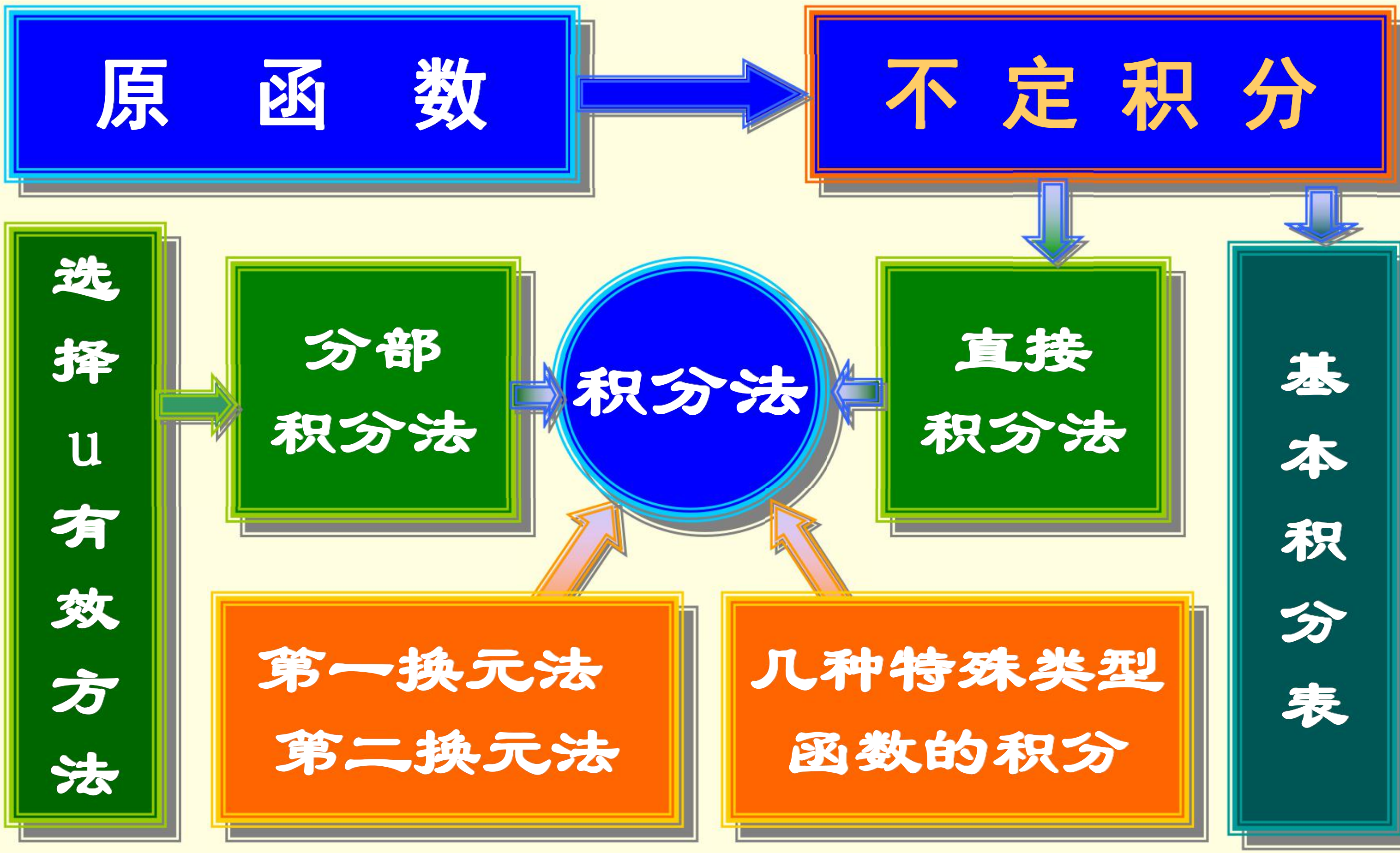
第三章　不定积分

习题课

一、主要内容

二、典型例题

一、主要内容


原 函 数
不 定 积 分
选择u有效方法
分部积分法
积分法
直接积分法
基本积分表
第一换元法
第二换元法
几种特殊类型函数的积分

1、原函数

定义 如果在区间I内，可导函数$F(x)$的导函数为$f(x)$，即$\forall x \in I$，都有$F'(x)=f(x)$或$dF(x)=f(x)dx$，那么函数$F(x)$就称为$f(x)$或$f(x)dx$在区间I内原函数.

