五、不等式的证明

1、利用中值定理证明函数不等式

2、利用函数单调性证明函数不等式

3、利用函数的最大最小值证明不等式

4、利用凹凸性证明不等式

5、利用泰勒公式

注意：问题的转化，即辅助函数的构造

例1 证明：当$0<x<1$时，$\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}<\dfrac{\ln(1+x)}{\arcsin x}$

证明 令$f(x)=(1+x)\ln(1+x)-\sqrt{1-x^2}\arcsin x$

$$f'(x)=\ln(1+x)+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x>0$$

$$x\in(0,1),\ f(x)>\lim_{x\to0^+}f(x)$$

$$=\lim_{x\to0^+}[(1+x)\ln(1+x)-\sqrt{1-x^2}\arcsin x]=0$$

即：当$0<x<1$时，$\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}<\dfrac{\ln(1+x)}{\arcsin x}$

注：1.有时需把不等式转化.

2.利用：$f(x)$单调增，则$x>x_0, f(x)>f(x_0)(\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x_0))\geq0$

若$f(x)$单调减，则$x>x_0$，有$f(x)<f(x_0)(\leq0)$

例2　$x>0, y>0$,且$0<\alpha<\beta$,证明:

$$(x^{\alpha}+y^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}>(x^{\beta}+y^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}$$

证明　若$x=y$,变形为$2^{\frac{1}{\alpha}}>2^{\frac{1}{\beta}}$，结论显然成立

当$x\neq y$时,要证不等式变形为$[(\frac{x}{y})^{\alpha}+1]^{\frac{1}{\alpha}}>[(\frac{x}{y})^{\beta}+1]^{\frac{1}{\beta}}$

令$f(t)=(a^{t}+1)^{\frac{1}{t}}, \frac{x}{y}=a>0$,

$$f'(t)=(a^{t}+1)^{\frac{1}{t}}[\frac{a^{t}(\ln a^{t}-\ln(1+a^{t}))-\ln(1+a^{t})}{t^{2}(1+a^{t})}]<0,$$

$f(t)$单调减少，故$f(\alpha)>f(\beta)$ 得证

注：利用:若$f(t)$单调增(减)，则$\alpha>\beta$,有$f(\alpha)>f(\beta)(<)$

例3 证明：$e < a < b < e^2$，$\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b-a)$

证明 $f(x) = \ln^2 x$在$[a,b]$利用拉格日朗日中值定理

$$\ln^2 b - \ln^2 a = \frac{2\ln\xi}{\xi}(b-a)$$

下证$e < a < \xi < b < e^2$，$\frac{2\ln\xi}{\xi} > \frac{4}{e^2}$

令$g(x) = \frac{2\ln x}{x} - \frac{4}{e^2}$，　$e < a < x < b < e^2$，

$g'(x) = \frac{2-2\ln x}{x^2} < 0$，　由$e < x < e^2, g(e^2) = 0$

$g(x) = \frac{2\ln x}{x} - \frac{4}{e^2} > 0$，$\Rightarrow \ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b-a)$

注1：将要证之式改为$\ln^2 b - \frac{4}{e^2}b > \ln^2 a - \frac{4}{e^2}a$

令$f(x) = \ln^2 x - \frac{4}{e^2}x$利用单调性证

注2：也可令　$f(x) = \ln^2 x - \ln^2 a - \frac{4}{e^2}(x-a)$

证明 $f(x)$单调增

例4 若$a,b>0$,证明： $2ab\le e^{a-1}+b\ln b+e^{b-1}+a\ln a$

证明 只须证$ab\le e^{a-1}+b\ln b$

令$f(x)=e^{a-1}+x\ln x-ax \quad (x>0)$

$$f'(x)=1+\ln x-a\begin{cases}<0 & 0<x<e^{a-1}\\ =0 & x=e^{a-1}\\ >0 & x>e^{a-1}\end{cases}$$

$f(x)$在$(0,+\infty)$上的最小值$f(e^{a-1})=0$

$\therefore$ 对$b>0$, $f(b)\ge 0$, 即 $ab\le e^{a-1}+b\ln b$

同理$ab\le e^{b-1}+a\ln a$

$\therefore 2ab\le e^{a-1}+b\ln b+e^{b-1}+a\ln a$

注1：把代数不等式转化为函数不等式

2：利用最值证明不等式

例5：m,n为任意不同的正数证明：

$$(m^m+n^n)^2>4\left(\frac{m+n}{2}\right)^{m+n}$$

分析： $$\Leftrightarrow \frac{(m^m+n^n)^2}{2^2}>\left(\frac{m+n}{2}\right)^{m+n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m^m+n^n}{2}>\left(\frac{m+n}{2}\right)^{\frac{m+n}{2}}$$

