一、填空题（每小题 3 分，共 15 分. 请将答案填在题中的横线上.）

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin t dt}{(x+1)(\cos x-1)}=\underline{-1}$.

（2）函数 $y=\ln x-x$ 在区间$\underline{(0,1)}$上单调增加.

（3）设 $\vec{a}=(3,2,1),\vec{b}=(2,\dfrac{4}{3},k)$，若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $k=\underline{-\dfrac{26}{3}}$.

（4）椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 围成的图形绕 x 轴旋转而成的椭球的体积等于 $\underline{\dfrac{4}{3}\pi ab^2}$.

（5）设 $f(0)=1, f(2)=4, f'(2)=2$，则 $\int_0^2 xf''(x)dx=\underline{1}$.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求，请将所选项前的字母填在题后的括号内）

（1）若 $f(x)$ 的一个原函数为 xe^x，则 $\int f'(x)dx=$（ D ）

(A) $(x+1)e^x$　　(B) xe^x　　(C) xe^x+C　　(D) $(x+1)e^x+C$

（2）设函数 $f(x)$ 连续，则 $\dfrac{d}{dx}\int_0^x tf(x^2-t^2)dt=$(B)

(A) $\dfrac{1}{2}f(x^2)$　　(B) $x f(x^2)$　　(C) $2xf(x^2)$　　(D) $-2xf(x^2)$

（3）由曲线 $y=\ln x$ 及直线 $x=2$ 和 x 轴所围的图形面积是（ D ）

(A) π　　(B) 2π　　(C) $2\ln 2$　　(D) $2\ln 2-1$

（4）已知曲线 L 的参数方程是 $\begin{cases} x=4(t-\sin t) \\ y=4(1-\cos t) \end{cases}$，则曲线 L 上对应 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 处的切线方程是（ B ）

(A) $x+y=2\pi$　　(B) $x-y=2\pi-8$　　(C) $x-y=2\pi$　　(D) $x+y=2\pi-8$

（5）曲线 $y=\ln(1-x^2)$ 在 $0\le x\le\dfrac{1}{2}$ 上一段弧长为（ B ）

(A) $\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+(\frac{1}{1-x^2})^2}\,dx$　　(B) $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1+x^2}{1-x^2}dx$

(C) $\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-\frac{2x}{1-x^2}}dx$　　(D) $\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+[\ln(1-x^2)]^2}dx$

（以下计算、解答和证明题必须写出演算步骤和证明过程，请直接在题下空白处作答）

三、计算题（每小题 5 分，共 30 分）

（1）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1-\sin x}{1+\sin x})^{\cot x}$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}[(1-\frac{2\sin x}{1+\sin x})^{-\frac{1+\sin x}{2\sin x}}]^{(-\frac{2\sin x}{1+\sin x})\frac{\cos x}{\sin x}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}(-\frac{2\cos x}{1+\sin x})}=e^{-2}$.

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^{x+y}-xy=1$ 所确定，求 $y''(0)$.

解：$y(0)=0$，方程两边对 x 求导得：

$(1+y')e^{x+y}-y-xy'=0$ ，$y'(0)=-1$

再对上式两边对 x 求导得：$(1+y')^2e^{x+y}+y''e^{x+y}-2y'-xy''=0$，

所以 $y''(0)=-2$.

（3）求不定积分 $\int\frac{x^2-2x}{1+x^2}dx$.

解： 原式$=\int(1-\frac{2x}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2})dx$

$=x-\ln(1+x^2)-\arctan x+C$.

（4）计算定积分 $\int_0^1 xe^{-x}dx$.

解： 原式 $=-\int_0^1 xd(e^{-x})=-xe^{-x}\Big|_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx$

$=-e^{-1}-e^{-x}\Big|_0^1=-e^{-1}-e^{-1}+1$

$=1-\frac{2}{e}$.

（5）求反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{e^x+e^{2-x}}$.

解： 原式$=\int_1^{+\infty}\frac{e^x dx}{e^{2x}+e^2}=\int_1^{+\infty}\frac{1}{e^{2x}+e^2}de^x$

$$=\frac{1}{e}\arctan e^{x-1}\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{e}[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}]=\frac{\pi}{4e}.$$

（5）设 $f(x)+\sin x=\int f'(x)\sin xdx$，求 $f(x)$.

解： $f'(x)+\cos x=f'(x)\sin x$， $f'(x)=\frac{-\cos x}{1-\sin x}$ ，

$f(x)=\int\frac{-\cos x}{1-\sin x}dx=\ln(1-\sin x)+C$.

