南京信息工程大学
Nanjing University of Information Science & Technology

高等数学（上）

数学与统计学院　公共数学教学部

高等数学教学团队

高等数学 ——微积分

研究对象： 函数

研究工具： 极限

研究内容： 函数的各种性态

主要的函数性态
- 连续性
- 微小范围内或瞬间量的变化（率）问题 (微分学）
- 全局量的总和问题 (积分学）

第一节 函数与极限

函数

知识目标

理解：集合、区间、邻域、函数、复合函数、反函数与初等函数的有关概念与性质

掌握：函数的基本特性与判别、反三角函数、常见分段函数的图形与性质

重难点

重点：邻域的概念、函数的四种特性、复合函数与初等函数的概念

难点：函数特性的数学语言描述，狄利克雷函数、反三角函数

一、集合

1、常量与变量

常量：在某一过**程**中保持数值不变的量，可用a,b,c表示.

变量：在某一过程中变化着的量，常用x,y,z表示.

2、集合定义：具有某种特定性质的事物的总体.

组成集合的事物称为**元素**.

不含任何元素的集合称为**空集**，记作$\varnothing$.

3、常用数集

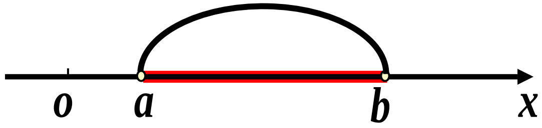
（1）记号： N ——自然数集； N^+——非零自然数集.

Q ——有理数集； Z ——整数集；

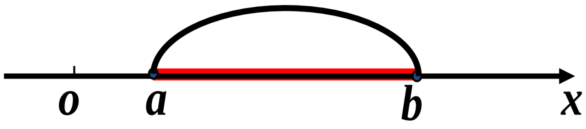
R^+——正实数集； R ——实数集；

（2）区间：有限区间与无限区间.

如： 开区间 $(a,b)=\{x|a<x<b\}$

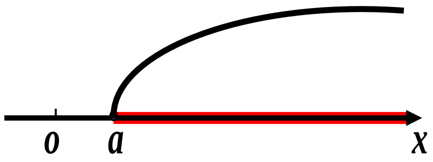


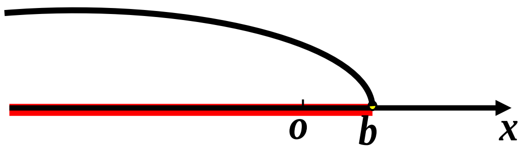
闭区间 $[a,b]=\{x|a\le x\le b\}$



半开半闭区间 $[a,b)=\{x|a\le x<b\}$　　$(a,b]=\{x|a<x\le b\}$

$[a,+\infty)=\{x|a\le x\}$　　$(-\infty,b)=\{x|x<b\}$ ——无限区间





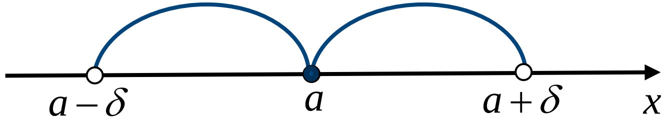
全体实数的集合 $R=(-\infty,+\infty)$ 是无限的开区间.

注： 通常用“区间I”代表各种类型的区间.

（3）邻域

点 a 的邻域：以点 a 为中心的开区间称为点 a 的**邻域**，

记作 $U(a)$



点 a 的 δ 邻域：设 $\delta>0$，

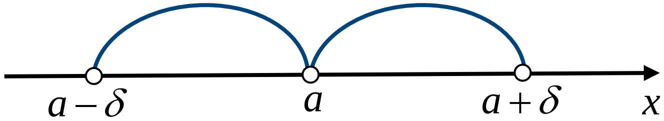
$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta)$$

-----与点 a 的距离小于 δ 的点 x 的全体.

点 a 称为邻域的**中心**，δ 称为邻域的**半径**.

