高等数学 I-1 综合练习 6

一、填空题

1. 若 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=e$, 则 $k=$ __-2__.

1^∞型

原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left[\left(1+\dfrac{-2\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1+\tan x}{-2\tan x}}\right]^{\frac{-2\tan x}{1+\tan x}\cdot\frac{1}{\sin kx}} = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-2x}{kx\cdot(1+\tan x)}} = e^{-\frac{2}{k}}$

2. 若 $\lim\limits_{x\to0}x^k\sin\dfrac{1}{x}=0$ 成立, 则 k 必须满足条件 __$k>0$__.

解: 有界乘无穷小

3. 曲线 $\begin{cases}x=\cos t+\cos^2 t,\\ y=1+\sin t\end{cases}$ 上对应于 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 的点处的法线斜率为 __$1+\sqrt{2}$__.

$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\left.\dfrac{\cos t}{-\sin t-2\cos t\sin t}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=-\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$

4. $\displaystyle\int_{-5}^{5}\frac{x^3\sin^2 x}{x^4+2x^2+1}\,dx=$ __0__.

5. 星形线 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t(a>0, 0\le t\le 2\pi)$ 的全长为 __$6a$__.

$ds=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}=3a|\sin t\cos t|dt \quad L=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a\sin t\cos t\,dt=6a$

二、选择题

1. 下列函数中, 在 $x=0$ 处不可导的是(D).

(A) $f(x)=|x|\sin|x|$; (B) $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$;

(C) $f(x)=\cos|x|$; (D) $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$.

$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-\frac{1}{2}(\sqrt{-x})^2}{x}=\frac{1}{2}=f'_-(0)$

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2}{x}=-\frac{1}{2}=f'_+(0)$

2. 设函数 $f(x)=\displaystyle\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\,dt, g(x)=\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}$, 则当 $x\to0$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的(B).

(A) 低阶无穷小; (B) 高阶无穷小;

(C) 等价无穷小; (D) 同阶但不等价无穷小.

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{1-\cos x}\sin t^2dt}{\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{6}x^6}\overset{洛}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(1-\cos x)^2\cdot\sin x}{x^4+x^5}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)^2}{x^3(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\frac{1}{2}x^2)^2}{x^3(1+x)}=0$

3. 设 $\displaystyle\int f'(x^2)\,dx=x^4+C$, 则 $f(x)=$ (C).

先换元 令 $x^2=t$, 则 $\int f'(t)d\sqrt{t}=t^2+C\Rightarrow \int\frac{1}{2\sqrt{t}}f'(t)dt=t^2+C$

两边同时求导 $\frac{1}{2\sqrt{t}}f'(t)=2t\Rightarrow f'(t)=4t^{\frac{3}{2}}$

$\Rightarrow f(t)=\frac{8}{5}t^{\frac{5}{2}}+C$

也可以先两边同时求导, 得 $f'(x^2)=4x^3$, 令 $u=x^2$, 则 $f'(u)=4u^{\frac{3}{2}}\Rightarrow f(u)=\frac{8}{5}u^{\frac{5}{2}}+C$.

(A) x^2+C; (B) $\dfrac{1}{3}x^3+C$; (C) $\dfrac{8}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$; (D) x^4+C.

$(x>0)$

4. 设函数 $f(x)=x\cdot\cos\dfrac{2}{x}$, 则点 $x=0$ 是 $f(x)$ 的(B).

(A) 连续点; (B) 可去间断点; (C) 跳跃间断点; (D) 振荡间断点.

$\lim\limits_{x\to0}x\cdot\cos\frac{2}{x}=0$ (无穷小乘有界变量)

5. 设 $\Phi(x)=\displaystyle\int_0^x\sin(x-t)^2\,dt$, 则 $\Phi'(x)=$ (A).

(A) $\sin x^2$; (B) $2x\sin x^2$; (C) 0; (D) $\cos x^2$.

令 $x-t=u$, 则 $t=x-u$. $\begin{array}{c|c}t & 0\to x\\ \hline u & x\to0\end{array}$ $\Phi(x)=\int_x^0-\sin u^2du=\int_0^x\sin u^2du$

三、解答题

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$.

