2022级

高等数学解题方法

第二部分　导数与微分

一、与导数的定义有关问题

二、求各类一元函数的微分与导数

三、利用复合函数求导法则变换方程

四、求一元函数的n阶导数

一、与导数的定义有关问题

1、函数在一点可导的条件

例1 设$f(0)=0$,则下列极限存在是$f(x)$在$x=0$处可导的______条件?

(1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f(1-e^h)$存在　　(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cos h)$存在

(3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^3}f(h-\sin h)$存在　　(4) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$存在

解 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f(1-e^h)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^h)}{1-e^h}\cdot\dfrac{1-e^h}{h}$

$=-\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^h)}{1-e^h}$　令$1-e^h=t$　$-\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t)-f(0)}{t}$

(1) 是$f(x)$在$x=0$处可导的充要条件

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(1-\cos h)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1-\cos h)}{1-\cos h}\cdot\frac{1-\cos h}{h^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(1-\cos h)}{1-\cos h}\overset{t=1-\cos h>0}{=\!=\!=\!=\!=}\frac{1}{2}\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t}$$

(2) 是$f(x)$在$x=0$处可导的必要条件

反例：$f(x)=|x|$在$x=0$处不可导，

但$\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(1-\cos h)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{|1-\cos h|}{h^2}=\frac{1}{2}$存在

同理：(3) 是$f(x)$在$x=0$处可导的充要条件

(4) 是$f(x)$在$x=0$处可导的必要条件

反例：$f(x)=\begin{cases}x+1 & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$在$x=0$处不可导（不连续）

但$\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}[f(2h)-f(h)]=1$

例2 设$F(x)=g(x)\varphi(x)$, $\varphi(x)$在$x=a$处连续、不可导，$g'(a)$存在，则$g(a)=0$是$F(x)$在$x=a$处可导的<u>充要条件</u>条件

解 $$\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{g(x)\varphi(x)-g(a)\varphi(a)}{x-a}$$

若$g(a)=0$, 上式$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{[g(x)-g(a)]\varphi(x)}{x-a}=g'(a)\varphi(a)$

若$F'(a)$存在，则必有$g(a)=0$, 这是因为：

反证：若$g(a)\neq 0$, 有商的求导法则知$\varphi(x)=\dfrac{F(x)}{g(x)}$

在$x=a$处可导，矛盾.

注：此结论可用来判别形如$f(x)=|x-a|g(x)$在$x=a$处的可导性

例3 $f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$的不可导点的个数为 $\underline{\quad 2 \quad}$.

解: $f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$

$$=(x-2)(x+1)|x(x+1)(x-1)|$$

在$x=1$处, $g(x)=(x-2)(x+1)|x(x+1)|$, $\varphi(x)=|x-1|$

$g(1)\neq 0$, $x=1$不可导

同理$x=0$不可导

在$x=-1$处, $g(x)=(x-2)(x+1)|x(x-1)|$, $\varphi(x)=|x+1|$

$g(-1)=0$, $x=-1$可导

2、与导数的定义有关的极限问题

(1)已知导数求极限(已讲）

(2)已知极限求导数

例1 设$f(x)$在$x=0$处连续，$\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin x}{x^2}+\dfrac{f(x)}{x})=2$，求$f'(0)$

解：将所给极限改写成 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin x}{x}+f(x)}{x}=2$

由$\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin x}{x}+f(x))=0$ 得$f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=-1$

由所给极限得 $\lim\limits_{x\to 0}[(\dfrac{\sin x}{x^2}-\dfrac{1}{x})+\dfrac{f(x)-f(0)}{x}]=2$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=2-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2}$$

$$=2-\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{2x}=2$$

$\therefore f'(0)=2$

3. 分段函数(绝对值函数）在分段点的导数

例1 设$f(x)=\max\{\sin x,\cos x\}(0<x<2\pi)$，求$f''(x)$

解

$$f(x)=\begin{cases}\cos x & 0<x<\dfrac{\pi}{4}\\ \sin x & \dfrac{\pi}{4}\le x<\dfrac{5\pi}{4}\\ \cos x & \dfrac{5\pi}{4}\le x<2\pi\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}-\sin x & (0,\dfrac{\pi}{4})\cup(\dfrac{5\pi}{4},2\pi)\\ \cos x & (\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4})\end{cases}$$

