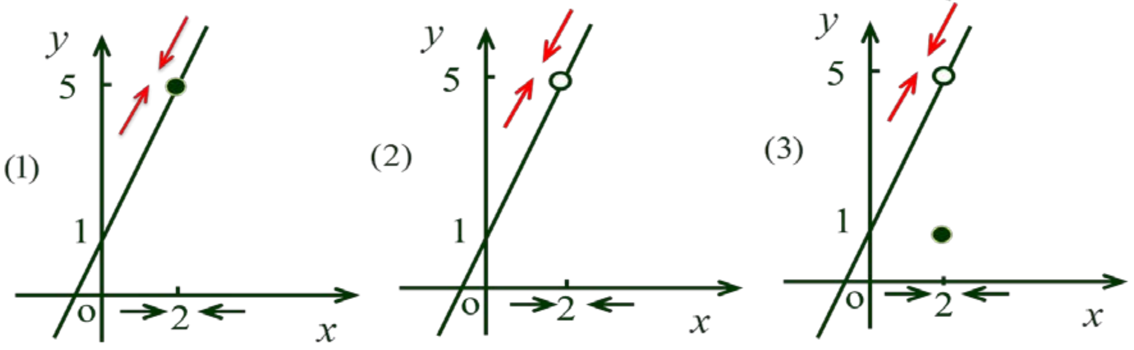
例1 当 $x \to 2$ 时，观察下列函数的变化趋势

（1）$f(x) = 2x + 1$，（2）$g(x) = \dfrac{(2x+1)(x-2)}{x-2}$，（3）$h(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \neq 2, \\ 1, & x = 2. \end{cases}$

函数的极限

解

(1) $f(x)=2x+1$;　　(2) $g(x)=2x+1,\ x\neq 2$;　　(3) $h(x)=\begin{cases}2x+1, & x\neq 2\\ 1, & x=2\end{cases}$.



当 $x\to 2$ 时，$f(x)\to 5$　　$g(x)\to 5$　　$h(x)\to 5$

由上图可知，$x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限,与 $f(x)$ 在 x_0 处是否有定义无关,

只需考察 x 无限接近于 x_0，即 $x\in \overset{o}{U}(x_0)$ 时函数 $f(x)$ 的变化趋势.

自然定义 $1'$： 如果当x 无限接近于x_0，函数$f(x)$ 的值无限接近于常数 A，则称当 x趋于x_0 时，$f(x)$ 以 A 为极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(\,x\to x_0\,)$.

问题 **数学上**如何描述：“当 x无限接近于x_0，函数 $f(x)$无限接近于常数A ”呢？

用 $0<|x-x_0|<\varepsilon$ 来描述“ x无限接近于 x_0”，

用 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 来描述“ $f(x)$ 无限接近于 A ” $(\forall\varepsilon>0)$.

精确定义1 设函数 $f(x)$ 在 $\overset{\circ}{U}(x_0)$ 内有定义，如果存在常数 A，$\forall \varepsilon > 0$（不论 ε 多小），总 $\exists \delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立，那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad (\text{或} f(x) \to A \ (x \to x_0)).$$

即： $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

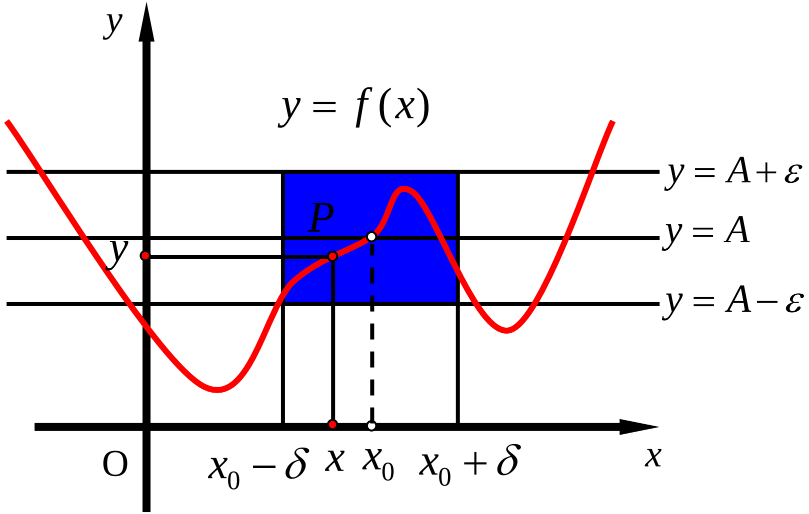
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 的**几何意义**为:

当 x 在点 x_0 的去心 δ 邻域时,

函数 $y = f(x)$的图形完全落在

以直线 $y = A$ 为中心线, 宽为 2ε

的带形区域内.



