第三单元　微分中值定理与导数应用　测试题及详解

一、填空题

1、$\lim\limits_{x\to 0} x\ln x =$__________。

2、函数 $f(x)=2x-\cos x$ 在区间______________单调增。

3、函数 $f(x)=4+8x^3-3x^4$ 的极大值是____________。

4、曲线 $y=x^4-6x^2+3x$ 在区间__________是凸的。

5、函数 $f(x)=\cos x$ 在 $x=0$ 处的 $2m+1$ 阶泰勒多项式是_________。

6、曲线 $y=xe^{-3x}$ 的拐点坐标是_________。

7、若 $f(x)$ 在含 x_0 的 (a,b)（其中 $a<b$）内恒有二阶负的导数，且_______，则 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 (a,b) 上的最大值。

8、$y=x^3+2x+1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有__________个零点。

9、$\lim\limits_{x\to 0}\cot x(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x})=$_________。

10、$\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x})=$__________。

11、曲线 $y=e^{-x^2}$ 的上凸区间是___________。

12、函数 $y=e^x-x-1$ 的单调增区间是___________。

二、单项选择

1、函数 $f(x)$ 有连续二阶导数且 $f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=-2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}=$（　　）

（A）不存在；　（B）0；　（C）−1；　（D）−2。

2、设 $f'(x)=(x-1)(2x+1), x\in(-\infty,+\infty)$，则在 $(\dfrac{1}{2},1)$ 内曲线 $f(x)$（　　　）

（A）单调增凹的；　　　　（B）单调减凹的；

（C）单调增凸的；　　　　（D）单调减凸的。

3、$f(x)$ 在 (a,b) 内连续，$x_0\in(a,b), f'(x_0)=f''(x_0)=0$，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处（　　）

（A）取得极大值；　　　　（B）取得极小值；

（C）一定有拐点 $(x_0, f(x_0))$；　　（D）可能取得极值，也可能有拐点。

4、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则Ⅰ：在 (a,b) 内 $f'(x)\equiv 0$ 与Ⅱ：在 (a,b) 上 $f(x)\equiv f(a)$ 之间关系是（　　　）

（A）Ⅰ是Ⅱ的充分但非必要条件；　（B）Ⅰ是Ⅱ的必要但非充分条件；
（C）Ⅰ是Ⅱ的充分必要条件；　（D）Ⅰ不是Ⅱ的充分条件，也不是必要条件。

5、设 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续可导，$f(x)g(x)\neq 0$，且 $f'(x)g(x)<f(x)g'(x)$，则当 $a<x<b$ 时，则有（　　）

（A）$f(x)g(x)<f(a)g(a)$；　（B）$f(x)g(x)<f(b)g(b)$；

（C）$\dfrac{f(x)}{g(x)}<\dfrac{f(a)}{g(a)}$；　（D）$\dfrac{g(x)}{f(x)}>\dfrac{g(a)}{f(a)}$。

6、方程 $x^3-3x+1=0$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内（　　）

（A）无实根；　（B）有唯一实根；
（C）有两个实根；　（D）有三个实根。

7、已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续，且 $f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则在点 $x=0$ 处 $f(x)$（　　）

（A）不可导；　（B）可导，且 $f'(0)\neq 0$；

(C) 取得极大值；　（D）取得极小值。

8、设 $f(x)$ 有二阶连续导数，且 $f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$，则（　　）

（A）$f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值；　（B）$f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值；

（C）$(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点；　（D）$f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值点。

9、设 a,b 为方程 $f(x)=0$ 的二根，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则 $f'(x)$ 在 (a,b) 内（　　）

(A) 只有一实根；　(B) 至少有一实根；　(C) 没有实根；　(D) 至少有 2 个实根。

10、在区间 $[-1,1]$ 上满足罗尔定理条件的函数是（　　）

(A) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$；　(B) $f(x)=|x|$；

(C) $f(x)=1-x^2$；　(D) $f(x)=x^2-2x-1$。

11、函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导，则在 (a,b) 内 $f'(x)>0$ 是函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加的（　　）

(A) 必要但非充分条件；　(B) 充分但非必要条件；
(C) 充分必要条件；　(C) 无关条件。

12、设 $y=f(x)$ 是满足微分方程 $y''+y'-e^{\sin x}=0$ 的解，且 $f'(x_0)=0$，则 $f(x)$ 在（　）

（A） x_0的某个邻域单调增加；　　　　（B） x_0的某个邻域单调减少；

（C） x_0处取得极小值；　　　　　　（D） x_0处取得极大值。

三、计算解答

1、计算下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}}$ ；　　　　(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\cot x}{\ln x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x^2\ln(1+x)}$；　　　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\ln(1-x)\right]$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^3}$ ；　　　　(6) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\tan(ax)}{\ln\tan(bx)}$。