注：对于连续的分段函数 $f(x)=\begin{cases} g(x) & x\le x_0 \\ h(x) & x>x_0 \end{cases}$

其中$g(x),h(x)$分别在$x<x_0, x>x_0$可导，

$$f'(x)=\begin{cases} g'(x) & x<x_0 \\ h'(x) & x>x_0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to x_0^+} h'(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} g'(x)$ 　　$f(x)$在$x=x_0$可导，

$\lim\limits_{x\to x_0^+} h'(x)\ne\lim\limits_{x\to x_0^-} g'(x)$ 　　$f(x)$在$x=x_0$不可导.

$$\because \lim_{x\to \frac{\pi}{4}^+} f'(x)=\lim_{x\to \frac{\pi}{4}^+}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}^-} f'(x)=\lim_{x\to \frac{\pi}{4}^-}(-\sin x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$f(x)$在$x=\dfrac{\pi}{4}$处不可导 　　$f(x)$在$x=\dfrac{5\pi}{4}$处也不可导

注：对于连续的分段函数 $f(x)=\begin{cases} g(x) & x\le x_0 \\ h(x) & x>x_0 \end{cases}$

其中 $h(x_0)\triangleq \lim\limits_{x\to x_0^+} h(x)=g(x_0)$，则

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=g'_-(x_0)$$

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{h(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}=h'_+(x_0)$$

如果 $g'_-(x_0)=h'_+(x_0)$, 则 f 在 $x=x_0$ 可导

进一步：若 $g(x),h(x)$ 分别在 $x<x_0,x>x_0$ 可导，

$$f'(x)=\begin{cases} g'(x) & x<x_0 \\ h'(x) & x>x_0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to x_0^+} h'(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} g'(x)$ $\quad f(x)$ 在 $x=x_0$ 可导，

$\lim\limits_{x\to x_0^+} h'(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^-} g'(x)$ $\quad f(x)$ 在 $x=x_0$ 不可导.

这是因为：由拉格朗日中值定理

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{g'(\xi(x))(x-x_0)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0^-}g'(\xi(x))=\lim_{\xi\to x_0^-}g'(\xi)$$

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{h(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0^+}\frac{h'(\eta(x))(x-x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}h'(\eta(x))=\lim_{\eta\to x_0^+}h'(\eta)$$

$\lim\limits_{x\to x_0^+}h'(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}g'(x)$ $\qquad f(x)$在$x=x_0$可导，

$\lim\limits_{x\to x_0^+}h'(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^-}g'(x)$ $\qquad f(x)$在$x=x_0$不可导.

$$f''(x)=\begin{cases}-\cos x & (0,\frac{\pi}{4})\cup(\frac{5\pi}{4},2\pi)\\ -\sin x & (\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4})\end{cases}$$

$f'(x)$在$x=\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}$处不存在，$f''(x)$在$x=\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}$处也不存在.

例2 设$f(x)=3x^3+x^2|x|$,则使$f^{(n)}(0)$存在的最高阶数为 $\underline{\ C\ }$

$(A).0$ $(B).1$ $(C).2$ $(D).3$

一般设$k>1$, $f(x)=x^k|x|$,则使$f^{(n)}(0)$存在的最高阶数为 $\underline{\ k\ }$

例2 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$，当$g(x)$满足

$g(0)=g''(0)=g'''(0)=1, g'(0)=-1,$求$f''(x)$.

解 当$x\neq 0, f'(x)=\dfrac{xg'(x)-g(x)+(1+x)e^{-x}}{x^2}$

$$f''(x)=\frac{x^2g''(x)-2xg'(x)+2g(x)-(x^2+2x+2)e^{-x}}{x^3}$$

当$x=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x^2}$ 洛必达

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}(g''(x)-e^{-x})=0=f'(0)$$

注：计算$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$繁，用定义计算$f'(0)$.

