专题 1 函数 极限 连续

第一部分 内容概要

一、函数

1. 定义：设有两个变量 x， y，给定数集 D，如果对于 $\forall x\in D$，按照一定的法则总有确定的数值 y 与之对应，则称变量 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$． D 称为函数的定义域．（注意分段函数、符号函数、取整函数（ $x-1<[x]\le x$ ）、狄利克雷函数等）

2. 性质：设 D 为函数 $f(x)$ 的定义域， $I\subset D$.

(1)有界性：若存在 $M>0$，使得对于 $\forall x\in I$ ，都有 $\left|f(x)\right|\le M$ ，则称 $f(x)$ 在 I 上有界，否则无界.

(2)周期性：若存在 $l\ne 0$，使得当 $x\in D$， $x+l\in D$ 时，都有 $f(x+l)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为以 l 为周期的周期函数.（注意 $\sin(n\pi+\alpha)=(-1)^n\sin\alpha$ ）

(3)奇偶性：若对于 $\forall x\in D$，总有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；若对于 $\forall x\in D$，总有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数；奇（偶）函数的图像关于原点(y 轴)对称.

(4)单调性：若对 I 内任意的 $x_1<x_2$，总有 $f(x_1)<f(x_2)$ (或 $f(x_1)>f(x_2)$)，则称 $f(x)$ 在 I 上单调增加（或减少).

3. 反函数：设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W，若对于 $\forall y\in W$ ，在 D 上有确定的 x 与之对应，且满足 $y=f(x)$，则称函数 $x=f^{-1}(y)$ 为函数 $y=f(x)$ 的反函数，习惯上记为 $y=f^{-1}(x)$.

4. 复合函数：若 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1， $u=g(x)$ 的定义域为 D_2，当 $g(x)$ 的值域 $\subset D_1$ 时，称 $y=f[\varphi(x)]$ 是由 $y=f(u)$ 与 $u=g(x)$ 复合而成的复合函数.

5. 初等函数：常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数．由基本初等函数经过有限次的四则运算或复合且能用一个式子表达的函数，称为初等函数.

二、极限

1. 数列极限

(1) $\varepsilon-N$ 定义：对于 $\forall\varepsilon>0$，总存在正整数 N ，当 $n>N$ 时，有 $\left|x_n-a\right|<\varepsilon$ 成立，则称

a 为数列 $\{x_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时的极限，或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$．如果数列没有极限，则称数列发散．

(2)性质：唯一性、有界性、保号性

2. 函数极限

(1) $\varepsilon-\delta$ 定义：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$．

$\varepsilon-X$ 定义：$\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$．

(2)单侧极限：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $-\delta<x-x_0<0$ ($0<x-x_0<\delta$)时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限（右极限），记作

$$f(x_0^-)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A\left(f(x_0^+)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A\right).$$

注：①函数极限存在的充要条件

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_o^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A.$$

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}x_{2n}=\lim_{n\to\infty}x_{2n+1}=A.$$

一般，若数列被分为互不相交的子数列，则极限存在的充要条件是这些子数列有相同的极限．

②几个常用极限

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\,(a>0)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$；$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=\begin{cases}0, & |q|<1\\ \infty, & |q|>1\\ 1, & q=1\\ \text{不存在}, & q=-1\end{cases}$；$\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 不存在；

$\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$；$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}=-1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}=1$；

$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$；$\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arccot}x=\pi$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arccot}x=0$；

$\lim\limits_{x\to0^-}[x]=-1$，$\lim\limits_{x\to0^+}[x]=0$；$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}=\max\limits_{1\le i\le k}\{a_i\}$ $(a_i>0)$．

(3)性质：唯一性、局部有界性、局部保号性

3. 极限的存在准则

(1)单调有界准则：单调有界数列必收敛．

注：单调递增有上界或单调递减有下界的数列必收敛．

(2)夹逼准则：若在 x_0 的某邻域内，有 $g(x)\le f(x)\le h(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，

则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

若数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$满足$y_n\le x_n\le z_n$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty} z_n=A$，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$.

4. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

5. 无穷小与无穷大

(1)定义：若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=0$，则称 $f(x)$ 为 $x\to x_0\,(x\to\infty)$ 时的无穷小.

若 $\forall M>0$，存在 $X>0\,(\delta>0)$，当 $|x|>X$ $(0<|x-x_0|<\delta)$时，有 $|f(x)|>M$，则称 $f(x)$ 为 $x\to\infty(x\to x_0)$ 时的无穷大，记为 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\(x\to x_0)}} f(x)=\infty$.

(2)性质

①有限个无穷小的代数和或乘积是无穷小.

②无穷小与有界变量的乘积仍是无穷小.

③无穷大的倒数是无穷小，非零无穷小的倒数是无穷大.

④ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

(3)无穷小的比较：设在相同极限过程中，有 $\lim\alpha=0$，$\lim\beta=0$.

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则称 β 是比 α 高阶的无穷小，记为 $\beta=o(\alpha)$.

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称 β 是比 α 低阶的无穷小.

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=C\ne 0$，则称 β 与 α 是同阶无穷小.

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，则称 β 与 α 是等价无穷小，记为 $\beta\sim\alpha$.

若 $\lim\dfrac{\beta}{x^k}=C\ne 0\,(k>0)$，则称 β 是 x 的 k 阶无穷小.

注：下列函数或数列从左至右，阶数由低到高（趋于 $+\infty$ 的速度越来越快）

当 $x\to+\infty$ 时，$\ln^\alpha x,\ x^\beta,\ a^x,\ x^x$；

当 $n\to\infty$ 时，$\ln^\alpha n,\ n^\beta,\ a^n,\ n!,\ n^n$，其中 $\alpha,\beta>0$，$a>1$.

由此可得，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{n!}=+\infty$.

(4)等价无穷小代换：设 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，$\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

注：①等价无穷小代换和差慎用!

②常用等价无穷小：当 $x \to 0$ 时，$\sin x \sim x$；$\tan x \sim x$；$\arctan x \sim x$；$\arcsin x \sim x$；$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$； $\ln(1+x) \sim x$； $e^x - 1 \sim x$； $a^x - 1 \sim x\ln a\ (a>0)$；

$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$； $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x$； $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x$．

6. 极限的运算法则

(1)极限的四则运算法则：设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 都存在，则

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm\lim_{x\to x_0} g(x);$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)g(x)\right]=\lim_{x\to x_0} f(x)\lim_{x\to x_0} g(x);$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[Cf(x)\right]=C\lim_{x\to x_0} f(x)\ \ (C\text{为任意常数});$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}\quad (\lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0).$$

注：极限的四则运算法则成立的前提是极限都存在.

(2)复合函数的极限运算法则（常用于极限的变量代换）：设 $u=g(x)$， $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=a$，

$g(x)\neq a$， $\lim\limits_{u\to a} f(u)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f[g(x)] \overset{u=g(x)}{=\!=\!=} \lim\limits_{u\to a} f(u)=A$.

注：上述极限的运算法则对其它极限过程同样成立.

7. 极限的计算方法(判断类型，注意化简：等价无穷小代换、有理化、e抬起、撇开定式等)

(1)利用连续函数的性质

(2)利用极限的四则运算法则及复合运算法则(变量代换)

(3)利用夹逼准则(放缩法)

(4)利用单调有界准则(证明极限存在，并求极限)

(5)利用两个重要极限

(6)利用等价无穷小代换

(7)利用导数的定义： $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

(8)利用洛必达(L'Hospital)法则或**施笃兹**（Stolz）**定理**

①洛必达法则($\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$两种基本型未定式)

如果(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$；

(2)函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内可导，且 $g'(x)\neq 0$；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$(或$\infty$)，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$.

注：$0\cdot\infty$，$\infty-\infty$，∞^0，0^0，1^∞ 型等未定式可利用代数变换或e抬起等方法化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型.

