南京信息工程大学
Nanjing University of Information Science & Technology

高等数学（上）

数学与统计学院　公共数学教学部

高等数学教学团队

第二节 导数的运算法则与基本公式

导数的运算法则与基本公式

理解： 导数的运算法则，

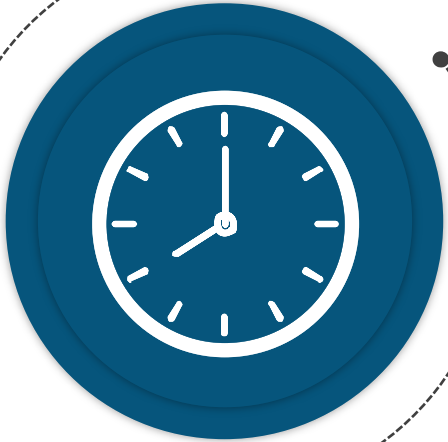
基本初等函数的求导公式

掌握： 求导的基本公式及求导的

四则运算法则、反函数与

复合函数的求导法则

知识目标



重难点

重点： 基本的求导公式，

导数的运算法则

难点： 函数积商的求导法则，

反函数的求导法则，

复合函数的求导法则

思路： $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

构造性定义

本节内容

$$\begin{cases}(C)'=0\\(\sin x)'=\cos x\\(\ln x)'=\dfrac{1}{x}\end{cases}$$

证明中利用了两个重要极限

求导法则

其它基本初等函数求导公式

初等函数求导问题

一、求导的四则运算法则

定理1 若函数$u=u(x)$及$v=v(x)$都在点x处可导，则它们的和、差、积、商（除分母为零的点外）都在点x可导，且

（1）$\boxed{[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x);}$

（2）$\boxed{[u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x);}$

（3）当$v(x)\neq 0$时，$\boxed{\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}.}$

证 (1) $$[u(x)\pm v(x)]'=\lim_{h\to 0}\frac{\left[u(x+h)\pm v(x+h)\right]-\left[u(x)\pm v(x)\right]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\pm\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}$$

$$=u'(x)\pm v'(x)$$

即 $\boxed{(u\pm v)'=u'\pm v'}$.

(2) $$[u(x)\cdot v(x)]' = \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\cdot v(x+h)+u(x)\cdot\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}v(x+h)+u(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}$$

$$=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$

其中 $\lim\limits_{h\to 0}v(x+h)=v(x)$ 是由于$v'(x)$存在，故$v(x)$在点 x 连续.

即 $\boxed{(uv)'=u'v+uv'}$.

(3) $$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{u(x+h)}{v(x+h)}-\frac{u(x)}{v(x)}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x)-u(x)v(x+h)}{v(x+h)v(x)h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{[u(x+h)-u(x)]v(x)-u(x)[v(x+h)-v(x)]}{v(x+h)v(x)h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\cdot v(x)-u(x)\cdot\frac{v(x+h)-v(x)}{h}}{v(x+h)v(x)} = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

即 $$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}}.$$

注： 1. 定理1的(1)和(2)可推广到有限个可导函数的情形：

(1) 设函数 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ 均可导，则

$$1)\ \boxed{\left[\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\right]' = \sum_{i=1}^{n} f_i'(x);}$$

$$2)\ \boxed{\left[\prod_{i=1}^{n} f_i(x)\right]' = f_1'(x)f_2(x)\cdots f_n(x) + f_1(x)f_2'(x)\cdots f_n(x) + \cdots + f_1(x)f_2(x)\cdots f_n'(x)}$$

如： $\boxed{(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'}$

(2) 设 $f(x)$ 可导，C 为常数，则有 $\boxed{[Cf(x)]' = Cf'(x).}$

注： 2. 定理1(3)的特殊情形：若分子$u(x)=1$，$\boxed{\left(\dfrac{1}{v}\right)'=-\dfrac{v'}{v^2}.}$

例1 $f(x)=x^3+4\sin x-\sin\dfrac{\pi}{2}$，求 $f'(x)$ 及 $f'(\dfrac{\pi}{2})$.

解 $\because f'(x)=(x^3)'+(4\sin x)'-(\sin\dfrac{\pi}{2})'=\boxed{3x^2+4\cos x,}$

$\therefore f'(\dfrac{\pi}{2})=\boxed{\dfrac{3}{4}\pi^2.}$

注意： $\sin\dfrac{\pi}{2}$ 是常数，导数为 0.

例2 $y=x^3-2x^2+x-1$，求 y'.