原函数存在定理 如果函数$f(x)$在区间I内连续，那么在区间I内存在可导函数$F(x)$，使$\forall x \in I$，都有$F'(x)=f(x)$.

即：连续函数一定有原函数.

2、不定积分

(1) 定义

在区间I内，函数$f(x)$的带有任意常数项的原函数称为$f(x)$在区间I内的不定积分，记为$\int f(x)dx$.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

函数$f(x)$的原函数的图形称为$f(x)$的积分曲线.

(2) 微分运算与求不定积分的运算是互逆的.

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right]=f(x) \qquad d\left[\int f(x)dx\right]=f(x)dx$$

$$\int F'(x)dx=F(x)+C \qquad \int dF(x)=F(x)+C$$

(3) 不定积分的性质

1^0 $\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$

2^0 $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ （k是常数，$k\neq 0$)

3、基本积分表

(1) $\int k dx = kx + C$ (k是常数)

(2) $\int x^{\mu} dx = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1)$

(3) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln x + C$

(4) $\int \dfrac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$

(5) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$

(6) $\int \cos x dx = \sin x + C$

(7) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

(8) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \tan x + C$

(9) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$

(10) $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$

(11) $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

(12) $\int e^x dx = e^x + C$

(13) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

(14) $\int \mathrm{sh} x dx = \mathrm{ch} x + C$

(15) $\int \mathrm{ch}\, x dx = \mathrm{sh} x + C$

(16) $\int \tan x dx = -\ln\cos x + C$

(17) $\int \cot x dx = \ln\sin x + C$

(18) $\int \sec x dx = \ln(\sec x + \tan x) + C$

(19) $\int \csc x dx = \ln(\csc x - \cot x) + C$

(20) $\int \dfrac{1}{a^2 + x^2} dx = \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a} + C$

(21) $\int \dfrac{1}{x^2 - a^2} dx = \dfrac{1}{2a}\ln\dfrac{x-a}{x+a} + C$

(22) $\int \dfrac{1}{a^2 - x^2} dx = \dfrac{1}{2a}\ln\dfrac{a+x}{a-x} + C$

(23) $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$

(24) $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx$

$= \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C$

4、直接积分法

由定义直接利用基本积分表与积分的性质求不定积分的方法.

5、第一类换元法

定理 1　设 $f(u)$ 具有原函数，$u=\varphi(x)$ 可导，

则有换元公式

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=[\int f(u)du]_{u=\varphi(x)}$$

第一类换元公式（凑微分法）

常见类型:

$1.\ f(x^{n+1})x^n dx;$

$2.\ \dfrac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx;$

$3.\ \dfrac{f(\ln x)}{x}dx;$

$4.\ \dfrac{f(\frac{1}{x})}{x^2}dx;$

$5.\ f(\sin x)\cos x dx;$

$6.\ f(a^x)a^x dx;$

$7.\ f(\tan x)\sec^2 x dx;$

$8.\ \dfrac{f(\arctan x)}{1+x^2}dx;$

6、第二类换元法

定理　设 $x=\psi(t)$ 是单调的、可导的函数，并且 $\psi'(t)\neq 0$，又设 $f[\psi(t)]\psi'(t)$ 具有原函数，则有换元公式

$$\int f(x)dx=\left[\int f[\psi(t)]\psi'(t)dt\right]_{t=\overline{\psi}(x)}$$

第二类换元公式

其中 $\overline{\psi}(x)$ 是 $x=\psi(t)$ 的反函数.

常用代换:

1.$x=(at+b)^{\alpha},\alpha\in R.$

2.三角函数代换

如$f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$,令$x=a\sin t.$

3.双曲函数代换

如$f(x)=\sqrt{a^2+x^2}$,令$x=asht.$

4.倒置代换　令$x=\dfrac{1}{t}.$

7、分部积分法

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$ 分部积分公式

8. 选择u的有效方法:LIATE选择法

L----对数函数；　　I----反三角函数；

A----代数函数；　　T----三角函数；

E----指数函数；　　哪个在前哪个选作u.

9、几种特殊类型函数的积分

（1）有理函数的积分

定义　两个多项式的商表示的函数称之.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$$

其中m、n都是非负整数；$a_0,a_1,\cdots,a_n$及$b_0,b_1,\cdots,b_m$都是实数，并且$a_0\neq 0$，$b_0\neq 0$.

