# 专题7 无穷级数（二）

**第一部分 内容概要**

**1. 函数项级数及其收敛性定义**

**（1）**函数项级数定义　设$\{u_n(x)\}$是定义在$I\subseteq R$上的函数序列,则$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$

为定义在区间$I$　上的函数项级数,记作$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$.

**（2）收敛点与收敛域**

若$x_0\in I$，常数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$收敛，则称$x_0$为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的收敛点，否则称为发散点.函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的所有收敛点的集合称为收敛域，所有发散点的集合称为发散域.

**（3）**和函数：函数项级数在其收敛域内有和，其值是关于收敛点$x$的函数，记作$S(x)$，

$S(x)$称为函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的和函数，即$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$($x$属于收敛域).

**2. 幂级数定义及其收敛特性**

**（1）幂级数定义：**

形如$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$的函数项级数称为$x-x_0$的幂级数，其中$a_n(n=0,1,2,\cdots)$　称为幂级数的项$(x-x_0)^n$的系数．当$x_0=0$时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$称为$x$的幂级数.

**（2）幂级数收敛特性：**

阿贝尔（**Able**）定理：若幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$x=x_0(x_0\neq 0)$处收敛，则它在满足不等式$|x|<|x_0|$的一切$x$处绝对收敛；若幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$x=x_0$处发散,则它在满足不等式$|x|>|x_0|$的一切$x$处发散.

**（3）**收敛半径与收敛区间：由阿贝尔（**Able**）定理可知，必存在$R>0$，当$|x|<R$时,幂级数绝对收敛；当$|x|>R$时,幂级数发散，则称$R$为幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径，$(-R,R)$为其收敛区间.

当$x=R$与$x=-R$时，幂级数可能收敛，也可能发散；

**若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$仅在$x=0$处收敛，其它点处都发散，则$R=0$，收敛域为$\{0\}$；**

**若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$处处收敛，则$R=+\infty$，收敛域为$(-\infty,+\infty)$.**

**（4）收敛半径的求法：设$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，其收敛半径为$R$，若$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$（或$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$），则**

$$R=\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}, & 0<\rho<\infty,\\ 0, & \rho=+\infty,\\ \infty, & \rho=0\end{cases}$$

**补充结论：已知$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$在点$x_1(x_1\neq x_0)$的敛散性，则幂级数的收敛半径可分为三种情形：**

（1）若在$x_1$处收敛，则收敛半径$R\geq|x_1-x_0|$；

（2）若在$x_1$处发散，则收敛半径$R\leq|x_1-x_0|$；

（3）若在$x_1$处条件收敛，则收敛半径$R=|x_1-x_0|$.

**【练习一】**

1、设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n$在$x=3$处条件收敛，则该幂级数的收敛半径为______.

【4】

2、若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} x^n$（$a>0$）的收敛域为$(-\infty,+\infty)$，则$a$应该满足_____.

【$a<1$】

3、级数$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x-1)^n$的收敛区间为______.

【$-1<x<3$】

**（5）幂级数的运算性质：若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$与$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$的收敛半径分别为$R_1$和$R_2$，当$R_1\neq R_2$，令**

$R=\min\{R_1,R_2\}$，**则有**

① $k\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}ka_nx^n,|x|<R_1$，其中 $k$ 为常数，

② $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\pm\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n,|x|<R$，

③（$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$）（$\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$）$=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n,|x|<R$，（其中 $c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$）.

**（6）幂级数的分析运算性质**：设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 $R(R>0)$，则在 $(-R,R)$ 内有

① 和函数 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在收敛域上连续. 若 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在端点 $x=R$（或 $x=-R$）处收敛，则 $S(x)$ 在 $x=R$ 处左连续（或在 $x=-R$ 处右连续）.

② 和函数 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在收敛区间内可导，且有逐项求导公式：

$$S'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}\ .$$

③ 和函数 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在收敛域上可积，且有逐项求积公式：

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nt^n\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},\quad \text{其中 } x \text{ 是收敛域上任一点.}$$

**3. 函数展开成幂级数**

**（1）泰勒级数**：若 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处任意阶可导，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 称为函数在点 $x_0$ 的泰勒级数，特别地，若 $x_0=0$，则级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ 称为函数 $f(x)$ 的麦克劳林级数.

**（2）函数 $f(x)$ 展开成泰勒级数的充要条件**：设 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的 $U(x_0,\delta)$ 内有任意阶导数，则 $f(x)$ 在 $x_0$ 点能展成泰勒级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$，其中

$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)]}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},(0<\theta<1)$，且展式是唯一的.

**（3）常用函数的幂级数展开式**

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots,\ x\in(-\infty,+\infty).$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,x\in(-\infty,+\infty).$$

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,x\in(-\infty,+\infty).$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots,(-1<x<1).$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots,(-1<x\le 1).$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots,(-1<x<1).$$

**（4）函数展开成幂级数的方法**

**①直接法：利用高阶导数计算系数 $a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$，由此写出 $f(x)$ 的泰勒级数，并证明 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$，则可得 $f(x)$ 的泰勒展开式.**

**②间接法：根据泰勒展式的唯一性，一般利用常用函数的幂级数展开式，通过变量代换，四则运算，恒等变形，逐项求导，逐项积分等方法，求出 $f(x)$ 的幂级数展开式.**

【练习二】

1、　将函数 $f(x)=e^{-x^2}$ 展开成 $x$ 的幂级数得到（　　　）

（A）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.　　（B）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$.　　（C）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$.　　（D）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}$.

【C】

2、将函数 $f(x)=\arctan x$ 展开成 $x$ 的幂级数得到（　　　）

（A）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$.　　（B）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n}x^{2n}$.

（C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$.　　（D）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n}$.

