《高等数学Ⅰ（2）》试卷

一、填空题（每小题 3 分，共 24 分）

1. 设$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$为非零向量，且$\vec{a}=\vec{b}\times\vec{c}$，$\vec{b}=\vec{c}\times\vec{a}$，$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$，则$|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|=$__3__.

2. 二重极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\cos\frac{1}{x}+(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}\right)=$__1__.

3. 设$z=\arctan\frac{y}{x}$，则$\mathrm{d}z\big|_{(1,1)}=$ __$-\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\mathrm{d}y$__ .

4. 设$u=xy^2z^3$，则u在点$A(2,-1,1)$沿方向__$(1,-4,6)$__增加最快；

5. 曲线$\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\\ z=4\sin\frac{t}{2}\end{cases}$在$t=\frac{\pi}{2}$处的法平面方程为__$x+y+\sqrt{2}z=4+\frac{\pi}{2}$__ .

6. 函数$z=z(x,y)$由方程$F(z^2-x^2,z^2-y^2)=0$所确定，其中函数F可微，则$\frac{\partial z}{\partial x}=$

__$\dfrac{xF_1'}{z(F_1'+F_2')}$__ .

7. 交换二次积分$\int_1^{\mathrm{e}}\mathrm{d}x\int_0^{\ln x}f(x,y)\mathrm{d}y$的积分次序为__$\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\mathrm{e}^y}^{\mathrm{e}}f(x,y)\mathrm{d}x$__ .

8. 函数$z=x^3+y^3-3x^2-3y^2$的极小值点是__$(2,2)$__.

二、选择题（每小题 3 分，共 24 分）

1．直线$L:\frac{x+3}{-2}=\frac{y+4}{-7}=\frac{z}{3}$与平面$\pi:4x-2y-2z=3$的关系为 （ A ）

(A) 平行，但直线不在平面上； (B) 直线在平面上；

(C) 垂直相交； (D) 相交但不垂直.

2．方程$y^2-2x^2-3z^2=0$所确定的曲面是 （ D ）

(A) 椭球面； (B) 双叶双曲面； (C) 椭圆抛物面； (D) 锥面.

3．设$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，且$|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{3}$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=$ （ D ）

(A) 0； (B) ±2； (C) 3； (D) ±1.

4. 设$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)+3x-2y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，则$f(x,y)$在点$(0,0)$处 （ D ）

(A) 不连续； (B) 连续但是偏导数不存在；

(C) 偏导数存在但是不可微；　　　　　　　　(D) 可微.

5. 设函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处取得极大值，则函数 $\varphi(x)=f(x,y_0)$ 在 x_0 处与函数 $\psi(y)=f(x_0,y)$ 在 y_0 处　　　　　　　　(A)

(A) 一定都取得极大值；　　　　　　　　(B) 恰有一个取得极大值；

(C) 至多有一个极大值；　　　　　　　　(D) 都不能取得极大值.

6. 已知 $f(x,y)=\sin\sqrt{x^2+y^4}$，则　　　　　　　　(B)

(A) $f_x(0,0)$，$f_y(0,0)$ 都存在；　　　　(B) $f_x(0,0)$ 不存在，但 $f_y(0,0)$ 存在；

(C) $f_x(0,0)$ 存在，但 $f_y(0,0)$ 不存在；　　(D) $f_x(0,0)$，$f_y(0,0)$ 都不存在.

7. 曲面 $2xy+4z-e^z=3$ 在点 $(1,2,0)$ 处的法线与直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-2}$ 的夹角　　(C)

(A) $\dfrac{\pi}{4}$；　　　(B) $\dfrac{\pi}{3}$；　　　(C) $\dfrac{\pi}{2}$；　　　(D) 0.

8. 二次积分 $\int_0^{2R}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{2Ry-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x=$　　　　　　　　(D)

(A) $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{R\sin\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\mathrm{d}\rho$；　　(B) $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{R\sin\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$；

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2R\sin\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\mathrm{d}\rho$；　　(D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2R\sin\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$.

三、计算题 (每小题 6 分，共 18 分）

1. 计算二重积分 $\iint\limits_D\dfrac{\sin y}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $y=x$，$y^2=x$ 所围成的闭区域.