②**施笃兹定理**(数列极限的洛必达法则，常用于分子分母为求和型数列极限)

设数列 $\{b_n\}$ 单调增加且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=+\infty$，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}$ 存在或为 $\pm\infty$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}.$$

例：利用施笃兹定理证明极限的**平均值定理**(参见国赛2011二(1)、2012一(1))

(1)设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在或为 $\pm\infty$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.（算术平均）

(2)设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在或为 $+\infty$，$a_n>0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.（几何平均）

(3)设 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$ 存在或为 $+\infty$，$a_n>0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$.

证明：由施笃兹定理得

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)-(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})}{n-(n-1)}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.（e抬起）

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_1}{1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$.

(9)利用泰勒公式

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n);$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2});$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1});$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+o(x^{n+1});$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n);$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n);$$

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+o(x^n).$$

注：① $\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$； $\arcsin x=x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$；

$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$； $\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$.

② $\frac{f(x)}{g(x)}$ 型：将分子分母展开到同阶.

$f(x)-g(x)$ 型：将 $f(x)$，$g(x)$ 分别展开到系数不相等的 x 的最低次幂.

(10)利用中值定理

$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$，ξ 介于 a，b 之间.

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$，$\xi$ 介于 a，b 之间.

(11)利用定积分的定义：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$，特别，取 n 等分，有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)\cdot\frac{b-a}{n}；\quad \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}.$$

三、连续

1. 定义：$f(x)$ 在点 x_0 连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ 或 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$.

$f(x)$ 在 (a,b) 内连续：$f(x)$ 在 (a,b) 内处处连续.

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续：$f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且在 $x=a$ 处右连续，在 $x=b$ 处左连续.

2. 初等函数的连续性：初等函数在其定义区间内处处连续.

3. 间断点及其分类

第一类间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 均存在的间断点 x_0 称为 $f(x)$ 的第一类间断点，其中

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$，则称点 x_0 为 $f(x)$ 的可去间断点；

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$，则称点 x_0 为 $f(x)$ 的跳跃间断点.

第二类间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 至少有一个不存在，称 x_0 为 $f(x)$ 的第二类间断点.

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 至少有一个为无穷大，则称点 x_0 为 $f(x)$ 的无穷间断点.

若极限不存在是由于振荡，则称点 x_0 为 $f(x)$ 的振荡间断点.

4. 可能间断点

初等函数：无定义的点.

分段函数：无定义的点（段内）、分界点（段间）.

5. 闭区间上连续函数的性质：设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则有

(1)最值定理： $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必存在最大值与最小值.

(2)有界定理： $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

(3)介值定理：设 m 和 M 分别为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小和最大值，对于满足 $m \le C \le M$ 的任意实数 C，至少存在一点 $\xi \in [a,b]$，使得 $f(\xi)=C$.

(4)零点定理：若 $f(a)f(b)<0$，则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得 $f(\xi)=0$.

第二部分 典型例题

1. 求函数表达式

例 1 设函数 $f(x)$ 是周期为 π 的奇函数，在 $x=0$ 处有定义，当 $x \in \left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，

$f(x)=\sin x-\cos x+2$，求 $x \in \left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ 时， $f(x)$ 的表达式.（2004 省赛）

【 $f(x)=\begin{cases} -\sin x-\cos x-2, & \dfrac{\pi}{2}<x<\pi \\ 0, & x=\pi \end{cases}$ 】

例 2 设 $f(x)$ 满足 $\sin f(x)-\dfrac{1}{3}\sin f\left(\dfrac{1}{3}x\right)=x$，求 $f(x)$.

【 $f(x)=2k\pi+\arcsin\dfrac{9}{8}x$ 或 $f(x)=(2k+1)\pi-\arcsin\dfrac{9}{8}x$， $k\in z$ 】

2. 求函数极限

计算重点：判断类型、注意化简（等价无穷小代换、根式有理化、 e 抬起、撇开定式）

常用方法：极限的四则运算、变量代换、恒等变形、等价无穷小代换、洛必达(L'Hospital)法则、e 抬起、放缩法、两个重要极限、导数的定义、泰勒公式等

例 3 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{\sin x}}{(x+x^{2})\ln(1+x)\arcsin x}$.

