$x=y^y$ 两边同时求导 $1=(e^{y\ln y})'_x \Rightarrow e^{y\ln y}(y'\ln y+y\cdot\frac{1}{y}\cdot y')=1 \Rightarrow y'=\frac{1}{(1+\ln y)y^y}$

高等数学 I-1 综合练习2

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x_0-2x)-f(x_0)}{-2x}(-2)+\frac{f(x_0-x)-f(x_0)}{-x}\right]=-f'(x_0)$

一、填空题

1. 已知 $f'(x_0)=-1$, 则 $\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}=$ ______. (利用导数定义)

2. 设 $y=y(x)$ 由方程 $x=y^y$ 所确定, 则 $\mathrm{d}y=$ ______. 隐函数求微分＋幂指函数求导.

3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \cos(x-t)^2\,\mathrm{d}t=$ ______. "先换元再求导" 令 $x-t=u$, 则 $-dt=du$

$\int_0^x \cos(x-t)^2 dt=\int_x^0 -\cos u^2 du=+\int_0^x \cos u^2 du$

4. $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{2x}, & x<0\\ (1+ax)^{\frac{1}{x}}, & x>0\end{cases}$, 若 $\lim_{x\to 0}f(x)$ 存在, 则 $a=$ ______.

5. 极限 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)=$ ______.

二、选择题

Rolle Th ＋代数基本定理. $g(0)=g(-1)=g(-\frac{1}{2})=g(\frac{1}{3})=0$

1. 设 $g(x)=x(x+1)(2x+1)(3x-1)$, 则方程 $g'(x)=0$ 在 $(-1,0)$ 内的实根个数恰为 (　　).

(A) 1;　(B) 2;　(C) 3;　(D) 4.

2. 已知曲线 $y=x^2e^{-x}$, 则曲线 (　　). 渐近线

(A) 无渐近线;　(B) 有水平渐近线和铅直渐近线;

(C) 仅有水平渐近线;　(D) 仅有铅直渐近线.

3. 设 $\int f'(3x)\,\mathrm{d}x=$ (A). "先换元再积分" 令 $3x=t$. 则 $\int f'(t)\,d\frac{t}{3}=\frac{1}{3}\int f'(t)dt=\frac{1}{3}f(t)+C$

(A) $\frac{1}{3}f(3x)+C$;　(B) $\frac{1}{3}f(x)+C$;　(C) $3f(3x)+C$;　(D) $3f(x)+C$.

4. 设 $f(x)$ 任意阶可导, 且 $f'(x)=[f(x)]^2$, 则 n 阶导数 $f^{(n)}(x)=$ (　　). 高阶导数问题.

(A) $n[f(x)]^{n+1}$;　(B) $n![f(x)]^{n+1}$;

(C) $(n+1)[f(x)]^{n+1}$;　(D) $(n+1)![f(x)]^{n+1}$.

由一阶导. 二阶导. 三阶导 归纳猜想n阶导.

5. 设 $f(x)=\int_0^x \sin^2 t\,\mathrm{d}t$, $g(x)=x^3$, 则当 $x\to 0$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的 (D). 无穷小阶的比较 (定义)

(A) 低阶无穷小;　(B) 高阶无穷小;

(C) 等价无穷小;　(D) 同阶但非等价无穷小.

$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin^2 t\,dt}{x^3}\overset{洛}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{3x^2}=\frac{1}{3}$

三、解答题

1. 求极限 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$. (定积分概念)

注: 该题易利用夹逼准则计算得到 极限很像, 但夹逼准则无法解决.

原式 $=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n^2}{n^2+1}+\frac{n^2}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n^2}{n^2+n^2}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}$

$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$

$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)dx$

扫描全能王 创建

2. 已知函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=4(t-\sin t) \\ y=4(1-\cos t) \end{cases}$ 确定, 计算在 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 相应点处的二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

(参数方程求二阶导数)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{4\sin t}{4(1-\cos t)}=\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}=\cot\frac{t}{2}$$

(三角式化简后对于二阶导帮助很大)

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=\left.\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=\left.-\csc^2\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4(1-\cos t)}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{4}$$

注意! 该部分不可缺失.