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}\qquad (\text{计算}\lim_{x\to 0} f''(x)\text{繁})$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{xg'(x)-g(x)+(1+x)e^{-x}}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{xg''(x)-xe^{-x}}{3x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{g''(x)-e^{-x}}{x}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left[\frac{g''(x)-g''(0)-(e^{-x}-1)}{x}\right]$$

$$=\frac{1}{3}[g'''(0)-(-1)]=\frac{2}{3}$$

注：对于分段点的导数，一般对具体函数可用

$\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$来求(判断)$f'(x_0)$.

抽象函数还是用导数的定义来求

二、求各类一元函数的微分与导数

例1　设函数$y=y(x)$由方程$x-\int_1^{y+x} e^{-t^2}dt=0$所确定，求$y'(0), y''(0)$.

解　$$1-e^{-(y+x)^2}(y'+1)=0$$

$$y'=e^{(y+x)^2}-1$$

将$x=0, y=1$代入，得$y'(0)=e-1$

$$y''=e^{(y+x)^2}\cdot 2(y+x)(y'+1)$$

将$x=0, y=1\ y'(0)=e-1$代入得$y''(0)=2e^2$

例2 已知$y=y(x)$由方程$\begin{cases} x=3t^2+2t+3 \\ e^y\sin t-y+1=0 \end{cases}$确定,求$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}$

解 $\dfrac{dx}{dt}=6t+2$ 在$e^y\sin t-y+1=0$两边对t求导

$$e^y\sin t\cdot y'+e^y\cos t-y'=0$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{e^y\cos t}{1-e^y\sin t}=\frac{e^y\cos t}{2-y}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{e^y\cos t}{2(2-y)(3t+1)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{e^y\cos t}{2(2-y)(3t+1)}\right)\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{e^y\cos t}{2(2-y)(3t+1)}\right)\cdot\frac{dt}{dx}}\qquad\boxed{\frac{dx}{dt}=6t+2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{4}\frac{e^y\left(\frac{dy}{dt}\cos t-\sin t\right)(2-y)(3t+1)}{(2-y)^2(3t+1)^3}$$

$$-\frac{1}{4}\frac{e^y\cos t\left[\left(-\frac{dy}{dt}\right)(3t+1)+3(2-y)\right]}{(2-y)^2(3t+1)^3}$$

将$t=0, y=1, \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0,}=\left.\frac{e^y\cos t}{(2-y)}\right|_{t=0}=e$代入

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=\frac{2e^2-3e}{4}$$

三、利用复合函数求导法则变换方程

例1 设$x=\cos t$,化简方程:$\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{x}{1-x^2}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{1-x^2}=0.$

解 实质是作自变量变换，把方程变为y与t的方程。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=-\csc t\,\frac{dy}{dt}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(-\csc t\,\frac{dy}{dt}\right)\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$=\left(\csc t\cdot\cot t\,\frac{dy}{dt}-\csc t\,\frac{d^2y}{dt^2}\right)\cdot\frac{1}{-\sin t}$$

$$=-\csc^2 t\cdot\cot t\,\frac{dy}{dt}+\csc^2 t\,\frac{d^2y}{dt^2}$$ 代入方程得:$\dfrac{d^2y}{dt^2}+y=0.$

例2　设$y=\tan z$,化简方程:$\frac{d^2y}{dx^2}=2+\frac{2(1+y)}{1+y^2}.(\frac{dy}{dx})^2$

解　实质是作因变量变换， 把方程变为z与x的方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=\sec^2 z\cdot\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2\sec^2 z\tan z(\frac{dz}{dx})^2+\sec^2 z\frac{d^2z}{dx^2}$$

$\therefore$代入方程得:

$$\frac{d^2z}{dx^2}-2(\frac{dz}{dx})^2=2\cos^2 z.$$

例3 令$u=y^2, t=\ln x$,变换方程$xy\frac{d^2y}{dx^2}+x(\frac{dy}{dx})^2+y\frac{dy}{dx}=0$.