证明 令$f(x)=x^x$,

$$f''(x)=x^x[(\ln x+1)^2+\frac{1}{x}]>0$$

曲线$y=f(x)=x^x$是凹的，得证

注：利用凹凸性证明不等式 即把不等式转化成

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>(<)f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

例6 已知$f(x)$二阶可导，$f(x)>0, f''(x)f(x)-f'^2(x)\geq 0$,

证明:(1) $f(x_1)f(x_2)\geq f^2(\frac{x_1+x_2}{2}), \forall x_1, x_2\in R$

(2)若$f(0)=1$,则$f(x)\geq e^{f'(0)x}, x\in R$

证明 (1)令$g(x)=\ln f(x)$ $\qquad g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$,

$$g''(x)=\frac{f''(x)f(x)-f'^2(x)}{f^2(x)}\geq 0,$$

曲线$y=g(x)=\ln f(x)$是凹的

所以$\dfrac{g(x_1)+g(x_2)}{2}\geq g(\dfrac{x_1+x_2}{2}), \forall x_1, x_2\in R$

即$f(x_1)f(x_2)\geq f^2(\dfrac{x_1+x_2}{2}), \forall x_1, x_2\in R$

(2)令$F(x)=\ln f(x)-f'(0)x$ $\quad F'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}-f'(0), F'(0)=0$

$$F''(x)\Big|_{x=0}=\frac{f''(x)f(x)-f'^2}{f^2(x)}\Big|_{x=0}>0$$

$F(x)\geq F(0)=0$(最小值) $\qquad$ 得证

例7 设$f(x)$在$[0,2]$上二阶可导，当$0<a<b<a+b<2$时，

$f(a)\geq f(a+b), f''(x)<0$,证明:$\dfrac{af(a)+bf(b)}{a+b}\geq f(a+b)$

证明一：利用拉格朗日中值定理

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a) \quad (a<\xi<b)$$

$$f(a+b)-f(b)=f'(\eta)[(a+b)-b] \quad (b<\eta<a+b)$$

由$f''(x)\leq 0 \Rightarrow a[f(b)-f(a)]\geq (b-a)[f(a+b)-f(b)]$

$$\Rightarrow \quad bf(b)+af(a)$$

$$\geq bf(a+b)+af(a+b)+2a[f(a)-f(a+b)]$$

又$f(a)\geq f(a+b)$

$$\Rightarrow bf(b)+af(a)\geq bf(a+b)+af(a+b)$$

$$\frac{af(a)+bf(b)}{a+b}\geq f(a+b)$$

证明二 结合图形，利用单调性

$f''(x)<0$,图形为凸，且$f'(x)$递减

（1）若$f'(x)$无零点，则$f'(x)<0$,即$f(x)$递减

否则与$f(a)\geq f(a+b)$矛盾

由$f(x)$递减$\Rightarrow f(b)\geq f(a+b)$

$$\Rightarrow \frac{af(a)+bf(b)}{a+b}\geq f(a+b)$$

（2）若$f'(c)=0$(且唯一，因为$f''(x)<0$)