真分式化为部分分式之和的待定系数法

四种类型分式的不定积分

$$1.\int \frac{Adx}{x-a} = A\ln|x-a| + C; \quad 2.\int \frac{Adx}{(x-a)^n} = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C;$$

$$3.\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\ln|x^2+px+q|$$

$$+\frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\arctan\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C;$$

$$4.\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx = \frac{M}{2}\int \frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^n} + \int \frac{N-\frac{Mp}{2}}{(x^2+px+q)^n}dx$$

此两积分都可积,后者有递推公式

（2） 三角函数有理式的积分

定义 由三角函数和常数经过有限次四则运算构成的函数称之．一般记为 $R(\sin x,\cos x)$

令 $u=\tan\frac{x}{2}$　　$x=2\arctan u$

$$\sin x=\frac{2u}{1+u^2}\quad \cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}\quad dx=\frac{2}{1+u^2}du$$

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2u}{1+u^2},\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{2}{1+u^2}du$$

（3）简单无理函数的积分

讨论类型： $R(x,\sqrt[n]{ax+b})$ $R(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}})$

解决方法：作代换去掉根号.

令 $t=\sqrt[n]{ax+b};$ 令 $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}};$

二、典型例题

例1 求 $\int \frac{2^x 3^x}{9^x - 4^x} dx.$

解 原式 $= \int \frac{(\frac{3}{2})^x}{(\frac{3}{2})^{2x} - 1} dx = \frac{1}{\ln\frac{3}{2}} \int \frac{d(\frac{3}{2})^x}{(\frac{3}{2})^{2x} - 1} \xlongequal{\text{令}(\frac{3}{2})^x = t} \frac{1}{\ln\frac{3}{2}} \int \frac{dt}{t^2 - 1}$

$= \frac{1}{2\ln\frac{3}{2}} \int (\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}) dt = \frac{1}{2(\ln 3 - \ln 2)} \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C$

$= \frac{1}{2(\ln 3 - \ln 2)} \ln\left|\frac{3^x - 2^x}{3^x + 2^x}\right| + C.$

例2 求 $\displaystyle\int \frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x}dx.$

解 原式 $\displaystyle=\int \frac{e^x\left(1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx$

$$=\int \left(e^x\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}+e^x\tan\frac{x}{2}\right)dx$$

$$=\int \left[\left(e^x d\left(\tan\frac{x}{2}\right)+\tan\frac{x}{2}de^x\right]\right. =\int d\left(e^x\tan\frac{x}{2}\right)$$

$$=e^x\tan\frac{x}{2}+C.$$

例3 求 $\int \frac{\sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5}}{\sqrt{1+x^2}}dx.$

解 $\because [\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5]'$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

原式 $= \int \sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5} \cdot d[\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5]$

$$= \frac{2}{3}[\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5]^{\frac{3}{2}} + C.$$

例4 求 $\int \frac{x+1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx.$

解 令$x=\frac{1}{t}$, (倒代换)

$$原式=\int \frac{\frac{1}{t}+1}{\frac{1}{t^2}\sqrt{(\frac{1}{t})^2-1}}(-\frac{1}{t^2})dt=-\int \frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$=-\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt+\int \frac{d(1-t^2)}{2\sqrt{1-t^2}}=-\arcsin t+\sqrt{1-t^2}+C$$

$$=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-\arcsin\frac{1}{x}+C.$$

例5 求 $\int \frac{dx}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}$.

解 令 $e^{\frac{x}{6}}=t$, $x=6\ln t$, $dx=\frac{6}{t}dt$,

原式 $=\int \frac{1}{1+t^3+t^2+t}\cdot\frac{6}{t}dt = \int \frac{6}{t(1+t)(1+t^2)}dt$

设 $\frac{6}{t(1+t)(1+t^2)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t+1}+\frac{Ct+D}{1+t^2}$

$$6=A(1+t)(1+t^2)+Bt(1+t^2)+(Ct+D)t(t+1)$$

解得 $A=6,\quad B=-3,\quad C=-3,\quad D=-3.$

$$\text{原式}=\int\left(\frac{6}{t}-\frac{3}{1+t}-\frac{3t+3}{1+t^2}\right)dt$$

$$=6\ln t-3\ln(1+t)-\frac{3}{2}\ln(1+t^2)-3\arctan t+C$$

$$=x-3\ln(1+e^{\frac{x}{6}})-\frac{3}{2}\ln(1+e^{\frac{x}{3}})-3\arctan e^{\frac{x}{6}}+C.$$

例6 求 $\int x\arctan x\ln(1+x^2)dx.$

解 $\because \int x\ln(1+x^2)dx = \frac{1}{2}\int \ln(1+x^2)d(1+x^2)$

$$= \frac{1}{2}(1+x^2)\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}x^2 + C.$$

