第3章　微分中值定理与导数应用　同步测试卷　A卷

一、选择题（1-6小题，每小题3分，共18分）

（1）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=2$，其中 $a^2+c^2\neq 0$，则必有（　）.

（A）$b=4d$　　（B）$b=-4d$　　（C）$a=4c$　　（D）$a=-4c$

（2）当 $x>0$ 时，曲线 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$（　）.

（A）有且仅有水平渐近线　　（B）有且仅有铅直渐近线

（C）既有水平渐近线又有铅直渐近线　　（D）既无水平渐近线又无铅直渐近线

（3）极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+\sin x}{x^2}=$（　）.

（A）-1　　（B）1　　（C）不存在　　（D）2

（4）已知函数 $y=f(x)$ 对一切 x 满足 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^x$，若 $f'(x_0)=0(x_0\neq 0)$，则（　）.

（A）$f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值　　（B）$f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

（C）$(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

（D）$f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(x_0,f(x_0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

（5）设当 $x\to 0$ 时，$e^x-(ax^2+bx+1)$ 是比 x^2 高阶的无穷小，则（　）.

（A）$a=\dfrac{1}{2},b=1$　　（B）$a=1,b=1$

（C）$a=-\dfrac{1}{2},b=-1$　　（D）$a=-1,b=1$

（6）方程 $xe^x=a(a>0)$ 实根的个数是（　）.

（A）3　　（B）4　　（C）5　　（D）1

二、填空题（7-12小题，每小题3分，共18分）

（7）$\lim\limits_{n\to\infty}n^3(a^{\frac{1}{n}}-a^{\sin\frac{1}{n}})(a>0)=$______.

（8）曲线 $y=\ln(x^2+1)$ 的拐点为______.

（9）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}=$______.

（10）函数 $f(x)=(1+\dfrac{1}{x})^x(x>0)$ 的单调增区间为______.

（11）$y=x+2\cos x$ 在区间 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上的最大值为______.

（12）$\arcsin x+\arccos x=$______（$-1\leq x\leq 1$）.

三、解答题（13-20小题，每小题8分，共64分）

（13）设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，求 a.

（14）假设函数 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上有二阶导数，且 $f(1)=f(2)=0$，又 $F(x)=(x-1)^2 f(x)$.

证明在 $(1,2)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $F''(\xi)=0$.

（15）已知二次方程 $x^2-2ax+10x+2a^2-4a-2=0$ 有实根，试问 a 为何值时它是方程两根之积的极值点，并求极值.

（16）证明：当 $x>0$ 时，$(x^2-1)\ln x\geq(x-1)^2$.

（17）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有一阶连续导数，且 $f(0)\neq 0, f'(0)\neq 0$，若 $af(h)+bf(2h)-f(0)$ 在 $h\to 0$ 时是比 h 高阶的无穷小，试确定 a,b 的值.

（18）已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$. 证明：

（Ⅰ）存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$；

（Ⅱ）存在两个不同的点 $\eta,\varsigma\in(0,1)$，使得 $f'(\eta)f'(\varsigma)=1$.

（19）求函数 $f(x)=2x^3-6x^2-18x-7$ 在 $[1,4]$ 上的最大、最小值.

（20）设 $x_1x_2>0$，证明：$x_1e^{x_2}-x_2e^{x_1}=(1-\xi)e^{\xi}(x_1-x_2)$，其中 ξ 在 x_1 于 x_2 之间.

第3章　微分中值定理与导数应用　同步测试卷　B卷

一、选择题（1-6小题，每小题3分，共18分）

（1）以下四个命题中，正确的是（　　）.

（A）若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

（B）若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

（C）若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

（D）若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，则 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

（2）设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)>0,f''(x)>0,\Delta x$ 为自变量 x 在点 x_0 处的增量，Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处相应的增量与微分，若 $\Delta x>0$，则（　　）.

（A）$0<dy<\Delta y$　　　（B）$0<\Delta y<dy$

（C）$\Delta y<dy<0$　　　（D）$dy<\Delta y<0$

（3）若 $f(-x)=f(x)(-\infty<x<+\infty)$，在 $(-\infty,0)$ 内 $f'(x)>0$，且 $f''(x)<0$，则在 $(0,+\infty)$ 内有（　　）.

（A）$f'(x)>0,f''(x)<0$　　　（B）$f'(x)>0,f''(x)>0$

（C）$f'(x)<0,f''(x)<0$　　　（D）$f'(x)<0,f''(x)>0$

（4）已知函数 $y=f(x)$ 对一切 x 满足 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^{-x}$，若 $f'(x_0)=0(x_0\neq 0)$，则（　　）.

（A）$f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值　　　（B）$f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

（C）$(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

（D）$f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(x_0,f(x_0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

（5）曲线 $y=e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$ 的渐近线有（　　）条.

（A）1　　　（B）2　　　（C）3　　　（D）4

（6）设 $y=f(x)$ 是满足方程 $y''+y'-e^{\sin x}=0$ 的解，且 $f'(x_0)=0$，则 $f(x)$（　　）.

（A）在 x_0 的某邻域内单调增加　　　（B）在 x_0 的某邻域内单调减少

（C）在 x_0 处取得极小值　　　　　（D）在 x_0 处取得极大值

二、填空题（7-12 小题，每小题 3 分，共 18 分）

（7）函数 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ 在 $x=0$ 点处带拉格朗日余项的 n 阶泰勒展开式为______.

（8）极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}=$______.

（9）曲线 $y=x\ln(e+\dfrac{1}{x})(x>0)$ 的渐近线方程为______.

（10）函数 $y=x^5-4x+2$ 的拐点是______.

（11）设函数 $y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t^3+3t+1\\ y=t^3-3t+1\end{cases}$ 确定，则曲线 $y=y(x)$ 为凸函数的 x 的取值范围是______.

（12）曲线 $y=a\ln(1-\dfrac{x^2}{a^2})(a>0)$ 上曲率半径最小的点的坐标为______.

三、解答题（13-20 小题，每小题 8 分，共 64 分）

（13）设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 可导，且在 $x=0$ 处二阶导数 $g''(0)$ 存在，且 $g(0)=g'(0)=0$，试求 $f'(x)$，并讨论 $f'(x)$ 的连续性.

（14）设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，$f''(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上存在且大于零，记 $F(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ $(x>a)$，证明 $F(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内单调增加.

（15）设 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处取得极值，且点 $(2,4)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点，又若 $f'(x)=3x^2+2ax+b$，求 $f(x)$ 及其极值.

（16）求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}{n}\right]^{nx}$，其中 $a_i>0,i=1,2,\cdots,n$.

（17）设 $a>1,f(t)=a^t-at$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的驻点为 $t(a)$。问 a 为何值时，$t(a)$ 最小？并求出最小值.

（18）设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0,f(\dfrac{1}{2})=1$ 试证：

（Ⅰ）存在 $\eta\in(\dfrac{1}{2},1)$，使得 $f(\eta)=\eta$；

（Ⅱ）对任意实数λ，必存在$\xi \in (0,\eta)$，使得$f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$.

（19）设$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，且$f(0)=f(1)=0$，$f(x)$在$[0,1]$上的最小值等于-1.

试证至少存在一点$\xi \in (0,1)$，使得$f''(\xi) \ge 8$.

（20）设$e<a<b<e^2$，证明$\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a)$.