解 $y'=\left(x^3-2x^2+x-1\right)'=\left(x^3\right)'-\left(2x^2\right)'+\left(x\right)'-\left(1\right)'$

$$=3x^2-2\cdot 2x+1\boxed{=3x^2-4x+1}$$

结论： 一般地，对于多项式函数求导有：

$$\boxed{(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)'=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}}$$

可见，n 次多项式的导数是一个 $n-1$ 次多项式.

例3 设 $y=\sin x\cdot\ln x$ ，求 y'.

解 $y'=(\sin x)'\cdot\ln x+\sin x\cdot(\ln x)'$

$$\boxed{=\cos x\ln x+\frac{1}{x}\cdot\sin x.}$$

$[u(x)\cdot v(x)]'\neq u'(x)\cdot v'(x)$

例4 设 $y=\cot x$，求 y'.

解 $y'=(\cot x)'=\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)'=\dfrac{(\cos x)'\sin x-\cos x(\sin x)'}{\sin^2 x}$

$=-\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'\neq\frac{u'(x)}{v'(x)}.$$

即 $\boxed{(\cot x)'=-\csc^2 x.}$

同理可得 $\boxed{(\tan x)'=\sec^2 x,}$ $\boxed{(\sec x)'=\sec x\tan x.}$

$\boxed{(\csc x)'=-\csc x\cot x,}$

二、反函数与复合函数的求导法则

1、反函数的求导法则

定理2　若函数 $y=f(x)$ 在区间 I_x 内单调、可导且 $f'(x)\neq 0$，则其反函数 $x=\varphi(y)$ 在区间 $I_y=\{y|y=f(x),x\in I_x\}$ 内也可导，且

$$\boxed{\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}}\quad 或 \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}.}$$

即　反函数的导数等于直接函数导数的倒数.

证 由于 $y=f(x)$ 在区间 I_x 内单调、可导，从而连续，由1.8节的定理2知：$y=f(x)$ 的反函数 $x=\varphi(y)$ 存在，且 $\varphi(y)$ 在 I_y 内也单调、连续. 任取 $y\in I_y$，给 y 以增量 $\Delta y\,(\Delta y\neq 0, y+\Delta y\in I_y)$，

由 $x=\varphi(y)$ 的单调性可知：$\boxed{\Delta x=\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)\neq 0.}$

于是有 $\boxed{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}=\dfrac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}},}$ 因为 $x=\varphi(y)$ 连续，故 $\Delta x\to 0\left(\Delta y\to 0\right)$

又因为 $f'(x) \neq 0$ ，则 $\varphi'(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \dfrac{1}{f'(x)}$.

即 $\boxed{\varphi'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}}$ 或 $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}.}$

注 定理2结论成立有条件限制：

（1）直接函数 $y = f(x)$ 在其定义域 I_x 内单调、可导；

（2）$f'(x) \neq 0$.

例5 求函数 $y=\arcsin x$ 的导数.

解 设 $x=\sin y, y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 为直接函数，则 $y=\arcsin x$ 是其反函数

函数 $x=\sin y$ 在 $I_y=(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内单调、可导，且 $(\sin y)'=\cos y>0$,

因此，由定理2，在 $I_x=(-1,1)$ 内有

$$\boxed{(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}\boxed{=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}.$$

同理可得 $\boxed{(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$, $\boxed{(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}}$, $\boxed{(\operatorname{arc}\cot x)'=-\frac{1}{1+x^2}}$

例6 求函数 $y=\log_a x\left(a>0,a\neq 1\right)$ 的导数.

解 设 $x=a^y\left(a>0,a\neq 1\right)$为直接函数，则 $y=\log_a x$是其反函数.

函数 $x=a^y$在$I_y=(-\infty,+\infty)$内单调、可导，且$(a^y)'=a^y\ln y\neq 0$

因此，由定理2，在区间 $I_x=(0,+\infty)$内有

$$\boxed{(\log_a x)'}=\frac{1}{(a^y)'}=\frac{1}{a^y\ln a}\boxed{=\frac{1}{x\ln a}.}$$

特别地 $\boxed{(\ln x)'=\frac{1}{x}.}$

2、复合函数的求导法则

定理3 如果函数$u=g(x)$在点x 可导，而$y=f(u)$在点$u=g(x)$可导，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 在点x 可导，且其导数为

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(u)\cdot g'(x)} \text{ 或 } \boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.}$$

即：因变量对自变量求导, 等于因变量对中间变量求导, 乘以中间变量对自变量求导(即链式法则).