函数

点 a 的去心 δ 邻域：$\overset{o}{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$



这里 $0<|x-a|$ 表示 $x \neq a$

点 a 的左 δ 邻域：开区间 $(a-\delta,a]$

点 a 的右 δ 邻域：开区间 $[a,a+\delta)$

二、函数

1、**定义**：设两个变量 x 、y 分别在数集X、Y中变化,X为非空数集，如果对于每一个$x \in X$，按照某对应法则 f, 总有唯一确定的y与之对应,则称 y 是 x的**函数, 记作:**

$$\boxed{y = f(x)} \quad (x \in X)$$

因变量　　　　自变量

X称为**函数 $f(x)$的定义域**，常用 D_f 或D 表示，即 $D = X$.

当 $x_0 \in D$ 时，称 $f(x_0)$ 为函数在点 x_0处的**函数值**.

函数$y=f(x)$的全体函数值所构成的集合称为**函数f的值域**,

记作$f(D)$，$f(D)=\{y \mid y=f(x), x \in D\}$.

(1) 函数定义域的确定：

① **自然定义域：**使得函数式$f(x)$有意义的一切实数组成的集合. **如** $y=x^2, D=(-\infty,+\infty)$;

② **实际意义：**具有实际背景的函数，需要根据实际问题对变量的要求确定. **如正方形面积** $S=x^2, D=(0,+\infty)$.

(2) 函数的二要素：

函数 $\boldsymbol{y = f(x),(x \in D)}$ 由定义域 D 与对应法则 $\boldsymbol{f}$ 确定.

定义域与对应法则称为**函数的二要素**.

如果两函数的定义域和对应法则(即函数的**两要素**)**都相同**，则称它们**是同一个函数**.

例如：$f(x) = \ln x^3$ 与 $g(x) = 3\ln x$ 是同一函数；

$f(x) = \ln x^2$ 与 $g(x) = 2\ln x$ 不是同一函数.

(3) 几个注意点：

注 1)：对于函数 $\boldsymbol{y=f(x)\ (x\in D)}$，其定义域和对应法则不能变，

而自变量、因变量与对应法则可以用不同的记号表示！

$y=2x+1$与 $s=2t+1$ 是同一函数.

2)：函数 $y=f(x)$ 在定义域内的每一个自变量 x，对应的

函数值y 都是**惟一确定**的，因此也称y为 x **的单值函数**.

如 $y=\sin x$, $y=2\lg x$ 均为单值函数.

本书中凡是没有特别说明的函数都是指单值函数.

3)：有时自变量 x 有两个或两个以上的值与之相对应，

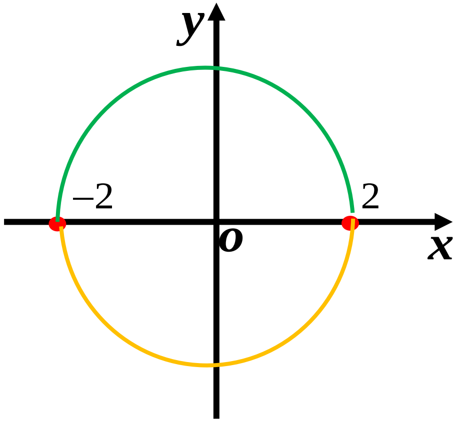
这时称 y 为 x 的**多值函数**.

例如圆方程 $x^2+y^2=4$

对应法则：x,y 满足该圆方程，

得 $y=\pm\sqrt{4-x^2},\ x\in[-2,2]$

这是由方程确定的多值函数.



如遇到多值函数时，则将它化作多个单值函数分别来对待！

例1 求下列函数的定义域.

（1）$f(x)=\dfrac{1}{\ln(x-1)}+\sqrt{x^2-x-6}$ （2） $y=\sqrt{16-x^2}+\ln\sin x$

解 （1） $D=(1,3]$

（2） $D=[-4,-\pi)\cup(0,\pi)$

2. 函数的表示法

（1）**表格法：** 如三角函数值表、高铁时刻表.

