第 3 章　中值定理与导数的应用

本章学习要点：

☑ 理解并会用罗尔定理、拉格朗日中值定理和泰勒定理，了解并会用柯西中值定理。

☑ 理解函数的极值概念，掌握用导数判断函数的单调性和求函数极值的方法，掌握函数最大值和最小值的求法及其简单应用。

☑ 会用导数判断函数图形的凹凸性和拐点，会求函数图形的水平、铅直和斜渐近线，会描绘函数的图形。

☑ 掌握用罗必达法则求未定式极限的方法。

☑ 了解曲率和曲率半径的概念，会计算曲率和曲率半径。

☑ 会求两曲线的交角。

3.1　基本知识点

利用微分法研究函数的性态。中值定理是将函数的局部属性用于研究函数整体性质的一座桥梁。

3.1.1　微分中值定理

（1）罗尔定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$。

（2）拉格朗日中值定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

或

$$f(b)-f(a)=f'[a+\theta(b-a)](b-a)\quad(0<\theta<1)$$

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x\quad(0<\theta<1)$$

（3）柯西中值定理：若函数 $f(x), F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $F'(x)\neq 0$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}\quad(a<\xi<b)$$

（4）泰勒中值定理：若函数 $y=f(x)$ 在含有 x_0 的某个开区间 (a,b) 内具有直到 $n+1$ 阶

的导数，对于 $\forall x \in U(x_0,\delta) \subset (a,b)$，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x) \quad (*)$$

其中 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，$\xi$ 介于 x_0 与 x 之间，$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 称为拉格朗日型余项。(*) 式称为带有拉格朗日型余项的泰勒公式。在 (*) 式中当 $x_0=0$ 时，所得等式称为麦克劳林公式，即

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

或
$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0<\theta<1)$$

(5) 若 $y=f(x)$ 是可微函数，且方程 $f(x)=0$ 有两个根 x_1,x_2，则方程 $f'(x)=0$ 至少有一介于 x_1,x_2 之间的根。

(6) 若 $y=f(x)$ 在某区间内 $f'(x)=0$ 恒成立，则在该区间内 $f(x)$ 必为常数。

(7) 若 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 在某区间内 $f'(x)=g'(x)$ 恒成立，则在该区间内必有 $f(x)=g(x)+c$（其中 c 为一常数）。

3.1.2 函数性态的讨论

1. 函数的单调性

若函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且对 $\forall x\in(a,b)$，有 $f'(x)>0$（或 $f'(x)<0$），则 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加（或减少）。

2. 函数的极值及其判定

极值的定义

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，x 是该邻域内的任意一点，若有 $f(x_0)<f(x)$（或 $f(x_0)>f(x)$），则称 x_0 是 $f(x)$ 的极小（或极大）值点，$f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小（或极大）值。若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且 $f'(x_0)=0$，则称 x_0 是 $f(x)$ 的驻点。

函数极值的判定

(1) 可导函数 $f(x)$ 在 x_0 点取得极值的必要条件是 $f'(x_0)=0$。

(2) 函数 $f(x)$ 只能在它驻点和不可导点处取得极值。

(3) 若函数 $f(x)$ 在 x_0 点处连续，在 x_0 的某个邻域内可微（点 x_0 可除外），那么

① 当 x 从 x_0 的左侧变到 x_0 的右侧时，$f'(x)$ 由负变正，则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极小值。

② 当 x 从 x_0 的左侧变到 x_0 的右侧时，$f'(x)$ 由正变负，则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极大值。

③ 当 x 从 x_0 的左侧变到 x_0 的右侧时，$f'(x)$ 不变号，则 $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值。

（4）若 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$，那么

① 若 $f''(x_0)<0$，则 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值。
② 若 $f''(x_0)>0$，则 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值。

（5）若 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0, f^{(n)}(x_0)\neq 0, n=1,2,\cdots$，那么

① 当 n 为偶数时，若 $f^{(n)}(x_0)<0$，则 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值；若 $f^{(n)}(x_0)>0$，则 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值。
② 若 n 为奇数，则 $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值。

3. 函数的凹凸性、曲线的拐点及其性质

（1）设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若 $\forall x_1,x_2(x_1\neq x_2)$，$\forall\lambda,\mu$ 满足 $\lambda+\mu=1$（$\lambda>0,\mu>0$），使得 $f(\lambda x_1+\mu x_2)>\lambda f(x_1)+\mu f(x_2)$（或 $f(\lambda x_1+\mu x_2)>\lambda f(x_1)+\mu f(x_2)$），则称 $f(x)$ 为区间 I 上的上凸（或下凸）函数。

（2）若曲线 $y=f(x)$ 在 (x_0,y_0) 点处由上凸变为下凸，或由下凸变为上凸，则称 (x_0,y_0) 点为曲线 $y=f(x)$ 的拐点。

（3）设函数 $f(x),f'(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内 $f''(x)>0$（或 $f''(x)<0$），则称曲线 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为下凸（或上凸）曲线。

（4）设连续函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某个邻域内二阶可导（$f(x)$ 在 $x=x_0$ 不可导，或 $f''(x_0)=0$）那么

① 当 x 从 x_0 的左侧变到 x_0 的右侧（或 x 从 x_0 的右侧变到 x_0 的左侧）时，$f''(x)$ 由负变正（或由正变负），则 $(x_0,f(x_0))$ 点为 $f(x)$ 的拐点。
② 当 x 从 x_0 的左侧变到 x_0 的右侧（或 x 从 x_0 的右侧变到 x_0 的左侧）时，$f''(x)$ 不变号，则 $(x_0,f(x_0))$ 不是 $f(x)$ 的拐点。

（5）若 $f(x)$ 在 x_0 点处三阶可导，且 $f''(x_0)=0, f'''(x_0)\neq 0$，则点 $(x_0,f(x_0))$ 是 $y=f(x)$ 的拐点。

设 $f(x)$ 在 x_0 点处 n 阶可导，且 $f''(x_0)=f'''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0, f^{(n)}(x_0)\neq 0$，$n=3,4,\cdots$，则

① 当 n 为奇数时，点 $(x_0,f(x_0))$ 是 $y=f(x)$ 的拐点。
② 当 n 为偶数时，点 $(x_0,f(x_0))$ 不是 $y=f(x)$ 的拐点。

4. 曲线的渐近线

定义 当曲线无限伸展时，若曲线上的点与某一直线的距离趋于零，则称该直线为曲线的渐近线。

渐近线的求法

（1）铅直渐近线：若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$（$x = x_0$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点），则直线 $x = x_0$ 为曲线 $y = f(x)$ 的铅直渐近线。

（2）水平渐近线：若 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = k$，则 $y = k$ 为曲线 $y = f(x)$ 的水平渐近线。

（3）斜渐近线：若 $\lim\limits_{x \to \infty}\left[\dfrac{f(x)}{x}\right] = a$ 且 $\lim\limits_{x \to \infty}[f(x) - ax] = b$，则 $y = ax + b$ 是曲线 $y = f(x)$ 的斜渐近线。

5. 函数的作图步骤

（1）确定 $y = f(x)$ 的连续区间、截距、有界性、奇偶性及周期性。

（2）求出 $y'(x)$，确定 $y = f(x)$ 的单增、单减区间及极值。

（3）求出 $y''(x)$，确定 $y = f(x)$ 的凸凹区间及拐点坐标。

（4）求出 $y = f(x)$ 的渐近线。

（5）综合以上结果，在 xOy 坐标系中画出曲线的渐近线、极值点、与坐标轴的交点，然后逐段地作出曲线，就得到 $y = f(x)$ 的曲线图像。

3.1.3　平面曲线的曲率

1. 弧微分

设平面光滑曲线 L 在直角坐标下的方程为 $y = f(x)$，则弧微分 $\mathrm{d}s = \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$

设平面光滑曲线 L 在直角坐标下的参数方程为 $y = y(t)$，$x = x(t)$，$t_1 \le t \le t_2$，则弧微分 $\mathrm{d}s = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$

设平面光滑曲线 L 在极坐标下的方程为 $r = r(t)$，参数方程为 $y = r(t)\cos t$，$x = r(t)\sin t$，$t_1 \le t \le t_2$，则弧微分 $\mathrm{d}s = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$。

2. 曲率

定义　设 M 与 N 为曲线上不同的两点，弧 MN 的长度为 Δs，当 M 点沿曲线移动到 N 点时，M 点处的切线所转过的角度为 $\Delta\alpha$，若极限 $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ 存在，则称极限值为曲线在 M 处的曲率，记为 $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s} = k$。

曲率公式

（1）设平面光滑曲线 L 在直角坐标下的方程为 $y = f(x)$，且 $f(x)$ 二阶可导，则曲率公式为 $k = \dfrac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$。

（2）设平面光滑曲线 L 在直角坐标下的参数方程为 $y = y(t)$，$x = x(t)$，且 $x = x(t)$，

$y=y(t)$ 二阶可导，$x'^2(t)+y'^2(t)\neq 0$，则曲率公式为 $k=\dfrac{|x'y''-y'x''|}{x'^2(t)+y'^2(t)}$。

（3）设平面光滑曲线 L 在极坐标下的方程为 $r=r(t)$，则曲率为 $k=\dfrac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}$，曲率半径为 $R=\dfrac{1}{k}$。

3.1.4　导数在极限中的应用（罗必达法则）

（1）若 $f(x),g(x)$ 在 x_0 点的某一邻域内（除 x_0 点外）处处可微，且 $g(x)\neq 0$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（或为无穷大），则有 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$。

这一法则对 $x\to\infty$ 也成立。

（2）若 $f(x),g(x)$ 在 x_0 点的某一邻域内（除 x_0 点外)处处可微，且 $g(x)\neq 0$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（或为无穷大），则有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

这一法则对 $x\to\infty$ 也成立。

若 $f'(x),g'(x)$ 仍满足罗必达法则的条件，则可继续运用罗必达法则。

对于 $0\cdot\infty,\infty-\infty,1^{\infty},0^0,\infty^0$ 型的极限问题，必须化为 $\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty}$ 型来解决。

对 $0\cdot\infty$ 型的极限，作 $f(x)g(x)=\dfrac{f(x)}{1/g(x)}=\dfrac{g(x)}{1/f(x)}$。

对 $\infty-\infty$ 型，作 $f(x)-g(x)=\dfrac{1}{1/f(x)-1/g(x)}=\dfrac{1/g(x)-1/f(x)}{1/f(x)\cdot 1/g(x)}$。

对 $1^{\infty},0^0,\infty^0$ 型，作 $[f(x)]^{g(x)}=\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}$。

3.2　例 题 分 析

3.2.1　选择题

【例 3.1】　曲线 $y=x\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}$ ______。

A. 仅有水平渐近线　　B. 仅有铅直渐近线

C. 既有铅直又有水平渐近线　　D. 既有铅直又有斜渐近线

解　应选 D。因为

$$\lim_{x\to 0} xe^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2e^{\frac{1}{x^2}}}{x}\right) = \infty$$

故 $x=0$ 是曲线的铅直渐近线。又因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{xe^{\frac{1}{x^2}}}{x} = 1 = a$$

$$b = \lim_{x\to\infty}[f(x)-ax] = \lim_{x\to\infty}(xe^{\frac{1}{x^2}} - x) = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2e^{\frac{1}{x^2}}}{x} = 0$$

故有斜渐近线 $y=x$。因此 $y=xe^{\frac{1}{x^2}}$ 既有铅直又有斜渐近线。

【例 3.2】 当 $x>0$ 时，曲线 $y=x\sin\frac{1}{x}$ ______。

A. 有且仅有水平渐近线　　B. 有且仅有铅直渐近线

C. 既有水平渐近线，也有铅直渐近线　　D. 既无水平渐近线，也无铅直渐近线

解　应选 A。由 $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$，$\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x}=1$，故仅有 $y=1$ 这条水平渐近线。

【例 3.3】 曲线 $y=\frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$ ______。

A. 没有渐近线　　B. 仅有水平渐近线

C. 仅有铅直渐近线　　D. 既有水平渐近线，也有铅直渐近线

解　应选 D。由 $\lim_{x\to\infty}\frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=1$，$\lim_{x\to 0}\frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=+\infty$，故有铅直渐近线 $y=1$ 和水平渐近线 $x=0$。

【例 3.4】 曲线 $y=e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\frac{x^2+x-1}{(x+1)(x-2)}$ 的渐近线有______。

A. 1 条　　B. 2 条　　C. 3 条　　D. 4 条

解　应选 B。由 $\lim_{x\to\infty} y=\frac{\pi}{4}, \lim_{x\to 0} y=+\infty$，故有铅直渐近线 $x=0$ 和水平渐近线 $y=\frac{\pi}{4}$。

【例 3.5】 设 $f(x)$ 可导且 $F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 上可导的______条件。

A. 充分且必要　　B. 充分非必要

C. 必要非充分　　D. 非充分非必要

解　应选 A。

方法 1：由 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充要条件是 $F'(0+0)=F'(0-0)$，而

$$F'(0-0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)(1-\sin x)-f(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)(1-\sin x)+f(x)(-\cos x)}{1}=f'(0)-f(0)$$
$$F'(0+0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)(1+\sin x)-f(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)(1+\sin x)+f(x)\cos x}{1}=f'(0)+f(0)$$

方法 2：由 $f(x)$ 可导，故 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充要条件是 $\varphi(x)=f(x)|\sin x|$ 在 $x=0$ 处可导。而

$$\varphi'(0+0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)\sin x}{x}=f(0)\text{，}\quad \varphi'(0-0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-f(x)\sin x}{x}=-f(0)$$

所以 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充要条件是 $\varphi'(0+0)=\varphi'(0-0)$，即 $f(0)=0$。

