一、填充题（每小题 3 分，共 15 分）

1．设向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的模分别为$|\vec{a}|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$|\vec{b}|=2$，则$|\vec{a}\times\vec{b}|^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=2$.

2．设函数$z=\ln(1+\dfrac{x}{y})$，则z在点$(1,1)$处的全微分$dz=\dfrac{1}{2}(dx-dy)$.

3．交换积分次序：$\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_y^{2-y} f(x,y)dx$.

4．设空间曲线$\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ x+y+z=0\end{cases}$，则曲线积分 $\oint_\Gamma z^2 ds=\dfrac{2}{3}\pi$.

5．设级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，且$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n+u_{n+1}\right)=2u-u_1$.

二、 选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．设直线$L_1:\begin{cases}x+z-1=0\\ x-2y+3=0\end{cases}$与$L_2:\begin{cases}x=3t,\\ y=-7+4t\\ z=2+t\end{cases}$，则$L_1$与$L_2$的关系为 （ D ）

（A） 平行 （B） 重合 （C）相交 （D） 异面

2．设$f_x'(a,b)$存在，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x+a,b)-f(a-x,b)}{x}=$ （ C ）

（A） $f_x'(a,b)$ （B） 0

（C） $2f_x'(a,b)$ （D） $\dfrac{1}{2}f_x'(a,b)$

3． 设D是以原点为圆心，R为半径的圆围成的闭区域，则二重积分$\iint\limits_D |xy|d\sigma=$ （ A ）

（A）$\dfrac{R^4}{2}$ （B）0 （C）$\dfrac{R^4}{4}$ （D）R^4

4. 设Σ是曲面$z=x^2+y^2$ 在 $1\le z\le 4$ 的部分，则曲面积分 $\iint\limits_\Sigma \dfrac{1}{\sqrt{1+4z}}dS=$ （ B ）

（A）4π （B）3π （C）$(\sqrt{17}-\sqrt{5})\pi$ （D）$\dfrac{(\sqrt{17}-\sqrt{5})}{2}\pi$

5．级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的充要条件是 （ C ）

(A) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$　　　　(B) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = r < 1$

(C) 部分和数列$\{S_n\}$极限存在　　　　(D) $u_n \le \dfrac{1}{n^2}$

三、计算题（本题 5 小题，每小题 6 分，共 30 分）

1．求由曲线$y=e^x,\ x=1,\ x=2,\ y=0$所围成的图形绕y轴旋转所得旋转体的体积.

解：$V_y = 2\pi\int_1^2 xe^x\mathrm{d}x = 2\pi\int_1^2 x\mathrm{d}e^x = 2\pi[xe^x]_1^2 - 2\pi\int_1^2 e^x\mathrm{d}x = 2\pi e^2$.

或 $V_y = (4\pi e - \pi e) + 4\pi(e^2 - e) - \pi\int_e^{e^2}\ln^2 y\mathrm{d}y$

$$= 4\pi e^2 - \pi e - \pi[y\ln^2 y\Big|_e^{e^2} - 2\int_e^{e^2}\ln y\mathrm{d}y] = 2\pi[y\ln y\Big|_e^{e^2} - \int_e^{e^2}\mathrm{d}y] = 2\pi e^2.$$

2．设$z=z(x,y)$是由方程$x+y-z=e^z$所确定的隐函数，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：令$F(x,y,x) = x+y-z-e^z$，则$F_x = 1, F_y = 1, F_z = -1-e^z$，

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{1}{1+e^z},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{1}{1+e^z},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{1+e^z}\right) = -\frac{1}{(1+e^z)^2}\cdot\left(e^z\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -\frac{e^z}{(1+e^z)^3}.$$

3．求函数$f(x,y) = e^{2x}(x+y^2+2y)$的极值.