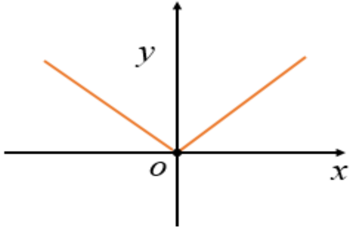
（2）**图形法：** 坐标平面上的点集 $\{P(x,y) | y=f(x), x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x), x\in D$ 的**图形**，对应于**一条或一段**平面曲线.

（3）**解析法(公式法)：** 显式、隐式、参数式.

如：$y=x-1$，$x-y-1=0$，$\begin{cases} x=\cos\theta, \\ y=\sin\theta. \end{cases}$

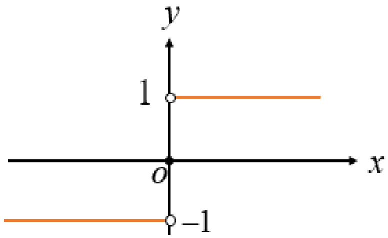
3. 几个特殊的函数举例：

（1）绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$



其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，　值域为 $f(D)=[0,+\infty)$

（2）符号函数 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$



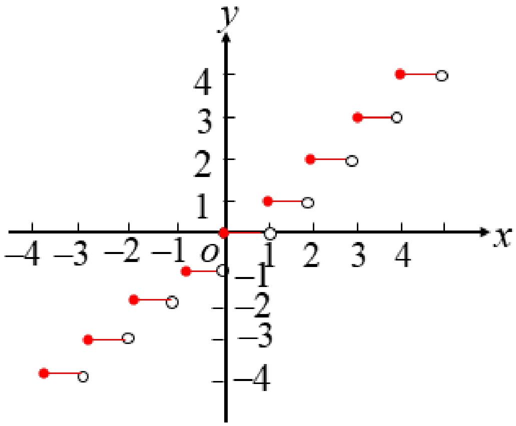
其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，　值域为 $f(D)=\{-1,0,1\}$

（3）取整函数 $y=[x]$

不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分， 记作 $[x]$

其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$， 值域为 $f(D)=Z$

其图形为阶梯曲线.

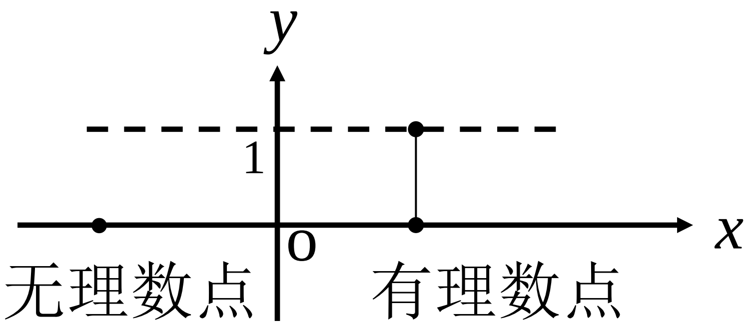


如：$[-3.5]=-4$　　　$[-1.1]=-1$

$[0.85]=0$　　　$[2.14]=2$

（4）狄利克雷函数

$$y = D(x) = \begin{cases} 1 & \text{当}x\text{是有理数时} \\ 0 & \text{当}x\text{是无理数时} \end{cases}$$



三、函数的几种特性

符号:"$\forall$" ---任意确定的，任意给定的;"$\exists$" ---存在.

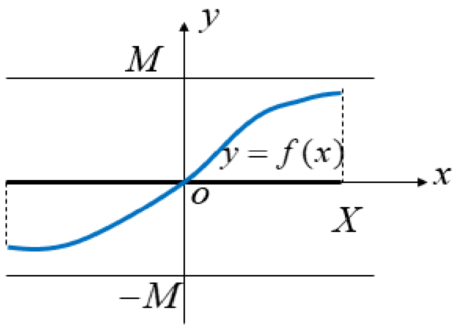
1、函数的有界性： 设函数 $f(x)$ 的定义域为D .数集 $I \subset D$.