【例 3.6】　若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$ 为______。

A. 0　　B. 6　　C. 36　　D. ∞

解　应选 C。

方法 1：

$$\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6x+xf(x)}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)+\sin 6x}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{6-6\cos 6x}{3x^2}+0=\lim_{x\to 0}\frac{36\sin 6x}{6x}=36$$

方法 2：因 $\sin 6x=6x-\dfrac{1}{3!}(6x)^3+o(x^3)$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{6x+xf(x)}{x^3}-36+\frac{o(x^3)}{x^3}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}-36=0$$

故有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}=36$。

【例 3.7】　设 $y=f(x)$ 满足关系式 $y''-2y'+4y=0$，且 $f(x)>0$，$f'(x_0)=0$，则 $f(x)$ 在 x_0 点处______。

A. 取得极大值　　　　B. 取得极小值

C. 在 x_0 某邻域内单调增加　　　　D. 在 x_0 某邻域内单调减少

解　应选 A。由 $y''-2y'+4y=0$，且 $f(x)>0$，$f'(x_0)=0$，知 $f''(x_0)=-4f(x_0)<0$，故 $f(x)$ 在 x_0 点处取得极大值。

【例 3.8】　设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$，则______。

A. $a=1,b=-\dfrac{5}{2}$　　B. $a=0,b=-2$　　C. $a=0,b=-\dfrac{5}{2}$　　D. $a=1,b=-2$

解　应选 A。因为

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1/(1+x)-(a+2bx)}{2x}=2$$

由 $\lim\limits_{x\to0}(1/(1+x)-(a+2bx))=0$，故 $a=1$，又

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1/(1+x)-(a+2bx)}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{-1/(1+x)^2-2b}{2}=2$$

由 $\lim\limits_{x\to0}[-/(1+x)^2-2b]=4$，故 $b=-\dfrac{5}{2}$。

【例 3.9】　设在 $[0,1]$ 上 $f''(x)>0$，则 $f'(0),f'(1),f(1)-f(0)$ 或 $f(0)-f(1)$ 的大小顺序是______。

A. $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$　　　　B. $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

C. $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$　　　　C. $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

解　应选 B。由中值定理知，$f(1)-f(0)=f'(\xi),\xi\in(0,1)$。又 $f''(x)>0$，故 $f'(x)$ 单调增加，因此 $f'(1)>f'(\xi)>f'(0)$，即 $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$。

【例 3.10】　设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数的图形如图 3-1 所示，则 $f(x)$ 有______。

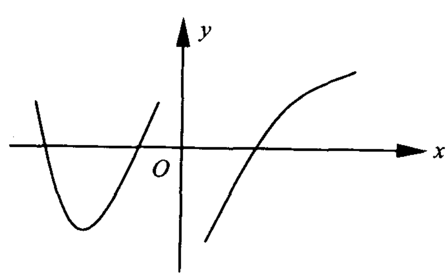

图 3-1

A. 一个极小值点和两个极大值点　　　　B. 两个极小值点和一个极大值点

C. 两个极小值点和两个极大值点　　　　D. 三个极小值点和一个极大值点

解 应选 C。根据导函数的图形可知，一阶导数为零的点有 3 个，而 $x=0$ 则是导数不存在的点。三个一阶导数为零的点左右两侧导数符号不一致，必为极值点，且两个极小值点，一个极大值点；在 $x=0$ 左侧一阶导数为正，右侧一阶导数为负，可见 $x=0$ 为极大值点，故 $f(x)$ 共有两个极小值点和两个极大值点，应选 C。

【例 3.11】 设 $x\to 0$ 时，$\mathrm{e}^{\tan x}-\mathrm{e}^{x}$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 n 为______。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

解 应选 C。因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\tan x}-\mathrm{e}^{x}}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{\tan x-x}-1)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{(\mathrm{e}^{\tan x-x}-1)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{(\tan x-x)}{x^n}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\mathrm{sce}^2 x-1)}{nx^{n-1}}=\frac{1}{n}\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{x^{n-1}}=\frac{1}{n}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^{n-1}}=\frac{1}{n}\lim_{x\to 0}x^{3-n}$$

由题设知，只有 $n=3$ 时，$\mathrm{e}^{\tan x}-\mathrm{e}^{x}$ 与 x^n 是 $x\to 0$ 时的同阶无穷小。

【例 3.12】 已知函数 $f(x)$ 对一切 x 满足 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-\mathrm{e}^{-x}$，若 $f'(x_0)=0\ (x_0\neq 0)$，则______。

A. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

B. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

C. $(x_0,f(x_0))$ 是曲线的拐点

D. $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(x_0,f(x_0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

解 应选 A。由 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-\mathrm{e}^{-x}$ 可知，若 $f'(x_0)=0\ (x_0\neq 0)$，则 $f''(x_0)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-x_0}}{x_0}>0$（$x_0\neq 0$），故 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值。

【例 3.13】 设 $f(x)$ 定义在 (a,b) 上，$x_0\in(a,b)$ 是 $f(x)$ 的极小值点，则______。

A. $\forall x\in(a,b)$，有 $f(x)\geq f(x_0)$　　B. $f'(x_0)=0$

C. $\exists\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)\geq f(x_0)$　　D. $f(x_0)=0$

解 应选 C。由定义即得。

【例 3.14】 设 $f(x)$ 处处可导，则______。

A. 若 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$

B. 若 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

C. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$

D. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

解　应选 D。由 $f(x)$ 处处可导知 $f(x)$ 满足中值定理，又若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$，则对任意取定的正数 M，存在 x_0，当 $x>x_0$ 时，$f'(x)>M$，且

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)>f(x_0)+M(x-x_0)\to+\infty$$

【例 3.15】　已知函数 $f(x)$ 在区间 $(1-\delta,1+\delta)$ 内具有二阶导数，$f'(x)$ 严格单调减少，且 $f(1)=f'(1)=1$，则______。

A. 在 $(1-\delta,1)$ 和 $(1,1+\delta)$ 内均有 $f(x)<x$
B. 在 $(1-\delta,1)$ 和 $(1,1+\delta)$ 内均有 $f(x)>x$
C. 在 $(1-\delta,1)$ 内，$f(x)<x$；在 $(1,1+\delta)$ 内，$f(x)>x$
D. 在 $(1-\delta,1)$ 内，$f(x)>x$；在 $(1,1+\delta)$ 内，$f(x)<x$

解　应选 A。由 $f(x)$ 在区间 $(1-\delta,1+\delta)$ 内具有二阶导数，$f'(x)$ 严格单调减少，且 $f(1)=f'(1)=1$，可知 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线为 $y=x$，且 $f''(x)<0$，即 $y=f(x)$ 的图形是上凸的，故其每一点的切线都在曲线的上方，因此 $f(x)<x$。

【例 3.16】　设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内连续，且 $f(a)$ 为极大值，则存在 $\delta>0$，当 $x\in(a-\delta,a+\delta)$ 时，必有______。

A. $(x-a)[f(x)-f(a)]\ge 0$　　B. $(x-a)[f(x)-f(a)]\le 0$

C. $\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}\ge 0\ (x\ne a)$　　D. $\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}\le 0\ (x\ne a)$

解　应选 C。因 $f(a)$ 为极大值，故

$$\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}=\frac{f(a)-f(x)}{(a-x)^2}\ge 0\quad(a\ne x)$$

【例 3.17】　设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，则在点 $x=a$ 处______。

A. $f(x)$ 的导数存在，且 $f'(a)\ne 0$　　B. $f(x)$ 取得极大值
C. $f(x)$ 取得极小值　　D. $f(x)$ 的导数不存在

解　应选 B。由 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，知 $\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}<0$，故 $f(x)<f(a)$。所以在点 $x=a$ 处 $f(x)$ 取得极大值。

【例 3.18】　已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续，且 $f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则在点 $x=0$ 处 $f(x)$______。

A. 不可导　　B. 可导，且 $f'(0)\ne 0$
C. 取得极大值　　D. 取得极小值

解 应选 D。由 $f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$ 知

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\frac{1}{2}x^2}=2$$

故有 $\dfrac{f(x)}{x^2}>0=f(0)$，即 $f(x)>f(0)$，由极值定义知在点 $x=0$ 处 $f(x)$ 取得极小值。

【例 3.19】 设 $f(x)$ 有二阶连续的导数，且 $f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$，则______。

A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

B. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

C. $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

D. $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

解 应选 B。因为 $$f''(0)=\lim_{x\to 0}f''(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{|x|}|x|=0$$

又由极限的保号性知 $f''(x)>0$，而

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2=f(0)+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2$$

即 $$f(x)-f(0)=\frac{1}{2}f''(\xi)x^2>0$$

所以 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值。

【例 3.20】 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，$x_0\neq 0$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点，则______。

A. x_0 是 $f(x)$ 的驻点

B. $-x_0$ 必是 $-f(-x)$ 的极小值点

C. $-x_0$ 是 $-f(x)$ 的极小值点

D. 对一切 x 都有 $f(x)\leq f(x_0)$

解 应选 B。由 $x_0\neq 0$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点，所以在 x_0 的去心邻域内，有 $f(x)<f(x_0)$，得 $-f(x)>-f(x_0)$，即得 $-f(-(-x))>-f(-(-x_0))$，故 $-x_0$ 必是 $-f(-x)$ 的极小值点。

【例 3.21】 设两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $x=a$ 处取得极大值，则函数 $F(x)=f(x)g(x)$ 在 $x=a$ 处______。

A. 必取极大值

B. 必取极小值

C. 不可能取得极值

D. 是否取得极值不能确定

解 应选 D。利用排除法，取 $f(x)=g(x)=-x^2$ 在 $x=0$ 处取得极大值，则

$F(x)=f(x)g(x)=x^4$ 在 $x=0$ 处取得极小值。又取 $f(x)=g(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & x\neq 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处取得极大值，则 $F(x)=f(x)g(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & x\neq 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处任取得极大值。故是否取得极值不能确定。

【例 3.22】 设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x)+[f'(x)]^2=x$，且 $f'(0)=0$，则______。

A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

B. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

C. 点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

D. $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值,点 $(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

解 应选 C。由 $f'(0)=0$ 得，$f''(0)=0$，又由题设知，

$$f''(x)=x-[f'(x)]^2=x\left\{1-\frac{[f'(x)]^2}{x}\right\}$$

因为
$$\lim_{x\to 0}\frac{[f'(x)]^2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{[f'(x)]^2}{x^2}x=0$$

故在 $(-\delta,0)$ 与 $(0,\delta)$ 内，$f''(x)$ 变号。所以点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点。

【例 3.23】 曲线 $y=(x-1)^2(x-3)^2$ 的拐点个数为______。

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

解 应选 C。利用 $y''=0$ 得 $x_1=2+\frac{\sqrt{3}}{3},x_2=2-\frac{\sqrt{3}}{3}$，且在 x_1,x_2 的左、右邻域内 y'' 变号，故 $x_1=2+\frac{\sqrt{3}}{3},x_2=2-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 为曲线 $y=(x-1)^2(x-3)^2$ 的拐点。

【例 3.24】 若 $3^2-5b<0$，则方程 $x^5+2ax^3+3bx+4c=0$______。

A. 无实根　　B. 有惟一实根

C. 有三个不同实根　　D. 有五个不同实根

解 应选 B。设 $f(x)=x^5+2ax^3+3bx+4c$ 是奇次的，故方程 $f(x)=0$ 至少有一实根。$f'(x)=5x^4+6ax^2+3b$ 的判别式 $\Delta=12(3a^2-5b)<0$，故方程 $f'(x)=0$ 无实根，即 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内，必恒为正或恒为负。又由 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=+\infty$，故必有 $f'(x)>0$，即 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内递增，所以 $f(x)=0$ 只能有惟一实根。

【例 3.25】 设常数 $k>0$，函数 $f(x)=\ln x-\frac{x}{\mathrm{e}}+k$ 在 $(0,+\infty)$ 内零点个数为______。

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

解 应选 B。由 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，令 $f'(x)=0$，得 $x=\mathrm{e}$。当 $x\in(0,\mathrm{e})$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$，$f'(x)<0$。而 $f(\mathrm{e})=k>0$，且 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$，由零点值定理知，$f(x)$ 在（$0,\mathrm{e}$）和（$\mathrm{e},+\infty$）内分别只有一个实根。所以函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{\mathrm{e}}+k$ 在（$0,+\infty$）内零点个数为 2。

【例 3.26】 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有三阶连续导数，且当 $x\to0$ 时，$f(x)-f(-x)$ 是 x 的三阶无穷小，则______。

A. $x=0$ 不是 $f(x)$ 的驻点　　B. $x=0$ 是 $f(x)$ 的驻点，但不一定是极值点

C. $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点　　D. $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

解 应选 B。由已知得 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x^3}\neq0$，又

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(-x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)+f'(-x)}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f''(x)-f''(-x)}{6x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{f'''(x)+f'''(-x)}{6}=\frac{1}{3}f'''(0)\neq0$$

所以有 $\lim\limits_{x\to0}[f'(x)+f'(-x)]=2f'(0)=0$，因此，得到 $f'(0)=0$，而不能确定 $f''(0)$ 是否为零。

【例 3.27】 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有三阶连续导数，且当 $x\to0$ 时，$f(x)-f(-x)$ 是 x 的三阶无穷小，则______。

A. $x=0$ 是 $f(x)$ 的驻点，但不是极值点

B. $x=0$ 是 $f(x)$ 的驻点且是极小值点

C. $x=0$ 是 $f(x)$ 的驻点且是极大值点

D. 如果 $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，则 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

解 应选 D。由已知得极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x^3}$ 存在且不为零，又

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+\frac{1}{6}f'''(0)x^3+o(x^3)$$
$$f(-x)=f(0)-f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2-\frac{1}{6}f'''(0)x^3+o(x^3)$$

