一、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1．函数 $y=\ln(1-2x)+\arcsin\dfrac{x-1}{2}$ 的定义域为 $\underline{\left[-1,\dfrac{1}{2}\right)}$.

2．极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{20^n+1960^n+70^n+2022^n}=\underline{2022}$.

3．设函数 $f(x)=\cos(5x)$，则当 $n\geq 1$时， $f^{(n)}(x)=\underline{5^n\cos\left(5x+\dfrac{n\pi}{2}\right)}$.

4．函数 $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{x}{2}}+\cos x-2, & x<0\\ 2\sin x, & x\geq 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的左导数 $f'_-(0)=\underline{\dfrac{1}{2}}$.

5．设 $y=\operatorname{arccot}\sqrt{1-x}$，则 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=-1}=\underline{\dfrac{\sqrt{2}}{12}}$.

二、选择题 （每题 3 分，共 15 分）

1．函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续是可微的 (B)

(A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件

(C) 充要条件 (D) 既非充分也非必要条件

2．设函数 $y=f(e^{-x})$，则 $y'=$ (C)

(A) $f'(e^{-x})$ (B) $e^{-x}f'(e^{-x})$ (C) $-e^{-x}f'(e^{-x})$ (D) $-f'(e^{-x})$

3．设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{3}, & x\leq 1\\ x^2, & x>1\end{cases}$，则在 $x=1$ 处 (A)

(A) 左导数存在，右导数不存在 (B) 左导数与右导数均存在

(C) 左导数与右导数均不存在 (D) 左导数不存在，右导数存在

4．由方程 $xy+2\ln x=y^4$ 所确定的 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为 (D)

(A) $x+y=1$ (B) $x-y=1$ (C) $y=-x$ (D) $y=x$

5．设函数 $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$，则方程 $f'(x)=0$ 根的个数为 (C)

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

三、计算题 (每小题 6 分，共 30 分)

1．求函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x - x}{(1-\mathrm{e}^{-x})\ln(1+x^2)}$.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x - x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{1+x^2}-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{3(1+x^2)}=-\dfrac{1}{3}$.

2．求函数极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\mathrm{e}^x+x)^{\frac{1}{\tan 2x}}$.

解：原式 $=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(\mathrm{e}^x+x)}{\tan 2x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(\mathrm{e}^x+x)}{2x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^x+1}{2(\mathrm{e}^x+x)}}=\mathrm{e}$.

3．设 $\Delta x\to 0$ 时， $f(x_0+3\Delta x)-f(x_0)-2\Delta x$ 是比 Δx 高阶的无穷小，求 $\mathrm{d}f(x_0)$.

解：由题设 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0)-2\Delta x}{\Delta x}=0$，则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0)}{3\Delta x}\times 3=3f'(x_0)=2 .$$

于是 $\mathrm{d}f(x_0)=f'(x_0)\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}\mathrm{d}x$.

4．设 $y=x^2\,\mathrm{e}^{2x}$，求 $y^{(20)}$.

解：记 $u=\mathrm{e}^{2x}$， $v=x^2$，则 $u^{(k)}=2^k\,\mathrm{e}^{2x}$， $v'=2x$， $v''=2$， $v'''=0$.

由莱布尼兹公式， $y^{(20)}=u^{(20)}v+C_{20}^1u^{(19)}v'+C_{20}^2u^{(18)}v''+0$

$$=2^{20}\,\mathrm{e}^{2x}\cdot x^2+20\cdot 2^{19}\,\mathrm{e}^{2x}\cdot 2x+190\cdot 2^{18}\,\mathrm{e}^{2x}\cdot 2$$

$$=2^{20}\,\mathrm{e}^{2x}(x^2+20x+95) .$$

5．设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t-\ln(1+t)\\ y=t^3+\dfrac{3}{2}t^2\end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$， $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}$.

解： $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{3t^2+3t}{1-\dfrac{1}{1+t}}=3(t+1)^2$. $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{6(t+1)}{1-\dfrac{1}{1+t}}=\dfrac{6(t+1)^2}{t}$，

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}=\left.\frac{6(t+1)^2}{t}\right|_{t=1}=24 .$$

四、（本题 8 分）设函数 $f(x)=\begin{cases} e^{ax}, & x\le 0 \\ b(1-x^2), & x>0 \end{cases}$ 处处可导，求 a，b.

解： $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=b=f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1$.

$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-x^2-1}{x}=0$.

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{ax}-1}{x}=a=f'_+(0)=0$. 即 $a=0$，$b=1$.

五、（本题 8 分）求函数 $f(x)=\dfrac{x\arctan x}{e^{\frac{x^2}{x-2}}-1}$ 的间断点，并判断其类型.

解：函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 及 $x=2$ 处无定义.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\arctan x}{e^{\frac{x^2}{x-2}}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\dfrac{x^2}{x-2}}=\lim\limits_{x\to 0}(x-2)=-2$，$x=0$ 是第一类可去间断点.

$\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x\arctan x}{e^{\frac{x^2}{x-2}}-1}=0$，$\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x\arctan x}{e^{\frac{x^2}{x-2}}-1}=-2\arctan 2$，$x=2$ 是第一类跳跃间断点.

六、（本题 8 分）设函数 $f(x)$ 具有连续的二阶导数，$f(0)=0$，$g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)}{x}, & x\ne 0 \\ f'(0), & x=0 \end{cases}$. 求 $g'(x)$ 并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解：由题设，$g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{f(x)}{x}-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f'(0)x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{1}{2}f''(0).$$

$$g'(x)=\begin{cases} \dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}, & x\ne 0 \\ \dfrac{1}{2}f''(0), & x=0 \end{cases}.$$

$\lim\limits_{x\to 0}g'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)+xf''(x)-f'(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{2}=\dfrac{1}{2}f''(0)=g'(0)$，

则 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

七、（本题 8 分）证明费马引理：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义，且在 x_0 处可导. 若对任意的 $x \in U(x_0)$，有 $f(x) \le f(x_0)$，则 $f'(x_0)=0$.

证明： $f(x)$ 在 x_0 处可导，且 $\forall x \in U(x_0)$，有 $f(x) \le f(x_0)$，则 $f(x)-f(x_0) \le 0$.

由导数的定义及极限的保号性，$\forall x \in U(x_0)$，

当 $x > x_0$ 时，$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0$，$f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0$.

当 $x < x_0$ 时，$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0$，$f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0$.

所以 $f'(x_0)=f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=0$.

八、（本题 8 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 内连续，在 $(0,1)$ 内可导，$f(0)=f(1)=0$. 证明：$(x^2+1)f'(x)-2xf(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内至少存在一个根.

证明：令 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x^2+1}$，$x \in [0,1]$，

则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$F(0)=F(1)=0$.

由罗尔定理，至少存在一点 $\xi \in (0,1)$，使得 $F'(\xi)=\dfrac{(x^2+1)f'(x)-2xf(x)}{(x^2+1)^2}\Big|_{x=\xi}=0$，

则 $(x^2+1)f'(x)-2xf(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个根 ξ，得证.