原式 $= \int \arctan x d[\frac{1}{2}(1+x^2)\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}x^2]$

$$= \frac{1}{2}[(1+x^2)\ln(1+x^2) - x^2]\arctan x$$

$$-\frac{1}{2}\int [\ln(1+x^2) - \frac{x^2}{1+x^2}]dx$$

$\boxed{\text{分部积分}}$

$$=\frac{1}{2}\arctan x[(`1+x^2)\ln(1+x^2)-x^2-3]$$

$$-\frac{x}{2}\ln(1+x^2)+\frac{x}{2}+C.$$

例7 求 $\int\frac{dx}{x(2+x^{10})}$.

解 原式 $=\int\frac{x^9dx}{x^{10}(2+x^{10})}=\frac{1}{10}\int\frac{d(x^{10})}{x^{10}(2+x^{10})}$

$$=\frac{1}{20}[\ln x^{10}-\ln(x^{10}+2)]+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{20}\ln(x^{10}+2)+C.$$

例8 求 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.

根式代换

解 $\because \sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4} = \sqrt[3]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4} \cdot (x+1)^2$.

令 $t = \frac{x-1}{x+1}$, 则有 $dt = \frac{2}{(x+1)^2} dx$,

$$\text{原式} = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4} \cdot (x+1)^2} = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{4}{3}} dt$$

$$= -\frac{3}{2} t^{-\frac{1}{3}} + C = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C.$$

例9 求 $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx.$

解 原式 $=\int \frac{x+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx$

$$=\int \frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx+\int \tan\frac{x}{2}dx$$

$$=x\tan\frac{x}{2}-\int \tan\frac{x}{2}dx+\int \tan\frac{x}{2}dx$$

$$=x\tan\frac{x}{2}+C.$$

例10 求 $\int [\frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f^2(x)f''(x)}{f'^3(x)}]dx.$

解 原式 $= \int \frac{f(x)f'^2(x) - f^2(x)f''(x)}{f'^3(x)}dx$

$$= \int \frac{f(x)}{f'(x)} \cdot \frac{f'^2(x) - f(x)f''(x)}{f'^2(x)}dx$$

$$= \int \frac{f(x)}{f'(x)} d[\frac{f(x)}{f'(x)}]$$

$$= \frac{1}{2}[\frac{f(x)}{f'(x)}]^2 + C.$$

例11 求 $\int \max\{1,|x|\}dx.$

分段函数的不定积分

解 设 $f(x)=\max\{1,|x|\},$

则 $f(x)=\begin{cases} -x, & x<-1 \\ 1, & -1\le x\le 1, \\ x, & x>1 \end{cases}$

$\because f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，则必存在原函数 $F(x)$.

$$F(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}x^2+C_1, & x<-1 \\ x+C_2, & -1\le x\le 1. \\ \frac{1}{2}x^2+C_3, & x>1 \end{cases}$$

又 $\because F(x)$须处处连续，有

$$\lim_{x\to -1^+}(x+C_2)=\lim_{x\to -1^-}(-\frac{1}{2}x^2+C_1)$$

即 $-1+C_2=-\frac{1}{2}+C_1$,

$$\lim_{x\to 1^+}(\frac{1}{2}x^2+C_3)=\lim_{x\to 1^-}(x+C_2)$$

即 $\frac{1}{2}+C_3=1+C_2$,

联立并令 $C_1 = C$,

可得 $C_2 = \frac{1}{2} + C, \quad C_3 = 1 + C.$

故 $\int \max\{1, |x|\} dx = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + C, & x < -1 \\ x + \frac{1}{2} + C, & -1 \le x \le 1. \\ \frac{1}{2}x^2 + 1 + C, & x > 1 \end{cases}$

测 验 题

一、选择题：

1、设$F_1(x)$, $F_2(x)$是区间I内连续函数$f(x)$的两个不同的原函数，且$f(x)\neq 0$, 则在区间I内必有（ ）

（A） $F_1(x)+F_2(x)=C$；

（B） $F_1(x)\cdot F_2(x)=C$；

（C） $F_1(x)=CF_2(x)$；

（D） $F_1(x)-F_2(x)=C$.

2、若$F'(x)=f(x)$,则$\int dF(x)$=（ ）

（A） $f(x)$；　　（B） $F(x)$；

（C） $f(x)+C$；　　（D） $F(x)+C$.