所以，$f'(0)=0, f'''(0)\neq0$，如果 $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，则 $f''(0)=0$，所以 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点。

【例 3.28】 设函数 $f(x)$ 有 n 阶导数，且有 $2n$ 个极值点，则方程 $f^{(n)}(x)=0$ 至少有______。

A. $n-1$ 个实根　　B. n 个实根　　C. $n+1$ 个实根　　D. $n+2$ 个实根

解 应选C。由已知得，函数$f'(x)$有$2n$个零点，则由罗尔定理，函数$f''(x)$至少有$2n-1$个零点，由此得到函数$f^{(n)}(x)$至少有$n+1$个零点，即方程$f^{(n)}(x)=0$至少有$n+1$个实根。

【例 3.29】 已知$x=0$是函数$y=\dfrac{ax-\ln(1+x)}{x+b\sin x}$的可去间断点，则常数$a,b$的取值范围是________。

A. $a=1,b$为任意实数　　B. $a\neq 1,b$为任意实数

C. $b=-1,a$为任意实数　　D. $b\neq -1,a$为任意实数

解 应选D。由已知，极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\ln(1+x)}{x+b\sin x}$存在，又

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\text{，}\quad \sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$$

故

$$\text{原极限}=\lim_{x\to 0}\frac{(a-1)x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{(1+b)x-\frac{b}{6}x^3+o(x^3)}$$

只有当$b\neq -1$，该极限存在，所以选D。

【例 3.30】 设当$x\to 0$时，$e^x-(ax^2+bx+1)$是比x^2高阶的无穷小，则______。

A. $a=\dfrac{1}{2},b=1$　　B. $a=1,b=1$　　C. $a=-\dfrac{1}{2},b=1$　　D. $a=-1,b=1$

解 应选A。由

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(ax^2+bx+1)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(2ax+b)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-2a}{2}=0$$

故$a=\dfrac{1}{2}$。又$\lim\limits_{x\to 0}[e^x-(x+b)]=0$，故$b=1$。

3.2.2 填空题

【例 3.31】 星形线$x=2\cos^3\theta$，$y=2\sin^3\theta$在点（$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$）处的曲率半径为________。

解 应填3。由$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{d\theta}\Big/\dfrac{dx}{d\theta}=-\tan\theta$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{d\theta}(-\tan\theta)\Big/\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{1}{6\sin\theta\cos^4\theta}$，则所求曲率半径为$\left.\dfrac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=3$。

【例 3.32】 设 $f(x)=xe^x$，则 $f^{(n)}(x)$ 在点 $x=$______处取极小值______。

解 应填 $-(n+1)$；$e^{-\frac{1}{n+1}}$。由 $f'(x)=(x+1)e^x$，$f''(x)=(x+2)e^x,\cdots,f^{(n)}(x)=(x+n)e^x$，于是 $f^{(n)}(x)$ 的驻点满足 $f^{(n+1)}(x)=(x+n+1)e^x=0$，即得惟一驻点 $x=-(n+1)$，且 $f^{(n+2)}(-n-1)=e^{-(n+1)}>0$，故 $x=-(n+1)$ 是 $f^{(n)}(x)$ 的极小值点，且极小值为 $e^{-\frac{1}{n+1}}$。

【例 3.33】 当 x______时，函数 $y=x2^x$ 取得极小值。

解 应填 $-\dfrac{1}{\ln 2}$。由 $y'=2^x+x2^x\ln 2=2^x(1+x\ln 2)=0$，得驻点 $x=-\dfrac{1}{\ln 2}$。当 $x<-\dfrac{1}{\ln 2}$ 时，$y'<0$；当 $x>-\dfrac{1}{\ln 2}$ 时，$y'>0$。故当 $x=-\dfrac{1}{\ln 2}$ 时,函数 $y=x2^x$ 取得极小值。

【例 3.34】 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内可导，且 $f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{\sin x}=-\dfrac{1}{2}$，则 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极______值。

解 应填大。由 $f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{\sin x}=-\dfrac{1}{2}$ 知，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{\cos x}=-\dfrac{1}{2}$，即 $f''(0)<0$，所以 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值。

【例 3.35】 曲线 $y=x^2e^{-x^2}$ 的渐近线方程为______。

解 应填 $y=0$。由 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{e^{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{2xe^{x^2}}=0$，故曲线 $y=x^2e^{-x^2}$ 的渐近线方程为 $y=0$。

【例 3.36】 曲线 $y=x\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)$（$x>0$）的渐近线方程为______。

解 应填 $y=x+\dfrac{1}{e}$。由

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)}{x}=1,\quad b=\lim_{x\to\infty}(y-ax)=\lim_{x\to\infty}x\left[\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)-1\right]=\frac{1}{e}$$

故有渐近线 $y=x+\dfrac{1}{e}$。

【例 3.37】 曲线 $y=\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}}{e^x-1}$ 的斜渐近线是______。

解 应填 $y=x-\dfrac{1}{2}$。因

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=0,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x(e^x-1)}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}(y-x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+1}+x-xe^x}{e^x-1}=-\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}-x}-\frac{x}{e^{-x}}\right]=-\frac{1}{2}$$

所以，曲线的斜渐近线为 $y=x-\frac{1}{2}$。

【例 3.38】　曲线 $y=e^{-x^2}$ 的上凸区间为______。

解　应填 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$。由 $y'=-2xe^{-x^2}$，$y''=2(2x^2-1)e^{-x^2}=0$，得 $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，且在 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 内，$y''<0$，所以区间 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 为曲线 $y=e^{-x^2}$ 的上凸区间。

【例 3.39】　$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=$______。

解　应填 $\frac{1}{\sqrt{e}}$。由对数恒等式 $x=e^{\ln x}$，令

$$f(x)=(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=e^{\frac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}}$$

所以
$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-(1+x^2)\sin x}{2x\cos x}}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

【例 3.40】　$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x}=$______。

解　应填 1。因

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x}=\lim_{x\to 0^+}e^{-\tan x\cdot\ln\sqrt{x}}=e^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}}=e^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{\sin^2 x}}}=e^0=1$$

【例 3.41】　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$______。

解　应填 $-\frac{1}{4}$。因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1/2\sqrt{1+x}-1/2\sqrt{1-x}}{2x}$$
$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}}$$
$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{-1/2\sqrt{1-x}-1/2\sqrt{1+x}}{1}=-\frac{1}{4}$$

【例 3.42】 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)=$______。

解 应填$\frac{1}{3}$。因为

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^2\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{3x^2}=\frac{1}{3}$$

【例 3.43】 若$a>0,b>0$均为常数，则$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}=$______。

解 应填$(ab)^{\frac{3}{2}}$。因为

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{3}{x}\ln(\frac{a^x+b^x}{2})}=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{3\ln(a^x+b^x)-3\ln 2}{x}}=\mathrm{e}^{3\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x\ln a+b^x\ln b}{a^x+b^x}}=\mathrm{e}^{\ln(ab)^{\frac{3}{2}}}=(ab)^{\frac{3}{2}}$$

【例 3.44】 设a为非零常数，则$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=$______。

解 应填e^{2a}。因为

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\frac{x+a}{x-a}-1\right)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2ax}{x-a}\right)}=\mathrm{e}^{2a}$$

【例 3.45】 已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=9$，则$a=$______。

解 应填$\ln 3$。由上题知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\mathrm{e}^{2a}=9$，故$a=\ln 3$。

【例 3.46】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}=$______。

解 应填$-\frac{1}{6}$。因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x-x}{2x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-1}{6x^2}=-\frac{1}{6}$$

【例 3.47】 $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\sin\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)-\sin\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=$______。

解 应填2。因为

$$\lim_{x\to\infty}x\left[\sin\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)-\sin\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\lim_{t\to 0}[\sin\ln(1+3t)-\sin\ln(1+t)]/t$$

$$=\lim_{t\to 0}\left[\cos\ln(1+3t)\cdot\frac{3}{1+3t}-\cos\ln(1+t)\cdot\frac{1}{1+t}\right]=2$$

3.2.3 综合训练题

【例 3.48】 验证罗尔定理对 $f(x)=x^2-2x-3$ 在区间 $[-1,3]$ 上的正确性。

证 因为 $f(x)$ 在 $[-1,3]$ 上连续，在 $(-1,3)$ 内可导，且 $f(-1)=f(3)=0$，所以 $f(x)$ 在 $[-1,3]$ 上满足罗尔定理的条件，由 $f'(x)=2x-2$ 知在 $(-1,3)$ 内有 $\xi=1$，使得 $f'(\xi)=0$，这就验证了罗尔定理的正确性。

【例 3.49】 设 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上二次可导，且 $f(-1)=0$，又 $g(x)=[\sin\pi(x+1)]f(x)$，证明：在区间 $(-1,1)$ 内至少存在一点 c，使得 $g''(c)=0$。

证 由题设知 $g(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，在区间 $(-1,1)$ 内可导，且 $g(-1)=g(1)=0$，于是由罗尔定理知，在 $(-1,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $g'(\xi)=0$（$-1<\xi<1$），又在区间 $[-1,\xi]$ 上，$g'(x)=\pi f(x)\cos\pi(x+1)+f'(x)\sin\pi(x+1)$，由题设知，$g'(x)$ 在 $[-1,\xi]$ 上连续，在区间 $(-1,\xi)$ 内可导，且 $g'(-1)=g'(\xi)=0$，故由罗尔定理知在 $(-1,\xi)$ 内至少存在一点 c，使得 $g''(c)=0$。

【例 3.50】 假设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内二阶可导，过点 $A(0,f(0))$ 与 $B(1,f(1))$ 的直线与曲线 $y=f(x)$ 相交于点 $c(c,f(c))$，其中 $0<c<1$，证明：在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f''(\xi)=0$。

证 方法1：因为 $f(x)$ 在 $[0,c]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，所以存在 $\xi_1\in(0,c)$，使得 $f'(\xi_1)=\dfrac{f(c)-f(0)}{c-0}$；由于点 c 在弦 AB 上，所以有 $\dfrac{f(c)-f(0)}{c-0}=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}$，从而有 $f'(\xi_1)=f(1)-f(0)$。

同理可证：存在 $\xi_2\in(c,1)$，使得 $f'(\xi_2)=f(1)-f(0)$。

由于 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$，于是 $f'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上满足罗尔定理的条件，故存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,1)$，使 $f''(\xi)=0$。

方法2：点 A 与点 B 的连线的方程为 $y=[f(1)-f(0)]x+f(0)$，令

$F(x)=f(x)-[f(1)-f(0)]x-f(0)$，则$F(x)$在$[0,c]$与$[c,1]$上连续，在$(0,c]$和$[c,0)$内二阶可导，且$F(0)=F(c)=F(1)=0$，从而，由罗尔定理知，至少存在点$\xi_1\in(0,c)$和$\xi_2\in(c,1)$，使$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)$，$F'(x)$在$[\xi_1,\xi_2]$上满足罗尔定理的条件，故存在$\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,1)$，使$F''(\xi)=0$，即$f''(\xi)=0$。

【例 3.51】 若$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0$，$f(1)=1$，证明：对任意给定的正数a,b，在$(0,1)$中必存在不等的两数x_1,x_2，使得$\dfrac{a}{f'(x_1)}+\dfrac{b}{f'(x_2)}=a+b$。

证 因为$a>0,b>0$，所以$0<\dfrac{a}{a+b}<1$；又因为$f(x)$在$[0,1]$上连续，且$f(0)=0$，$f(1)=1$，则由介值定理知，存在$\xi\in(0,1)$，使得$f(\xi)=\dfrac{a}{a+b}$；因为$f(x)$在$(0,1)$内可导，则由拉格朗日中值定理知，存在x_1（$0<x_1<\xi$），使得$f(\xi)-f(0)=\xi f'(x_1)$，也存在x_2（$\xi<x_2<1$），使得$f(1)-f(\xi)=(1-\xi)f'(x_2)$。则有

$$\frac{\frac{a}{a+b}}{f'(x_1)}=\xi,\quad \frac{1-\frac{a}{a+b}}{f'(x_2)}=\frac{\frac{b}{a+b}}{f'(x_2)}=1-\xi$$

故有
$$\frac{a}{f'(x_1)}+\frac{b}{f'(x_2)}=a+b$$

【例 3.52】 $f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，若$b>a\ge 0$，证明在(a,b)内存在三个数x_1,x_2,x_3，使得$f'(x_1)=(a+b)\dfrac{f'(x_2)}{2x_2}=(a^2+ab+b^2)\dfrac{f'(x_3)}{3x_3^2}$。

证 由拉格朗日中值定理知，存在x_1（$a<x_1<b$），使得$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_1)$；又由柯西中值定理知，存在$x_2\in(a,b)$，使$\dfrac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\dfrac{f'(x_2)}{2x_2}$；也存在$x_3\in(a,b)$，使$\dfrac{f(b)-f(a)}{b^3-a^3}=\dfrac{f'(x_3)}{3x_3^2}$。从而

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=(a+b)\frac{f'(x_2)}{2x_2},\quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=(a^2+ab+b^2)\frac{f'(x_3)}{3x_3^2}$$

故有
$$f'(x_1)=(a+b)\frac{f'(x_2)}{2x_2}=(a^2+ab+b^2)\frac{f'(x_3)}{3x_3^2}$$

【例 3.53】 证明：若$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}h^n$（$0<\theta<1$），且$f^{n+1}(a)\ne 0$，则$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{n+1}$。

证 因为

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a)+o(h^{n+1})$$

减去题设等式，可得

$$\frac{1}{h}[f^{(n)}(a+\theta h)-f^{(n)}(a)]=\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(a)+\frac{n!}{h^{(n+1)}}o(h^{n+1})$$