解 令$\begin{cases} x=e^t \\ y=y(t) \end{cases}$, 则$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=e^{-t}\cdot\frac{dy}{dt}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{d}{dt}(e^{-t}\frac{dy}{dt})}{\frac{dx}{dt}}=e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt})$$

代入原方程,消去e^{-t}得: $y\frac{d^2y}{dt^2}+(\frac{dy}{dt})^2=0 \qquad (1)$

再令$u=y^2$,则$\frac{du}{dt}=\frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}=2y\cdot\frac{dy}{dt}$

$$\frac{d^2u}{dt^2}=\frac{d}{dt}(\frac{du}{dt})=\frac{d}{dt}(2y\cdot\frac{dy}{dt})=2(\frac{dy}{dt})^2+2y\cdot\frac{d^2y}{dt^2}$$

代入(1)得$\frac{d^2u}{dt^2}=0$

解法二 $\because u=y^2$,两边对x求导:$\dfrac{du}{dx}=2y\dfrac{dy}{dx}$

即:$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2y}\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{2y}\dfrac{du}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{2xy}\dfrac{du}{dt}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2xy}\frac{du}{dt}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2xy}\right)\cdot\frac{du}{dt}+\frac{1}{2xy}\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dt}\right)$$

$$=\frac{-y-x\dfrac{dy}{dx}}{2x^2y^2}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{1}{2xy}\frac{d^2u}{dt^2}\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$=-\frac{1}{2x^2y}\cdot\frac{du}{dt}-\frac{1}{4x^2y^3}\cdot\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\frac{1}{2x^2y}\frac{d^2u}{dt^2}$$

代入原方程得$\dfrac{d^2u}{dt^2}=0$

四、求一元函数的n阶导数

常用高阶导数公式

(1) $(a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a \quad (a > 0)$ $\qquad (e^{ax})^{(n)} = a^n e^x$

(2) $(\sin kx)^{(n)} = k^n \sin(kx + n \cdot \frac{\pi}{2})$

(3) $(\cos kx)^{(n)} = k^n \cos(kx + n \cdot \frac{\pi}{2})$

(4) $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}, (x^n)^{(n)} = n!$

(5) $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$

$(\ln(1+x))^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$

(6) $(\frac{1}{x \pm a})^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x \pm a)^{n+1}}$

方法1 化简函数，利用已知的n阶导数公式

例1 求下列函数的n阶导数

① $y=\sin^6 x+\cos^6 x$

解 $y=(\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3$

$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)$$

$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-3\sin^2 x\cos^2 x$$

$$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1-\cos 4x}{2}$$

$$=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$$

$$\therefore y^{(n)}=\frac{3}{8}\cdot 4^n\cdot\cos(4x+n\cdot\frac{\pi}{2}).$$

(2) 已知$y=\frac{x^{2n+1}}{x^2-1}$,$(n=1,2\cdots)$求$y^{(2n+1)}$.

解 $y=\frac{x^{2n+1}}{x^2-1}$

$$=\frac{x^{2n+1}-x^{2n-1}+x^{2n-1}-x^{2n-3}+\cdots+x^3-x+x}{x^2-1}$$

$$=x^{2n-1}+x^{2n-3}+\cdots+x^3+x+\frac{1}{2}[\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}]$$

$$y^{(2n+1)}=-\frac{(2n+1)!}{2}[\frac{1}{(x+1)^{2n+2}}+\frac{1}{(x-1)^{2n+2}}]$$

思考：已知$y=\frac{x^n}{x^2-1}$,$(n=1,2\cdots)$求$y^{(n)}$.

方法2　利用莱布尼兹公式

注：用莱布尼兹公式的一般形式：$P_n(x)f(x)$,条件：n较小，$f(x)$的n阶高阶导数易求 例：求 $(x^2\ln(1+x))^{(n)}$

例2　已知$f(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$,

求$f''(2), f'''(3), f^{(4)}(4)$.

