《高等数学Ⅰ（2）》（理工）期末B卷参考答案及评分标准

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

（1）过点$(1,-1,0)$且与平面$3x-2y+4z-1=0$垂直的直线方程是________.

【$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{4}$】

（2）极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}=$________.【1】

（3）若D是由直线$x+y=1$和两坐标轴围成的三角形区域，则$\iint\limits_D xdxdy=$____.【$\dfrac{1}{6}$】

（4）设L是椭圆周$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}=1$，且周长为$a$, 则曲线积分$\oint_L(3x^2+2y^2)ds=$____.【$6a$】

（5）微分方程$y''-2y'+y=0$的通解为________.【$y=(C_1+C_2x)e^x$（C_1,C_2为任意常数）】

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

（1）函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微是函数$f(x,y)$在该点处存在偏导数的（　A　）

（A）充分条件　　（B）必要条件

（C）充要条件　　（D）既非充分条件，又非必要条件

（2）对微分方程　$y''+2y'=3y^3$，降阶的方法是（　C　）

(A)设$y'=p$，则$y''=\dfrac{dp}{dx}$　　(B)设$y'=p$，则$y''=\dfrac{dp}{dy}$

(C)设$y'=p$，则$y''=p\dfrac{dp}{dy}$　　(D)设$y'=p$，则$y''=p\dfrac{dp}{dx}$

（3）曲面$e^z-z+xy=3$在点$(2,1,0)$处的切平面方程为（　B　）

(A) $2x+y-4=0$　　(B) $x+2y-4=0$

(C) $x+2y-5=0$　　(D) $2x+y-5=0$

（4）设$I=\int_0^1 dy\int_0^y f(x,y)dx$，则交换积分次序后（　C　）

(A) $I=\int_0^1 dx\int_1^x f(x,y)dy$　　(B) $I=\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$

(C) $I=\int_0^1 dx\int_x^1 f(x,y)dy$　　(D) $I=\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy$

(5) 设Σ为球面$x^2+y^2+z^2=R^2$，则$\oiint_{\Sigma}(x+y+z)^2dS=$（ A ）

(A) $4\pi R^4$　　(B) $4\pi R^2$

(C) $\frac{4}{3}\pi R^5$　　(D) $\frac{4}{5}\pi R^5$

三、计算题（每小题 5 分，共 30 分）

(1) 已知函数$z=x^3+x^2y-xy^2-y^3$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2+2xy-y^2,$　　2 分

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x+2y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x-2y.$　　5 分

(2) 计算二重积分$\iint_D (x^2+y)\,dxdy$，其中D由曲线$y=x$、直线$x=1$和x轴所围闭区域.

解：$\iint_D (x^2+y)dxdy=\int_0^1(x^3+\frac{x^2}{2})dx$　　3 分

$=[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{6}]_0^1=\frac{5}{12}.$　　5 分

(3) 计算曲线积分$\oint_L (1-x^2y)dx+xy^2dy$,其中$L$为正向圆周$x^2+y^2=a^2$.

解：$\oint_L (1-x^2y)dx+xy^2dy=\iint_D (x^2+y^2)dxdy$　　3 分

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a \rho^3 d\rho=\frac{\pi a^4}{2}.$　　5 分

(4) 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{2^n}$的收敛性，若收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

解：因为$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\frac{n+2}{2^{n+1}}}{(-1)^n\frac{n+1}{2^n}}\right|=\frac{1}{2}<1,$　　3 分

由比值审敛法知：正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}$收敛，故原级数绝对收敛. 5 分

(5) 求微分方程$(2x+y)dx+(x-2y)dy=0$的通解.

解：由 $\frac{\partial(2x+y)}{\partial y}=\frac{\partial(x-2y)}{\partial x}dy=1$得，该方程为全微分方程， 2 分

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(2x+y)dx+(x-2y)dy$$

$$=\int_0^x 2xdx+\int_0^y(x-2y)dy=x^2+xy-y^2$$

原方程的通解为$x^2+xy-y^2=C.$ 5 分

(6) 将函数$f(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}$展开为x的幂级数.

解：$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$，$(|x|<1)$ 2 分

$$f(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}=(\frac{1}{1+x})'=\sum_{n=0}^{\infty}[(-1)^n x^n]'$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n nx^{n-1}，(|x|<1).$$ 5 分

四、(本题满分 8 分) 求曲线$\begin{cases}x+y+z=0\\x^2+y^2+z^2=6\end{cases}$在点$(1,-2,1)$处的切线及法平面方程.