$\because f''(x)<0,\Rightarrow x<c, f'(x)>f'(c)=0,\Rightarrow f(x)$递增

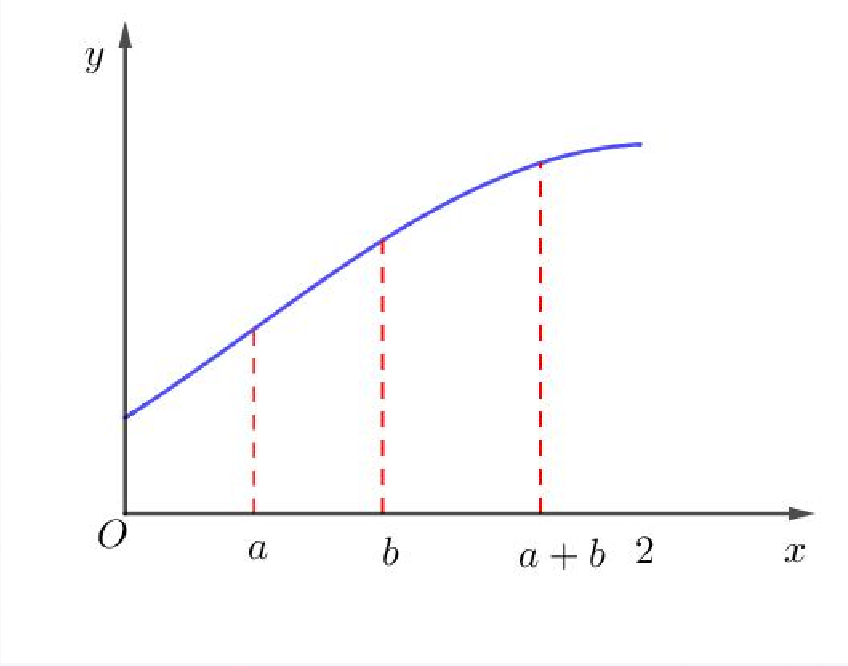
$x>c, f'(x)<f'(c)=0,\Rightarrow f(x)$递减

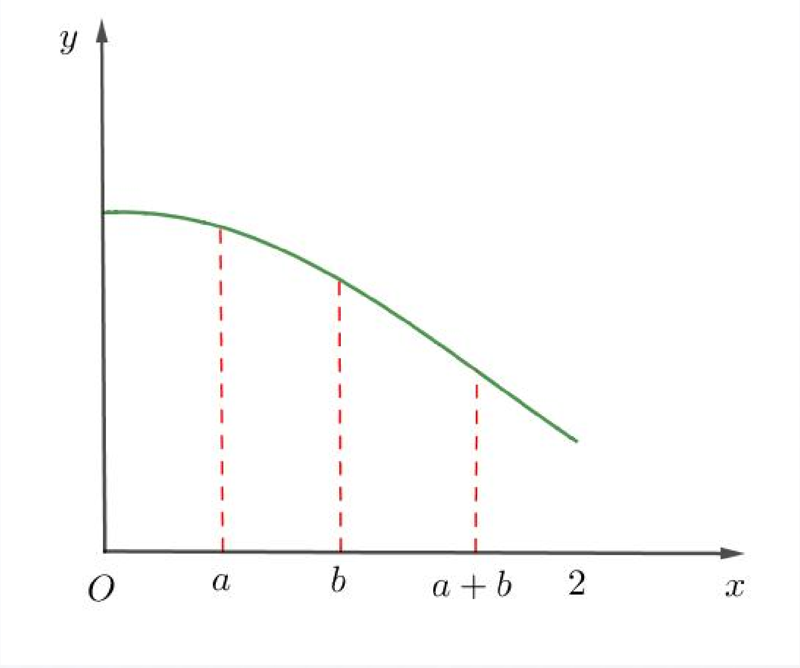
（i）若$a<b<c$,则 $f(b)>f(a)\geq f(a+b)$

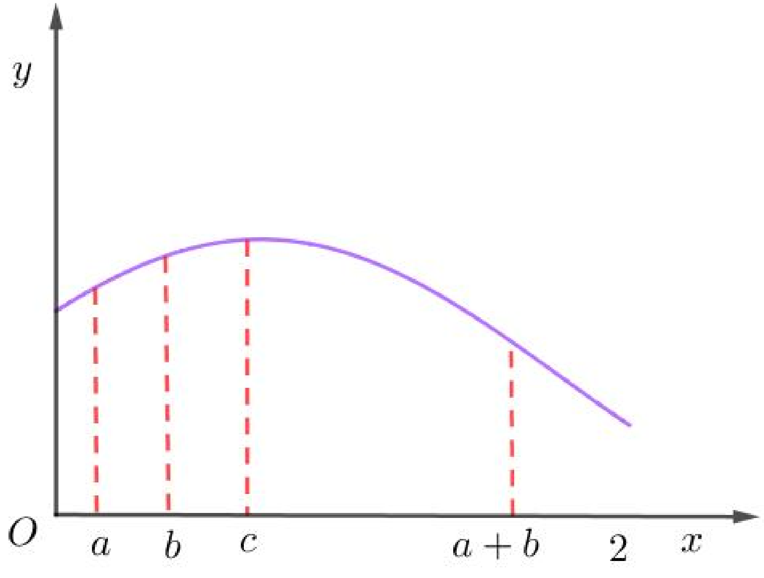
$$\Rightarrow \frac{af(a)+bf(b)}{a+b} \ge f(a+b)$$