提示：先将 $f(x)=\arctan x$ 的导函数进行幂级数展开.

【A】

3、将函数$\dfrac{1}{(1-x)(2-x)}$展开成 $x$ 的幂级数得到（　　）

（A）$\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)x^n$.　（B）$\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^{n}}\right)x^n$.　（C）$\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)x^{n+1}$.　（D）$\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^{n}}\right)x^{n+1}$.

提示：将$\dfrac{1}{(1-x)(2-x)}$进行分项，转化为$\dfrac{1}{1-t}$型的函数.

【A】

4、将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数得到（　　）.

（A）$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{1}{2^{n+1}}-\dfrac{1}{3^{n+1}}\right)x^n$　（B）$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^{n+1}}-\dfrac{1}{3^{n+1}}\right)(x-1)^n$

（C）$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{1}{2^{n+1}}-\dfrac{1}{3^{n+1}}\right)(x-1)^n$　（D）$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{1}{2^{n+1}}+\dfrac{1}{3^{n+1}}\right)(x-1)^n$

提示：$\dfrac{1}{x^2+3x+2}=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{[2+(x-1)][3+(x-1)]}$.

【C】

## 第二部分 典型例题

**例 1.** 设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x+1)^n$ 在 $x=1$ 处条件收敛，则幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n$ 在 $x=2$ 处__________.

（A） 绝对收敛　（B） 条件收敛　（C） 发散　（D） 敛散性不确定

【A】

**例 2.** 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，则 $x=\sqrt{3}$ 与 $x=3$ 依次为幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n$ 的__________

（A） 收敛点、收敛点.　（B） 收敛点、发散点.
（C） 发散点、收敛点.　（D） 发散点、发散点.

【B】

**例 3.** 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 与 $\frac{1}{3}$，并设 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 与 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|$ 都存在，

则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^{\ 2}}{b_n^{\ 2}} x^n$ 的收敛半径为__________.

（A） $5$　　（B） $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　（C） $\frac{1}{3}$　　（D） $\frac{1}{5}$

【A】

**例 4.** 设数列 $\left\{a_n\right\}$ 单调减少，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k (n = 1, 2, \cdots)$ 无界，则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 的收敛域为_______

（A）$\left(-1,1\right]$　（B）$\left[-1,1\right)$　（C）$\left[0,2\right)$　（D）$\left(0,2\right]$

【C】

**例 5.** 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，极限 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ 存在，求 $r$ 的值，并举出满足这些条件的例子.

（1996 年）

【 $r=-1$； $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ 】

**例 6.** 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left(3^n+(-2)^n\right)}x^n$ 的收敛域.　(2004 年)

【$[-3,3)$】

**例 7.** 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}x^n$ 的收敛域.（2002 年）

【$[-1,1)$】

**例 8.** 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}$ 的收敛域与和函数.　(2014 年)

【收敛域 $(-\infty,+\infty)$，和函数 $f(x)=e^{x^2}\left(2x^2+1\right)-1$】

**例 9.** 求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$的和函数.

【$S(x)=\begin{cases}(1+x)\ln(1+x)+(1-x)\ln(1-x), x\in(-1,1)\\ 2\ln 2, x=\pm 1\end{cases}$】

**例 10.** 求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$的收敛域及和函数.

【$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n=\frac{3-x}{(1-x)^3}$，$x\in(-1,1)$】

**例 11.** 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\left(-1\right)^{n}\left(n-1\right)!}{2^{n}n!}$的和.　(2010 年)

【$\sqrt{e}-1-\ln\frac{3}{2}$】

**例 12.** 将函数 $f(x)=\arctan\frac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 $x$ 的幂级数，并求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n+1}$的和.

【$f(x)=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{4^{n}}{2n+1}x^{2n+1},\ x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$；$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$】

**第三部分 强化训练**

1. 求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{n+1}}{n^2+2n}x^n$的收敛域及和函数。（2022 省赛）

2.设$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}(x-1)^n$的和函数为$f(x)$，则$f(x)$展开为$x$的幂级数是________。（2021 省赛）

3.设$\int_{(n-1)\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\ (n=1,2,...)$，

（1）指出$|a_n|$，$|a_{n+1}|$的大小，证明你的结论。

（2）判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的敛散性。（2021 省赛）

4. 设函数$f(x)=\int_0^x\frac{\ln(1+t)}{1+e^{-t}\sin^3 t}\mathrm{d}t$，（$x>0$），证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$收敛，且$\frac{1}{3}<\sum_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)<\frac{5}{6}$.

（2022 预赛补）

5. 设$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3\mathrm{d}t$，证明：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$发散.

6. 已知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$，求$I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x$.

7. 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}e^{-nx}$的收敛域为$(a,+\infty)$，则$a=$________。（2022/研 1）

8. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=$________________。（2023/研 3）

9. 设$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径是$8$，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{3n+1}$的收敛半径为__________.

10. 求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}$的和.

【强化训练参考答案】

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{n+1}}{n^2+2n}x^n=\begin{cases}\dfrac{(4x^2-1)\ln(2x+1)-2x(x-1)}{4x^2}, & \left(-\dfrac{1}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{1}{2}\right] \\ 0, & x=0 \\ -\dfrac{3}{2}, & x=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$

2. $\displaystyle\frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}$

3. $|a_n|>|a_{n+1}|$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛

4. 提示：利用不等式 $x-\dfrac{x^2}{2}\le\ln(1+x)\le x$

5. 提示：对 $a_n$ 进行分段 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{n}}t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3\mathrm{d}t+\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}}t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3\mathrm{d}t=I_1+I_2$

6. $\dfrac{\pi^2}{12}$

7. $-1$

8. $\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$

9. 2

10. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}=\frac{22}{27}$.