【 $\dfrac{1}{6}$ 】

例 4 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^{3}+3x^{2}}-\sqrt[4]{x^{4}-2x^{3}}\right)$.

【 $\dfrac{3}{2}$ 】

例5 求$\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}}\right)$，$a>0$.

【$\ln a$】

例6 设$f(x)$在$x=a$可导，$f(a)\neq 0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right]^n$.（1996南大）

【$\mathrm{e}^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$】

例7 求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)^{\frac{\mathrm{e}}{x}}$，$n$为给定正整数.

【$\mathrm{e}^{\frac{n+1}{2}\mathrm{e}}$】

例 8 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(\sin x)-\sin(\sin(\sin x))}{\sin x\cdot\sin(\sin x)\cdot\sin(\sin(\sin x))}$.（2016 省赛）

【 $\dfrac{1}{6}$ 】

例 9 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(x\,\mathrm{e}^{x})-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}\mathrm{e}^{2x}}}{\ln^4\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$.

【 $-\dfrac{1}{12}$ 】

例 10 已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+2x)+xf(x)}{1-\cos x}=2$ ，求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+2}{x}$.

【 3 】

例 11 设 $f(x)$ 具有连续的二阶导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3$，试求 $f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$ 及 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

【 0， 0， 4， e^2 】

例 12 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导， $f(0)=0$，数列 $\{x_n\}$， $\{y_n\}$ 满足： $x_n\in(-\delta,0)$， $y_n\in(0,\delta)$ $(\delta>0)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$， $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$. 试求：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n f(y_n)+y_n f(x_n)}{x_n y_n}$；(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}$.（2018 省赛）

【 $2f'(0)$， $f'(0)$ 】

例 13 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)\mathrm{d}t}{\left(\sqrt[3]{1+x^3}-1\right)\sin x}$.

【$\dfrac{3}{2}$】

例 14 设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0)\neq 0$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}$.

【$\dfrac{1}{2}$】

3. 求数列极限

常见类型：递归数列、n 项和的数列、n 项积的数列、一般情形

常用方法：单调有界定理、夹逼定理、恒等变形、施笃兹（Stolz）定理、利用定积分定 义、利用级数求和、利用级数收敛的必要条件、积化和、化为函数极限等

例 15 设 $u_n=\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2(1+2+\cdots+k)}\right]^n$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

【e^{-1}】

例 16 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^2}{n^3+1^2}+\dfrac{2^2}{n^3+2^2}+\cdots+\dfrac{n^2}{n^3+n^2}\right)$.（2017 省赛，2006 省赛）

【$\dfrac{1}{3}$】

例 17 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}$.

【1】

例 18 设数列 $\left\{x_n\right\}$ 满足：$n\sin\dfrac{1}{n+1}<x_n<(n+2)\sin\dfrac{1}{n+1}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k=$______.

【1】

例 19 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1^{3n}+2^{2n}+3^{n}\right)^{\frac{1}{n}}=$ ____________. （2018 省赛）

【4】

例 20 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上单调减少的非负连续函数，$a_n=\sum\limits_{i=1}^{n}f(i)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x$，$n=1,2,\cdots$，证明：数列 $\left\{a_n\right\}$ 收敛.

【提示：利用单调有界定理】

例 21 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-3)\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n-2)\cdot(2n)}\right)^2$.（2018 省赛）

【 0 】

例 22 设 $x_n=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{17}{16}\cdot\cdots\cdot\dfrac{1+2^{2^{n-1}}}{2^{2^{n-1}}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$__________.

【 2 】

例 23 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right]$.

【 $\dfrac{2}{\pi}$ 】

例 24 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^2}{n^3+1^3}+\dfrac{2^2}{n^3+2^3}+\cdots+\dfrac{n^2}{n^3+n^3}\right)$.（2017 省赛）

【 $\dfrac{1}{3}\ln 2$ 】

例 25 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(2n-1)}$.

【 $\dfrac{4}{\mathrm{e}}$ 】

例 26 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(n!)^{\frac{1}{n}}$.

【 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 】

4. 无穷小的比较

例 27 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}=$________.