从而 $$\theta\cdot\frac{f^{(n)}(a+\theta h)-f^{(n)}(a)}{\theta h}=\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(a)+n!\frac{o(h^{n+1})}{h^{(n+1)}}$$

所以 $$\lim_{h\to 0}\theta\frac{f^{(n)}(a+\theta h)-f^{(n)}(a)}{\theta h}=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(a)+n!\frac{o(h^{n+1})}{h^{(n+1)}}\right]=\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(a)$$

则 $$\lim_{h\to 0}\theta\lim_{h\to 0}\frac{f^{(n)}(a+\theta h)-f^{(n)}(a)}{\theta h}=\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(a)$$

即 $$(\lim_{h\to 0}\theta)f^{n+1}(a)=\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(a)$$

由 $f^{n+1}(a)\neq 0$，知 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{n+1}$。

【例 3.54】 设 $f(x)$ 在 $[0,c]$ 内可导，且 $f'(x)$ 单调减少，$f(0)=0$，证明：对 $0\le a\le b\le a+b\le c$，恒有 $f(a+b)\le f(a)+f(b)$。

证 当 $a=0$ 时，不等式显然成立。

当 $a>0$ 时，在 $[0,a]$ 和 $[b,a+b]$ 上应用拉格朗日中值定理，分别得

$$f(a)=af'(\xi_1)，\quad 0<\xi_1<a$$
$$f(a+b)-f(b)=af'(\xi_2)，\quad b<\xi_2<a+b$$

由 $f'(x)$ 单调减少知 $f'(\xi_1)\ge f'(\xi_2)$，从而

$$f(a)\ge f(a+b)-f(b)，\text{即 } f(a+b)\le f(a)+f(b)$$

【例 3.55】 设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上三阶可导，且 $f(-1)=0$，$f(0)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$。证明：存在某个 $\eta\in(-1,1)$，使 $f'''(\eta)\ge 3$。

证 由题设知 $$f(x)=f(0)+f'(0)+\frac{1}{2}f''(0)x^2+\frac{1}{6}f'''(\xi)x^3$$
$$=\frac{1}{2}f''(0)x^3+\frac{1}{6}f'''(\xi)x^3\ \text{（}\xi\text{ 在 0 与 }x\text{ 之间）}$$

令 $x=1$，得 $1=f(1)=\dfrac{1}{2}f''(0)+\dfrac{1}{6}f'''(\xi_1)$（$0<\xi_1<1$）

令 $x=-1$，得 $0=f(-1)=\dfrac{1}{2}f''(0)-\dfrac{1}{6}f'''(\xi_2)$（$-1<\xi_2<0$）

两式相减得 $$6=f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)\le 2\max\{f'''(\xi_1),f'''(\xi_2)\}$$

当 $f'''(\xi_1)\ge f'''(\xi_2)$，取 $\eta=\xi_1$，有 $f'''(\eta)\ge 3$；

当$f'''(\xi_2)\geq f'''(\xi_1)$，取$\eta=\xi_2$，有$f'''(\eta)\geq 3$。
故存在$\eta\in(-1,1)$，使$f''(\eta)\geq 3$。

【例 3.56】 设函数$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，$f(0)=f(1)=0$，且$f(x)$在$[0,1]$上的最小值为-1，证明：至少存在$\xi\in(0,1)$，使$f''(\xi)\geq 8$。

解 由已知，存在$c\in(0,1)$，使得$f(c)=-1$是$f(x)$在$[0,1]$上的最小值，即为极小值，所以$f'(c)=0$。由泰勒公式得

$$f(0)=f(c)+f'(c)\ (c-0)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)c^2,\quad \xi_1\in(0,c)$$

$$f(1)=f(c)+f'(c)(1-c)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-c)^2,\quad \xi_2\in(c,1)$$

得
$$f''(\xi_1)=\frac{2}{c^2},\quad f''(\xi_2)=\frac{2}{(1-c)^2}$$

当$c\leq\frac{1}{2}$时，$f''(\xi_1)=\frac{2}{c^2}\geq 8$

当$c>\frac{1}{2}$时，$f''(\xi_2)=\frac{2}{(1-c)^2}\geq 8$

所以，至少存在$\xi\in(0,1)$，使$f''(\xi)\geq 8$。

【例 3.57】 设函数$f(x)$在$[0,3]$上连续，在$(0,3)$内可导，且$f(0)+f(1)+f(2)=3$，$f(3)=1$，试证：必存在$\xi\in(0,3)$，使$f'(\xi)=0$。

解 因为$f(x)$在$[0,3]$上连续，所以$f(x)$在$[0,2]$上连续，且在$[0,2]$上必有最大值 M 和最小值 m，于是$m\leq f(0)\leq M$，$m\leq f(1)\leq M$，$m\leq f(2)\leq M$。故

$$m\leq\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}\leq M$$

由介值定理知，至少存在一点$c\in[0,2]$，使

$$f(c)=\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1$$

因为$f(c)=1=f(3)$，且$f(x)$在$[c,3]$上连续，在$(c,3)$内可导，所以由罗尔定理知，必存在$\xi\in(c,3)\subset(0,3)$，使$f'(\xi)=0$。

【例 3.58】 设在$[0,+\infty)$上函数$f(x)$有连续导数，且$f'(x)\geq k>0$，$f(0)<0$，证明：$f(x)$在$(0,+\infty)$内有且仅有一个零点。

证 根据拉格朗日中值定理，对于任意的$x\in[0,+\infty)$，都有

$$f(x)=f(0)+f'(\xi)x\geq f(0)+kx\quad(0<\xi<x)$$

取$x=x_1>-\frac{f(0)}{k}>0$，则

$$f(x_1) > f(0) + k\left(\frac{f(0)}{k}\right) = 0$$

因 $f(0) < 0$，根据零点定理，存在一点 $x_0 \in (0, x_1)$，使 $f(x_0) = 0$。

又因 $f'(x) \geq k > 0$，所以 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上严格单调增加，故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有且仅有一个零点。

【例 3.59】 讨论曲线 $y = 4\ln x + k$ 与 $y = 4x + \ln^4 x$ 的交点个数。

解 设 $f(x) = \ln^4 x - 4\ln x + 4x - k$，则有 $f'(x) = \dfrac{4(\ln^3 x - 1 + x)}{x}$。函数 $y = f(x)$ 的图形如图 3-2 所示。

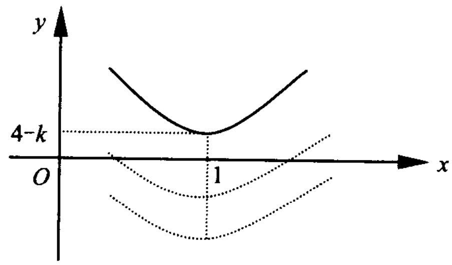

图 3-2

不难看出，$x = 1$ 是 $f(x)$ 的驻点。

当 $0 < x < 1$ 时，$f'(x) < 0$，即 $f(x)$ 单调减少；当 $x > 1$ 时，$f'(x) > 0$，即 $f(x)$ 单调增加。故 $f(1) = 4 - k$ 为函数 $f(x)$ 的最小值。

当 $k < 4$，即 $4 - k > 0$ 时，$f(x) = 0$ 无实根，即两条曲线无交点；

当 $k = 4$，即 $4 - k = 0$ 时，$f(x) = 0$ 有惟一实根，即两条曲线只有一个交点；

当 $k > 4$，即 $4 - k < 0$ 时，由于

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} [\ln x(\ln^3 x - 4) + 4x - k] = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} [\ln x(\ln^3 x - 4) + 4x - k] = +\infty$$

故 $f(x) = 0$ 有两个实根，分别位于 $(0, 1)$ 与 $(1, +\infty)$ 内，即两条曲线有两个交点。

【例 3.60】 讨论方程 $xe^{-x} = a$（$a > 0$）的实根个数。

解 设 $f(x) = xe^{-x} - a$，由 $f'(x) = 0$ 得 $x = 1$。

因为在 $(-\infty, 1)$ 内，$f'(x) > 0$；在 $(1, +\infty)$ 内，$f'(x) < 0$。所以在 $(-\infty, 1)$ 内 $f(x)$ 单调增加，在 $(1, +\infty)$ 内 $f(x)$ 单调减少。因此 $f(1) = e^{-1} - a$ 是 $f(x)$ 的最大值。

于是若 $e^{-1} - a < 0$，则 $f(x) = 0$ 无实根；若 $e^{-1} - a = 0$，则 $f(x) = 0$ 恰有一实根；若 $e^{-1} - a > 0$，由于 $\lim\limits_{x \to +\infty}(xe^{-x} - a) = -a < 0$，$\lim\limits_{x \to -\infty}(xe^{-x} - a) = -\infty$，则由连续函数的介值定理及单调性知，$f(x) = 0$ 恰有两个实根。

【例 3.61】 已知当$x>0$时，方程$\ln x-ax^2=0$只有一个实根，求常数a的取值范围。

解 已知方程$\ln x-ax^2=0$与$x^{-2}\ln x-a=0$等价，设$f(x)=x^{-2}\ln x-a$，令$f'(x)=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}=0$，得$x=\sqrt{e}$，所以$(0,\sqrt{e})$与$(\sqrt{e},+\infty)$是$f(x)$的单调区间。

因$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$，$f(\sqrt{e})=\dfrac{1}{2e}-a$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-a$，所以由零点定理及单调性有

（1）当$f(\sqrt{e})>0$且$-a<0$，即$0<a<\dfrac{1}{2e}$时，方程$f(x)=0$在区间$(0,\sqrt{e})$与$(\sqrt{e},+\infty)$内各有一个根。

（2）当$f(\sqrt{e})>0$且$-a\ge 0$，即$a\le 0$时，方程$f(x)=0$在区间$(0,\sqrt{e})$内有一个根。

（3）当$f(\sqrt{e})<0$且$-a\le 0$，即$a>\dfrac{1}{2e}$时，方程$f(x)=0$无根。

（4）当$f(\sqrt{e})=0$时，即$a=\dfrac{1}{2e}$时，方程$f(x)=0$有一个根$x=\sqrt{e}$。

所以，a的取值范围为$a=\dfrac{1}{2e}$或$a\le 0$。

【例 3.62】 （1）证明当$0<x<1$时，$\sin\dfrac{\pi}{2}x>x$；

（2）设$x_0\in(0,1)$，$x_{n+1}=\sin\dfrac{\pi}{2}x_n$，证明$\{x_n\}$收敛，并求其极限。

解 （1）设$f(x)=\sin\dfrac{\pi x}{2}-x$，显然$f(0)=f(1)=0$。由

$$f'(x)=\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}-1, f''(x)=-\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi x}{2}<0, x\in(0,1)$$

可知曲线$y=f(x)$在$[0,1]$上是凸的，而$f(0)=f(1)=0$，故在$(0,1)$内$f(x)>0$，即$\sin\dfrac{\pi x}{2}>x$。

（2）由$0<x_0<1$，利用（1）有$x_1=\sin\dfrac{\pi x_0}{2}>x_0$，且$x_1<1$，故$0<x_0<x_1<1$。设$0<x_{n-1}<x_n<1$，则$x_{n+1}=\sin\dfrac{\pi x_n}{2}>x_n$，且$x_{n+1}<1$，所以对任何$n$，有$0<x_n<x_{n+1}<1$，即$\{x_n\}$单调增加且有界，故$\{x_n\}$收敛。设极限为$a$，则

$$a=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi x_n}{2}=\sin\frac{\pi a}{2}$$

得$a=0,1$。因$a>x_n>0$，故$a=1$。

【例 3.63】 证明：当$0<x<1$时，$0<\dfrac{1}{2x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}-1<\dfrac{x^2}{3(1-x^2)}$。

证 要证明不等式等价于 $0<\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}-x<\frac{x^3}{3(1-x^2)}$，

（1）令 $$f(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}-x，\quad f'(x)=\frac{1}{1-x^2}-1=\frac{x^2}{1-x^2}>0$$

即函数 $f(x)$ 单调增加。所以，当 $x>0$ 时，$f(x)>f(0)=0$。

（2）令 $$g(x)=\frac{x^3}{3(1-x^2)}-\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+x，\quad g'(x)=\frac{2x^4}{3(1-x^2)^2}>0$$

即函数 $g(x)$ 单调增加。所以，当 $x>0$ 时，$g(x)>g(0)=0$。

因此，当 $0<x<1$ 时，$0<\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}-1<\frac{x^2}{3(1-x^2)}$。

【例 3.64】 试证：对于在（1, 2）内任一点，均有 $\left|\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}\right|<\frac{1}{4}(x-1)^3$。

证 由 $$\ln x=\ln(1+(x-1))=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\xi^3}(x-1)^3,\xi\in(1,2)$$

得
$$\begin{aligned}\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}&=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\xi^3}(x-1)^3-\frac{2(x-1)}{x+1}\\&=(x-1)^3\left[\frac{1}{3\xi^3}-\frac{1}{2(x+1)}\right]<(x-1)^3\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right]\\&=\frac{1}{6}(x-1)^3<\frac{1}{4}(x-1)^3\end{aligned}$$

又设 $$\varphi(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1},\varphi'(x)=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}>0,x\in(1,2)$$

故 $\varphi(x)$ 在（1, 2）内单调增加，且有 $\varphi(x)>\varphi(1)=0,x\in(1,2)$。故

$$\left|\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}\right|<\frac{1}{4}(x-1)^3$$