解：由 $f_x = 2e^{2x}(x+y^2+2y) + e^{2x} = 0$，　$f_y = e^{2x}(2y+2) = 0$，　得唯一驻点$(\frac{1}{2},-1)$，

又 $f_{xx}(x,y) = 4e^{2x}(x+y^2+2y+1)$，　$f_{xy}(x,y) = 2e^{2x}(2y+2)$，　$f_{yy}(x,y) = 2e^{2x}$，

则 $A = f_{xx}(\frac{1}{2},-1) = 2e$，$B = f_{xy}(\frac{1}{2},-1) = 0$，$C = f_{yy}(\frac{1}{2},-1) = 2e$，

所以 $AC - B^2 = 4e^2 > 0$ 且 $A = 2e > 0$，故函数有极小值为 $f(\frac{1}{2},-1) = -\frac{e}{2}$.

4．求曲线$\begin{cases} 2x^2+3y^2+z^2=9 \\ z^2 = 3x^2+y^2 \end{cases}$在点$(1,-1,2)$处的切线方程.

解：方程两边对 x 求导，得 $\begin{cases} 4x+6y\dfrac{dy}{dx}+2z\dfrac{dz}{dx}=0 \\ 2z\dfrac{dz}{dx}=6x+2y\dfrac{dy}{dx} \end{cases}$，

点 $(1,-1,2)$ 代入方程组得 $\begin{cases} -3\dfrac{dy}{dx}+2\dfrac{dz}{dx}=-2 \\ -\dfrac{dy}{dx}-2\dfrac{dz}{dx}=-3 \end{cases}$，解得： $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{5}{4}$， $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{7}{8}$.

曲线在点 $(1,-1,2)$ 处的切向量 $\vec{T}=(1,\dfrac{5}{4},\dfrac{7}{8})=\dfrac{1}{8}(8,10,7)$，

故所求的切线方程为： $\dfrac{x-1}{8}=\dfrac{y+1}{10}=\dfrac{z-2}{7}$.

5．计算曲线积分 $I=\int_L\left(e^x\sin y-2y\right)dx+\left(e^x\cos y+2x\right)dy$，其中曲线 L 是由点 $A\left(a,0\right)$ $(a>0)$ 沿上半圆周 $x^2+y^2=ax$ 至点 $O\left(0,0\right)$ 的弧.

解：补充线段 OA，则 $I_1=\int_{OA}\left(e^x\sin y-2y\right)dx+\left(e^x\cos y+2x\right)dy=0$，

由格林公式，$I+I_1=\oint\limits_{L+OA}\left(e^x\sin y-2y\right)dx+\left(e^x\cos y+2x\right)dy$

$$=\iint\limits_D(e^x\cos y+2-e^x\cos y+2)dxdy=\iint\limits_D 4dxdy=\frac{\pi a^2}{2}.$$

所以 $I=\dfrac{\pi a^2}{2}-I_1=\dfrac{\pi a^2}{2}-0=\dfrac{\pi a^2}{2}$.

四、（本题满分 8 分）用适当的方法判别下列级数的收敛性.

（1） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\cos\dfrac{1}{n})$；　　　　（2） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n n!}{n^n}$， a 为常数且 $0<a\neq e$.

解：（1） $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}=\dfrac{1}{2}$，

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，由比较审敛法的极限形式知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\cos\dfrac{1}{n})$ 收敛.

（2） $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^{n+1}(n+1)!\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot a^n n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a}{(1+\frac{1}{n})^n}=\dfrac{a}{e}$，

由比值审敛法知，当$0<a<e$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}$ 收敛；当$a>e$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}$ 发散.

五、（本题满分 8 分） 在圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 所围的圆锥体内作一个底面平行于 xOy 坐标平面的最大长方体，求此长方体的体积.

解：设长方体在锥面上第一卦限内的顶点坐标为（x,y,z），则长方体的体积为

$$V=2x\cdot 2y(1-z)=4xy(1-z)\qquad (x>0,y>0,z>0),$$

设拉格朗日函数 $L(x,y,z,\lambda)=4xy(1-z)+\lambda\,(\sqrt{x^2+y^2}-z)$

解方程组$\begin{cases}F_x=4y(1-z)+\lambda\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=0\\ F_y=4x(1-z)+\lambda\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,\\ F_z=-4xy-\lambda=0\\ F_\lambda=\sqrt{x^2+y^2}-z=0\end{cases}$

解方程组得 $x=y=\frac{\sqrt{2}}{3},z=\frac{2}{3}$，即有唯一驻点 $(\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{2}{3})$，由题意知必存在最大值，

因此所求长方体的体积的最大值为$V(\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{2}{3})=\frac{8}{27}$.