注意： (1) ε 是任意给定的小正数, 它表示 $f(x)$ 与 A 的无限接近；

(2) δ 是用来刻画 x 与 x_0 接近程度的, 是保证 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立的充分条件, δ 只与 ε 有关；

(3) δ 不唯一, 若当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立, 则凡比 δ_1 小的正数均可选作 δ；

(4) $0<|x-x_0|$ 表示 $x \neq x_0$ (无限接近不要求零距离), 故函数极限与 $f(x)$ 在点 x_0 处是否有定义无关.

例2 证明 $\lim\limits_{x \to 1}(2x-1)=1$.

证明 $\forall \varepsilon > 0$ ，取 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ ，当 $0 < |x-1| < \delta$ 时，恒有

$$|f(x) - A| = |(2x-1)-1| = 2|x-1| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

成立，由定义1可知，$\lim\limits_{x \to 1}(2x-1)=1$.

例3 证明：当 $x_0 > 0$ 时，$\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$.

证明 $\forall \varepsilon > 0$ ，取 $\delta = \min\{x_0, \sqrt{x_0}\varepsilon\}$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有

$$|f(x) - A| = \left|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right| = \left|\frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{x_0}}|x - x_0| < \frac{1}{\sqrt{x_0}} \cdot \sqrt{x_0}\varepsilon = \varepsilon$$

成立，由定义1可知，$\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$.

例4 证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0.$

证： $\forall\varepsilon>0,$ 下面仅在 $|x-x_0|<\pi$ 内讨论，由

$$|f(x)-A|=|\sin x-\sin x_0|=\left|2\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\le\left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\right|$$

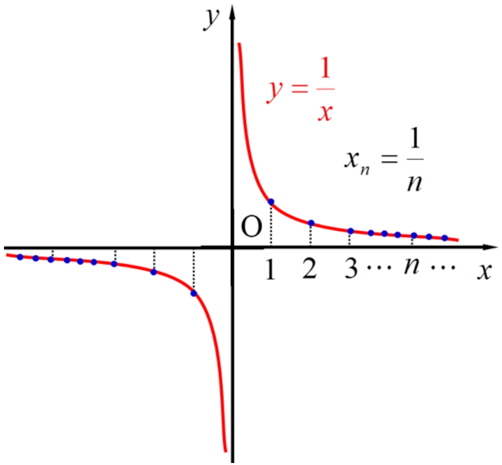
$$\le\left|2\frac{x-x_0}{2}\right|=|x-x_0|<\varepsilon,$$ 要使 $|f(x)-A|<\varepsilon,$

只要取 $\delta=\min\{\pi,\varepsilon\},$ 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-a|<\varepsilon.$

故有 $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0.}$ 同理可证：$\boxed{\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0.}$

2、自变量趋于无穷大时函数的极限

观察： 数列 $x_n=\dfrac{1}{n}$ 与函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图形



可以看出：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

回顾 数列极限的定义：

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，使得当$n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

类比：将项数 n 替换为连续变量 x，用X 表示很大的正数，

$|x|>X$ 表示与原点距离比X 还远的所有点 x ，即$x\to\infty$

类推： 把 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 与 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ 类比,将 x_n 替换为 $f(x)$,

n 替换为 x, N 替换为 X（大正数）, $n > N$ 替换为 $|x| > X$,

即将变化过程 $n \to \infty$ 替换为 $x \to \infty$.

当 $x \to \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

定义2 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists X > 0$, 使得当 $|x| > X$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立,

则称函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时以 A 为极限, 记作 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$

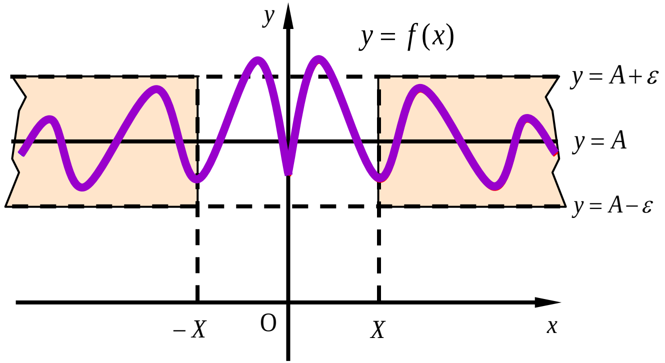
或 $f(x) \to A(x \to \infty)$.