【 0 】

例 28 设 $a>0$ ，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\mathrm{e}^{ax}\right)\cdot\ln\left(1+\dfrac{a}{x}\right)=$ ________ .（2018 省赛）

【 a^2 】

例 29 当 $a=$________，$b=$________时，$f(x)=\ln(1-ax)+\dfrac{x}{1+bx}$ 在 $x\to 0$ 时是关于 x 的无穷小的阶数最高.（2008 省赛）

【$a=1$，$b=-\dfrac{1}{2}$】

例 30 当 $x\to 0$ 时，无穷小量 $f(x)=\sqrt[5]{x^2+\sqrt[3]{x}}-\sqrt[3]{x^2+\sqrt[5]{x}}$ 关于 x 的阶为_______.

【$\dfrac{26}{15}$】

例 31 当 $x\to 0^+$ 时，将无穷小量 $\alpha=\int_0^x \cos t^2 \mathrm{d}t$，$\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\mathrm{d}t$，$\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\mathrm{d}t$ 的阶由低到高排序.

【α，γ，β】

5. 求极限的逆问题

例 32 若 $a>0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x-\sin x}\int_0^x \dfrac{t^2}{\sqrt{a+t}}\,\mathrm{d}t=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\left[\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)\tan 3x\right]$，则 $a=$________.

【36】

例 33 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{2018}}{n^{\alpha}-(n-1)^{\alpha}}=\lambda\neq 0$，求 α 及 λ.

【2019，$\dfrac{1}{2019}$】

6. 求函数间断点及其分类

例 34 函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 的间断点是________，它们的类型分别是__________.（2014省赛）

【第一类跳跃间断点：$x=0$；第一类可去间断点：$x=1$；第二类无穷间断点 $x=-1$】

例 35 求函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^{n}+x^{-n}}$ 的间断点并指出其类型.

【第一类可去间断点：$x=0$；第一类跳跃间断点：$x=1$，$x=-1$】

7. 方程求根问题

例 36 设 $h(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续，$h(0)=h(2a)$，证明：在 $[0,a]$ 上至少存在一点 ξ，使得 $h(\xi)=h(\xi+a)$.（2014 省赛）

【提示：利用零点定理】

例 37 (1) 证明 $f_n(x)=x^n+nx-2$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一正根 a_n，其中 n 为正整数；

(2) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a_n)^n$.

【提示：利用零点定理；e^2】

8. 连续性问题

例 38 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & |x|\le c \\ \dfrac{2}{|x|}, & |x|>c \end{cases}$ 处处连续，则 $c=$________.

【1】

例 39 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，对一切实数 x_1，x_2 有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，求证：$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处连续.（2004 省赛）

【提示：利用连续的定义】

例 40 $f(x)$ 在 $[0,n]$ 上连续，n 为自然数，$n\ge 2$，$f(0)=f(n)$，证明：存在 ξ，$\xi+1\in[0,n]$，使 $f(\xi)=f(\xi+1)$.

【提示：利用最值性、介值定理】

9. 举反例问题

例 41 判断命题：若成立，试证明；若不成立，举一反例.（2017 省赛）

命题 1：若函数 $f(x)$， $g(x)$ 在 $x=a$ 处皆连续，则 $f(x)+g(x)$ 在 $x=a$ 处连续；

命题 2：若 $f(x)$， $g(x)$ 在 $x=a$ 处皆不连续，则 $f(x)+g(x)$ 在 $x=a$ 处不连续.

【提示：利用连续的定义及几何意义】

例 42 判断命题：若成立，试证明；若不成立，举一反例.（2017 省赛）

命题 1：若函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $x=a$ 处皆不连续，则 $f(x)+g(x)$ 在 $x=a$ 处不连续；

命题 2：若 $f(x)$， $g(x)$ 在 $x=a$ 处连续，不可导，则 $f(x)+g(x)$ 在 $x=a$ 处不可导.