六、（本题满分 8 分） 计算三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2dv$，其中$\Omega$是 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 及 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 围成的立体部分.

解法 1：解方程组 $\begin{cases}z=\sqrt{4-x^2-y^2}\\ z=\sqrt{3(x^2+y^2)}\end{cases}$，得$\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=\sqrt{3}\end{cases}$， 由对称性

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2dv=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv+\iiint\limits_{\Omega}(2xy+2yz+2zx)dv$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin\varphi d\varphi\int_0^2 r^4dr=2\pi(1-\frac{\sqrt{3}}{2})\frac{32}{5}=\frac{32\pi}{5}(2-\sqrt{3})\ .$$

解法 2：解方程组$\begin{cases}z=\sqrt{4-x^2-y^2}\\ z=\sqrt{3(x^2+y^2)}\end{cases}$，得 $z=\sqrt{3}$ ，由对称性

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2dv=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv+\iiint\limits_{\Omega}(2xy+2yz+2zx)dv$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_{\sqrt{3}\rho}^{\sqrt{4-\rho^2}}(\rho^2+z^2)dz$$

$$=2\pi\int_0^1\rho[(4-\rho^2)^{\frac{3}{2}}-3\sqrt{3}]d\rho+2\pi\int_0^1\rho^3[(4-\rho^2)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{3}\rho]d\rho=\frac{32\pi}{5}(2-\sqrt{3}).$$

七、（本题满分 8 分）计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，其中$\Sigma$是抛物面$z=x^2+y^2$

$(0\le z\le a, a>0)$的外侧.

解法 1：作辅助曲面$\Sigma_1:\begin{cases}z=a\\x^2+y^2\le a\end{cases}$，取上侧，

则 $I_1=\iint\limits_{\Sigma_1}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=\iint\limits_{\Sigma_1}a^2dxdy=\pi a^3$.

设Σ与Σ_1围成空间区域为Ω，则由高斯公式得，

$$I+I_1=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=\iiint\limits_{\Omega}2(x+y+z)dv$$

$$=2\iiint\limits_{\Omega}zdv=2\int_0^a zdz\iint\limits_{x^2+y^2\le z}d\sigma=2\int_0^a\pi z^2dz=\frac{2}{3}\pi a^3.$$

$$I=\frac{2}{3}\pi a^3-I_1=\frac{2}{3}\pi a^3-\pi a^3=-\frac{1}{3}\pi a^3.$$

解法 2：$I=\iint\limits_{\Sigma}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=\iint\limits_{\Sigma}(-2x^3-2y^3+z^2)dxdy$

$$=-\iint\limits_{D_{xy}}-2x^3-2y^3+(x^2+y^2)^2dxdy\quad=-\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)^2dxdy$$

$$=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{a}}\rho^5d\rho=-2\pi\cdot\frac{a^3}{6}=-\frac{\pi a^3}{3}.$$

八（本题满分 8 分）设函数$z=f(x,y)$在点$(1,1)$的某邻域内存在一阶连续偏导数，且

$f(1,1)=1,\ f_x'(1,1)=1,\ f_y'(1,1)=2$，设$\varphi(t)=f[t,f(t,t^3)]$，求$\frac{d[\varphi^4(t)]}{dt}\Big|_{t=1}$.

解：$\frac{d[\varphi^4(t)]}{dt}=4[\varphi^3(t)]\varphi'(t)$ ， 而$\varphi'(t)=f_x'+f_y'\cdot[f_x'+3t^2f_y']$ ，

$\varphi'(1)=f_x'(1,1)+f_y'(1,1)[f_x'(1,1)+3f_y'(1,1)]=15$， 而 $\varphi(1)=f[1,f(1,1^3)]=f(1,1)=1$，

从而 $\frac{d[\varphi^4(t)]}{dt}\Big|_{t=1}=4[\varphi^3(1)]\varphi'(1)=4\times15=60$.