$e^{x^2}-1\sim x^2$

$\sqrt{1+x\sin x}-1\sim\frac{1}{2}x\sin x$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x\sin x}{x^2}$

$=\dfrac{1}{2}$

2. $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{2x}\ln(1+t)\,dt}{1-\cos x}$.

$\overset{\text{洛}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)\cdot 2}{\sin x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot 2}{x}=4$

3. 求对数螺线 $\rho=e^{\theta}$ 在点 $(\rho,\theta)=\left(e^{\frac{\pi}{2}},\frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线的直角坐标方程.

$\rho=e^{\theta}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\rho\cos\theta=e^{\theta}\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta=e^{\theta}\sin\theta\end{cases}$　　$\theta=\frac{\pi}{2}$时　$x=e^{\frac{\pi}{2}}\cdot 0=0$，$y=e^{\frac{\pi}{2}}\cdot 1=e^{\frac{\pi}{2}}$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\left.\frac{e^{\theta}(\sin\theta+\cos\theta)}{e^{\theta}(\cos\theta-\sin\theta)}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=-1$

$y-e^{\frac{\pi}{2}}=-x$　即　$x+y-e^{\frac{\pi}{2}}=0$

4. $\int\frac{1}{1+2\tan x}\,dx$.

$=\int\frac{\cos x}{\cos x+2\sin x}dx$

$=\int\frac{\frac{1}{5}(\cos x+2\sin x)+\frac{2}{5}(\cos x+2\sin x)'}{\cos x+2\sin x}dx$

$=\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}\ln|\cos x+2\sin x|+C$

5. $\int_1^e\sin(\ln x)\,dx$. （还原法）

$=x\cdot\sin(\ln x)\Big|_1^e-\int_1^e x\cdot\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx$

$=e\sin 1-x\cdot\cos(\ln x)\Big|_1^e+\int_1^e x\cdot(-\sin(\ln x))\cdot\frac{1}{x}dx$

$=e\sin 1-e\cos 1+\cos 0-\int_1^e\sin(\ln x)\,dx$

$\therefore$ 原式 $=\frac{1}{2}(e\sin 1-e\cos 1+1)$

四、已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln^2 x$, 求 $\int xf'(x)\,dx$.

$\int f(x)dx=\ln^2 x+C$

两边同时求导. $f(x)=2\ln x\cdot\frac{1}{x}$

$\int xf'(x)dx=\int x\,df(x)=xf(x)-\int f(x)\,dx$

$=2\ln x-\ln^2 x+C$

五、 求函数 $f(x)=(x-4)(x+1)^{\frac{2}{3}}$ 的单调区间及极值.

$D=(-\infty,+\infty)$

$f'(x)=\frac{5}{3}\cdot\frac{x-1}{(x+1)^{\frac{1}{3}}}$

令 $f'(x)=0 \Rightarrow x=1$

$x=-1$ 不可导点

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$+$	不存在	$-$	0	$+$
y	↗		↘		↗

单增区间：$(-\infty,-1)$ $(1,+\infty)$

单减区间：$(-1,1)$

极大值 $f(-1)=0$ 极小值 $f(1)=-3\sqrt[3]{4}$

六、 设 $f(x)$ 连续, 且 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, 求 $f(x)$.

设 $\int_0^1 f(x)dx=A$ 则 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}+A\sqrt{1-x^2}$

两边同时取0到1上的定积分. $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx+A\cdot\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$

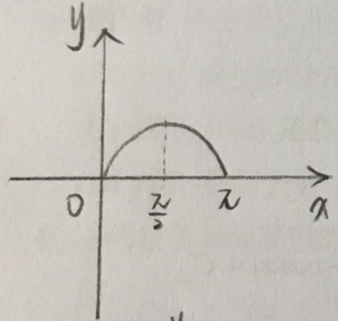
$\frac{1}{4}$圆的面积.
(定积分的几何意义)

$\therefore A=\arctan x\Big|_0^1+A\cdot\frac{1}{4}\pi$

$A=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\pi\cdot A \Rightarrow A=\frac{\pi}{4-\pi}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{\pi}{4-\pi}\sqrt{1-x^2}$

七、 计算曲线 $y=\sin x(0\leq x\leq\pi)$ 与 x 轴所围成的图形分别绕 x 轴与 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.