四、已知极限 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 存在，且 $f(x)=2x^2+5\sin\frac{\pi}{2}x+\cos\frac{\pi}{2}x+4\lim\limits_{x\to1}f(x)$，求 $f(x)$.

(本题满分 8 分)

解： 由极限存在的唯一性，可设 $A=\lim\limits_{x\to1}f(x)$，

对条件等式两边取极限得：

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}[2x^2+5\sin\frac{\pi}{2}x+\cos\frac{\pi}{2}x+4\lim_{x\to1}f(x)]$$

得 $A=2+5+4A$， $A=-\frac{7}{3}$，

所以 $f(x)=2x^2+5\sin\frac{\pi}{2}x+\cos\frac{\pi}{2}x-\frac{28}{3}$.

五、设 $f(x^2-1)=\ln\frac{x^2}{x^2-2}$， 且 $f[\varphi(x)]=\ln x$， 求 $\int\varphi(x)dx$. **(本题满分 8 分)**

解： 由 $f(x^2-1)=\ln\frac{(x^2-1)+1}{(x^2-1)-1}$， 得 $f(x)=\ln\frac{x+1}{x-1}$，

由 $f[\varphi(x)]=\ln\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=\ln x$ 得： $\varphi(x)=\frac{x+1}{x-1}$，

故 $\int\varphi(x)dx=\int\frac{x+1}{x-1}dx=\int(1+\frac{2}{x-1})dx$

$$=x+2\ln|x-1|+C.$$

六、设 $f(x)$ 有一个原函数为 $1+\sin^2 x$，求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}xf'(2x)dx$. **(本题满分 8 分)**

解： $f(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x$， $\int f(x)dx=1+\sin^2 x+C$，

原式$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x df(2x)$

$$=\frac{x}{2}f(2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2x)dx$$

$$=\frac{x}{2}\sin 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2x)dx$$

$$=-\frac{1}{4}\int_0^{\pi} f(x)dx=-\frac{1}{4}(1+\sin^2 x)\Big|_0^{\pi}=0\ .$$

七、设 $f(x)=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\arctan\frac{1}{x}\ (x<0)$，求 $f(x)$ 的极值及曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间.

(本题满分 8 分)

解： 由 $f'(x)=\frac{x}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^2}=\frac{x+1}{1+x^2}=0$，得 $x=-1$，

由 $f''(x)=\frac{1-2x-x^2}{(1+x^2)^2}=0$，得 $x=-1-\sqrt{2}$，

$f''(-1)>0$，当 $x=-1$ 时，$f(x)$ 的极小值为 $\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}$，

当 $x\in[-1-\sqrt{2},0)$ 时，$f''(x)>0$，$x\in(-\infty,-1-\sqrt{2}]$ 时，$f''(x)<0$，

所以曲线的凸区间为 $(-\infty,-1-\sqrt{2}]$，凹区间为 $[-1-\sqrt{2},0)$.

八、设 $y=f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的非负连续函数.

（1）证明至少存在一点 $x_0\in(0,1)$，使得在 $[0,x_0]$ 上，以 $f(x_0)$ 为高的矩形面积等于 $[x_0,1]$ 上以 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形面积；

（2）又设 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导，且 $f'(x)>-\frac{2f(x)}{x}$，证明（1）中的 x_0 是唯一的.

(本题满分 8 分)

证明：（1）即证存在一点 $x_0\in(0,1)$，使 $x_0 f(x_0)=\int_{x_0}^{1} f(t)dt$.

设 $F(x)=x\int_x^1 f(t)dt$，

则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 内可导，且

$F(0)=F(1)=0$，由罗尔定理知，至少存在一点 $x_0\in(0,1)$， 使 $F'(x_0)=0$，

而$F'\left(x\right)=\int_{x}^{1}f(t)dt-xf(x)$，

因而$F'\left(x_0\right)=\int_{x_0}^{1}f(t)dt-x_0f(x_0)=0$，

即$x_0f(x_0)=\int_{x_0}^{1}f(t)dt$，从而以$f\left(x_0\right)$为高的矩形面积等于$[x_0,1]$上以$y=f\left(x\right)$为曲边的曲边梯形面积.

（2）又设 $\varphi\left(x\right)=\int_{x}^{1}f(t)dt-xf(x)$，

由$f'(x)>-\dfrac{2f(x)}{x}$ 知

$\varphi'\left(x\right)=-f(x)-f(x)-xf'(x)<0$， 所以 $\varphi\left(x\right)$在$\left(0,1\right)$内单调减少，

故（1）中的x_0是唯一的.

注：有的题目有多种解法，以上解答和评分标准仅供参考.