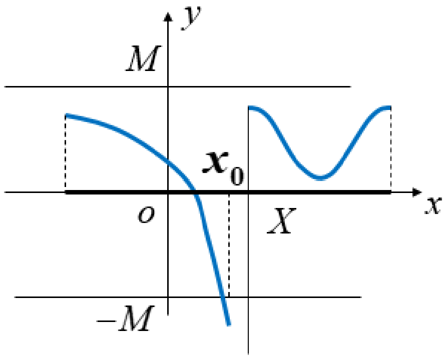
（1）若 $\exists M_1$, 使得对$\forall x \in I$, 有 $f(x) \le M_1$ 成立,则称函数 $f(x)$

在数集 I 上有上界，且M_1为 $f(x)$ 在数集I上的一个上界.

（2）若 $\exists M_2$，使得对$\forall x\in I$，有$f(x)\geq M_2$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在数集I 上有下界且M_2为$f(x)$在数集I上的一个**下界**.

（3）若 $f(x)$ 在数集 I 上即有上界又有下界，则称函数$f(x)$ 在数集I 上为**有界函数，** 否则称函数无界.





注：

（1） $f(x)$ 在数集 I 上有界 $\Leftrightarrow \exists M>0$, 对 $\forall x\in I$ ， 有 $|f(x)|\le M$

（2） $f(x)$ 在数集 I 上无界 $\Leftrightarrow \forall M>0$,存在 $x_0\in I$, 使得 $|f(x_0)|>M$

例如：

（1） $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$上是有界的：

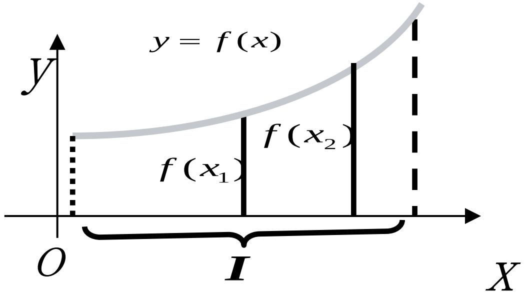
(2) 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内是无上界的. 其在 $(0,1)$ 内有下界， 无上界. 在开区间 $(1,2)$ 内是有界的.

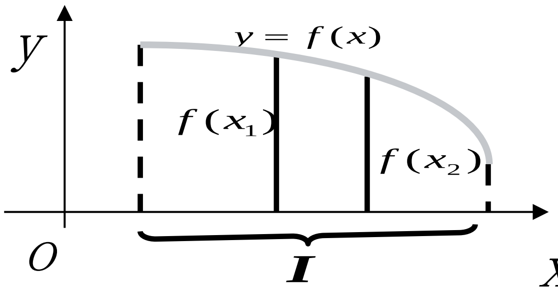
2. 函数的单调性: 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \in D$

如果对于区间 I 上的任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，有

（1）$f(x_1)(<) \le f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上（严格）**单调增加**；

（2）$f(x_1)(>) \ge f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上（严格）**单调减少.**





（严格）单调增加和（严格）单调减少的函数统称为**单调函数**.

例如： 函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上单调减少,

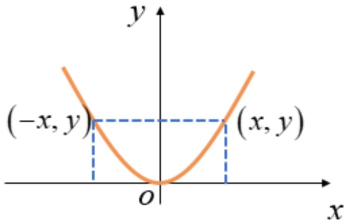
在区间 $[0,+\infty)$上单调增加,

但在 $(-\infty,+\infty)$ 内不单调.