解：$\begin{cases}1+\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}=0\\2x+2y\frac{dy}{dx}+2z\frac{dz}{dx}=0\end{cases}$ 2 分

点$(1,-2,1)$代入得

$$\begin{cases}1+\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}=0\\1-2\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}=0\end{cases},\quad\begin{cases}\frac{dy}{dx}=0\\\frac{dz}{dx}=-1\end{cases},\quad\vec{T}=(1,0,-1)$$ 4 分

切线方程为$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{-1}$,

法平面方程为$1\cdot(x-1)+0(y+2)-(z-1)=0$，即 $x-z=0.$ 　　　　8 分

五、(本题满分 8 分) 求曲线$\begin{cases}\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{5}=1\\ x^2+y^2=1\end{cases}$上与 xOy 平面距离最短的点，并求最短距离.

解：设所求点为$M(x,y,z)$, 该点到xOy **平面距离为**d, 则 $d=|z|$, 　　　　2 分

设$L(x,y,z,\lambda,\mu)=z^2-\lambda(\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{5}-1)-\mu(x^2+y^2-1)$, 　　　　5 分

则$\begin{cases}L_x=-\dfrac{\lambda}{3}-2\mu x=0\\ L_y=-\dfrac{\lambda}{4}-2\mu y=0\\ L_z=2z-\dfrac{\lambda}{5}=0\\ L_\lambda=\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{5}-1=0\\ L_\mu=x^2+y^2=1\end{cases}$，解得$M_1(\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5},\dfrac{35}{12})$, $M_2(-\dfrac{4}{5},-\dfrac{3}{5},\dfrac{85}{12})$,

比较得$M(\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5},\dfrac{35}{12})$为所求点，最短距离为$\dfrac{35}{12}$. 　　　　8 分

六、(本题满分 8 分) 计算曲面积分

$$I=\oint\!\!\!\!\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)dydz+(y^2+z^2)dzdx+(z^2+x^2)dxdy,$$

其中Σ是正方体$\Omega:0\le x\le 1,0\le y\le 1,0\le z\le 1$的表面外侧.

解：利用高斯公式，得$I=\iiint_{\Omega}2(x+y+z)dv$ 　　　　4 分

$$=6\int_0^1 xdx\int_0^1 dy\int_0^1 dz=3.$$ 　　　　8 分

七、(本题满分 8 分) 求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n+1}$的收敛域以及和函数.

解：$\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{n+1}{n+2}\right|=1$, 则 $R=1$，当$x=-1$时，级数$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n+1}$收敛，

当$x=1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}$发散，所以幂级数的收敛域为$x\in[-1,\ 1)$. 　　　　3 分

设和函数 $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}, \quad x\in[-1,1),$

$[xs(x)]'=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x^{n+1}}{n+1})'=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}, \quad x\in(-1,1),$ 5 分

$xs(x)=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x), \; x\in[-1,1).$

$$s(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln(1-x), & x\in[-1,0)\cup(0,1)\\ 1, & x=0.\end{cases}$$ 8 分

八、**(本题满分 8 分)** 设函数 $u=f(\ln\sqrt{x^2+y^2})$，满足微分方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$，

且 $f(0)=0, f'(0)=-2,$ 试求函数 $f(x)$ 的表达式.

解: 令 $t=\ln\sqrt{x^2+y^2}$，则 $x^2+y^2=e^{2t}$，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{e^{2t}}f'=\frac{x}{x^2+y^2}f',$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}f'+\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}f'',$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}f'+\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}f'',$$

由 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$，得 $f''(t)=(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}=e^{5t}$， 4 分

$f'(t)=\frac{e^{5t}}{5}+C_1$，$f(t)=\frac{1}{25}e^{5t}+C_1t+C_2$，即 $f(x)=\frac{1}{25}e^{5x}+C_1x+C_2$，

由 $f(0)=0, f'(0)=-2,$ 得 $C_1=-\frac{11}{5}$，$C_2=-\frac{1}{25}$，

故所求函数的表达式为 $f(x)=\frac{1}{25}e^{5x}-\frac{11}{5}x-\frac{1}{25}$. 8 分

注：有的题目有多种解法，以上解答和评分标准仅供参考.