递归数列收敛性问题

1、数列的单调性及其判定

判定方法1：定义法

【例1】判断数列 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 的单调性。

【解】利用均值不等式：$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\le\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\quad(a_i>0)$

或 $a_1a_2\cdots a_n\le\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n$

$$\because\quad x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 1\ \le\left(\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=x_{n+1}$$

$\therefore$数列$\{x_n\}$为单调增加数列。

$$\because\ \frac{1}{y_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\cdot 1\le\left(\frac{(n+1)\frac{n}{n+1}+1}{n+2}\right)^{n+2}=\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}=\frac{1}{y_{n+1}}$$

$\therefore\ y_n\ge y_{n+1}$ $\therefore$数列$\{y_n\}$为单调减少数列。

判定方法2：作差法

【例2】已知数列$\{x_n\}$满足：$x_1=1$，$x_{n+1}=\sqrt{4+3x_n}$，$n=1,2,3\cdots$，试判断数列$\{x_n\}$的单调性。

【解】首先，$0<x_1=1<4$；假设$0<x_k<4$，则$0<x_{k+1}=\sqrt{4+3x_k}<\sqrt{4+12}=4$，所以由数学归纳法可知：任意$n\in N_+$，$0<x_n<4$。

其次，$x_{n+1}^2-x_n^2=4+3x_n-x_n^2=(4-x_n)(1+x_n)>0$，所以$x_{n+1}>x_n$，

$\therefore$数列$\{x_n\}$为单调增加数列。

判定方法3：作商法

【例3】已知数列$\{x_n\}$满足：$x_1=1$，$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{3}{x_n}\right)$，$n=1,2,3\cdots$，试判断数列$\{x_n\}$的单调性。

【解】显然$x_n>0\left(n=1,2,3\cdots\right)$，$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{3}{x_n}\right)\geq\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{x_n\cdot\frac{3}{x_n}}=\sqrt{3}$，

$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{x_n^2}\right)\leq\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{3}\right)=1$，即$x_{n+1}\leq x_n$，

$\therefore$数列$\{x_n\}$为单调减少数列。

判定方法4：数学归纳法

【例4】已知数列$\{x_n\}$满足：$x_1=\sqrt{2}$，$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$，$n=1,2,3\cdots$，试判断数列$\{x_n\}$的单调性。

【解】$x_2=\sqrt{2+x_1}=\sqrt{2+\sqrt{2}}>\sqrt{2}=x_1$；假设$x_k>x_{k-1}$，则$\sqrt{2+x_k}>\sqrt{2+x_{k-1}}$，即$x_{k+1}>x_k$。由数学归纳法可知，数列$\{x_n\}$为单调增加数列。

判定方法5：作差法和数学归纳法的综合运用

【例5】已知数列$\{x_n\}$满足：$x_1=k$，$x_{n+1}=\frac{1+2x_n}{1+x_n}$，$n=1,2,3\cdots$，试判断数列$\{x_n\}$的单调性。

【解】显然$0<x_{n+1}=1+\frac{x_n}{1+x_n}<2$，$n=1,2,3\cdots$，$x_2-x_1=\frac{1+2k}{1+k}-k=\frac{1+k-k^2}{1+k}$，

解得 当$\frac{1-\sqrt{5}}{2}<k<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$时，$x_2>x_1$；当$k>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$或$k<\frac{1-\sqrt{5}}{2}$时，$x_2<x_1$。

首先考虑$\frac{1-\sqrt{5}}{2}<k<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$时，$x_2>x_1$；假设$x_n>x_{n-1}$，则

$x_{n+1}-x_n=\left(1+\frac{x_n}{1+x_n}\right)-\left(1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}\right)=\frac{x_n-x_{n-1}}{\left(1+x_n\right)\left(1+x_{n-1}\right)}>0$，即$x_{n+1}>x_n$，

由数学归纳法可知，数列$\{x_n\}$为单调增加数列。

同理可得，当$k>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$或$k<\frac{1-\sqrt{5}}{2}$时，数列$\{x_n\}$为单调减少数列。

2、单调有界数列的极限问题典型例题

【例1】设数列$\{x_n\}$满足$0<x_1<\pi, x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,\cdots)$. 证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求该极限.