2、证明以下不等式

(1)、设$b>a>e$，证明$a^b>b^a$。

(2)、当$0<x<\dfrac{\pi}{2}$时，有不等式$\tan x+2\sin x>3x$。

3、已知$y=x^3\sin x$，利用泰勒公式求$y^{(6)}(0)$。

4、试确定常数a与n的一组数，使得当$x\to 0$时，ax^n与$\ln(1-x^3)+x^3$为等价无穷小。

5、设$f(x)$在$[a,b]$上可导，试证存在$\xi(a<\xi<b)$，使

$$\frac{1}{b-a}\begin{vmatrix} b^3 & a^3 \\ f(a) & f(b)\end{vmatrix}=\xi^2\left[3f(\xi)+\xi f'(\xi)\right]。$$

6、作半径为$\boldsymbol{r}$的球的外切正圆锥，问此圆锥的高为何值时，其体积$\boldsymbol{V}$最小，并求出该体积最小值。

7、若$f(x)$在$[0,1]$上有三阶导数，且$f(0)=f(1)=0$，设$F(x)=x^3f(x)$，试证：在$(0,1)$内至少存在一个ξ，使$F'''(\xi)=0$。

第三单元　微分中值定理与导数应用测试题详细解答

一、填空题

1、<u>0</u>　　$\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}(-x)=0$

2、<u>$(-\infty,+\infty)$</u>　　$\because f'(x)=2+\sin x>0$ $\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增

3、<u>20</u>　　$\because f'(x)=24x^2-12x^3=-12x^2(x-2)$

令 $f'(x)=0\Rightarrow x_1=0, x_2=2$

当 $x<2$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>2$ 时，$f'(x)<0$

$\therefore$ 极大值为 $f(2)=20$

4、<u>$(-1,1)$</u>　　$y'=4x^3-12x+3$，$y''=12x^2-12=12(x+1)(x-1)$

当 $x<-1$ 时，$y''>0$. 当 $x\in(-1,1)$ 时，$y''<0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$y''>0$

$\therefore$ 曲线在 $(-1,1)$ 上是凸的

5、<u>$1-\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{1}{4!}x^4+\cdots+(-1)^m\dfrac{1}{(2m)!}x^{2m}$</u>

6、<u>$(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}e^{-2})$</u>　　$\because y'=e^{-3x}-3xe^{-3x}=e^{-3x}(1-3x)$，

$y''=-3e^{-3x}(1-3x)-3e^{-3x}=e^{-3x}(9x-6)=9e^{-3x}(x-\dfrac{2}{3})$

令 $y''=0\Rightarrow x=\dfrac{2}{3}$，当 $x<\dfrac{2}{3}$ 时，$y''<0$；当 $x>\dfrac{2}{3}$ 时 $y''>0$

而当 $x=\dfrac{2}{3}$ 时，$y=\dfrac{2}{3}e^{-2}$ $\therefore$ 拐点为 $(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}e^{-2})$

7、<u>$f'(x_0)=0$</u>，　$\because f''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{x-x_0}<0\Rightarrow\dfrac{f'(x)}{x-x_0}<0$

当 $x<x_0$ 时，$f'(x_0)>0, f(x)$ 单调增加；当 $x>x_0$ 时，$f'(x)<0, f(x)$ 单调减少

8、<u>1</u>　$\because y'=3x^2+2>0$，$\therefore y$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加

又 $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$. $\therefore$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有 1 个零点。

9、$\frac{1}{6}$ 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x(x-\sin x)}{x\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\cos x\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{6}$ 。

10、$\frac{1}{3}$ 原式= $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^2\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan^2 x}{x^2}=\frac{1}{3}$ 。

11 、 $\underline{(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})}$ $y'=-2xe^{-x^2}, y''=[-2-(-2x)^2]e^{-x^2}$ 令 $y''=0\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ ， 当

$x\in(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ 时， $y''<0$，上凸，其它区间 $y''>0$，上凹，故应填入 $(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$。

12、$\underline{(0,+\infty)}$ 函数 $y=e^x-x-1$ 的定义区间为 $(-\infty,+\infty)$，在定义区间内连续、可导，且