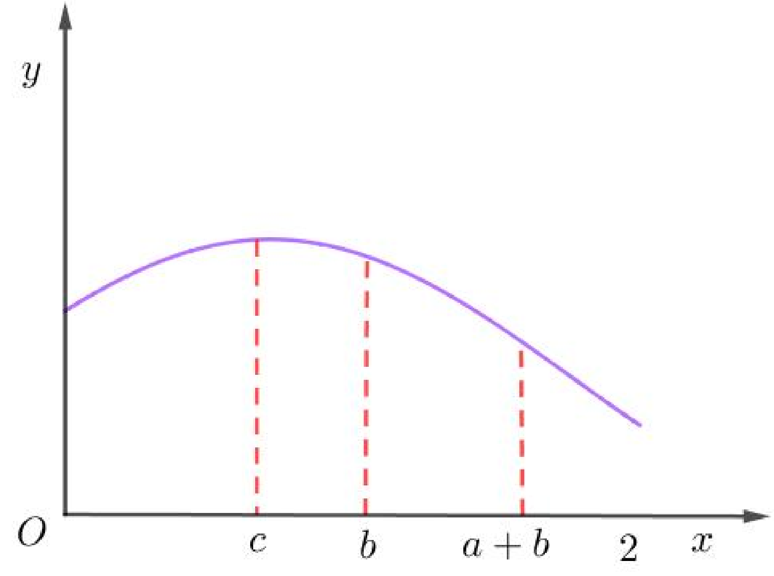
(ii) 若$c \le b$,则 由$x \ge c, f(x)$递减$\Rightarrow f(b) \ge f(a+b)$

$$\Rightarrow \frac{af(a)+bf(b)}{a+b} \ge f(a+b)$$






y
O
a
b
c
a + b
2
x


y
O
c
b
a + b
2
x

六、泰勒公式及其应用

知识要点

1、带拉格朗日余项的n阶泰勒公式

如果函数$f(x)$在含有x_0的某个开区间(a,b)内具有直到$(n+1)$阶的导数，则当x在(a,b)内时，$f(x)$可以表示为$(x-x_0)$的一个n次多项式与一个余项$R_n(x)$之和：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$（$\xi$ 在x_0与x之间）.

2、带皮亚诺余项的n阶泰勒公式

$f(x)$在x_0处$f^{(n)}(x_0)$存在，则有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

3、基本初等函数的麦克劳林公式

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}+o(x^{2n})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2\,!} x^2 + \cdots$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n\,!} x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + (x^7)$$

一、求泰勒公式

方法：1、直接求.（带拉格朗日余项）

例1 求$f(x)=\ln x$按$x-4$的幂展开的带有拉格朗日余项的n阶泰勒公式

解 $$(\ln x)^{(k)}=(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{x^k}\quad(k=1,2,\cdots)$$

$$f(x)=f(4)+f'(4)(x-4)+\frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(4)}{n!}(x-4)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-4)^{n+1}$$

$$=\ln 4+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{x-4}{4}\right)^k+R_n(x)$$

$$R_n(x)=\frac{(-1)^n}{(n+1)\xi^{n+1}}(x-4)^{n+1}\quad(\xi在4与x之间)$$

方法2：间接求.(带佩亚诺余项)

1、利用四则运算、复合运算、初等变形

例2　(1)求$f(x)=\sqrt{1+x}\cos x$带有佩亚诺的3阶麦克劳林公式

解 $f(x)=[(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+o(x^3))][1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3)]$

$$=1+\frac{1}{2}x-\frac{5}{8}x^2-\frac{3}{16}x^3+o(x^3)$$

(2)求$f(x)=\ln(1+x+x^2)$带有佩亚诺的3阶麦克劳林公式

解：$f(x)=\ln(1+x+x^2)=\ln(1-x^3)-\ln(1-x)$

$$=-x^3+o(x^3)-(-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+o(x^3))$$

$$=x+\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x^3+o(x^3))$$

(3)求$f(x)=\ln(\cos x)$带有佩亚诺的6阶麦克劳林公式

解 $f(x)=\ln[1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+o(x^6)]$

$$=(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6)-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6)^2$$

$$+\frac{1}{3}(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6)^3+o(x^6)]$$

$$=-\frac{1}{2}x^2+[\frac{1}{4!}-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})^2]x^4+[-\frac{1}{6!}-\frac{1}{2}\cdot 2(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4!})+\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^3]x^6+o(x^6)$$

$$=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{45}x^6+o(x^6)$$

2、利用变量替换

例3 求$f(x)=\ln x$按$x-4$的幂展开的分别带有 佩亚诺、拉格朗日余项的n阶泰勒公式.