【分析】一般利用单调增加有上界或单调减少有下界数列必有极限的准则来证明数列极限的存在.

【解】①有界性：因为 $0 < x_1 < \pi$，则 $0 < x_2 = \sin x_1 \le 1 < \pi$.

可推得 $0 < x_{n+1} = \sin x_n \le 1 < \pi, n = 1, 2, \cdots$，故数列 $\{x_n\}$ 有界.

②单调性：由于 $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\sin x_n}{x_n} < 1$（因当 $x > 0$时，$\sin x < x$），则有 $x_{n+1} < x_n$，可见数列 $\{x_n\}$ 单调减少，故由单调减少有下界数列必有极限知极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

③求极限：设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$，在 $x_{n+1} = \sin x_n$ 两边令 $n \to \infty$ 取极限，得 $l = \sin l$，解得 $l = 0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

【例 2–1】 证明数列 $\sqrt{2}$，$\sqrt{2+\sqrt{2}}$，$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$……的极限存在，并求该极限。

【解】①有界性： 数列通项满足 $x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$，$x_1 = \sqrt{2} < 2$，假设 $x_k < 2$，则 $x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k} < \sqrt{2+2} = 2$，由数学归纳法知，数列 $\{x_n\}$ 有界.

②单调性： 由于 $x_1 < x_2$，假设 $x_{k-1} < x_k$，则 $2 + x_{k-1} < 2 + x_k$，于是 $\sqrt{2 + x_{k-1}} < \sqrt{2 + x_k}$，即 $x_k < x_{k+1}$，由数学归纳法知，数列 $\{x_n\}$ 单调增加.

③求极限： 由单调有界数列必有极限知，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，

对 $x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$ 两边取极限，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2 + x_{n-1}} \Rightarrow A = \sqrt{2 + A}$，

解得，$A = 2$ 或 $A = -1$，显然 $x_n > 0$，由极限的保号性知极限 $A \ge 0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

【例 2-2】 设 $x_1 = \sqrt{a}, a > 0, x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}, n = 1, 2, 3, \cdots$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$。

【解】①有界性： $x_1 = \sqrt{a} < \sqrt{a} + 1$，假设 $x_k < \sqrt{a} + 1$，则

$x_{k+1} = \sqrt{a + x_k} < \sqrt{a + \sqrt{a} + 1} < \sqrt{(\sqrt{a})^2 + 2\sqrt{a} + 1} = \sqrt{a} + 1$，

由数学归纳法知，数列 $\{x_n\}$ 有界.

②单调性： 由于 $x_1 < x_2$，假设 $x_{k-1} < x_k$，则 $a + x_{k-1} < a + x_k$，于是 $\sqrt{a + x_{k-1}} < \sqrt{a + x_k}$，即 $x_k < x_{k+1}$，由数学归纳法知，数列 $\{x_n\}$ 单调增加.

③求极限： 由单调有界数列必有极限知，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，

对 $x_n=\sqrt{a+x_{n-1}}$ 两边取极限，得 $A=\sqrt{a+A}$，解得 $A=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$。

显然 $x_n>0$，由极限的保号性知极限 $A\geq 0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$。

【例 2-3】 设数列 $\{x_n\}$ 为 $x_1=1$，$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$（$n=1,2,\cdots$）求证数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限。

解：由 $x_2=\sqrt{6+x_1}=\sqrt{6+1}=\sqrt{7}>1=x_1$，假设 $x_n>x_{n-1}>0$，则

$$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}>\sqrt{6+x_{n-1}}=x_n,$$

从而 $\{x_n\}$ 单调递增。下面说明 $\{x_n\}$ 有上界：由 $x_1=1<3$，归纳假设 $x_n<3$，则

$$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}<\sqrt{6+3}=3,$$

从而 $\{x_n\}$ 有上界。由单调有界定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在。于是有

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{6+x_n}=\sqrt{6+\lim_{n\to\infty}x_n},$$

解之得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$。

注：首先假定 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=s$，对等式 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$ 两边同时取极限，则有 $s=\sqrt{6+s}$，解出 $s=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$。于是归纳假设 $x_n<3$。