$y'=e^x-1$，因为在 $(0,+\infty)$ 内 $y'>0$，所以函数 $y=e^x-x-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加。

二、选择题

1、选（C） $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)-1}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f''(x)}{2}=-1$

2、选（B） 当 $x\in(\frac{1}{2},1)$ 时，$f'(x)<0$，又 $f''(x)=4x-1=4(x-\frac{1}{4})>0$ $x\in(\frac{1}{2},1)$

$\therefore f(x)$ 在 $(\frac{1}{2},1)$ 上单调减且为凹的。

3、选（D） $f(x)=x^3$，则 $f'(0)=f''(0)=0$，$x=0$ 是 $f(x)=x^3$ 的拐点；设 $f(x)=x^4$，

则 $f'(0)=f''(0)=0$，而 $x=0$ 是 $f(x)=x^4$ 的极值点。

4、选（C）由 $f(x)$ 在 (a,b) 内 $f'(x)\equiv0$ 的充分必要条件是在 (a,b) 内 $f'(x)\equiv C$（C 为常数），又因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内连续，所以 $C=f(a)$，即在 (a,b) 上 $f(x)\equiv f(a)$。

5、选（C）由 $f'(x)g(x)<f(x)g'(x)\Rightarrow f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$

$\Rightarrow[\frac{f(x)}{g(x)}]'<0\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}$ 单调减少， $x\in(a,b)$

$\therefore\frac{f(x)}{g(x)}<\frac{f(a)}{f(b)}$.

6、选（D） 令 $f(x)=x^3-3x+1$，则 $f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$；

当 $x<-1$ 时， $f'(x)>0$， $f(x)$ 单调增加，

当 $x\in(-1,1)$ 时， $f'(x)<0$ ， $f(x)$ 单调减少

当 $x\in(1,+\infty)$ 时， $f'(x)>0$ ， $f(x)$ 单调增加.

而 $f(-1)=3$ ， $f(1)=-1$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ ， $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上有一实根，在 $[-1,1]$ 上有一实根，在 $(1,+\infty)$ 上有一实根。

7、选（D） 利用极限的保号性可以判定 $f(x)$ 的正负号：

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2>0\Rightarrow\dfrac{f(x)}{1-\cos x}>0$ （在 $x=0$ 的某空心邻域）;

由 $1-\cos x>0$ ，有 $f(x)>0=f(0)$ ，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 取极小值。

8、选（B） 由极限的保号性：

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1>0\Rightarrow\dfrac{f''(x)}{|x|}>0$（在 $x=0$ 的某空心邻域）；由此 $f''(x)>0$（在 $x=0$ 的某空心邻域）， $f'(x)$ 单调增，又由 $f'(0)=0$ ， $f'(x)$ 在 $x=0$ 由负变正，由极值第一充分条件， $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小点 。

9、选（B）由罗尔定理保证至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使 $f'(\xi)=0$ 。

10、选(C),A 选项 $f(x)$ 在 $x=0$ 不连续,B 选项 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导,D 选项 $f(1)\neq f(-1)$ 。

11、选（B)，如 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单增，但 $f'(0)=0$ ，故非必要条件。

12、选（C），由 $f'(x_0)=0$ 有 $y''(x_0)=e^{\sin x_0}-y'(x_0)=e^{\sin x_0}>0$ ，所以 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值。

三、计算解答

1、计算极限

（1）解： $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}}$

$$=\lim_{x\to-1^+}\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{\arccos x}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}}=\lim_{x\to-1^+}\frac{1}{\sqrt{\arccos x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

(2)解： $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln\cot x}{\ln x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{1}{\cot x}\cdot(-\csc^2 x)}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}-\dfrac{x\cdot\sin x}{\cos x\cdot\sin^2 x}=-1$。

(3)解： $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x^2\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin x}(e^{x-\sin x}-1)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\dfrac{1}{6}$

(4)解： $\lim\limits_{x\to0}[\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\ln(1-x)]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+\ln(1-x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\dfrac{1}{1-x}}{2x}=\lim\limits_{x\to0}[-\dfrac{1}{2(1-x)}]=-\dfrac{1}{2}$

(5)解： $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\arctan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{3x^2(1+x^2)}=\dfrac{1}{3}$。

(6)解： $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln\tan(ax)}{\ln\tan(bx)}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{1}{\tan(ax)}\cdot\sec^2(ax)\cdot a}{\dfrac{1}{\tan(bx)}\cdot\sec^2(bx)\cdot b}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\tan(bx)\cdot\sec^2(ax)\cdot a}{\tan(ax)\cdot\sec^2(bx)\cdot b}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{bx\cdot\sec^2(ax)\cdot a}{ax\cdot\sec^2(bx)\cdot b}=1$