思考 从几何的角度来表示该定义的意义？

由于$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon \Longleftrightarrow A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$，则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 的

几何意义为: $\forall\varepsilon>0$, $\exists X>0$,

使得当$|x|>X$时,曲线$y=f(x)$上对应的点必落在两条水平直线之间.



注： 该图并不限于偶函数,例如：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}$

例5 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0.$

证明 $\forall\varepsilon>0$，取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon}$，当$|x|>X$ 时，有

$$\left|\frac{\sin x}{x}-0\right|=\left|\frac{\sin x}{x}\right|<\frac{1}{|x|}<\frac{1}{X}=\varepsilon$$

成立，由定义2可知，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0.$

例6 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x+2}=1.$

证明： $\forall\varepsilon>0$ ，不妨设 $|x|>4$ ， 由

$$\left|\frac{x}{x+2}-1\right|=\frac{2}{|x+2|}<\frac{4}{|x|}<\varepsilon,\ \text{解得：}|x|>\frac{4}{\varepsilon}$$

取 $X=Max\left\{\dfrac{4}{\varepsilon},4\right\}$ ，当 $|x|>X$ 时， 有 $\left|\dfrac{x}{x+2}-1\right|<\varepsilon$

成立， 由定义2可知， $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x+2}=1$.

3、 极限不存在的两种常见情形（用$x \to \square$ 表示$x \to x_0$或$x \to \infty$ ）

（1）当 $x \to \square$ 时，函数的绝对值无限增大.

当$|f(x)|$ 随着x的变化而无限增大时，则$f(x)$的值不向某一定值无限接近，因此函数极限$\lim\limits_{x \to \square} f(x)$不存在.

但 $f(x)$ 有一定的变化趋势：对应函数$f(x)$的绝对值无限增大，这时称函数$f(x)$为 $x \to \square$时的**无穷大**，记作 $\lim\limits_{x \to \square} f(x) = \infty$

例如：$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = \infty$

（2）当 $x\to$ 时，函数没有确定的变化趋势.

例如 $f(x)=\sin x$，当 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 的值在 -1 与 1 之间不断地来回振荡，无确定的趋向. 当取 $x=k\pi(k\in \mathrm{Z})\to\infty$（$k\to\infty$时），$\sin x=\sin k\pi=0$;

当取 $x=(2k+\dfrac{1}{2})\pi(k\in \mathrm{Z})\to\infty$（$k\to\infty$时），$\sin x=\sin(2k+\dfrac{1}{2})\pi=1$

即 $x\to\infty$时$\sin x$的值在 -1 与 1 之间变化、振荡，因此

$\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\sin x}$ 不存在. 类似下列极限也同样是不存在：

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\cos x,\quad \lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}\quad \lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x},}$$

4、子极限

定义3 在自变量的某变化过程的基础上，增加了附加条件的变化过程称为原变化过程的**子过程**. 子过程对应的极限称为原极限的**子极限**.

（1）常见的 $x \to x_0$ 的子过程有：

① “$x \to x_0$” 且 $x < x_0$ $\Longleftrightarrow$ “$x \to x_0^-$”

② “$x \to x_0$” 且 $x > x_0$ $\Longleftrightarrow$ “$x \to x_0^+$”

如极限

$$\lim_{x \to x_0^-} \sqrt{x_0 - x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$$

（2）常见的 $x\to\infty$ 的子过程有：

① “$x\to\infty$” 且 $x>0$ $\Longleftrightarrow$ “$x\to+\infty$”

② “$x\to\infty$” 且 $x<0$ $\Longleftrightarrow$ “$x\to-\infty$”

③ “$x\to\infty$” 且 $x=n(n\in N^{+})$ $\Longleftrightarrow$ “$n\to\infty$”

如极限：

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

上述几个子过程的极限也常称为**单侧极限.**

（3）函数的单侧极限的精确定义：

① 当 $x \to \infty$ 时函数 $f(x)$ 的单侧极限定义：

定义4 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists X > 0$，使得当 $x > X$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立，

则称函数 $f(x)$ 当 $x \to +\infty$ 时以 A 为极限，记作 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$

或 $f(x) \to A(x \to +\infty)$.