【评注】 求递归数列的极限，主要利用单调有界必有极限的原理，用归纳法或已知的一些基本结果说明数列的单调、有界性．在说明递归数列单调性时，可用函数的单调性．下面给出一个重要的结论：设 $x_{n+1}=f(x_n)$（$n=1,2,\cdots$）$x_n\in I$，若 $f(x)$ 在区间 I 上单调递增，且 $x_2>x_1$（或 $x_2<x_1$），则数列 $\{x_n\}$ 单调递增（或单调递减）．

【例 3】 设 $A>0$，$x_1>0$，$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}(x_n+\dfrac{A}{x_n})$．试证：数列 $\{x_n\}$ 极限存在，并求出该极限。

【解】 ①有界性：因 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}(x_n+\dfrac{A}{x_n})\geq\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{x_n\cdot\dfrac{A}{x_n}}=\sqrt{A}$，故 $\{x_n\}$ 有下界．

②单调性：因为 $x_{n+1}-x_n=\dfrac{1}{2}(x_n+\dfrac{A}{x_n})-x_n=\dfrac{1}{2}(\dfrac{A}{x_n}-x_n)=\dfrac{A-x_n^2}{2x_n}\leq 0$．

（或 $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}(1+\frac{A}{x_n^2})\le\frac{1}{2}\left(1+\frac{A}{(\sqrt{A})^2}\right)=1$）

故 $\{x_n\}$为单调递减数列．因而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，且记为 a．

③求极限：由极限的四则运算，在 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{A}{x_n})$ 两端同时取极限 $n\to\infty$，得 $a=\frac{1}{2}(a+\frac{A}{a})$．并注意到 $x_n\ge\sqrt{A}>0$，解得 $a=\sqrt{A}$．

【练习 1】若数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1>\sqrt{a}$(a 为正的常数），且 $a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{a}{a_n})$，（$n=1,2,\cdots$），试证：数列 $\{a_n\}$极限存在，并求出它。

【解】①有界性：由 $a_1>\sqrt{a}$，又 $a_2=\frac{1}{2}(a_1+\frac{a}{a_1})=\frac{a_1{}^2+a}{2a_1}>\frac{2a_1\sqrt{a}}{2a_1}=\sqrt{a}$；假设 $a_k>\sqrt{a}$，则 $a_{k+1}=\frac{1}{2}(a_k+\frac{a}{a_k})=\frac{a_k{}^2+a}{2a_k}>\frac{2a_k\sqrt{a}}{2a_k}=\sqrt{a}$，由数学归纳法知，$\{a_n\}$有下界.

②单调性：又 $a_n-a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n-\frac{a}{a_n})=\frac{a_n{}^2-a}{2a_n}>0$，故 $\{a_n\}$单调减少，从而其极限存在，令其为 A.

③求极限：由 $a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{a}{a_n})\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+\frac{a}{a_n})\Rightarrow A=\frac{1}{2}(A+\frac{a}{A})$，

即 $A^2=a\Rightarrow A=\sqrt{a}(A>0)$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sqrt{a}$。

【练习 2】若数列 $\{x_n\}$满足：$x_1>1$，且 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{1}{x_n})$（$n=1,2,\cdots$），试证：数列 $\{x_n\}$极限存在，并求出它。

【练习 3】设 $x_1=2,x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{1}{x_n}),(n=1,2,3,\cdots)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【提示】$x_n\ge1,\frac{x_{n+1}}{x_n}\le1$.

【练习 4】设 $0<x_1<1$，$x_{n+1}=x_n(1-x_n)$，$n=1,2,\cdots$．证明数列 $\{x_n\}$收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【提示】因$0<x_n<1$，即$\{x_n\}$有界，并且$x_{n+1}-x_n=-x_n^2<0$，即$\{x_n\}$单调减少.