2、(1)证明： $a^b>b^a\Leftrightarrow b\ln a>a\ln b$

令 $f(x)=x\ln a-a\ln x$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

$\because f'(x)=\ln a-\dfrac{a}{x}>0\quad x\in[a,b]$

$\therefore f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加，$\therefore f(b)>f(a)$

得 $b\ln a-a\ln b>a\ln a-a\ln a=0$ ， 即 $a^b>b^a$

(2)令 $f(x)=\tan x+2\sin x-3x$ 在 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 时

$f'(x)=\sec^2 x+2\cos x-3=\dfrac{1}{\cos^2 x}+\cos x+\cos x-3\geq 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot\cos x\cdot\cos x}-3=0$

$\therefore f'(x)>0$，$\therefore f(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2})$ 上单调增

$\therefore\forall x\in(0,\dfrac{\pi}{2})\quad f(x)>f(0)$ 即 $\tan x+2\sin x>3x$

3、解： $\because$ 泰勒公式 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$

而 $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{m-1}\dfrac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+o(x^{2m})$

$\therefore y=x^3\sin x=x^4-\dfrac{x^6}{3!}+\dfrac{x^8}{5!}+\cdots$

对比 x^6 的导数有：$\dfrac{f^{(6)}(0)}{6!}=-\dfrac{1}{3!}\Rightarrow f^{(6)}(0)=-\dfrac{6!}{3!}=-120$

4、解： $\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax^n}{\ln(1-x^3)+x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{anx^{n-1}}{\dfrac{-3x^2}{1-x^3}+3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}[-\dfrac{an}{3}x^{n-6}(1-x^3)]=1$

$\therefore n=6$，$-\dfrac{an}{3}=1\Rightarrow a=-\dfrac{1}{2}$

5、即证： $\dfrac{b^3f(h)-a^3f(a)}{b-a}=\xi^2[3f(\xi)+\xi f'(\xi)]$

令 $F(x)=x^3f(x)$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足拉氏定理的条件

$\therefore \exists\xi\in(a,b)$，使 $\dfrac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(\xi)$

即 $\dfrac{b^3f(h)-a^3f(a)}{b-a}=3\xi^2f(\xi)+\xi^3f'(\xi)$

即 $\dfrac{1}{b-a}\begin{vmatrix} b^3 & a^3 \\ f(a) & f(b)\end{vmatrix}=\xi^2[3f(\xi)+\xi f'(\xi)]$

6、解： 设圆锥的高为 h，底面圆半径为 R，则有比例关系

$$\frac{h-r}{\sqrt{h^2+R^2}}=\frac{r}{h}\Rightarrow R^2=\frac{hr^2}{h-2r}$$

$$\therefore V=\frac{1}{3}\pi R^2h=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{h^2r^2}{h-2r}\quad (h>2r)$$

$$\frac{dV}{dh}=\frac{1}{3}\pi\frac{2hr^2(h-2r)-h^2r^2}{(h-2r)^2}=\frac{\frac{1}{3}\pi hr^2(2h-4r-h)}{(h-2r)^2}$$

令 $\dfrac{dV}{dh}=0\Rightarrow$ 唯一驻点 $h=4r$

所以，当 $h=4r$ 时，体积最小，此时 $V=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{16r^2\cdot r^2}{4r-2r}=\frac{8}{3}\pi r^3$

7、解： 由题设可知 $F(x),F'(x),F''(x),F'''(x)$ 在 $[0,1]$ 上存在，又 $F(0)=F(1)$，由罗尔定理，$\exists\xi_1\in(0,1)$ 使 $F'(\xi_1)=0$，又 $F'(0)=[3x^2f(x)+x^3f'(x)]|_{x=0}=0$，可知 $F'(x)$ 在 $[0,\xi_1]$ 上满足罗尔定理，于是 $\exists\xi_2\in(0,\xi_1)$，使 $F''(\xi_2)=0$，又 $F''(0)=[6xf(x)+6x^2f'(x)+x^3f''(x)]|_{x=0}=0$，对 $F''(x)$ 在 $[0,\xi_2]$ 上再次利用罗尔定理，故有 $\xi\in(0,\xi_2)\subset(0,\xi_1)\subset(0,1)$，使得 $F'''(\xi)=0$。