【例 3.65】 设 $x>0,y>0,x\neq y$，证明：$(x+y)\ln\frac{x+y}{2}<x\ln x+y\ln y$。

证 设 $f(x)=x\ln x$，对于 $x>0$，有 $f'(x)=\ln x+1,f''(x)=\frac{1}{x}>0$，即在 $(0,\infty)$ 内是严格下凸函数，故对于 $x>0,y>0,x\neq y$ 有

$$f(\frac{x+y}{2})<\frac{1}{2}[f(x)+f(y)]$$

代入得 $$(x+y)\ln\frac{x+y}{2}<x\ln x+y\ln y$$

【例 3.66】 试证：当$0<x<\frac{\pi}{2}$时，$\sin x>\frac{2}{\pi}x$。

证 方法 1：用单调性进行证明。令$f(x)=\frac{\sin x}{x}$，则

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x}{x^2}(x-\tan x)$$

所以在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内，$f'(x)<0$，所以$f(x)$单调减少，由此得$f(x)>f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi}$，即$\sin x>\frac{2}{\pi}x$。

用单调性证明不等式，常将不等式两边的项移到同一边，令其为$f(x)$，只要证明$f(x)>0$（或$f(x)<0$）即可，这里不这样做的原因是若设$f(x)=\sin x-\frac{2}{\pi}x$，则$f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内不是单调的，因为$f'(x)=\cos x-\frac{2}{\pi}$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内会改变符号。

方法 2：用凹凸性进行证明。设$g(x)=\sin x-\frac{2}{\pi}x$，则

$$g'(x)=\cos x-\frac{2}{\pi}，\quad g''(x)=-\sin x<0$$

所以$g(x)$的图形是上凸的。又$g(0)=g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，因此$g(x)>0$，即$\sin x>\frac{2}{\pi}x$。

【例 3.67】 证明：当$x\neq0$时，$\frac{e^x+e^{-x}}{2}>1+\frac{x^2}{2}$。

证 利用单调性证明。令$F(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}-1-\frac{1}{2}x^2$，则

$$F(0)=0，\quad F'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}-x，\quad F''(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}-1=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}\right)^2\geq0$$

由观察可知$F'(0)=0$。

因为　　当$x>0$时，$F'(x)>F'(0)=0$；当$x<0$时，$F'(x)<F'(0)=0$。

所以　　当$x>0$时，$F(x)$单调增加；当$x<0$时，$F(x)$单调减少。

从而$F(0)=0$是$F(x)$的极小值，即$\min F(x)=F(0)=0$。于是有$F(x)>F(0)=0$（$x\neq0$），

即
$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}>1+\frac{1}{2}x^2\quad（x\neq0）$$

注意：本证法没有一般性，例如，不能利用它所提供的方法来证明

$$\sin x<x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5\quad（x>0）$$

【例 3.68】 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导，且 $f''(x)\geq 0$。证明：对于 (a,b) 内任意两点 x_1,x_2 及 $0\leq t\leq 1$，有 $f[(1-t)x_1+tx_2]\leq (1-t)f(x_1)+tf(x_2)$。

证 将上述不等式同解变形为

$$f[x_1+t(x_2-x_1)]\leq f(x_1)+t[f(x_2)-f(x_1)]$$

故 $f[x_1+t(x_2-x_1)]-f(x_1)\leq t\{f(x_2)-f[x_1+t(x_2-x_1)]+f[x_1+t(x_2-x_1)]-f(x_1)\}$

从而 $$(1-t)[f(x_1+t(x_2-x_1))-f(x_1)]\leq t[f(x_2)-f(x_1+t(x_2-x_1))] \quad ①$$

要证本题结论，只须证上式成立即可。由于当 $x_1=x_2$ 时，上式显然成立，所以不妨设 $a<x_1<x_2<b$。在 (a,b) 内 $f''(x)>0$，所以在 $[x_1,x_2]$ 内仍有 $f''(x)>0$，从而 $f'(x)$ 在 (x_1,x_2) 内单调增加。

由题意 $0\leq t\leq 1$，所以 $x_1\leq x_1+t(x_2-x_1)\leq x_2$。因为

式①的左边 $=(1-t)[f(x_1+t(x_2-x_1))-f(x_1)]=(1-t)f'(\xi)t(x_2-x_1)$

式①的右边 $=t[f(x_2)-f(x_1+t(x_2-x_1))]=tf'(\eta)(1-t)(x_2-x_1)$

其中 $x_1\leq\xi\leq x_1+t(x_2-x_1)\leq\eta\leq x_2$，所以由 $f'(x)$ 的单调性知，$f'(\xi)\leq f'(\eta)$（$\xi\leq\eta$）。从而

$$(1-t)f'(\xi)t(x_2-x_1)\leq tf'(\eta)(1-t)(x_2-x_1)$$

即式①成立。于是 $$f[(1-t)x_1+tx_2]\leq (1-t)f(x_1)+tf(x_2)$$

【例 3.69】 证明：

（1）若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导；

（2）若函数 $f(x)$ 在 $[x_0,+\infty)$ 内可微，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$。

证 （1）由

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A\Rightarrow f(0)=0\Rightarrow f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$$

即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导。

（2）由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$，故 $\forall\varepsilon>0,\exists M>0$，当 $x>M$ 时，恒有 $|f'(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$。

又根据微分中值定理，$\exists\xi\in(M,x)$，使 $\dfrac{f(x)-f(M)}{x-M}=f'(\xi)$。故当 $x>M$ 时，

$$\frac{|f(x)-f(M)|}{x-M}=|f'(\xi)|<\frac{\varepsilon}{2}\Rightarrow|f(x)|<|f(M)|+\frac{\varepsilon}{2}(x-M)$$

所以 $$0<\frac{|f(x)|}{x}<\frac{|f(M)|}{x}+\varepsilon<\varepsilon \text{（}x\text{ 充分大）}$$

从而 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$$

【例 3.70】 求函数 $y=\frac{x}{2}+|\sin x|$ 的单调区间。

解 因为
$$y=\begin{cases}\frac{x}{2}+\sin x & 2k\pi\le x<(2k+1)\pi\\ \frac{k\pi}{2} & x=k\pi\\ \frac{x}{2}-\sin x & (2k-1)\pi<x<2k\pi\end{cases}$$

所以
$$y'=\frac{1}{2}+\frac{|\sin x|}{\sin x}\cos x \quad (x\ne k\pi, k=0,\pm1,\cdots)$$

令 $y'=0$，得
$$x_k=k\pi, k\pi+\frac{2}{3}\pi \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

因为当 $x\in(k\pi,k\pi+\frac{2}{3}\pi)$ 时，$y'>0$，所以该函数的单调增区间是 $(k\pi,k\pi+\frac{2}{3}\pi)$，其中 $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$。

【例 3.71】 设 $f(x)$ 有连续导数，且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+f'(x)}{1-e^{-x}}=1$。求 $f(0)$ 取何值时，$f(0)$ 是 $f(x)$ 的极值？并说明它是极大值还是极小值。

解 由 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+f'(x)}{1-e^{-x}}=1$，得
$$\lim_{x\to0}[f(x)+f'(x)]=f(0)+f'(0)=0$$

又
$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{f(x)+f'(x)}{1-e^{-x}}&=\lim_{x\to0}\frac{f(x)+f'(x)-f(0)-f'(0)}{x}\\&=\lim_{x\to0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x}+\frac{f'(x)-f'(0)}{x}\right)\\&=f'(0)+\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=1\end{aligned}$$

所以，极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}$ 存在且为 $f''(0)$，即 $f'(0)+f''(0)=1$。

如果 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极值，则 $f'(0)=0$，即 $f(0)=0$，此时 $f''(0)=1$，所以，当 $f(0)=0$ 时，$f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值。

【例 3.72】 求函数 $f(x)=1-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$（$|x|<1$）的极值。

解 由 $f(x)=1-\frac{1}{2}\ln(1+x^2), |x|<1$，令 $f'(x)=0$，求得惟一驻点 $x=0$。由于
$$f''(x)=-\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},\quad f''(0)=-1<0$$

可见 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值，且极大值为 $f(0)=1$。

【例 3.73】 设$a>1$，$f(t)=a^t-at$在$(-\infty,+\infty)$内的驻点为$t(a)$。问a为何值时，$t(a)$最小？并求出最小值。

解　由$f'(t)=a^t\ln a-a=0$，得惟一驻点$t(a)=1-\dfrac{\ln\ln a}{\ln a}$。考察函数$t(a)$在$a>1$时的最小值，令

$$t'(a)=-\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{a}\ln\ln a}{(\ln a)^2}=-\frac{1-\ln\ln a}{a(\ln a)^2}=0$$

得惟一驻点$a=e^e$。当$a>e^e$时，$t'(a)>0$；当$a<e^e$时，$t'(a)<0$。因此$t(e^e)=1-\dfrac{1}{e}$为极小值，从而是最小值。

【例 3.74】 在$1,\sqrt{2},\sqrt[3]{3},\sqrt[4]{4},\cdots,\sqrt[n]{n},\cdots$中求出最大的一个数。

解　设$f(x)=x^{\frac{1}{x}}$，求$f(x)=x^{\frac{1}{x}}$的最大值。由

$$f'(x)=\left(e^{\frac{1}{x}\ln x}\right)'=e^{\frac{1}{x}\ln x}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}=x^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}$$

令$f'(x)=0$，解得$x=e$。当$0<x<e$时，$f'(x)>0$；当$x>e$时，$f'(x)<0$。所以$f(x)$在$x=e$时取得极大值。又因为$f(x)$可导，且只有一个驻点，所以此极大值就是最大值。又$2<e<3$，因此最大值在$\sqrt{2}$与$\sqrt[3]{3}$之间，而$(\sqrt{2})^6=8$，$(\sqrt[3]{3})^6=9$，知$\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$，所以最大值为数列中的$\sqrt[3]{3}$。

【例 3.75】 设$y=x^3+ax^2+bx+2$在$x=1$和$x=2$处取得极值，试确定a与b的值，并证明$y(2)$是极大值，$y(1)$是极小值。

解　由极值存在必要条件知，

$$\begin{cases}y'(1)=3+2a+b=0\\y'(2)=12+4a+b=0\end{cases}，解之得 a=-\frac{9}{2}，\ b=6$$

从而$y=x^3-\dfrac{9}{2}x^2+6x+2$，则$y''=6x-9$。由于$y''(1)=-3<0$，$y''(2)=3>0$，所以$y(1)$是极大值，$y(2)$是极小值。

【例 3.76】 确定a,b的值，使$f(x)=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{a}{3}x^3+\dfrac{b}{2}x^2+2x$仅有两个相异的负值驻点，且仅有惟一极值点$x=-2$。

解　设$x_1=-2$，$x_2=\xi$为$f(x)$的仅有的两个驻点，则x_1,x_2是$f'(x)=x^3+ax^2+bx+2$的仅有的两个零点。从而，$f'(x)$可能有两种分解因式：

$$f'(x)=(x+2)^2(x-\xi) \qquad ①$$

或

$$f'(x)=(x+2)(x-\xi)^2$$

由形式①可得 $f''(-2)=0$ 或 $f'''(-2)\neq 0$，由极值的充分条件知，$x=-2$ 不是极值点，它与题设矛盾，因此，只有

$$f'(x)=(x+2)(x-\xi)^2=x^3+ax^2+bx+2$$

即
$$x^3+(2-2\xi)x^2+(\xi^2-4\xi)x+2\xi^2=x^3+ax^2+bx+2$$

所以
$$\begin{cases}2-2\xi=a\\ \xi^2-4\xi=b\\ 2\xi^2=2\end{cases}，解之得 \xi=-1, a=4, b=5$$

因为 $f''(-2)=1>0$，$f''(-1)=0$，$f'''(-1)\neq 0$，故 $x=-2$ 是 $f(x)$ 的惟一极小值点。

【例 3.77】 设 $f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}$，其中 a,b 都是实数，证明：当 $a+b+1>0$ 时，$f(x)$ 有两个极值。

证 由
$$f'(x)=\frac{x^2-2x-(a+b)}{(x-1)^2}=0$$

得驻点
$$x_1=1-\sqrt{a+b+1}，\quad x_2=1+\sqrt{a+b+1}$$

因为 $f''(x)=\dfrac{2(a+b+1)}{(x-1)^3}$，所以当 $a+b+1>0$ 时，$f''(x_1)<0$，$f''(x_2)>0$。

故由极值存在的第二充分条件知，函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1 和 x_2。

【例 3.78】 轮船航行的费用由两部分组成，每小时燃料费与速度立方成正比（设 k 为比例系数），而其他费用为每小时 a 元，问轮船的速度为多少时，航行 S km 的费用最少？

解 设船的速度为 V，则航行 S km 的总费用为

$$f(V)=\frac{S}{V}a+\frac{S}{V}kV^3=S\left(\frac{a}{V}+kV^2\right)，\quad V>0$$

从而
$$f'(V)=\frac{S(2kV^3-a)}{V^2}，\quad f''(V)=2\left(\frac{a}{V^3}+k\right)S>0$$

由 $f'(V)=0$ 得惟一驻点 $V_0=\sqrt[3]{\dfrac{a}{2k}}$，因 $f''(V)=2\left(\dfrac{a}{V^3}+k\right)S>0$，故当 $V=\sqrt[3]{\dfrac{a}{2k}}$ 时，航行 S km 的总费用最少。

【例 3.79】 试确定 a,b,c，使曲线 $y=ax^3+bx^2+cx$ 在 $(1,2)$ 处有拐点，且在拐点处的切线斜率为 -1。

解 有
$$y'=3ax^2+2bx+c，\quad y''=6ax+2b$$

由题设得
$$\begin{cases} y''\big|_{x=1} = 6a + 2b = 0 \\ y'\big|_{x=1} = 3a + 2b + c = -1 \\ y\big|_{x=1} = a + b + c = 2 \end{cases}$$