函数

3. **函数的奇偶性**:设区间 D 关于原点对称，对于 $\forall x \in D$，有

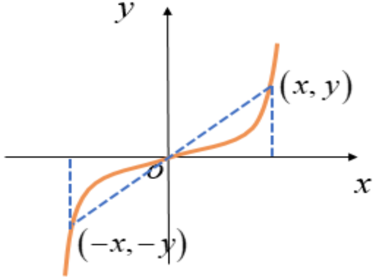
（1）$f(-x)=f(x)$，称 $f(x)$ 为**偶函数**,



（2）$f(-x)=-f(x)$，称 $f(x)$ 为**奇函数**,

例如：$y=x^2, y=\cos x$ 都是偶函数；

$y=x^3, y=\sin x$ 都是奇函数；



$y=\sin x+\cos x$ 是非奇非偶函数.

4. 函数的周期性: 设 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个正数T，使得对于任一$x \in D$，有 $x+T \in D$，且有 $f(x+T)=f(x)$ 称 $f(x)$ 为**周期函数**，T 称为 $f(x)$ 的周期.

注： 1）通常说周期函数的周期是指其**最小正周期**. 但并不是所有周期函数都有最小正周期，如常数函数.

2）周期函数的图形特点：在函数的定义域内，每间隔 nT的区间上，函数有相同的形状.

例2 证明狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\in \mathrm{Q},\\ 0, & x\in \overline{\mathrm{Q}}\end{cases}$

是周期函数，但无最小正周期.

证明 $\forall x\in \mathrm{R}$, 当 $x\in \mathrm{Q}$ 时，对 $\forall r\in \mathrm{Q}$，有 $x+r\in \mathrm{Q}$，因此有

$$D(x+r)=1=D(x)$$

当 $x\notin \mathrm{Q}$ 时，则 $x+r\notin \mathrm{Q}$，因此有 $D(x+r)=0=D(x)$

综上可知，对 $\forall x\in \mathrm{R}$，$\forall r\in \mathrm{Q}$ 恒有 $D(x+r)=D(x)$

所以任意有理数均为 $D(x)$ 的周期，**正有理数无最小值，**得证.

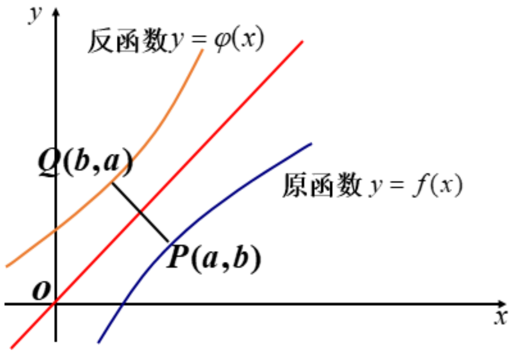
四、初等函数

1. 反函数： 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，值域为 $f(D)$，

$x=f^{-1}(y)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数，其定义域为 $f(D)$，值域为 D .

注： 反函数 $y=f^{-1}(x)=\varphi(x)$ 与其原来函数

$y=f(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.



2. 反函数存在定理： 如果函数$y=f(x)$单值单调，其反函数$x=f^{-1}(y)$必存在，且有相同的单调性.

例3 求正弦函数$y=\sin x$ 在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的反函数.

解 函数 $y=\sin x$ 在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上单调增加，且值域为$[-1,1]$.