3. 计算 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}$. (根式代换)

令 $\sqrt{1+e^x}=t$, 则 $x=\ln(t^2-1)$

$$dx=\frac{2t}{t^2-1}dt$$

$$原式=\int\frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{t^2-1}dt$$

$$=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

(有理函数拆项分析)

$$=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right|+C=2\ln(\sqrt{1+e^x}-1)-x+C$$

4. 计算 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x$. 根号的处理.

$$1-\sin 2x=1-2\sin x\cos x=(\sin x-\cos x)^2$$

$$原式=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-\cos x|\,dx$$

"绝对值号!"

积分区间可加性.

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)\,dx$$

$$=\left[\sin x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\left[-\cos x-\sin x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=2(\sqrt{2}-1)$$

5. 讨论反常积分 $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}$ 的收敛性, 若收敛, 计算反常积分的值.

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^k}\overset{凑微分}{=}\int_2^{+\infty}\frac{1}{(\ln x)^k}d(\ln x)$$

$k=1$ 时. $原式=\ln|\ln x|\Big|_2^{+\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln|\ln x|-\ln\ln 2=+\infty$

$k\neq 1$ 时 $原式=\dfrac{(\ln x)^{-k+1}}{-k+1}\Bigg|_2^{+\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(\ln x)^{-k+1}\right]\cdot\dfrac{1}{-k+1}-\dfrac{\ln 2}{-k+1}$

$\therefore$ $-k+1>0$ 时 $原式=+\infty$

$-k+1<0$ 时 $原式=\dfrac{1}{k-1}(\ln 2)^{-k+1}$

综上, $k\leq 1$ 时 该反常积分发散.

$k>1$ 时 该反常积分收敛, 且收敛于 $\dfrac{1}{k-1}(\ln 2)^{-k+1}$.

扫描全能王 创建

四、讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}$ 的连续性. → 含参量极限问题.

$|x|>1$ 时. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2-x^{-2n}}{1+x^{-2n}}=x^2$

$0<|x|<1$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+2}-1}{x^{2n}+1}=-1$

$x=\pm1$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}=0$

$x=0$ 时 无意义.

$\therefore f(x)=\begin{cases}x^2 & |x|>1\\ -1 & 0<|x|<1\\ 0 & |x|=1\end{cases}$

$f(0^+)=f(0^-)=-1$

$f(1^+)=1\quad f(1^-)=-1$

$f(-1^+)=-1\quad f(-1^-)=1$

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,-1),(-1,0),(0,1),(1,+\infty)$ 上连续，$x=0$ 是可去间断点，$x=\pm1$ 是跳跃间断点.

五、已知函数 $F(x)=\int_1^x\left(2-\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t\,(x>0)$，求 $F(x)$ 的单调区间.

积分上限函数 + 单调性讨论

$F'(x)=2-\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$

$F'(x)>0\Rightarrow x>\frac14$

$F'(x)<0\Rightarrow 0<x<\frac14$

$\therefore F(x)$ 的单增区间 $(\frac14,+\infty)$

单减区间 $(0,\frac14)$

六、设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac1x}} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$，讨论函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的可导性. 分段函数可导性讨论

分段点导数处使用定义讨论.

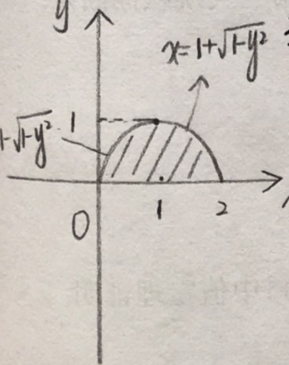
$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{x}{1+e^{\frac1x}}-0}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{1+e^{\frac1x}}$ (其中 $\frac1x\to\infty$ 但是 $\frac1x\to+\infty$，$\frac1x\to-\infty$ 时 极限不同)

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{1+e^{\frac1x}}=0$

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{1+e^{\frac1x}}=1\qquad\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

七、求曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}$ → 半圆 与 x 轴所围成的平面区域绕 y 轴旋转一周而成的旋转体的体积.