证 设x有增量Δx, 则相应地u有增量Δu, 则复合函数y有增量Δy.

由函数$u=g(x)$在x处可导必连续，可知，

$$\text{当 } \Delta x \to 0 \text{ 时}, \Delta u \to 0\ ,$$

当$\Delta u \neq 0$时，有
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

当$\Delta u=0$时，相应地有$\Delta y=0$，则必有$\dfrac{dy}{dx}=0$及$\dfrac{du}{dx}=0$，

因此$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$对$\Delta u=0$也成立.

例7 设 $y=\ln\sin x$，求 y'.

解 $\because y=\ln u, u=\sin x$

$$\therefore \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{u}\cdot\cos x=\frac{\cos x}{\sin x}\boxed{=\cot x.}$$

小结：如何求复合函数的导数？

(1) 分析该函数可看作由哪些基本初等函数复合而成；

(2) 利用复合函数求导法则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

例8 设 $y=\ln|x|$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 $y=\ln|x|=\begin{cases}\ln x, & x>0,\\ \ln(-x), & x<0.\end{cases}$

当 $x>0$ 时，$y'=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$,

当 $x<0$ 时，$y'=\left[\ln(-x)\right]'=\dfrac{1}{-x}\cdot(-x)'=\dfrac{1}{x}$,

故 $\boxed{(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}.}$

例9 设 $y=(x^2+1)^{10}$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=10(x^2+1)^9\cdot(x^2+1)'=10(x^2+1)^9\cdot 2x$

$\boxed{=20x(x^2+1)^9.}$

练习 求函数 $y=\mathrm{e}^{\sin x}$ 的导数.

解 $y'=\mathrm{e}^{\sin x}\cdot(\sin x)'\boxed{=\cos x\cdot\mathrm{e}^{\sin x}.}$

推广： 复合函数的求导法则可以推广到有限多个中间变量的情形.

以两个中间变量为例，设 $y=f(u),\ u=\varphi(v), v=\psi(x),$ 则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\ ,\quad 而\ \frac{du}{dx}=\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$$

故复合函数 $y=f\{\varphi[\psi(x)]\}$ 的导数为

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}}$$

这里假定上式右端所出现的导数在相应处都存在.

例10 $y=\ln\cos\left(\mathrm{e}^{x}\right)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 所给函数可分解为$y=\ln u$，$u=\cos v$，$v=\mathrm{e}^{x}$，

因 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=\dfrac{1}{u}$， $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}=-\sin v$，$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{x}$， 故

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{u}\cdot(-\sin v)\cdot\mathrm{e}^{x}=-\frac{\sin\left(\mathrm{e}^{x}\right)}{\cos\left(\mathrm{e}^{x}\right)}\cdot\mathrm{e}^{x}\boxed{=-\mathrm{e}^{x}\tan\left(\mathrm{e}^{x}\right).}$$

注：如果不写出中间变量，此例可这样写：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\left[\ln\cos\left(\mathrm{e}^{x}\right)\right]'=\frac{1}{\cos\left(\mathrm{e}^{x}\right)}\left[\cos\left(\mathrm{e}^{x}\right)\right]'=\frac{-\sin\left(\mathrm{e}^{x}\right)}{\cos\left(\mathrm{e}^{x}\right)}\left(\mathrm{e}^{x}\right)'=-\mathrm{e}^{x}\tan\left(\mathrm{e}^{x}\right).$$

例11 设 $x>0$，证明 $\boxed{(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}.}$

证 因为 $x^{\mu} = \left(\mathrm{e}^{\ln x}\right)^{\mu} = \mathrm{e}^{\mu \ln x}$，则

$$\left(x^{\mu}\right)' = \left(\mathrm{e}^{\mu \ln x}\right)' = \mathrm{e}^{\mu \ln x}(\mu \ln x)'$$

$$= \mathrm{e}^{\mu \ln x} \cdot \mu \cdot \frac{1}{x} = x^{\mu} \cdot \mu \cdot \frac{1}{x} = \mu x^{\mu-1}.$$

三、求导的基本公式

所有基本初等函数的导数公式，习惯上称之为求导基本公式（简称求导公式）. 归纳如下：

(1) $\boxed{(C)'=0}$　(2) $\boxed{\left(x^{\mu}\right)'=\mu x^{\mu-1}}$　(3) $\boxed{(a^x)'=a^x\ln a.}$ 特别地，$\boxed{(e^x)'=e^x.}$