解 $f(x)=\ln x=\ln(4+x-4)=\ln 4+\ln(1+\frac{x-4}{4})$

$$=\ln 4+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{x-4}{4}\right)^k+o((x-4)^n)$$ 佩亚诺余项

$$\ln(1+t)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{t^k}{k}+(-1)^n\frac{1}{n+1}\frac{1}{(1+\theta t)^{n+1}}t^{n+1}.$$

$$\ln x=\ln 4+\ln(1+\frac{x-4}{4})=\ln 4+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{(x-4)^k}{k4^k}$$

$$+(-1)^n\frac{1}{n+1}\frac{1}{(1+\theta\cdot\frac{x-4}{4})^{n+1}}\left(\frac{x-4}{4}\right)^{n+1}.$$ 拉格朗日余项

二、泰勒公式(带佩亚诺余项的麦克劳林公式) 用于极限运算

例5 $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5)]-[1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}(-\frac{x^2}{2})^2+o(x^4)]}{x^2[x+(-x-\frac{(-x)^2}{2}+o(x^2))]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{[\frac{1}{4!}-\frac{1}{2!\cdot 4}]x^4+o(x^4)}{-\frac{1}{2}x^4+o(x^4)}=\frac{1}{6}$$

例 $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}(1+\frac{1}{x})^{x^2}$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}[x^2\ln(1+\frac{1}{x})-x]}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}[x^2(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2}))-x]}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}[-\frac{1}{2}+o(\frac{1}{x^2})\cdot x^2]} = e^{-\frac{1}{2}}$$

三、泰勒公式用于无穷小的阶的估计

例6 若$f(x)=x-(a+be^{x^2})\sin x$，

当$x\to 0$时为x的5阶无穷小，求a,b.

解 $$f(x)=x-[a+b+bx^2+\frac{b}{2}x^4+o(x^4)]$$

$$\cdot[x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+o(x^6)]$$

$$=(1-a-b)x+\frac{a-5b}{6}x^3-\frac{a+41b}{120}x^5+o(x^5)$$

$$a=\frac{5}{6},b=\frac{1}{6},$$

四、泰勒公式用于求函数在某点的各阶导数

例7 (1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+2x)}{x} & -\dfrac{1}{2}<x\neq 0\\ 2 & x=0\end{cases}$，求$f^{(100)}(0)$

解

$$\ln(1+2x)=2x-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^3}{3}+\cdots+(-1)^{100}\frac{(2x)^{101}}{101}+o(x^{101})$$

$$x\neq 0,\ f(x)=2-\frac{2^2}{2}x+\frac{2^3}{3}x^2+\cdots+\frac{2^{101}}{101}x^{100}+o(x^{100})$$

$$f^{(100)}(0)=100!\frac{2^{101}}{101}$$

方法：若$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$

则$a_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$　　即$f^{(n)}(x_0)=n!\,a_n$

(2) $f(x)$在$x=0$的某邻域内二阶可导，且有

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3$$ 求 $f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$

解 由题设可得

原式左端 $= e^{\lim\limits_{x\to 0}(1+\frac{f(x)}{x^2})}$

$$= e^{1+\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2)}{x^2}}$$

所以有 $$\lim_{x\to 0}\frac{f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2}{x^2}=2$$

由此可得 $f(0)=0$，$f'(0)=0$，$f''(0)=4$。

五、泰勒公式用于证明不等式

方法一:对余项给出估计得到不等式

例8 设 $f(x)$在$[a,b]$内二阶可导,且 $f(a)=f(b)=0$

$$|f''(x)|\leq 8,\text{证明}:|f(\frac{a+b}{2})|\leq (b-a)^2$$

证明: 利用$f(x)$在点$x=\dfrac{a+b}{2}$的一阶泰勒公式

$$f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{f''(\xi)}{2}(x-\frac{a+b}{2})^2$$

$$f(a)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(\frac{a-b}{2})+\frac{f''(\xi_1)}{2}(\frac{a-b}{2})^2$$

$$f(b)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(\frac{b-a}{2})$$
$$+\frac{f''(\xi_2)}{2}(\frac{a-b}{2})^2$$