定积分的应用



法1.

$V_y=\int_0^2 2\pi x\cdot y\,dx$

$=2\pi\int_0^2 x\cdot\sqrt{2x-x^2}\,dx$

$=\pi\int_0^2[2-(2-2x)]\sqrt{2x-x^2}\,dx$

$=\pi\int_0^2 2\sqrt{2x-x^2}\,dx-\pi\int_0^2\sqrt{2x-x^2}\,d(2x-x^2)$

定积分的几何意义(半圆的面积)

$=2\pi(\frac12\pi)-0=\pi^2$

法2.

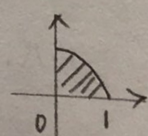
$V_y=V_1-V_2$

$=\int_0^1\pi\cdot(1+\sqrt{1-y^2})^2dy-\int_0^1\pi(1-\sqrt{1-y^2})^2dy$

$=\int_0^1\pi\cdot4\sqrt{1-y^2}\,dy$

$=4\pi\cdot(\frac14\pi)$

$=\pi^2$



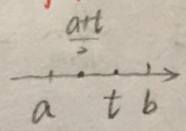
$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac14\pi$ (定积分的几何意义)

扫描全能王 创建

八、 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, (a,b) 内可导, 且 $f'(x)$ 单调递减, 证明:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

证明：令 $F(t)=\int_a^t f(x)dx-(t-a)f\left(\frac{a+t}{2}\right)$ （利用单调性 证明 $F(b)\le F(a)$）



$F'(t)=f(t)-f\left(\frac{a+t}{2}\right)-(t-a)f'\left(\frac{a+t}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}$

拉格朗日中值定理

$=f'(\xi)\left(t-\frac{a+t}{2}\right)-\frac{t-a}{2}f'\left(\frac{a+t}{2}\right)$ $\quad \frac{a+t}{2}<\xi<t$

$=\frac{t-a}{2}\left[f'(\xi)-f'\left(\frac{a+t}{2}\right)\right]$

由于 $f'(x)$ 单调递减，所以 $f'(\xi)<f'\left(\frac{a+t}{2}\right)$

$\therefore$ $F'(t)<0$ 从而 $F(t)$ 在 (a,b) 内单调递减

$\therefore$ $F(b)\le F(a)$

即 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

参考答案 2

一、填空题 1. 1. 2. $\dfrac{\mathrm{d}x}{x(\ln y+1)}$. 3. $\cos x^2$. 4. $-\ln 2$. 5. $\dfrac{1}{3}$.

二、选择题 B. C. A. B. D.

三、1. $\dfrac{\pi}{4}$. 2. $-\dfrac{1}{4}$. 3. $\ln\dfrac{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}+1}+C$.

4. $2(\sqrt{2}-1)$. 5. $k>1$ 时收敛于 $\dfrac{1}{(k-1)(\ln 2)^{k-1}}$.

四、$f(x)=\begin{cases}-1, & 0<|x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ x^2, & |x|>1.\end{cases}$ $x=0$ 是第一类可去间断点, $x=\pm1$ 是第一类跳跃间断点.

五、单调增区间 $\left[\dfrac{1}{4},+\infty\right)$, 单调减区间 $\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$.

六、$f'_-(0)=1, f'_+(0)=0$, 所以 $x=0$ 处不可导. 七、π^2.

八、提示: 构造函数 $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t-(x-a)f\left(\frac{a+x}{2}\right)$, 结合拉格朗日中值定理证明.

扫描全能王 创建