一、填空题

1．已知$|\vec{a}|=8$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}$ 和$\vec{b}$ 的夹角为$\dfrac{\pi}{3}$，则$|2\vec{a}-3\vec{b}|=\underline{14}$.

2．曲线$\begin{cases}4x^2-9y^2=36\\ z=0\end{cases}$绕 y 轴旋转一周所得旋转曲面的方程为$\underline{4(x^2+z^2)-9y^2=36}$.

3．$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{(x^2+y^2)x^2y^2}{1-\cos(x^2+y^2)}=\underline{0}$.

4．设$z=(1+x^2)^{\ln y}$，则$dz\Big|_{(1,e)}=\underline{2dx+\dfrac{2\ln 2}{e}dy}$.

5．交换$\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy+\int_1^{\sqrt{2}} dx\int_0^{2-x^2} f(x,y)dy$的次序得$\underline{\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx}$.

二、 选择题

1．点$(2,0,1)$到平面$5x-4y+3z=18$的距离为（　C　）

(A) 1　　(B) $\sqrt{2}$　　(C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　(D) $\dfrac{13}{10}\sqrt{2}$

2．曲面$e^z-2z+xy=3$在点$(2,1,0)$处的切平面方程为（　B　）

(A) $x+y-z=0$　　(B) $x+2y-z-4=0$

(C) $x-2y-z+4=0$　　(D) $2x+2y+z=0$

3．函数$u=\ln(x^2+y^2)$在点$A(3,4)$处沿梯度方向的方向导数为（　C　）

(A) $\dfrac{2}{3}$　　(B) 1　　(C) $\dfrac{2}{5}$　　(D) -1

4．函数 $f(x,y)=x^2+xy+y^2-3x-6y$，则点$(0,3)$（　D　）

(A) 不是驻点　　(B) 是驻点但非极值点　　(C) 是极大值点　　(D) 是极小值点

5．设 L 为上半圆周 $y=\sqrt{1-x^2}$ ，则 $\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=$ （ A ）

(A) πe (B) $2\pi e$ (C) 1 (D) -1

三、计算题

(1) 已知点 $A(1,2,-1)$，平面 Π：$2x-y+3z=11$，求点 A 在平面 Π 上的投影点的坐标.

解：设 A 在平面 π 上的投影点为 $A'(x,y,z)$，则过 AA' 的直线方程为

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{3}\overset{\Delta}{=}t.$$

则 $A'(2t+1,-t+2,3t-1)$，代入平面方程得 $t=1$， $A'(3,1,2)$.

(2) 设过直线 $\begin{cases}3x+y+z-4=0\\x-y+z-2=0\end{cases}$ 的平面与直线 $x-1=\dfrac{y-3}{7}=\dfrac{z+2}{n}$ 垂直，求 n .

解：过直线 $\begin{cases}3x+y+z-4=0\\x-y+z-2=0\end{cases}$ 的平面束方程为 $3x+y+z-4+\lambda(x-y+z-2)=0,$

即 $(3+\lambda)x+(1-\lambda)y+(1+\lambda)z-(4+2\lambda)=0.$

其法向量为 $(3+\lambda,1-\lambda,1+\lambda)$，与已知直线的方向向量 $(1,7,n)$ 平行.

所以，有 $\dfrac{3+\lambda}{1}=\dfrac{1-\lambda}{7}=\dfrac{1+\lambda}{n}$. 解得 $\lambda=-\dfrac{5}{2},n=-3$.

四、已知函数 $y=y(x),z=z(x)$ 由方程组 $\begin{cases}x+y+z+2z^2=0\\x+y^2+z+z^3=0\end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{dz}{dx}$.

解：对方程组两边同时关于 x 求导，得 $\begin{cases}1+y'+z'+4zz'=0,\\1+2yy'+z'+3z^2z'=0.\end{cases}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3z^2-4z}{8yz+2y-1-3z^2},\quad \frac{dz}{dx}=\frac{1-2y}{8yz+2y-1-3z^2}.$$

五、计算 $\int_L\sqrt{2y^2+z^2}\,ds$，其中 L 为椭圆 $\begin{cases}x^2+y^2=a^2\\z=x\end{cases}$ $(a>0)$.