上两式相加

$$f(\frac{a+b}{2})=\frac{1}{2}[-\frac{f''(\xi_1)}{2}(\frac{a-b}{2})^2-\frac{f''(\xi_2)}{2}(\frac{a-b}{2})^2]$$

$$|f(\frac{a+b}{2})|=\frac{1}{2}(\frac{b-a}{2})^2|\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}|\leq(b-a)^2$$

方法二:由函数与二阶导数估计一阶导数得到不等式

例9 设$f(x)$在[0,1]内二阶可导，且 $|f(x)|\le a$,

$|f''(x)|\le b, a, b>0, \forall c\in(0,1)$, 证明:$|f'(c)|\le 2a+\frac{1}{2}b$

证明:$f(x)$在c 处的一阶泰勒公式

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-c)^2$$

$$f(0)=f(c)+f'(c)(-c)+\frac{f''(\xi_1)}{2}c^2$$

$$f(1)=f(c)+f'(c)(1-c)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-c)^2$$

两式相减整理得:

$$f'(c)=f(1)-f(0)-[\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-c)^2-\frac{f''(\xi_1)}{2}c^2]$$

$$|f'(c)|\le 2a+\frac{b}{2}|(1-c)^2+c^2|\le 2a+\frac{b}{2}$$

六、泰勒公式用于证明高阶导数存在某种特性

例10 (1)设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内二阶可导，

$f(0)=f(1)=0$，$\min\limits_{0\le x\le 1} f(x)=-1$，证明$\exists\xi\in(0,1)$

使得$f''(\xi)\ge 8$

证明：由题设知$f(x)$在[0，1]上的最小值－1在(0，1)内取得.设$f(c)=-1(0<c<1)$，则 $f'(c)=0$

$f(x)$在$x=c$处的一阶泰勒公式为

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2$$

$$=-1+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2$$

将$x=0$，1分别代入上式可得

$$f(0) = -1 + \frac{f''(\xi_1)}{2}c^2 \text{ 及 } f(1) = -1 + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(1-c)^2$$

由此可得

$$f''(\xi_1) = \frac{2}{c^2}, \qquad f''(\xi_2) = \frac{2}{(1-c)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{如} 0 < c \le \frac{1}{2}, \text{ 则 } f''(\xi_1) \ge 8 \\ \text{如} \frac{1}{2} < c < 1, \text{ 则 } f''(\xi_2) > 8 \end{array}\right\} \text{故存在} \xi \in (0,1),$$

使得$f''(\xi) \ge 8$

(2)设 $f(x)$在[-1,1]内具有连续的三阶导数,则在(-1,1)至少存在一点ξ，使得 $\frac{f(1)-f(-1)}{2}-f'(0)=\frac{f'''(\xi)}{6}$

证明：$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+\frac{1}{6}f'''(\xi)x^3$

$$f(1)=f(0)+f'(0)+\frac{1}{2}f''(0)+\frac{1}{6}f'''(\xi_1)$$

$$f(-1)=f(0)-f'(0)+\frac{1}{2}f''(0)-\frac{1}{6}f'''(\xi_2)$$

上两式相减$f(1)-f(-1)=2f'(0)+\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{6}$

$\because f'''(x)$连续，$m\le\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}\le M$

至少存在一点ξ，使得$f'''(\xi)=\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}$得证

七、泰勒公式(拉格朗日中值公式）中值θ,ξ的问题

例11 (1)设$f(x+h)=f(x)+hf'(x+\theta h)\ (0<\theta<1)$

又$f''(x)$存在，且$f''(x)\neq 0$，证明$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{2}$

解 应用带佩亚诺余项的二阶泰勒公式

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+o(h^2)$$

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x+\theta h)\ (0<\theta<1)$$

将上两式相减$hf'(x+\theta h)=hf'(x)+\dfrac{h^2}{2}f''(x)+o(h^2)$

$$\lim_{h\to 0}\frac{hf'(x+\theta h)-hf'(x)-\dfrac{h^2}{2}f''(x)}{h^2}=0$$

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{hf'(x+\theta h)-hf'(x)-\frac{h^2}{2}f''(x)}{h^2}=0}$$