解：$\iint\limits_D\dfrac{\sin y}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y}\dfrac{\sin y}{y}\mathrm{d}x$

$=\int_0^1(\sin y-y\sin y)\mathrm{d}y=1-\sin 1$

2. 计算二重积分 $\iint\limits_D\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D:x^2+y^2\le a^2(a>0)$.

解：原式=$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a e^{\rho}\rho\mathrm{d}\rho$

$$=2\pi(\rho e^{\rho}-e^{\rho})\Big|_0^a=2\pi[(a-1)e^a+1]$$

3. 计算二重积分 $\iint\limits_D\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D:x^2+y^2\le R^2$.

解：D 关于直线 $y=x$ 对称，利用轮换对称性化简计算. 得

$$\iint_D (\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D (\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})\iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^R \rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho=\frac{\pi R^4}{4}(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}).$$

四、(本题 8 分) 求过直线 $L:\begin{cases}7x-y-2z=8\\ x-9y+8z=20\end{cases}$ 且与 $(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=\frac{1}{2}$ 相切的平面方程.

解：过直线 L 的平面束方程为 $7x-y-2z-8+\lambda(x-9y+8z-20)=0$，

即 $(\lambda+7)x-(9\lambda+1)y+(8\lambda-2)z-20\lambda-8=0$，

令球心 $(1,-1,0)$ 到平面束的距离为 $\frac{1}{\sqrt{2}}$，得

$$\frac{|\lambda+7+9\lambda+1-20\lambda-8|}{\sqrt{(\lambda+7)^2+(9\lambda+1)^2+(8\lambda-2)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}，即 \frac{|-10\lambda|}{\sqrt{146\lambda^2+54}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

解得 $\lambda=\pm1$，

代入平面束方程

当 $\lambda=1$ 时，得 $8x-10y+6z-28=0$，即 $4x-5y+3z-14=0$；

当 $\lambda=-1$ 时，得 $6x+8y-10z+12=0$，即 $3x+4y-5z+6=0$.

五、(本题 8 分) 设 $\begin{cases}xy^2-uv=1\\ x^2+y^2-u+v=0\end{cases}$， $w=\mathrm{e}^{u+v}$，其中 u，v 是由上式确定的 x，y 的函数，

求 $\frac{\partial w}{\partial x}$.

解：两边关于 x 求导得：$\begin{cases}y^2-u_x v-uv_x=0\\ 2x-u_x+v_x=0\end{cases}$，

因此 $u_x=\frac{y^2+2xu}{u+v}$； $v_x=\frac{y^2-2xv}{u+v}$；

则 $\frac{\partial w}{\partial x}=e^{u+v}\frac{2[x(u-v)+y^2]}{u+v}$.

六、(本题 9 分）在椭球面 $\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{3}=1$ 的所有内接长方体(各边分别平行坐标轴)中，求最大的内接长方体体积.

解：设顶点坐标为$(x,y,z)\quad(x,y,z>0)$，则$v=8xyz$.

令$F(x,y,z)=8xyz+\lambda(\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{3}-1)$

则
$$\begin{cases} F_x(x,y,z)=8yz+\dfrac{\lambda}{2}x=0, \\ F_y(x,y,z)=8xz+2\lambda y=0, \\ F_z(x,y,z)=8xy+\dfrac{2\lambda}{3}z=0. \end{cases}$$

解得：$x=\frac{2}{\sqrt{3}},y=\frac{1}{\sqrt{3}},z=1$.故$V_{\max}=\frac{16}{3}$.

七、(本题 9 分) 设变换$\begin{cases} u=x-2y \\ v=x+ay \end{cases}$，可把方程$6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$化简为$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$

(其中$z=z(x,y)$有二阶连续偏导数)，求常数a.

解：视$z=z\left[u(x,y),v(x,y)\right]$，则$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-2\frac{\partial z}{\partial u}+a\frac{\partial z}{\partial v}$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(a-2)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-4a\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

从而$6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(10+5a)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+(6+a-a^2)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$，

$\because$变换将$6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$化简为$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，

$\therefore$有$\begin{cases} 10+5a\neq 0 \\ 6+a-a^2=0 \end{cases}\Rightarrow a=3$.

注：有的题目有多种解法，以上解答和评分标准仅供参考.