解：L 的参数方程为 $\begin{cases}x=a\cos\varphi,\\y=a\sin\varphi,\\z=a\cos\varphi,\end{cases}$ $(0\le\varphi\le 2\pi$

$$\int_L \sqrt{2y^2+z^2}ds=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2\varphi+a^2}\sqrt{a^2+a^2\sin^2\varphi}d\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}(a^2\sin^2\varphi+a^2)d\varphi=3\pi a^2.$$

六、计算二重积分$\iint\limits_D x\sin\frac{y}{x}dxdy$，其中$D$是由直线$y=x,x=1,y=0$围成的闭区域.

解：$\iint\limits_D x\sin\frac{y}{x}dxdy=\int_0^1 xdx\int_0^x \sin\frac{y}{x}dy=\int_0^1 x^2dx\int_0^x \sin\frac{y}{x}d\frac{y}{x}$

$$=\int_0^1 x^2dx\cdot(-\cos\frac{y}{x})\Big|_0^x=\int_0^1(1-\cos1)x^2dx=\frac{1}{3}(1-\cos1).$$

七、设$z=f(xy,yg(x))$，其中f有二阶连续偏导数，g可导，且在$x=1$处取得极值

$g(1)=1$，求$z_{xy}(1,1)$.

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1+f_2yg'(x)$；

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(yf_1+f_2yg'(x)\right)=f_1+y\frac{\partial f_1}{\partial y}+g'(x)\left(f_2+y\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)$$

$$=f_1+y\left(f_{11}x+f_{12}g(x)\right)+g'(x)[f_2+y(f_{21}x+f_{22}g(x))]$$

$$=f_1+y\ \ f_{11}x+f_{12}g(x)\ \ +g'(x)f_2+yg'(x)(f_{21}x+f_{22}g(x)).$$

因为g在$x=1$处取得极值，所以$g'(1)=0.$ $z_{xy}(1,1)=f_1(1,1)+f_{11}(1,1)+f_{12}(1,1).$

八、求曲线$\begin{cases}x^2+y^2=\frac{1}{2}z^2\\x+y+2z=4\end{cases}$在点$M(1,-1,2)$处的切线方程和法平面方程.

解： 对方程组$\begin{cases}x^2+y^2=\frac{1}{2}z^2\\x+y+2z=4\end{cases}$两边同时关于$x$求导，得$\begin{cases}2x+2yy'=zz',\\1+y'+2z'=0.\end{cases}$

代入M点坐标，得$\begin{cases}y'(1)=3\\z'(1)=-2\end{cases}$，则切线方程为 $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{-2}.$

法平面方程为$(x-1)+3(y+1)-2(z-2)=0$，即$x+3y-2z+6=0.$

九、计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz$，其中$\Omega$是球面$x^2+y^2+z^2=4$与抛物面$x^2+y^2=3z$所围的立体.

解：利用柱坐标，两曲面的方程分别为$\rho^2+z^2=4, \rho^2=3z.$

两曲面的交线为$z=1$．Ω在xoy面上的投影区域为$D: x^2+y^2\le 3.$

$$\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\sqrt{3}}\rho d\rho\int_{\frac{\rho^2}{3}}^{\sqrt{4-\rho^2}}zdz$$

$$=\pi\int_0^{\sqrt{3}}(4\rho-\rho^3-\frac{\rho^5}{9})d\rho=\frac{13}{4}\pi.$$

十、 在半径为R的上半球$x^2+y^2+z^2\le R^2(0\le z\le R)$内嵌入有最大体积的母线平行于$z$轴的直圆柱，求这圆柱的半径和高.

解：设圆柱与半球面的交线上第一卦限内的点的坐标为(x,y,z)，则此圆柱的体积为

$V=\pi(x^2+y^2)z,\ x>0, y>0, 0<z<R.$ 即求V在条件$x^2+y^2+z^2=R^2$下的最大值.

构造拉格朗日函数 $F(x,y,z,\lambda)=\pi(x^2+y^2)z+\lambda(R^2-x^2-y^2-z^2).$

解方程组 $\begin{cases} F_x=2\pi xz-2x\lambda=0, \\ F_y=2\pi yz-2y\lambda=0, \\ F_z=\pi(x^2+y^2)-2\lambda z=0, \\ F_\lambda=R^2-x^2-y^2-z^2=0, \end{cases}$ 得唯一解为$x=y=z=\frac{R}{\sqrt{3}}.$

由问题的实际意义可知，问题只有最大值而无最小值，因此当圆柱的高为$z=\frac{R}{\sqrt{3}}$，半径为$r=\sqrt{x^2+y^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}R$时，圆柱的体积最大.