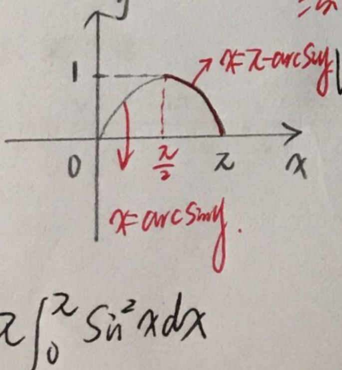
法1 (柱壳法) (简单，推荐!)

$V_y=\int_0^\pi 2\pi x\cdot\sin x\,dx$

$=2\pi\int_0^\pi -x\,d\cos x=2\pi\left[(-x\cos x)\Big|_0^\pi+\int_0^\pi\cos x\,dx\right]$

$=2\pi^2$

法2. (大-小)



$V_y=\pi\int_0^1 x_1^2(y)dy-\pi\int_0^1 x_2^2(y)dy$

$=\pi\int_0^1(\pi-\arcsin y)^2dy-\pi\int_0^1(\arcsin y)^2dy$

$=\pi\int_0^1\pi^2dy-2\pi^2\int_0^1\arcsin y\,dy$

$=\pi^3-2\pi^2\left(y\cdot\arcsin y\Big|_0^1-\int_0^1 y\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy\right)=2\pi^2$

$V_x=\pi\int_0^\pi\sin^2x\,dx$

$=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi(1-\cos 2x)dx$

$=\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^\pi$

$=\frac{\pi^2}{2}$

八、设 $y=f(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上的连续函数.

(1) 试证存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $\xi f(\xi)=\int_\xi^1 f(x)\,\mathrm{d}x$; （罗尔定理）

(2) 若 $y=f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $xf'(x)>-2f(x)$, 则 (1) 中的 ξ 是唯一的. 利用单调性证明.

(1) 令 $F(x)=x\int_x^1 f(t)\,dt$，$F'(x)=\int_x^1 f(t)\,dt-xf(x)$

则 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导. $[0,1]$ 上连续. 且 $F(0)=F(1)=0$

由罗尔定理. $\exists\, \xi\in(0,1)$ 使 $F'(\xi)=0$ 即 $\xi f(\xi)=\int_\xi^1 f(t)\,dt$

(2) $F''(x)=-f(x)-f(x)-xf'(x)=-2f(x)-xf'(x)$

$\because xf'(x)>-2f(x)$ $\therefore F''(x)<0$ $(x\in(0,1))$

从而 $F'(x)$ 在 $(0,1)$ 内 $\downarrow$

由(1)可知 必 $\exists\,\xi\in(0,1)\to F'(\xi)=0$ 且由 $F'(x)$ 的单调性.

$F'(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内恰有一个根. 即 ξ 是唯一的.

参考答案 6

一、填空题

1. -2. 2. $k>0$. 3. $1+\sqrt{2}$. 4. 0. 5. $6a$.

二、选择题 D. B. C. B. A.

三、1. $\frac{1}{2}$. 2. 4. 3. $x+y=e^{\frac{\pi}{2}}$. 4. $\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}\ln|2\sin x+\cos x|+C$.

5. $\frac{1}{2}(\mathrm{e}\sin 1-\mathrm{e}\cos 1+1)$.

四、$2\ln x-\ln^2 x+C$.

五、单调增区间为 $(-\infty,-1),(1,+\infty)$; 单调减区间为 $[-1,1]$;

极小值 $f(1)=-3\sqrt[3]{4}$; 极大值为 $f(-1)=0$.

六、$f(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{\pi}{4-\pi}\sqrt{1-x^2}$.

七、$V_x=\frac{\pi^2}{2}, V_y=2\pi^2$. 八、略.