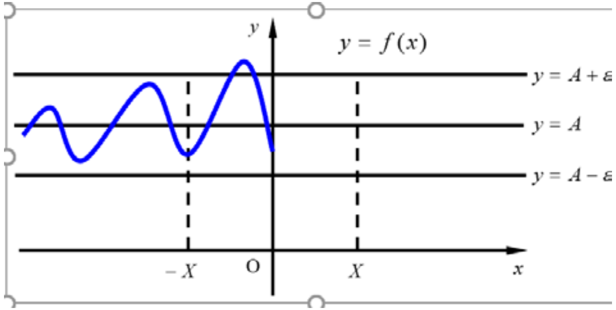
定义5 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists X > 0$，使得当 $x < -X$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立，

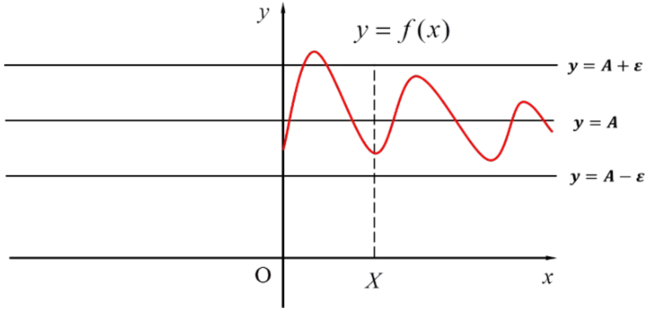
则称函数 $f(x)$ 当 $x \to -\infty$ 时以 A 为极限，记作 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$

或 $f(x) \to A(x \to -\infty)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 的几何意义为：当 $x>X$ 时，函数 $y=f(x)$ 的图形夹在两条平行线 $y=A-\varepsilon$ 与 $y=A+\varepsilon$ 之间，如右下图.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$ 的有类似的几何意义，如左下图.





② 当 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的单侧极限定义：

定义6 $\forall \varepsilon > 0$ ，$\exists \delta > 0$，使得当$0 < x - x_0 < \delta$时，有$|f(x) - A| < \varepsilon$成立，

则称函数$f(x)$当 $x \to x_0^+$ 时以 A 为极限，记作 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$

或 $f(x) \to A(x \to x_0^+)$.

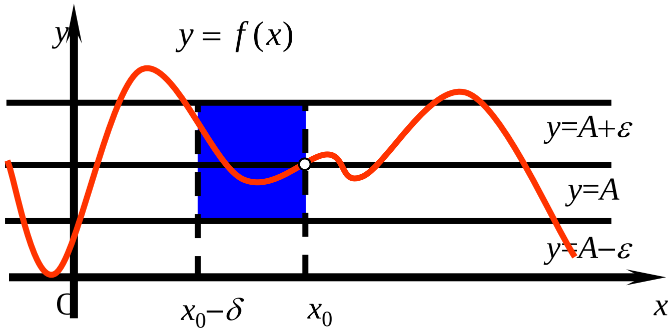
定义7 $\forall \varepsilon > 0$ ，$\exists \delta > 0$，使得当$0 < x_0 - x < \delta$时，有$|f(x) - A| < \varepsilon$成立，

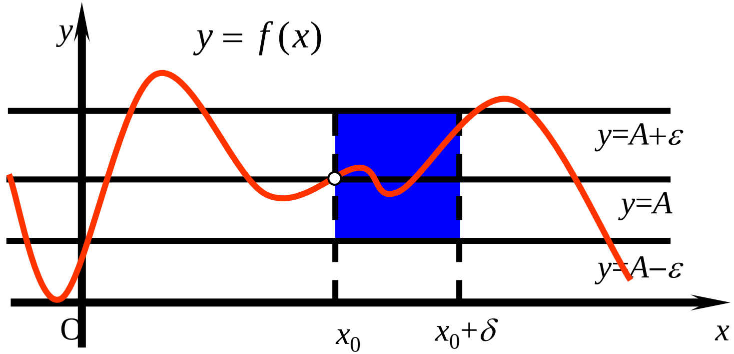
则称函数$f(x)$当 $x \to x_0^-$ 时以 A 为极限，记作 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$

或 $f(x) \to A(x \to x_0^-)$.