【例 4】已知数列$\{x_n\}$中的每一项都是正的，并且$(1-x_n)x_{n+1}>\frac{1}{4}(n\in N^+)$，证明数列$\{x_n\}$是单调的，并证明$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$。

【证明】①单调性：由题意$1-x_n>\frac{1}{4x_{n+1}},-x_n>\frac{1}{4x_{n+1}}-1$，

所以$x_{n+1}-x_n>x_{n+1}+\frac{1}{4x_{n+1}}-1\geq 2\sqrt{x_{n+1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x_{n+1}}}-1=0$，即数列$\{x_n\}$单调增加.

②有界性：由题设知$x_{n+1}(x_n-1)<-\frac{1}{4}<0$，而$x_{n+1}>0$，故$x_n<1$，即数列$\{x_n\}$有界.
从而极限$\lim_{n\to\infty}x_n$存在。

③求极限：设$\lim_{n\to\infty}x_n=A$，因为$(1-x_n)x_{n+1}>\frac{1}{4}$，两边取极限得，
$A-A^2\geq\frac{1}{4}\Rightarrow(A-\frac{1}{2})^2\leq 0$，显然只能$A-\frac{1}{2}=0\Rightarrow A=\frac{1}{2}$。

【例 5】设$x_1=\sqrt{2}$，$x_{n+1}=\sqrt{3+2x_n}$，$n=1,2,\cdots$. 证明数列$\{x_n\}$收敛，并求$\lim_{n\to\infty}x_n$.

【解】①有界性：由题设知$0<x_1<3$，假设$0<x_k<3$，则
$0<x_{k+1}=\sqrt{3+2x_k}<\sqrt{3+2\cdot 3}=3$，由数学归纳法知，$0<x_n<3(n\in N)$.

②单调性：由$x_{n+1}-x_n=\sqrt{3+2x_n}-x_n=\frac{(3-x_n)(1+x_n)}{\sqrt{3+2x_n}+x_n}>0$知，$\{x_n\}$单调增加.

③求极限：由单调有界原理知，$\lim_{n\to\infty}x_n$存在，设$\lim_{n\to\infty}x_n=A$. 对$x_{n+1}=\sqrt{3+2x_n}$两端取极限得，$A=\sqrt{3+2A}$，解得$A=3$，$A=-1$（舍去）.

【例 6】设$x_1>0$，$x_{n+1}=1+\frac{x_n}{1+x_n}$，$n=1,2,\cdots$. 证明数列$\{x_n\}$收敛，并求$\lim_{n\to\infty}x_n$.

【证明】①有界性：由题设知，当$n\geq 2$时，$1<x_n<2$，故数列$\{x_n\}$有界.

②单调性：由$x_{n+1}-x_n=\frac{x_n-x_{n-1}}{(1+x_n)(1+x_{n-1})}$知，$x_{n+1}-x_n$与$x_n-x_{n-1}$同号，以此类推，
$x_{n+1}-x_n$与x_2-x_1同号，故$\{x_n\}$是单调数列.

由单调有界准则知，数列$\{x_n\}$收敛，设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

③求极限：对$x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{1+x_n}$两端取极限得，$A=1+\dfrac{A}{1+A}$，解得$A=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$A=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$（舍去），即$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

【评注】本题通过$x_{n+1}-x_n$与x_n-x_{n-1}同号，判断数列是单调的，但无法判断增减，这丝毫不影响解题，仔细体会本题解法。

【例 7】（2008-1）设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内单调有界，$\{x_n\}$为数列，下列命题中正确的是：

(A)若$\{x_n\}$收敛，则$\{f(x_n)\}$收敛；　　(B)若$\{x_n\}$单调，则$\{f(x_n)\}$收敛；

(C)若$\{f(x_n)\}$收敛，则$\{x_n\}$收敛；　　(D)若$\{f(x_n)\}$单调，则$\{x_n\}$收敛.

【分析】根据数学考试选择题答案的唯一性，只要能够完全确定一个答案是符合答案要求，则即为正确选择．同时，根据题目条件和答案找对关键词：单调、有界．从而确定理论依据为：数列的单调有界准则．所以，由$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内单调有界，可以断定：若$\{x_n\}$单调，则$\{f(x_n)\}$收敛必定单调，当然$\{f(x_n)\}$有界，所以$\{f(x_n)\}$收敛．即答案(B)正确.