3、$f(x)$在某区间内具备了条件（　　）就可保证它的原函数一定存在

（A）有极限存在；　　（B）连续；

（B）有界；　　（D）有有限个间断点

4、下列结论正确的是（　　　）

（A）初等函数必存在原函数；

（B）每个不定积分都可以表示为初等函数；

（C）初等函数的原函数必定是初等函数；

（D）A, B, C都不对 .

5、函数$f(x)=(x+|x|)^2$的一个原函数$F(x)=$(　　)

（A）$\frac{4}{3}x^3$;　　（B）$\frac{4}{3}|x|x^2$;

（C）$\frac{2}{3}x(x^2+|x|^2)$;　　（D）$\frac{2}{3}x^2(x+|x|)$.

6、已知一个函数的导数为$y'=2x$，且$x=1$时$y=2$，这个函数是（　）

（A）$y=x^2+C$;

（B）$y=x^2+1$;

（C）$y=\frac{x^2}{2}+C$;

（D）$y=x+1$.

7、下列积分能用初等函数表出的是（　　）

（A）$\int e^{-x^2}dx$；　　（B）$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$；

（C）$\int \frac{1}{\ln x}dx$；　　（D）$\int \frac{\ln x}{x}dx$.

8、$\int f(x)dx = F(x)+C$，且 $x = at+b$，则

$\int f(t)dt =$（　　）

（A）$F(x)+C$；

（B）$F(t)+C$；

（C）$\frac{1}{a}F(at+b)+C$；

（D）$F(at+b)+C$　.

9、$\int \frac{\ln x}{x^2}dx =$（　）

（A）$\frac{1}{x}\ln x + \frac{1}{x} + C$；　（B）$-\frac{1}{x}\ln x + \frac{1}{x} + C$；

（C）$\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + C$；　（D）$-\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + C$.

10、$\int \frac{dx}{(4x+1)^{10}} =$（　　）

（A）$\frac{1}{9}\frac{1}{(4x+1)^9} + C$；　（B）$\frac{1}{36}\frac{1}{(4x+1)^9} + C$；

（C）$-\frac{1}{36}\frac{1}{(4x+1)^9} + C$；　（D）$-\frac{1}{36}\frac{1}{(4x+1)^{11}} + C$.

二、求下列不定积分：

1、$\int \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}dx$；

2、$\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$；

3、$\int \frac{\sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5}}{\sqrt{1+x^2}}dx$；

4、$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$；

5、$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}}$；

6、$\int \frac{x+1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx$；

7、$\int \frac{dx}{e^x(1+e^{2x})}$；

8、$\int x^2\arccos x dx$；

9、$\int \frac{x^{11}dx}{x^8+3x^4+2}$；

10、$\int \frac{\arccos x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx$.

三、设 $f(x)=\begin{cases} x\ln(1+x^2),\ x\ge 0 \\ (x^2+2x-3)e^{-x},\ x<0 \end{cases}$，求 $\int f(x)dx$.

四、设 $f'(e^x)=a\sin x+b\cos x$, (a, b 为不同时为零的常数)，求 $f(x)$.

五、设当 $x\neq 0$时， $f'(x)$连续，求

$$\int \frac{xf'(x)-(1+x)f(x)}{x^2e^x}dx.$$

测验题答案

一、1、D； 2、D； 3、B； 4、D； 5、D；
6、B； 7、D； 8、B； 9、D； 10、C.

二、1、$-\sin\frac{1}{x}+C$； 2、$\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}+C$；

3、$\frac{2}{3}[\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5]^{\frac{2}{3}}+C$；

4、$\frac{1}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}+C$；

5、$-\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+\arcsin x+C$；

6、$\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}-\arcsin\dfrac{1}{x}+C$；

7、$-e^{-x}-\arctan(e^x)+C$；

8、$\dfrac{1}{3}x^3\arccos x+\dfrac{1}{9}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}-\dfrac{1}{3}\sqrt{1-x^2}+C$；

9、$\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{1}{4}\ln(1+x^4)-\ln(x^4+2)+C$；

10、$\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x-\dfrac{1}{2}\ln\left|1-x^2\right|+C$.

三、$\int f(x)dx =$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}x^2\ln(1+x^2)-\dfrac{1}{2}[x^2-\ln(1+x^2)]+C, & x\geq 0 \\ -(x^2+4x+1)e^{-x}+1+C, & x<0 \end{cases}.$$

四、$f(x)=\dfrac{x}{2}[(a+b)\sin(\ln x)+(b-a)\cos(\ln x)]+C.$

五、$\dfrac{f(x)}{xe^x}+C.$