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$ 的几何意义：当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，函数 $y=f(x)$的图形夹在两条平行线 $y=A-\varepsilon$ 与 $y=A+\varepsilon$ 之间，如右下图.

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$ 的有类似的几何意义，如左下图.





容易证得以下的充要条件：

定理1 (1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=a$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a$

证明： 略．(利用单侧极限的定义与极限定义即可证得)

例7 验证 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ 不存在.

证明 由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}1=1$,

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=\lim_{x\to 0^-}(-1)=-1\ ,$$

由定理1知, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

例9 验证 $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$ 不存在.

证明 由于, $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$

$$\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0 = \lim_{x\to 0^-}(-1) = -1 \text{，}$$

由定理1知, $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$ 不存在.

同理可知:

$\lim\limits_{x\to\infty} \arctan x$ 不存在.

$\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arccot} x$ 不存在.

三、函数极限的性质

下列性质仅以 $x \to x_0$ 的变化过程为例, 其它变化过程类似.

定理 2(唯一性) 若极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在, 则该极限必唯一.

证明: 略. (类似数列极限的唯一性证明)

定理 3(局部有界性) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 则存在常数 $M>0$ 和 $\delta>0$,

使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)|<M$.

证明: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Rightarrow$ 取 $\varepsilon=1$, 则 $\exists\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有

$|f(x)-A|<\varepsilon=1$, 于是 $|f(x)|=|f(x)-A+A|\le|f(x)-A|+|A|<1+|A|$

因此在 x_0 的某去心邻域 $\{x|0<|x-x_0|<\delta\}$ 内 , $f(x)$有界.

定理 4(局部保号性) 若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 且 $A>0$ (或$A<0$), 则存在常数 $\delta>0$, 使得当$0<|x-x_0|<\delta$时,有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

证明: 仅就$A>0$的情形证明,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Rightarrow \text{对于}\ \varepsilon=\frac{A}{2},\ \exists\delta>0,\ \text{当}\ 0<|x-x_0|<\delta\ \text{时, 有}$$

$$|f(x)-A|<\varepsilon=\frac{A}{2} \Rightarrow A-\frac{A}{2}<f(x) \Rightarrow f(x)>\frac{A}{2}>0\ .$$

说明: 在自变量的某一局部变化范围内, 函数值 $f(x)$ 与极限值A保持相同的符号.

由定理4, 易得以下推论:

推论(局部保号性逆否定理) 若在x_0的某去心领域内$f(x)\geq 0$ (或$f(x)\leq 0$), 且$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 则$A\geq 0$ (或$A\leq 0$).

证明: (反证法) 仅证$f(x)\geq 0$的情形. 假设$A\geq 0$不成立, 即设$A<0$, 那么由定理5知, 存在x_0的某一去心邻域, 在该领域内$f(x)<0$, 这与$f(x)\geq 0$矛盾, 所以$A\geq 0$.

结论(函数极限与数列极限的关系) 若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, $\{x_n\}$ 为函数 $f(x)$ 的定义域内任一收敛于 x_0 的数列, 且满足: $x_n \neq x_0 (n \in N^+)$, 那么相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 必收敛, 且

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

四、内容小结

➢ 定义（极限的统一定义）

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = A;$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A; \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A; \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = A;$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A; \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = A; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = A.$$

$$\lim f(x) = A \Leftrightarrow$$

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists$某时刻，当x超过此时刻后，恒有$|f(x) - A| < \varepsilon$.

- **充要条件：**

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ 且 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$.

- **性质：** 唯一性、局部有界性、局部保号性、

子列收敛性.

思考题:

1、定理4的推论中, 条件“ $f(x) \geq 0$(或$f(x) \leq 0$)”改为“ $f(x) > 0$ (或$f(x) < 0$)”, 结论是否发生变化? 【答:结论不变】

2、证明:若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A(A \neq 0)$, 则存在x_0 的某一去心邻域 $\overset{o}{U}(x_0)$, 当 $x \in \overset{o}{U}(x_0)$时, 有$|f(x)| > \dfrac{|A|}{2}$. 【证明:略】

南京信息工程大学
Nanjing University of Information Science & Technology

给我最大快乐的，
不是已懂得知识，
而是不断的学习；
不是已有的东西，
而是不断的获取；
不是已达到的高度，
而是继续不断的攀登。

——高斯