解之得
$$a = 3, b = -9, c = 8$$

由于当 $x < 1$ 时，$y'' < 0$；当 $x > 1$ 时，$y'' > 0$。因此当 $a = 3, b = -9, c = 8$ 时，曲线在 $(1, 2)$ 处必有拐点，且在拐点处的切线斜率为 -1。

【例 3.80】 试确定 k 值，使曲线 $y = k(x^2 - 3)^2$ 在拐点处的法线通过坐标原点。

解　$y' = 4xk(x^2 - 3)$，$y'' = 12k(x^2 - 1)$。由 $y'' = 0$ 得可疑拐点 $x_{1,2} = \pm 1$。因为当 $|x| < 1$ 时，$y'' < 0$；当 $|x| < 1$ 时，$y'' > 0$。所以该曲线的拐点为 $(-1, 4k)$，$(1, 4k)$。显然，在拐点 $(\pm 1, 4k)$ 处的法线方程为 $y = 4k \pm \dfrac{1}{8k}(x \pm 1)$。由法线通过坐标原点知 $4k \pm \dfrac{1}{8k} = 0$，故 $k = \pm \dfrac{\sqrt{2}}{8}$。

【例 3.81】 讨论曲线 $y = \dfrac{x^2}{2} - x - 2\ln|x|$ 的性态，并作出图形。

解　曲线在 $(-\infty, 0)$，$(0, +\infty)$ 上连续，由 $y' = \dfrac{1}{x}(x+1)(x-2)$，得驻点 $x_1 = -1, x_2 = 2$。

由 $y'' = 1 + \dfrac{2}{x^2} > 0$（$x \neq 0$）知，该曲线在定义区间上是凹的，无拐点。

由 $\lim\limits_{x \to 0} y = +\infty$ 知，$x = 0$ 是该曲线的铅直渐近线。

列表如下（图形如图 3-3 所示）：

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
y'	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$
y''	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$y = y(x)$	减	（极小）$\dfrac{3}{2}$	增	减	（极小）$-\ln 4$	增

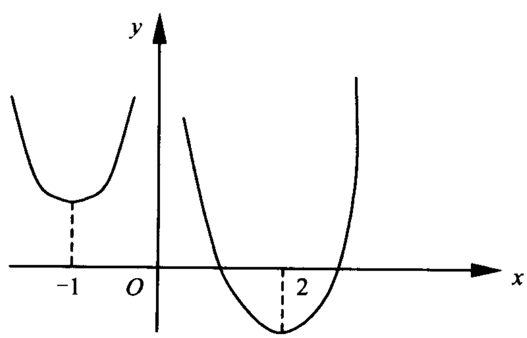

图 3-3

【例 3.82】 讨论曲线 $y = \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{3}\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2 - \dfrac{1}{3}$ 的性态（已知 $\ln 4 \approx 1.4$）。

解 由题设知该曲线在$(-\infty,0)$，$(0,1)$和$(1,+\infty)$上连续。

由$\lim\limits_{x\to 0}y=-\infty$知，$x=0$是它的铅直渐近线；由$\lim\limits_{x\to 1}y=+\infty$知，$x=1$也是它的铅直渐近线；由$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{3}$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(y-\dfrac{x}{3}\right)=-\dfrac{1}{3}$知，直线$y=\dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{3}$是它的斜渐近线。

由$y'=\dfrac{(x-2)(x+1)}{3x(x-1)}=0$，得驻点$x_1=-1, x_2=2$；

由$y''=\dfrac{2(2x-1)}{3x^2(x-1)^2}=0$，得可疑拐点$x_3=\dfrac{1}{2}$。

列表如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	$(0,1/2)$	$1/2$	$(1/2,1)$	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	+	0	−	+	+	+	−	0	+
y''	−	−	−	−	0	+	+	+	+
$y=y(x)$	增 上凸	极大 1	减 上凸	增 上凸	拐点 $-\dfrac{1}{6}$	增 下凸	减 下凸	极小 0.8	增 下凸

【例 3.83】 设R为抛物线$y=x^2$上任一点$M(x,y)$处的曲率半径，s为该曲线上一定点$M_0(x_0,y_0)$到$M(x,y)$的有向弧长（取s增长方向与x轴正向一致），证明：R,s满足关系

$$3R\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}s^2}-\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\right)^2-9=0$$

证 $y'=2x$，$y''=2$，由曲率公式得

$$k=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

所以
$$R=\frac{1}{k}=\frac{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}}{2}$$

于是
$$\mathrm{d}R=\frac{\frac{3}{2}(1+4x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 8x}{2}\mathrm{d}x=6x\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2(x)}\,\mathrm{d}x=\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$$

所以
$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}=6x,\quad \frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}s^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=\frac{6}{\sqrt{1+4x^2}}$$

$$3R\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}s^2}-\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\right)^2-9=3\cdot\frac{(1+4x)^{\frac{3}{2}}}{2}\cdot\frac{6}{\sqrt{1+4x^2}}-(6x)^2-9=9(1+4x^2)-(6x)^2-9=0$$

【例 3.84】 求曲线 $y^2 = x^3$ 在点 $(4, 8)$ 处的曲率及曲率半径。

解 因为
$$y'\big|_{x=4} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\bigg|_{x=4} = 3，\quad y''\big|_{x=4} = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}\bigg|_{x=4} = \frac{3}{8}$$

所以
$$k\big|_{x=2} = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}\bigg|_{x=4} = \frac{\sqrt[3]{10}}{800}$$

故所求曲率和曲率半径分别为 $k\big|_{x=4} = \dfrac{\sqrt[3]{10}}{800}$，$R = \dfrac{1}{k\big|_{x=4}} = \dfrac{80\sqrt{10}}{3}$。

【例 3.85】 位于上半平面向下凸的曲线 $y = y(x)$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线斜率为 0，在点（2, 2）处的切线斜率为 1。已知曲线上任一点处的曲率半径与 $\sqrt{y}$ 及 $(1+y'^2)$ 的乘积成正比，求该曲线方程。

解 由已知得 $y(0)=1$，$y'(0)=0$；$y(2)=2$，$y'(2)=1$。$\dfrac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = k\sqrt{y}(1+y'^2)$，即 $k\sqrt{y}y'' = \sqrt{1+y'^2}$。令 $p = y'$，$y'' = pp'$，代入方程得

$$\frac{p\mathrm{d}p}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{\mathrm{d}y}{k\sqrt{y}} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}(p^2+1)}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{1}{k}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} \Rightarrow$$
$$\mathrm{d}(\sqrt{1+p^2}) = \frac{2}{k}\mathrm{d}(\sqrt{y}) \Rightarrow \mathrm{d}(\sqrt{1+p^2}) = \mathrm{d}\left(\frac{2}{k}\sqrt{y}+c\right)$$

得 $\sqrt{1+p^2} = \dfrac{2}{k}\sqrt{y}+C$，即 $\sqrt{1+y'^2} = \dfrac{2}{k}\sqrt{y}+C$，代入 $y(0)=1$，$y'(0)=0$，$y(2)=2$，$y'(2)=1$，得 $k=2$，$C=0$，得 $y' = \sqrt{y-1}$，解方程得 $y = \dfrac{1}{4}x^2+1$。

【例 3.86】 设 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)-\cos x}{x} & x<0 \\ ax+b & x \geq 0 \end{cases}$，其中 $g''(0)$ 存在，且 $g(0)=1$，a, b 为常数。试确定 a, b 的值，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，并求出 $f'(x)$。

解 由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导知

$$f(0-0) = f(0+0) = f(0)，\quad f'_-(0) = f'_+(0)$$

因为 $g(0)=1$，$g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以

$$f(0-0) = \lim_{x\to 0^-}\frac{g(x)-\cos x}{x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$
$$= \lim_{x\to 0^-}\frac{g'(x)+\sin x}{1} = g'(0)$$

$$f(0+0)=\lim_{x\to0^+}(ax+b)=b$$

从而 $b=g'(0)$。

因为 $$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{g(x)-\cos x}{x}-b}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{g(x)-\cos x-bx}{x^2}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{g'(x)+\sin x-b}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0^-}\left[\frac{g'(x)-b}{x}+\frac{\sin x}{x}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0^-}\left[\frac{g'(x)-g'(0)}{x}+\frac{\sin x}{x}\right]=\frac{1}{2}[g''(0)+1]$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{ah+b-b}{h}=a$$

故 $$a=\frac{1}{2}[1+g''(0)]$$

【例 3.87】 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f(0)=0$，证明：函数 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x} & x\neq0\\ f'(0) & x=0\end{cases}$ 可导，且导函数连续。

解 当 $x\neq0$ 时，$g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$ 显然连续。

当 $x=0$ 时，因为

$$g'(0)=\lim_{x\to0}\frac{\frac{f(x)}{x}-f'(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-xf'(0)}{x^2}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f''(x)}{1}=\frac{f''(0)}{2}$$

$$\lim_{x\to0}g'(x)=\lim_{x\to0}\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{xf''(x)+f'(x)-f'(x)}{2x}=\frac{f''(0)}{2}$$

所以 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

故由上述证明可知，导函数 $g'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}f'(x)-\dfrac{1}{x^2}f(x) & x\neq0\\ \dfrac{f''(0)}{2} & x=0\end{cases}$ 是连续的。

【例 3.88】 设$F(x,y)=\dfrac{\varphi(y-x)}{2x}$，$F(1,y)=\dfrac{y^2}{2}-y+5$，$x_0>0$，$x_{n+1}=F(x_n,2x_n)$（$n\geq 0$），求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

解 先判定$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$的存在性。由$F(x,y)=\dfrac{\varphi(y-x)}{2x}$得$F(1,y)=\dfrac{1}{2}\varphi(y-1)$，而

$$F(1,y)=\frac{y^2}{2}-y+5=\frac{1}{2}[(y-1)^2+9]$$

得
$$\varphi(y-1)=(y-1)^2+9\Rightarrow\varphi(y)=y^2+9$$

由
$$x_{n+1}=F(x_n,2x_n)=\frac{\varphi(2x_n-x_n)}{2x_n}=\frac{\varphi(x_n)}{2x_n}=\frac{x_n^{\ 2}+9}{2x_n}$$

令
$$f(x)=F(x,2x)=\frac{\varphi(x)}{2x}=\frac{x}{2}+\frac{9}{2x}\geq 2\sqrt{\frac{x}{2}\cdot\frac{9}{2x}}=3$$

由$x_{n+1}=f(x_n)$可知$x_n\geq 3$。当$x\geq 3$时，

$$0\leq f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{9}{2x^2}<\frac{1}{2}$$

由微分中值定理可得
$$\left|\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n-x_{n-1}}\right|=\left|\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}\right|\leq\frac{1}{2}<1$$

由比值判别法知$\sum|x_{n+1}-x_n|$收敛，从而$\{x_n\}$收敛，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在。

再令$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，代入$x_{n+1}=f(x_n)=\dfrac{x_n}{2}+\dfrac{9}{2x_n}$，可得$a=\dfrac{a}{2}+\dfrac{9}{2a}$，推出$a=3$。故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$。

【例 3.89】 设$a_1=a_2=1$，$a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$（$n\geq 1$），求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$。

解 先判定$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$的存在性。令$x_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$，则$x_1=1$，$x_{n+1}=1+\dfrac{1}{x_n}$（$n\geq 1$）。用数学归纳法可证明$\dfrac{3}{2}\leq x_n\leq 2$（$n\geq 2$）。

令$f(x)=1+\dfrac{1}{x}$，则$|f'(x)|=\dfrac{1}{x^2}\leq\dfrac{4}{9}<1$，由微分中值定理可得

$$\left|\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n-x_{n-1}}\right|=\left|\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}\right|\leq\frac{4}{9}<1$$

由比值判别法可知$\sum|x_{n+1}-x_n|$收敛，从而$\{x_n\}$收敛，即$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$存在。

令 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$，代入 $x_{n+1}=1+\dfrac{1}{x_n}$ 得 $b=1+\dfrac{1}{b}$，推出 $b=\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})$，$b=\dfrac{1}{2}(1-\sqrt{5})$ 舍出，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})$。

【例 3.90】 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{\theta}{n}\right)^n$；（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sin\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n$，其中 $a>0$，$b>0$，$c>0$。

解 （1）由对数恒等式可得，原极限 $=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\cos\frac{\theta}{n}}$，而

$$\lim_{x\to+\infty}x\ln\cos\frac{\theta}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\cos\frac{\theta}{x}}{\frac{1}{x}}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(-x^2)\frac{1}{\cos\frac{\theta}{x}}\left(-\sin\frac{\theta}{x}\right)\left(-\frac{\theta}{x^2}\right)=0$$

则
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{\theta}{x}\right)^x=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\cos\frac{\theta}{x}}=\mathrm{e}^0=1$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\theta}{n}\right)^n=1$$

（2）由对数恒等式可得，

$$原极限=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}n^2\ln\left(n\sin\frac{1}{n}\right)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\left(n\sin\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}}}$$

由
$$\lim_{x\to+\infty}x^2\ln\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x^3}{2}\right)\cdot\frac{1}{x\sin\frac{1}{x}}\left[\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2}\left[-1+\frac{\frac{1}{x}}{\sin\frac{1}{x}}\cos\frac{1}{x}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2}\left[\frac{\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}}{\sin\frac{1}{x}}-\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{x}}{\sin\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{\frac{1}{x}}{\sin\frac{1}{x}}\cdot o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2}\left[\frac{\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)}{\sin\frac{1}{x}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\sin\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]=-\frac{1}{6}$$

则
$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)^{x^2}=e^{-\frac{1}{6}}$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}=e^{-\frac{1}{6}}$$