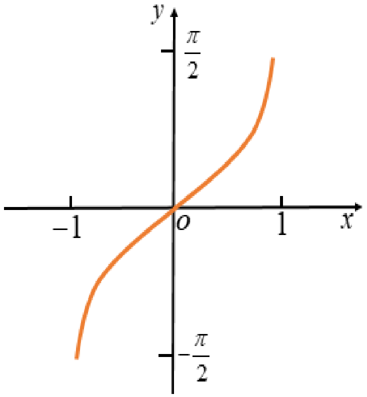
由反函数存在定理知，该函数一定存在反函数$x=\sin^{-1}y$

记作$x=\arcsin y$，因此$y=\arcsin x$为$y=\sin x$ 的反函数. 具体如下

函数

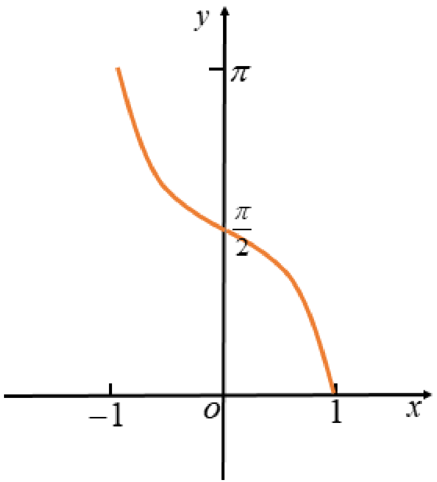
（1）反正弦函数 $y = \arcsin x$

定义域为$[-1,1]$，值域为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，图形如右图



（2）反余弦函数 $y = \arccos x$

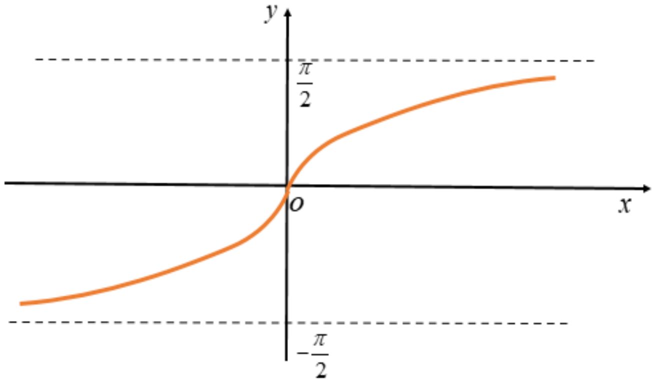
定义域为$[-1,1]$，值域为$[0,\pi]$，图形如右图



（3）反正切函数 $y = \arctan x$

定义域为$(-\infty,+\infty)$，

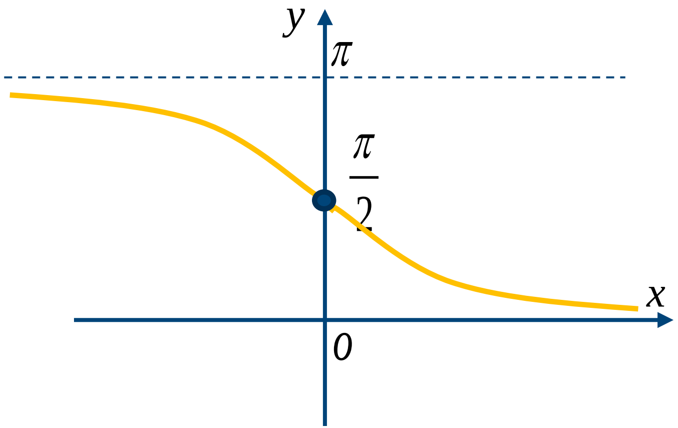
值域为$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，如右图：



（4）反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$

定义域为$(-\infty,+\infty)$，

值域为 $(0,\pi)$ ，如右图：



2. 复合函数： 函数 $y=f(u)$ 定义域为 D_1, 函数 $u=\varphi(x)$ 在 D 上有定义且 $\varphi(D)\subset D_1$， 则 $y=f[\varphi(x)]$ 称为由函数 $u=\varphi(x)$ 与 $y=f(u)$ 构成的复合函数， 其中 $x\in D$， 变量 u 称为中间变量． 记作 $(f\circ\varphi)(x)=f[\varphi(x)]$

注： 1） 函数 φ 的值域落在函数的 f 定义域内.

2） 不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的.

如函数 $y=\arcsin u$, $u=2+x^2$ 不能构成复合函数,

3） 复合函数可以由两个以上的函数经过复合构成.