即 $$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+\theta h)-f'(x)}{h}-\frac{1}{2}f''(x)=0$$

$$\lim_{h\to 0}\theta\frac{f'(x+\theta h)-f'(x)}{\theta h}=\frac{1}{2}f''(x)$$（导数的定义）

$$\lim_{h\to 0}\theta\cdot f''(x)=\frac{1}{2}f''(x)$$

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{2}$$

(2)设$f(x)$在$x=x_0$的某邻域U内有$n+1$阶导数,(1)写出$f(x)$展开成$x-x_0$的具有拉格朗日余项的$n-1$阶泰勒公式,中值记为ξ. (2)再设$f^{(n+1)}(x_0)\neq 0$,求$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\xi-x_0}{x-x_0}$

解 (1)带拉格朗日余项的$n-1$阶泰勒公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^{n-1}+\frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)(x-x_0)^n$$

(2)再由带佩亚诺余项的$n+1$阶泰勒公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{n+1}+o((x-x_0)^{n+1})$$

两式相减

$$f^{(n)}(\xi)-f^{(n)}(x_0)=\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$$

$$\frac{f^{(n)}(\xi)-f^{(n)}(x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(x_0)+\frac{o(x-x_0)}{x-x_0}$$

$$\frac{\xi-x_0}{x-x_0}\frac{f^{(n)}(\xi)-f^{(n)}(x_0)}{\xi-x_0}=\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(x_0)+\frac{o(x-x_0)}{x-x_0}$$

令$x\to x_0$ $\quad\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\xi-x_0}{x-x_0}=\frac{1}{n+1}$

注：导数的定义 $f^{(n+1)}(x_0)=\lim\limits_{\xi\to x_0}\frac{f^{(n)}(\xi)-f^{(n)}(x_0)}{\xi-x_0}$

八、利用泰勒公式判别函数的极值、曲线的拐点

例12(1)

设$f^{(n)}(x_0)$存在，且 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$

$f^{(n)}(x_0)\neq 0$, 则当$n=2m$时，x_0是极值点，

当$n=2m+1$时，$f(x)$在x_0处不取得极值，

$(x_0,f(x_0))$是拐点（$m=1,2,3\cdots$)

证明 将$f(x)$在$x=x_0$展开

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o[(x-x_0)^n]$$

$$\Rightarrow f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o[(x-x_0)^n]$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n}=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

当$x\in U^0(x_0,\delta)$ $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n}$与$f^{(n)}(x_0)$同号

则当$n=2m$时，若$f^{(n)}(x_0)>0$, $f(x)$在x_0处取得极小值，

若$f^{(n)}(x_0)<0$, $f(x)$在x_0处取得极大值，

当$n=2m+1$时，$f(x)$在x_0处不取得极值，

当$n=2m+1$时，将$f''(x)$展开

$$f''(x)=f''(x_0)+\cdots+\cdots\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}+o[(x-x_0)^{n-2}]$$

$$=\frac{f^{(2m+1)}(x_0)}{(2m-1)!}(x-x_0)^{2m-1}+o[(x-x_0)^{2m-1}]$$

即 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f''(x)}{(x-x_0)^{2m-1}}=\dfrac{f^{(2m+1)}(x_0)}{(2m-1)!}$

当$x\in U^0(x_0,\delta)$ $\quad\dfrac{f''(x)}{(x-x_0)^{2m-1}}$保号

所以$f''(x)$在x_0两侧变号，$(x_0,f(x_0))$是拐点

(2) $f(x), g(x)$具有任意阶导数，且满足关系式

$$f''(x)+f'(x)g(x)+f(x)x=e^{x}-1 \quad ①$$

$\therefore a=7, n=2$

又$f(0)=1, f'(0)=0,$ 证明：

$x=0$ 是 $f(x)$的极小值点。

证明：将$x=0$代入①得$f''(0)=0,$

（1）两边求导

$$f'''(x)+f''(x)g(x)+f'(x)g'(x)+f(x)+xf'(x)=e^{x}$$

将$x=0$代入得$f'''(0)=0,$

再求导代入得 $f^{(4)}(0)=1,$

$x=0$ 是 $f(x)$的极小值点。