（3）由对数恒等式可得

$$原极限=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}}$$

由
$$\lim_{x\to+\infty}x\ln\frac{a^{1/x}+b^{1/x}+c^{1/x}}{3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{a^{1/x}+b^{1/x}+c^{1/x}}{3}}{1/x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\left(\frac{1}{x}\right)^2\left[\frac{3}{a^{1/x}+b^{1/x}+c^{1/x}}\right]\cdot\frac{1}{3}\left(a^{1/x}\ln a+b^{1/x}\ln b+c^{1/x}\ln c\right)}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=\frac{1}{3}\ln(abc)$$

则
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}+c^{\frac{1}{x}}}{3}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}+c^{\frac{1}{x}}}{3}}=e^{\ln\sqrt[3]{abc}}=\sqrt[3]{abc}$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n=\sqrt[3]{abc}$$

【例 3.91】　求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2x-x^2\cos^2x}{x^2\sin^2x}$；

（2）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xe^{2x}+xe^x-2e^{2x}+2e^x}{(e^x-1)^3}$；

（3）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{\tan x}}{x-\tan x}$；

（4）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{\sin x}$；

（5）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-x^2-e^{-x^2}}{\sin^4 2x}$；

（6）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\sec x}$；

（7）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$；

（8）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$。

解 （1）显然是$\dfrac{0}{0}$型极限，若直接应用罗必达法则，因分子、分母分别求导数时较麻烦，计算量大，为此，可采用先提出极限不为零的因子来简化计算。

因
$$\frac{\sin^2 x - x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x} = \frac{\sin x + x\cos x}{\sin x}\cdot\frac{\sin x - x\cos x}{x^2\sin x}$$
$$\frac{\sin x + x\cos x}{\sin x} = 1 + \frac{x}{\sin x}\cos x \to 2 \quad (x\to 0)$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^2\sin x} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{2x\sin x + x^2\cos x} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2+\dfrac{x}{\sin x}\cos x} = \frac{1}{3}$$

故
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x} = \frac{2}{3}$$

（2）$$\lim_{x\to 0}\frac{xe^{2x} + xe^x - 2e^{2x} + 2e^x}{(e^x-1)^3} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{2xe^{2x} + 3e^x - 3e^{2x} + xe^x}{3e^x(e^x-1)^2}$$
$$\xlongequal{\text{约去}e^x} \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{2xe^x + 3 - 3e^x + x}{(e^x-1)^2} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{2xe^x - e^x + 1}{2e^x(e^x-1)}$$
$$= \frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{2xe^x - e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{2xe^x + e^x}{e^x} = \frac{1}{6}$$

（3）本题若用罗必达法则，计算量大，在这种情况下，应改用其他方法，作如下变形：
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{\tan x}}{x - \tan x} = \lim_{x\to 0} e^{\tan x}\,\frac{e^{x-\tan x} - 1}{x - \tan x} = \lim_{x\to 0} e^{\tan x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{x-\tan x}-1}{x-\tan x} = 1$$

（4）本题若用罗必达法则，也比较麻烦，应改用其他办法。就本题而言，用等价无穷小代换非常简便。

因当$x\to 0$时，$\tan x\to 0$，所以
$$\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\tan x} \sim \tan x \quad (x\to 0),\quad \sin x \sim x$$

故
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1$$

（5）本题如直接应用罗必达法则，由于分母是复合函数，计算也较烦，若用分母的等价无穷小先作代换，则可简化计算。

因$x\to 0$时，$\sin 2x \sim 2x$，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-x^2-e^{-x^2}}{\sin^4 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-x^2-e^{-x^2}}{(2x)^4}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x+2xe^{-x^2}}{2^4\cdot 4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-1}{32x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2xe^{-x^2}}{64x}=-\frac{1}{32}$$

(6) 因 $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\sec x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 x}{\sec\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sec x}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\sec x}=\cdots$$

可见，直接用罗必达法则得不出结果，应改用别的方法。先将$\dfrac{\tan x}{\sec x}$变形，得

$$\frac{\sin x}{\cos x}\bigg/\frac{1}{\cos x}=\sin x\Rightarrow \text{原式}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1$$

(7) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}\xlongequal{令u=\frac{1}{x^2}}\lim_{u\to+\infty}\frac{u^{50}}{e^u}=\lim_{u\to+\infty}\frac{50u^{49}}{e^u}=\lim_{u\to+\infty}\frac{50\cdot 49\cdot u^{48}}{e^u}=\cdots=\lim_{u\to+\infty}\frac{50!}{e^u}=0$$

(8) 方法1：分母有理化，去掉根号，得

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{1+x\sin x-\cos x}$$

先求等式中因子$\dfrac{x^2}{1+x\sin x-\cos x}$的极限，用罗必达法则，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1+x\sin x-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\cos x+\sin x+\sin x}=\frac{2}{3}$$

故 $$\text{原式}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})=\frac{4}{3}$$

方法2：利用泰勒公式。分子为x^2，将函数展开到含x^2项。

当$x\to 0$时，$1-\cos x=\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$，$x\sin x=x^2+o(x^2)$，从而

$$\sqrt{\cos x}=\sqrt{1-(1-\cos x)}=\sqrt{1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}$$

$$=1+\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right]+o\left(-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)$$

$$=1-\frac{1}{4}x^2+o(x^2)$$

$$\sqrt{1+x\sin x}=\sqrt{1+x^2+o(x^2)}=1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$$

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)-\left[1-\frac{1}{4}x^2+o(x^2)\right]}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{3}{4}x^2+o(x^2)}=\frac{4}{3}$$

【例 3.92】 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(1-x)+\tan\dfrac{\pi}{2}x}{\cot\pi x}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(\ln x)^{-1}}{\ln|x-1|}$；

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x-\dfrac{2}{\pi}x\arctan x}{x+e^x}$。

解　（1）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(1-x)+\tan\dfrac{\pi}{2}x}{\cot\pi x}\quad\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\dfrac{\pi}{2}\sec^2\dfrac{\pi}{2}x-\dfrac{1}{1-x}}{-\pi\csc^2\pi x}$$

由于变形后不是$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$型，因此不能直接运用罗必达法则，但

$$\frac{\dfrac{\pi}{2}\sec^2\dfrac{\pi}{2}x-\dfrac{1}{1-x}}{\csc^2\pi x}=\frac{\pi}{2}\sin^2\pi x\sec^2\frac{\pi}{2}x-\frac{\sin^2\pi x}{1-x}=2\pi\sin^2\frac{\pi}{2}x-\frac{\sin^2\pi x}{1-x}$$

当$x\to1$时，$\sin\dfrac{\pi}{2}x\to1$，即$\dfrac{\sin^2\pi x}{1-x}$为$\dfrac{0}{0}$型，可应用罗必达法则，故

$$原式=-\frac{1}{\pi}\left(\lim_{x\to1}2\pi\sin^2\frac{\pi}{2}x-\lim_{x\to1}\frac{\sin^2\pi x}{1-x}\right)=-2+\frac{1}{\pi}\lim_{x\to1}\frac{2\pi\sin\pi x\cos\pi x}{-1}=-2$$

（2）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(\ln x)^{-1}}{\ln|x-1|}\quad\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

$$=\lim_{x\to1}\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{x-1}{(\ln x)^2}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=-\lim_{x\to1}\frac{1}{2(\ln x)\cdot\dfrac{1}{x}}=-\lim_{x\to1}\frac{x}{2\ln x}=\begin{cases}+\infty & x\to1^+\\-\infty & x\to1^-\end{cases}$$

（3）凡遇到$x\to\infty$式中含有e^x，$\arctan x$的情形，一定要分别求出$x\to+\infty$，$x\to-\infty$的极限，若二者极限相等，则当$x\to\infty$时，极限存在，否则不存在。

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-\dfrac{2}{\pi}x\arctan x}{e^x+x}\quad\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-\dfrac{2}{\pi}\arctan x-\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{x}{1+x^2}}{e^x+1}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-\frac{2}{\pi}x\arctan x}{e^x+x}\quad\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-\frac{2}{\pi}\arctan x-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{x}{1+x^2}}{e^x+1}=1$$

故
$$原式=1$$

【例 3.93】 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]$；　（2）$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5})$；

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$；　（4）$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\cot^2x\right)$。

解　（1）这是 $\infty-\infty$ 型，先变形成 $\dfrac{0}{0}$ 型，再用罗必达法则。

$$原式=\lim_{x\to0}\left[\ln\frac{1+x}{x+\sqrt{1+x^2}}\Big/\ln(x+\sqrt{1+x^2})\ln(1+x)\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{x+\sqrt{1+x^2}}{1+x}\left[x+\sqrt{1+x^2}-(1+x)\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right]}{(1+\sqrt{1+x^2})^2}\Bigg/\left[\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x}\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-(1+x)}{(1+x)\ln(1+x)+\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{x^2+1})}\ \overset{再一次}{\underset{罗必达}{=}}\ -\frac{1}{2}$$

（2）令 $x=\dfrac{1}{t}$，则 $x\to\infty$ 时，$t\to0$，利用泰勒公式，得

$$\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}=\frac{1}{t}\left[(1+t)^{\frac{1}{6}}-(1-t)^{\frac{1}{6}}\right]=\frac{1}{t}\left[\left(1+\frac{t}{6}+o(t)\right)-\left(1-\frac{t}{6}+o(t)\right)\right]=\frac{1}{3}+\frac{o(t)}{t}$$

故
$$原式=\lim_{t\to0}\left(\frac{1}{3}+\frac{o(t)}{t}\right)=\frac{1}{3}$$

（3）这类极限既不能通分，又不能用根式有理化，因此只能用倒代换或泰勒公式。这里用倒代换求极限，令 $x=\dfrac{1}{t}$，则有

$$原式=\lim_{t\to0}\left[\frac{1}{t}-\frac{\ln(1+t)}{t^2}\right]=\lim_{t\to0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}=\lim_{t\to0}\frac{t}{2t(1+t)}=\frac{1}{2}$$

（4）原式$=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^4}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x+x\cos x}{x}\cdot\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}=2\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos x+x\sin x}{3x^2}=\frac{2}{3}$$

注意：若式中含有 $\tan x$， $\cot x$， $\sec x$ 或 $\csc x$，一般将其变成余弦或正弦的表达式。

【例 3.94】 求下列极限：

（1） $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan 2x^2\right)x^2$；（2） $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[n]{n}-1)$；

（3） $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$。

解 （1）原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan 2x^2}{x^{-2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\dfrac{4x}{1+(2x^2)^2}}{-2x^{-3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^4}{1+4x^4}=\dfrac{1}{2}$。

（2）

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{x}}-1)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{1}{x}}-1}{x^{-\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{1}{x}}\left(-\dfrac{1}{x^2}\ln x+\dfrac{1}{x^2}\right)}{-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^{\frac{1}{x}}(\ln x-1)}{x^{\frac{1}{2}}}=2\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x-1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$=2\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}=2\mathrm{e}^0\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$$

故 原式$=0$

（3）令$1-x=y$，当$x\to1$时，$y\to0$，于是

$$原式=\lim_{y\to0}y\tan\frac{\pi}{2}(1-y)=\lim_{y\to0}y\cot\frac{\pi}{2}y=\lim_{y\to0}\frac{y}{\tan\dfrac{\pi}{2}y}=\frac{2}{\pi}$$

【例 3.95】 求下列极限：

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$；（2） $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}\right]^{\frac{1}{x}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a^x-x\ln a}{b^x-x\ln b}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ ($a>0,b>0,a\neq1,b\neq1$);

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(\mathrm{e}^2+4^n+7^n)^{\frac{1}{n}}$; (5) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$;

(6) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$; (7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+a)^{x+b}(x+b)^{x+a}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$;

(8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$; (9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\tan\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$。

解 (1)这是求数列的极限，根据数列极限与函数极限的关系定理，应先把n换成x，变成函数的极限，再用罗必达法则，然后根据关系定理，就得到数列的极限，为此，先考虑极限：

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^x=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^4}{x^2+x+1}\left(\frac{x+2}{x^3}\right)}=\mathrm{e}$$

故 $$原式=\mathrm{e}$$

(2) $$\lim_{x\to0}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}\right]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}{x}}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-x}{2(1+x)\cdot x}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$$

(3) $$\lim_{x\to0}\left(\frac{a^x-x\ln a}{b^x-x\ln b}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}[\ln(a^x-x\ln a)-\ln(b^x-x\ln b)]}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{a^x\ln a-\ln a}{a^x-x\ln a}-\frac{b^x\ln b-\ln b}{b^x-x\ln b}}{2x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{2}\left[\frac{a^x-1}{x}\cdot\frac{\ln a}{a^x-x\ln a}-\frac{b^x-1}{x}\cdot\frac{\ln b}{b^x-x\ln b}\right]}$$

$$=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\ln^2a-\ln^2b)}$$

(4)这同样是求数列的极限，应先把n换成x，即求$\lim\limits_{x\to+\infty}(\mathrm{e}^2+4^x+7^x)^{\frac{1}{x}}$的极限。

$$\lim_{x\to+\infty}(\mathrm{e}^2+4^x+7^x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln(\mathrm{e}^2+4^x+7^x)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4^x\ln4+7^x\ln7}{\mathrm{e}^2+4^x+7^x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{4}{7}\right)^x\ln4+\ln7}{\frac{\mathrm{e}^2}{7^x}+\left(\frac{4}{7}\right)^x+1}}=\mathrm{e}^{\ln7}=7$$

故 $$原式=7$$

（5）令 $y=\sqrt{x}$，则原式 $=\lim\limits_{y\to0}(\cos y)^{\frac{1}{y^2}}=\lim\limits_{y\to0}[1+(\cos y-1)]^{\frac{1}{y^2}}=\lim\limits_{y\to0}e^{\frac{1}{y^2}\ln[1+(\cos y-1)]}$

$$=e^{\lim\limits_{y\to0}\frac{1}{y^2}(\cos y-1)}=e^{\lim\limits_{y\to0}\frac{-\sin y}{2y}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