例4 下列函数是由哪些函数复合而成的？

（1）$y = \log[\tan(x^2)]$ （2）$y = 2^{\arctan\sqrt{x}}$

解 （1）$y = \log u, u = \tan t, t = x^2$

（2）$y = 2^u, u = \arctan v, v = \sqrt{x}$

3. 函数的四则运算

设函数 $f(x),g(x)$ 的定义域分别为 D_1,D_2，令 $D=D_1\bigcap D_2\neq\varnothing$

则可定义如下的四则运算：

$$f\pm g:\left(f\pm g\right)(x)=f(x)\pm g(x),x\in D.$$

$$f\cdot g:\left(f\cdot g\right)(x)=f(x)\cdot g(x),x\in D.$$

$$\frac{f}{g}:\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)},x\in D-\left\{x\middle|g(x)=0,x\in D\right\}.$$

4. 基本初等函数：

（1）幂函数：$y = x^{\mu}$ （$\mu \in R$ 是常数）；

（2）指数函数：$y = a^{x}$ （$a > 0$ 且 $a \neq 1$）；

（3）对数函数：$y = \log_{a} x$（$a > 0$ 且 $a \neq 1$）；

特别当 $a = e$ 时，记为 $y = \ln x$.

（4）三角函数：①弦函数 $y = \sin x, y = \cos x$

②切函数 $y = \tan x, y = \cot x$

③割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$（正割），$y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$（余割），

注： $\sec^2 x=1+\tan^2 x$ $\csc^2 x=1+\cot^2 x$

（5）反三角函数：

$$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$$

5. 初等函数： 由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合运算所构成并**可用一个式子**表示的函数.

例如： $y = \tan^2 x$, $y = \arcsin\sqrt{1-x^2}$

又如 $y = \begin{cases} x, x > 0 \\ -x, x \le 0 \end{cases}$ 也是初等函数. 事实上, $y = |x| = \sqrt{x^2}$

故 y 是初等函数.

6. 双曲函数：

双曲正弦： $\mathrm{sh}x = \dfrac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}$

双曲余弦： $\mathrm{ch}x = \dfrac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}$

双曲正切： $\mathrm{th}x = \dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x} = \dfrac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}$

反双曲函数： $y = \mathrm{arsh}x, y = \mathrm{arch}x, y = \mathrm{arth}x$

注：双曲函数和反双曲函数也是初等函数.

例5 设$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 0 \\ \lg x, & x>0 \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} 2-\cos x, & x\le 0 \\ 1-\sqrt{x}, & x>0 \end{cases}$, 求$f[g(x)]$, $g[f(x)]$.

解 当$x\le 0$时，$g(x)=2-\cos x>0$， 故 $f[g(x)]=\lg(2-\cos x)$

当$0<x<1$时，$g(x)=1-\sqrt{x}>0$， 故 $f[g(x)]=\lg\left(1-\sqrt{x}\right)$

当 $x\ge 1$时，$g(x)=1-\sqrt{x}\le 0$ ， 故 $f[g(x)]=\left(1-\sqrt{x}\right)^2$

综上得$f[g(x)]=\begin{cases} \lg\left(2-\cos x\right), & x\le 0, \\ \lg\left(1-\sqrt{x}\right), & 0<x<1, \\ \left(1-\sqrt{x}\right)^2, & x\ge 1 \end{cases}$同理得$g[f(x)]=\begin{cases} 1+x, & x\le 0, \\ 2-\cos(\lg x), & 0<x\le 1, \\ 1-\sqrt{\lg x}, & x>1. \end{cases}$

五、内容小结

- **基本概念：** 常量与变量，区间与邻域.
- **函数的概念：** 单值与多值函数.
- **函数的特性：** 单调性, 有界性, 奇偶性与周期性.
- 反函数与复合函数，基本初等函数与初等函数.

思考题：

1、已知 $f(x)=\sin x, f[\varphi(x)]=1-x^2$，求 $\varphi(x)$ 的定义域.

【答：$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ 】

2、设 $x=1, x_{n+1}=\sqrt{1+x_n}\,(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{x_n\}$ 单调并有界.

【提示：利用数学归纳法证有界性】

南京信息工程大学
Nanjing University of Information Science & Technology

数学是打开科学大门的钥匙。

——培根