一元函数微分学

〈1〉 导数概念及计算

一、分别讨论函数 $f(x)=|x|, g(x)=x|x|$ 在 $x=0$ 处的可导性.

【不可导，0】

二、设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)+e^{-2x}-1}{x^2}=4$，则 $f'(0)=$（　　　　）.

【2】

三、设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，又设 $v(x)<0<u(x)$，$\lim\limits_{x\to 0}v(x)=\lim\limits_{x\to 0}u(x)=0$，

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(u(x))-f(v(x))}{u(x)-v(x)}$.

【 $f'(0)$ 】

四、设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在二阶导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-\ln(1+x)}{x^3}=\dfrac{1}{3}$，求 $f(0), f'(0), f''(0)$.

【$f(0)=1$，$f'(0)=-\dfrac{1}{2}, f''(0)=\dfrac{4}{3}$】

五、设函数 $f(x)=|x-x_0|g(x)$， $g(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域内有定义，试证明 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导的充要条件是 $g(x_0^-)$ 与 $g(x_0^+)$ 都存在且 $g(x_0^-)=-g(x_0^+)$.

【略】

【练习】问函数 $f(x)=|x^3-x|\sqrt[3]{x^2-2x-3}$ 有几个不可导的点？

【2】

六、(第十二届初赛 一(2))设 $f(x)=(x+1)^n e^{-x^2}$，则 $f^{(n)}(-1)=$ (　　　　　).

【$f^{(n)}(-1)=n!e^{-1}$】

【练习】设 $f(x)=(x^2-1)^n$，则 $f^{(n+1)}(-1)=$ (　$(n+1)!(-2)^{n-1}n$　　　)

七、已知函数 $f(x)=x^2\int_1^x \frac{1}{t^3-3t^2+3t}\mathrm{d}t$，求 $f^{(2019)}(1)$

【$f^{(2019)}(1)=2019\cdot 2018\cdot 2016!=\frac{2019!}{2017}$】

八、(第十二届初赛 一(3))设 $y=f(x)$ 是由方程 $\arctan\frac{x}{y}=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}$ 确定的隐函数，且满足 $f(1)=1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为 (　　　).

【$y=1$】

九、(第十届初赛 一(2)) 设 $y=y(x)$ 是由 $\begin{cases} x=t+\cos t \\ e^y+ty+\sin t=1 \end{cases}$ 确定，则曲线 $y=y(x)$ 在 $t=0$ 处的切线方程为（　　　　）.

【$y=-x+1$】

【练习】设 $y=f(x)$ 存在二阶导数，$f'(x)\neq 0$，$x=\varphi(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，求 $\varphi''(y)$.

【$-\dfrac{f''(x)}{\left(f'(x)\right)^3}$】

【练习】设 $f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-e^t}dt$，那么求 $y=f(x)$ 的原函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $y=0$ 处的导数 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\Big|_{y=0}$.

【$\dfrac{1}{\sqrt{1-e^{-1}}}$】

〈2〉 导数的应用

十、(第十二届初赛 三) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$，证明:

（1）存在 $x_0 \in (0,1)$，使得 $f(x_0)=2-3x_0$；

（2）存在 $\xi,\eta \in (0,1)$，且 $\xi \neq \eta$，使得 $[1+f'(\xi)][1+f'(\eta)]=4$.

十一、(第十一届初赛 三) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可微，$f(0)=0$，且存在常数 $A>0$，使得 $|f'(x)| \le A|f(x)|$ 在 $[0,+\infty)$ 上成立，试证明在 $(0,+\infty)$ 上有 $f(x) \equiv 0$.

十二、（第八届初赛 五）设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \neq 0$，

证明：在 $(0,1)$ 内存在不同的两点 x_1, x_2，使得 $\dfrac{1}{f(x_1)}+\dfrac{1}{f(x_2)}=\dfrac{2}{I}$.

十三、设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$，

常数 $a, b>0$ 证明：在 $(0,1)$ 内存在不同的两点 x_1, x_2，使得 $\dfrac{a}{f'(x_1)}+\dfrac{b}{f'(x_2)}=a+b$.

十四、设函数$g(x)$连续，当$x\neq 0$时，$\dfrac{g(x)}{x}>0,$且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=1,$又设$f(x)$在包含$x=0$在内的某区间$(a,b)$内存在二阶导数且满足式子：$x^2 f''(x)-(f'(x))^2=\dfrac{1}{4}xg(x)$，

证明（1）$x=0$是$f(x)$在区间(a,b)内的驻点，且是极小值点

（2）曲线$y=f(x)$在(a,b)内是凸的.

【练习】设$f(x)$在$x=x_0$处连续，在$x=x_0$的某去心邻域内可导，$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{x-x_0}=a<0$，

则$f(x_0)$是$f(x)$的极___大____值.

【练习】设$f(x)$在$x=x_0$处存在三阶导数，$f''(x_0)=0, f'''(x_0)>0$，则$f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$的___右___侧邻近是凹的，___左____侧邻近是凸的.

十五、设$e<a<b<e^2$，证明. $\ln^2 b-\ln^2 a>\dfrac{4}{e^2}(b-a)$

【练习】设x与y同号且$x\neq y$，证明$\dfrac{1}{x-y}\begin{vmatrix} x & y \\ e^x & e^y \end{vmatrix}<1$.

十六、设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上存在三阶连续导数，且 $f(-1)=0, f(1)=1, f'(0)=0,$

试证明：存在 $\xi \in (-1,1)$，使得 $f'''(\xi)=3$.

十七、设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内存在二阶导数，且

$f(0)=f(1)=0. \max\limits_{0\le x\le 1}\{f(x)\}=2.$ 试证明：存在 $\xi \in (0,1)$，使得 $f''(\xi)\le -16$.

十八、（第六届初赛 三）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二次可导，且有常数 A,B，使得

$\left|f(x)\right|\le A, \left|f''(x)\right|\le B$，证明对于任意的 $x\in[0,1]$，有 $\left|f'(x)\right|\le 2A+\dfrac{B}{2}$.