【提示：利用连续、可导概念的几何意义】

例 43 命题：函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，但在 $x=0$ 的某去心邻域内处处不连续. 指出上述命题中满足条件的函数是否存在？若存在，举一例，并证明满足条件；若不存在，请给出证明.（2012 省赛）

【提示：参考狄利克雷函数】

例44 设 $\left\{f_j(k)\right\}_{k=1}^{\infty}$ 都是无穷小数列， $j=1,2,3,\cdots$，定义 $z_k=\lim\limits_{n\to\infty}[f_1(k)f_2(k)\cdots f_n(k)]$，$k=1,2,3,\cdots$.若 $\left\{z_k\right\}$ 是一个数列，则 $\lim\limits_{k\to\infty}z_k=0$ 是否一定成立？若一定成立，给出证明；若不一定成立，给出反例.（2014省赛）

【不一定成立】

第三部分 强化练习

1. 已知在 $x=0$ 有界的连续函数满足关系式 $f(x)+\dfrac{1}{2}f\left(\dfrac{x}{2}\right)=x^2$，求 $f(x)$ 的表达式.

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{\sin x}}{x\left[\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)\right]}$.

3. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-\mathrm{e}^2[1-\ln(1+x)]}{x}$.

4. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}{n}\right)^{nx}$， $a_1,a_2,\cdots,a_n>0$.

5. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\sqrt{x+3}\,\mathrm{d}x$.

6. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\dfrac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\,\mathrm{d}t$.

7. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right]}{a^x-1}=A$， $a>0$， $a\neq 1$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

8. 若 $f(1)=0$， $f'(1)$ 存在，求极限 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)\tan 3x}{(\mathrm{e}^{x^2}-1)\sin x}$.

9. 设 $x_n=(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$，其中 $|a|<1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

10. 设 $a_n=\cos\dfrac{\theta}{2}\cdot\cos\dfrac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\dfrac{\theta}{2^n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

11. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\pi\sqrt{1+4n^2}\right)^n$.

12. 设 $A_n=\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{\pi}{4}-A_n\right)$.

13. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{n^2+1}+\dfrac{\sin\dfrac{2\pi}{n}}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n^2+n}\right)$.

14. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\sqrt{1+\cos\dfrac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\dfrac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\cos\dfrac{n\pi}{n}}\right]$.

15. 确定常数 a，b，c 的值，使 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x\dfrac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=c$，$c\neq0$.

16. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x^n+7x^4+1)^m-x\right]=b$，$n>4$，$b\neq0$，求 n，m，b.

17. 设函数 $f(x)$ 连续，$g(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=A$，$A$ 为常数，求 $g'(x)$ 并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

18. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x}{\sin\pi x}, & x<0\\ \ln(1+x)+\sin\dfrac{1}{x^2-1}, & x\geq0\end{cases}$，试求函数 $f(x)$ 的间断点并判断类型.

19. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ 为连续函数，试确定 a 和 b 的值.

20. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$a<c<d<b$，试证：对任意的正数 p，q，至少存在一点 $\xi\in[c,d]$，使 $pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi)$.

【参考答案】

1. $\dfrac{8}{9}x^2$；　2. $\dfrac{1}{6}$；　3. 0；　4. $a_1a_2\cdots a_n$；　5. 0；　6. 0；　7. $A\ln a$；

8. $\dfrac{3}{2}f'(1)$；　9. $\dfrac{1}{1-a}$；　10. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\begin{cases}1, & \theta=0\\ \dfrac{\sin\theta}{\theta}, & \theta\neq0\end{cases}$；　11. $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$；　12. $\dfrac{1}{4}$；

13. $\dfrac{2}{\pi}$；　14. $\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$；　15. $a=1$，$b=0$，$c=\dfrac{1}{2}$；　16. $n=5$，$m=\dfrac{1}{5}$，$b=\dfrac{7}{5}$；

17. $g'(x)=\begin{cases}\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}, & x\neq0\\ \dfrac{A}{2}, & x=0\end{cases}$，$g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续；

18. $x=0$ 为第一类跳跃间断点，$x=1$ 为第二类振荡间断点，
$x=-1$ 为第一类可去间断点，$x=-n$（$n\in N$，$n\neq1$）为第二类无穷间断点；

19. $a=0$，$b=1$；　20. 提示：利用最值性和介值定理.