（6）
$$原式=\lim_{x\to0}\left[1+\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}-1\right)\right]^{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\left[1+\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}-n}{n}\right]^{\frac{1}{x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left[\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}-n}{n}+1\right]}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}-n}{xn}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+2e^{2x}+\cdots+ne^{nx}}{n}}=e^{\frac{1+2+\cdots n}{n}}=e^{\frac{1}{2}(n+1)}$$

（7）原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+a)^{x+b}(x+b)^{x+a}}{(x+a+b)^{x+b}(x+a+b)^{x+a}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{b}{x+a}\right)^{x+b}\left(1+\dfrac{a}{x+b}\right)^{x+a}}$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{b}{x+a}\right)^{\frac{x+a}{b}}\right]^{\frac{b}{x+a}\cdot(x+b)}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{a}{x+b}\right)^{\frac{x+b}{a}}\right]^{\frac{a}{x+b}\cdot(x+a)}}$$

$$=\frac{1}{e^a\cdot e^b}=e^{-(a+b)}$$

（8）
$$原式=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}e^{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\ln\cos x}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\ln\cos x}{\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}\right)^2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\sin x\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}{-\cos x}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}{-\cos x}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin x}}=e^0=1$$

（9）因为
$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}\left[\left(1+\frac{\tan x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\tan x-x}}\right]^{\frac{\tan x-x}{x^3}}$$

其中
$$\lim_{x\to0^+}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sec^2x-1}{3x^2}=\frac{1}{3}$$

故 $$原式=e^{\frac{1}{3}}$$

【例 3.96】 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$；

（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2[\ln\arctan(x+1)-\ln\arctan x]$。

解 （1）令 $f(t)=\sin\sqrt{t}$，显然，当 $x>0$ 时，$f(t)$ 在 $[x,x+1]$ 上满足拉氏定理的条件，于是有 $\dfrac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x}=f'(\xi)$，即

$$\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}=\cos\sqrt{\xi}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\xi}}\qquad x<\xi<x+1$$

故 $$原式=\lim_{\xi\to+\infty}\cos\sqrt{\xi}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\xi}}=0$$

（2）令 $f(t)=\ln\arctan t$，当 $x>0$ 时，$f(t)$ 在 $[x,x+1]$ 上满足拉氏定理的条件，于是有 $$\ln\arctan(x+1)-\ln\arctan x=\frac{1}{\arctan\xi}\cdot\frac{1}{1+\xi^2}\qquad x<\xi<x+1$$

故 $$原式=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\arctan\xi}\cdot\frac{x^2}{1+\xi^2}=\frac{2}{\pi}$$

【例 3.97】 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$。

解 （1）由中值公式 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$，$\xi\in(a,b)$，可求

$$\begin{aligned}原极限&=\lim_{x\to a}\frac{a^x-a^a}{x-a}-\lim_{x\to a}\frac{x^a-a^a}{x-a}=\lim_{\xi\to a}(a^x)'\Big|_{x=\xi}-\lim_{y\to a}(x^a)'\Big|_{x=y}\\&=\lim_{\xi\to a}(a^{\xi}\ln a)-\lim_{y\to a}(ay^{a-1})=a^a(\ln a-1)\end{aligned}$$

其中，$\xi,y\in(a,x)$，当 $x\to a$ 时，$\xi\to a$，$y\to a$。

（2）令 $f(x)=e^x$，由中值定理，有

$$e^x-e^{\sin x}=f(x)-f(\sin x)=(x-\sin x)f'[\sin x+\theta(x-\sin x)]\qquad(0<\theta<1)$$

所以 $$\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=f'[\sin x+\theta(x-\sin x)]=e^{\sin x+\theta(x-\sin x)}$$

故 $$原极限=\lim_{x\to 0}e^{\sin x+\theta(x-\sin x)}=e^0=1$$

【例 3.98】 设函数 $f(x)$ 在 x_0 点附近有连续导数，而 $\alpha_n<x_n<\beta_n$（$n=1,2,\cdots$），且

当$n \to \infty$时，$\alpha_n \to x_0$，$\beta_n \to 0$，求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}$。

解 由于$f(x)$在x_0点附近有连续导数，所以$f(x)$在$[\alpha_n,\beta_n]$上满足拉氏定理的条件，于是在(α_n,β_n)内至少有一点ξ_n，使得$\dfrac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=f'(\xi_n)$。

由题设$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=x_0$，所以有$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=x_0$。

再由$f'(x)$在点x_0附近的连续性可知，$\lim\limits_{n\to\infty}f'(\xi_n)=f'(x_0)$，故原式$=f'(x_0)$。

【例 3.99】 证明：若$x>0$，则$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$，其中$\dfrac{1}{4}\le\theta<\dfrac{1}{2}$，并且有$\lim\limits_{x\to+0}\theta(x)=\dfrac{1}{4}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$。

证明 当$x\ge 0$时，对函数$\sqrt{x}$应用拉格朗日中值定理，易得

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}},\quad 0<\theta(x)<1$$

解之得

$$\theta(x)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(\sqrt{x(x+1)}-x)$$

当$x=0$时，$\theta(x)=\dfrac{1}{4}$；当$x>0$时，有

$$0<\sqrt{x(x+1)}-x=\frac{x}{\sqrt{x(x+1)}+x}<\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$$

于是$\theta(x)$满足下面的不等式

$$\frac{1}{4}\le\theta(x)<\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

且有

$$\lim_{x\to+0}\theta(x)=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\theta(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{4}+\frac{x}{2(\sqrt{x(x+1)}+x)}\right]=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

【例 3.100】 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2+\tan x)^{10}-(2-\sin x)^{10}}{\sin x}$；

（2）设$f(u)$的一阶导数存在，求$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\left[f\left(t+\dfrac{h}{a}\right)-f\left(t-\dfrac{h}{a}\right)\right]$（其中，$t$和$a$均与$h$无关）；

（3）设 $f(x)$ 的 n 阶导数存在，且 $f^{(n-1)}(a)=0$，求极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f^{(n-1)}(x)}{x-a}$。

解　（1）原式 $=\lim\limits_{x\to 0}[(2+\tan x)^{10}-2^{10}]/\sin x+\lim\limits_{x\to 0}[(2-\sin x)^{10}-2^{10}]/-\sin x$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}[(2+\tan x)^{10}-2^{10}]/\tan x+\lim_{x\to 0}[(2-\sin x)^{10}-2^{10}]/-\sin x$$

$$=[x^{10}]'\Big|_{x=2}+[x^{10}]'\Big|_{x=2}=10\cdot 2^{10}$$

（2）
$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[f\left(t+\frac{h}{a}\right)-f\left(t-\frac{h}{a}\right)\right]=\frac{1}{a}\lim_{h\to 0}\left[\frac{f\left(t+\frac{h}{a}\right)-f(t)}{\frac{h}{a}}+\frac{f\left(t-\frac{h}{a}\right)-f(t)}{-\frac{h}{a}}\right]$$

$$=\frac{1}{a}[f'(t)+f'(t)]=\frac{2}{a}f'(t)$$

（3）
$$\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)}{x-a}=f^{(n)}(a)$$

【例 3.101】　设 $f(x),\varphi(x),g(x)$ 都有连续的二阶导数，求极限：

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^3}\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & \varphi(x)\\ f(x+h) & g(x+h) & \varphi(x+h)\\ f(x+2h) & g(x+2h) & \varphi(x+2h)\end{vmatrix}$$

解　原式

$$=\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & \varphi(x)\\ \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} & \dfrac{g(x+h)-g(x)}{h} & \dfrac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}\\ \dfrac{f(x+2h)+f(x)-2f(x+h)}{h^2} & \dfrac{g(x+2h)+g(x)-2g(x+h)}{h^2} & \dfrac{\varphi(x+2h)+\varphi(x)-2\varphi(x+h)}{h^2}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & \varphi(x)\\ f'(x) & g'(x) & \varphi'(x)\\ \dfrac{2f'(x+2h)-2f'(x+h)}{2h} & \dfrac{2g'(x+2h)-2g'(x+h)}{2h} & \dfrac{2\varphi'(x+2h)-2\varphi'(x+h)}{2h}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & \varphi(x)\\ f'(x) & g'(x) & \varphi'(x)\\ f''(x) & g''(x) & \varphi''(x)\end{vmatrix}$$

【例 3.102】　设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有二阶导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3$，求 $f(0),f'(0),f''(0)$ 及 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$。

解 因 $$\lim_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)}=e^3$$

故 $$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)=3\Rightarrow\lim_{x\to 0}\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)=0\Rightarrow\lim_{x\to 0}\left(x+\frac{f(x)}{x}\right)=0$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0\Rightarrow\lim_{x\to 0}f(x)=0\Rightarrow f(0)=0,\ f'(0)=0$$

又 $$\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)\sim x+\frac{f(x)}{x}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{x+\frac{f(x)}{x}}{x}=3\Rightarrow x+\frac{f(x)}{x}=3x+\alpha x\ \ (\lim_{x\to 0}\alpha=0)$$

故 $$f(x)=2x^2+o(x^2)\Rightarrow f''(0)=4$$

所以 $$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2x^2+o(x^2)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+2x+\alpha x)^{\frac{1}{2x+\alpha x}\cdot\frac{2x+\alpha x}{x}}=e^2$$

【例 3.103】 求极限 $\lim\limits_{x\to\pi}(\cos 3x-\cos x)\cot^2 2x$。

解 方法 1:

$$\text{原式}\ (0\cdot\infty)=\lim_{x\to\pi}\frac{\cos 3x-\cos x}{\tan^2 2x}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$$
$$=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x-3\sin 3x}{4\tan 2x\sec^2 2x}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$$
$$=\lim_{x\to\pi}\frac{1}{4\sec^2 2x}\cdot\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x-3\sin 3x}{\tan 2x}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to\pi}\frac{\cos x-9\cos 3x}{2\sec^2 2x}=\frac{1}{4}\times\frac{-1+9}{2}=1$$

方法 2: 令 $x=\pi-t$，则

$$\text{原式}\ (0\cdot\infty)=\lim_{t\to 0}\frac{\cos 3(\pi-t)-\cos(\pi-t)}{\tan^2 2(\pi-t)}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-\cos 3t}{\tan^2 2t}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-\cos 3t}{4t^2}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t+3\sin 3t}{8t}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{-\cos t+9\cos 3t}{8}=\frac{-1+9}{8}=1$$

【例 3.104】 求极限 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{(x^3-\pi^3)\sin 5x}{e^{\sin^2 x}-1}$。

解　方法 1：

$$\text{原式}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\pi}(x^2+\pi x+\pi^2)\lim_{x\to\pi}\frac{(x-\pi)\sin 5x}{e^{\sin^2 x}-1}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=3\pi^2\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 5x+5(x-\pi)\cos 5x}{2e^{\sin^2 x}\cdot\sin x\cos x}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=3\pi^2\lim_{x\to\pi}\frac{1}{2e^{\sin^2 x}\cdot\cos x}\cdot\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 5x+5(x-\pi)\cos 5x}{\sin x}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=-\frac{3\pi^2}{2}\lim_{x\to\pi}\frac{5\cos 5x+5\cos 5x-25(x-\pi)\sin 5x}{\cos x}$$

$$=-15\pi^2$$

方法 2：令 $x=\pi-t$，则

$$\text{原式}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\cos(-3\pi^2 t+3\pi t^2-t^3)\sin 5t}{e^{\sin^2 t}-1}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{(-3\pi^2 t+3\pi t^2-t^3)5t}{t^2}=-15\pi^2$$

【例 3.105】　求极限 $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\tan x}{\tan a}\right)^{\cot(x-a)}$，其中 $a\neq\dfrac{k\pi}{2}$，k 为整数。

解　方法 1：

$$\text{原式}\,(1^\infty)=\lim_{x\to a}e^{\frac{\ln\tan x-\ln\tan a}{\tan(x-a)}}=e^{\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln\tan x-\ln\tan a}{x-a}}$$

而

$$\lim_{x\to a}\frac{\ln\tan x-\ln\tan a}{x-a}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to a}\cot x\sec^2 x=\lim_{x\to a}\frac{2}{\sin 2x}=\frac{2}{\sin 2a}$$

故

$$\text{原式}=e^{\frac{2}{\sin 2a}}$$

方法 2：因为 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln\tan x-\ln\tan a}{x-a}=(\ln\tan x)'\big|_{x=a}=\cot x\sec^2 x\big|_{x=a}=\dfrac{2}{\sin 2a}$

所以

$$\text{原式}\,(1^\infty)=\lim_{x\to a}e^{\frac{\ln\tan x-\ln\tan a}{\tan(x-a)}}=e^{\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln\tan x-\ln\tan a}{x-a}}=e^{\frac{2}{\sin 2a}}$$

【例 3.106】 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+e^{ax})\ln\left(1+\dfrac{b}{x}\right)$，其中 a,b 为常数，且 $a>0$。

解 因为当 $x\to+\infty$ 时，$\ln(1+e^{-ax})\sim e^{-ax}$，$\ln\left(1+\dfrac{b}{x}\right)\sim\dfrac{b}{x}$，所以

$$
\begin{aligned}
&\text{原式}\ (\infty\cdot 0)\\
&=\lim_{x\to+\infty}\ln e^{ax}(1+e^{-ax})\ln\left(1+\frac{b}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}[ax-\ln(1+e^{-ax})]\cdot\frac{b}{x}\\
&=ab+\lim_{x\to+\infty}\frac{be^{-ax}}{x}=ab+b\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{xe^{ax}}=ab
\end{aligned}
$$