解　$f(x)=(x-2)^2[(x-1)(x-3)^3(x-4)^4]$

$=(x-2)^2 v(x)$

$$f''(2)=[(x-2)^2]''v(x)+2[(x-2)^2]'v'(x)+(x-2)^2 v''(x)\Big|_{x=2}$$

$$=2[(x-1)(x-3)^3(x-4)^4]\Big|_{x=2}=-32$$

注:一般形式

$$f(x)=(x-a)^n\varphi(x),\qquad f^{(n)}(a)=n!\varphi(a)$$

$$f'''(3)=12,\ f^{(4)}(4)=12\cdot 4!$$

例3 $\quad f(x)=(x^2-1)^n\sin\frac{\pi}{4}x^2$, 求 $f^{(n)}(1)=?$

解 $\quad f^{(n)}(1)=\{(x-1)^n\cdot[(x+1)^n\sin\frac{\pi}{4}x^2]\}^{(n)}\Big|_{x=1}$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k[(x-1)^n]^{(n-k)}\cdot[(x+1)^n\cdot\sin\frac{\pi}{4}x^2]^{(k)}\Big|_{x=1}$$

$$=n![(x+1)^n\sin\frac{\pi}{4}x^2]_{x=1}+0$$

$$=n!\cdot 2^n\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=n!\,2^{n-1}\sqrt{2}$$

方法3 利用微分方程, 建立递推公式

例3 $y = \arctan x,$ 求 $y^{(n)}(0)$

解: $y' = \dfrac{1}{1+x^2},$ $y'(0) = 1$

$$y'' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad y''(0) = 0$$ 再往下求很复杂。

$$(1+x^2)y' = 1 \qquad (1)$$

(1)式两端对x求n阶导数（也可求n-1阶导数），

依莱布尼兹公式有

$$y^{(n+1)}(1+x^2) + ny^{(n)} \cdot 2x + \frac{n(n-1)}{2} y^{(n-1)} \cdot 2 = 0 \qquad (2)$$

（2）式中令 $x=0$ 得

$$y^{(n+1)}(0)+n(n-1)y^{(n-1)}(0)=0 \quad (3)$$

(3)式中给出了$y^{(n+1)}(0)$与 $y^{(n-1)}(0)$之间的递推公式

$$y''(0)=0 \Rightarrow y^{(2k)}(0)=0 \quad (k\text{为自然数})$$

由 $y'(0)=1 \Rightarrow y'''(0)=-2\cdot 1\cdot 1=-2!$

$$y^{(5)}(0)=-4\cdot 3\cdot y'''(0)=4!$$

$$y^{(2k+1)}(0)=(-1)^k(2k)!$$

$$y^{(n)}(0)=\begin{cases} 0, & n=2k \\ (-1)^k(2k)!, & n=2k+1 \end{cases} \quad k=0,1,2,\cdots$$

方法4 利用泰勒公式、泰勒级数（后面讲）

方法5　归纳法

例3 $y=\arctan x$,　　求 $y^{(n)}(0)$

解: $$y'=\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\cos^2 y=\cos y\sin(y+\frac{\pi}{2})$$

$$y''=-2\cos y\sin y\cdot y'=-\sin(2y)\cos^2 y=\cos^2 y\sin 2(y+\frac{\pi}{2})$$

$$y'''=2\cos^3 y\left[-\sin y\cdot\sin 2(y+\frac{\pi}{2})+\cos y\cos 2(y+\frac{\pi}{2})\right]$$

$$=2\cos^3 y\cos[y+2(y+\frac{\pi}{2})]=2\cos^3 y\sin 3(y+\frac{\pi}{2})$$

猜测:

下面用归纳法证明:

$$\boxed{y^{(n)}=(n-1)!\cos^n y\sin n(y+\frac{\pi}{2})}$$

当$n=1$时，结论成立；假设当$n=k$时结论成立，

则当$n=k+1$时，

$$y^{(k+1)}=(y^{(k)})'=(k-1)!\bullet$$

$$\left[-k\cos^{k-1}y\sin y\cdot\sin k(y+\frac{\pi}{2})+k\cos^2 y\cos k(y+\frac{\pi}{2})\right]\cdot y'$$

$$=k!\cos^{k+1}y\cos[y+k(y+\frac{\pi}{2})]=k!\cos^{k+1}y\sin\left[(k+1)(y+\frac{\pi}{2})\right]$$

由于$y(0)=\arctan 0=0,\ \cos 0=1,$

因此 $y^{(n)}(0)=(n-1)!\sin\dfrac{n\pi}{2}.$