(4) $\boxed{(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}.}$ 特别地，$\boxed{(\ln x)'=\dfrac{1}{x}}$ 及 $\boxed{(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}}$.　(5) $\boxed{(\sin x)'=\cos x.}$

(6) $\boxed{(\cos x)'=-\sin x.}$　(7) $\boxed{(\tan x)'=\sec^2 x.}$　(8) $\boxed{(\cot x)'=-\csc^2 x.}$

(9) $\boxed{(\sec x)'=\sec x\tan x.}$　(10) $\boxed{(\csc x)'=-\csc x\cot x.}$

(11) $\boxed{(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-1 < x < 1).}$

(12) $\boxed{(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-1 < x < 1).}$

(13) $\boxed{(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}.}$

(14) $\boxed{(\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}.}$

四、初等函数的导数

由初等函数的定义，再根据导数的四则运算、复合函数的求导法则与基本初等函数的可导性，可推得：

初等函数在其定义区间上处处可导.

注 求初等函数的导数，常需根据函数的结构形式，利用相应的四则运算或复合函数求导法则以及基本初等函数的求导公式来求解，此方法称为初等函数求导法.

例12 设 $y=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x-2}}\ (x>2)$，求 y'.

解 $\because y=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)-\dfrac{1}{3}\ln(x-2),$

$$\therefore y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x-\frac{1}{3(x-2)}\boxed{=\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{3(x-2)}.}$$

注 求商的对数的导数可化为求对数的差的导数，

即，求乘积、商的对数函数导数可变形为求对数函数的代数和的导数.

例13 设 $y = x^{\sin x}(x > 0)$，求 y'.

解 $\because y = e^{\sin x \ln x}$,

$$\therefore y' = e^{\sin x \ln x}(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x})$$

$$\boxed{= x^{\sin x}(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x})}$$

注 求幂指函数 $f(x)^{g(x)}$ 的导数可化为如下初等函数形式

$$\boxed{f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}}$$

再用初等函数求导法求导，上式右端称为将幂指函数 e 抬起.

例14 设 $y=\sin nx\cdot\sin^n x$（n 为常数），求 y'.

解 $y'=\left(\sin nx\right)'\cdot\sin^n x+\sin nx\cdot\left(\sin^n x\right)'$

$$=\cos nx\cdot(nx)'\cdot\sin^n x+\sin nx\cdot n\cdot\sin^{n-1}x\cdot(\sin x)'$$

$$=n\cdot\cos nx\cdot\sin^n x+\sin nx\cdot n\cdot\sin^{n-1}x\cdot\cos x$$

$$=n\sin^{n-1}x(\cos nx\cdot\sin x+\sin nx\cdot\cos x)$$

$$\boxed{=n\cdot\sin^{n-1}x\cdot\sin(n+1)x.}$$

***例15** 设 $\boxed{y=\operatorname{arch}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}$，求 y'.

解 $y'=(\operatorname{arch}x)'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}+x}\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}+x}\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right)$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}+x}\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\quad\left(x\in(1,+\infty)\right).$$

同理，可得 $\boxed{(\operatorname{arsh}x)'=\left[\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$

$$\boxed{(\operatorname{arth}x)'=\left[\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right]'=\frac{1}{1-x^2}}\quad x\in(-1,1)$$

例16 设 $f(x)$ 可导，$y=f(\sin^2 x)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 该函数为复合函数，设 $y=f(u), u=\sin^2 x$，由复合函数求导法则可知 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\left[f(\sin^2 x)\right]'=\left[f(u)\right]'\cdot u'$

$$=f'(\sin^2 x)\cdot 2\sin x\cdot\cos x\boxed{=\sin 2x\cdot f'(\sin^2 x).}$$

练习 设 $f(x)$ 可导，$y=\ln\left[f(x)\right](f(x)>0)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\left[\ln f(x)\right]}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)\boxed{=f^{-1}(x)\cdot f'(x).}$$

练习 设 $f(x)=\arcsin x$ ，$\varphi(x)=x^2$，求 $f[\varphi'(x)]$，$f'[\varphi(x)]$，$\{f[\varphi(x)]\}'$.

解 $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ，$\varphi'(x)=2x$ ，则

$$f[\varphi'(x)]=f(2x)\boxed{=\arcsin(2x);}$$

$$f'[\varphi(x)]=\frac{1}{\sqrt{1-[\varphi(x)]^2}}\boxed{=\frac{1}{\sqrt{1-x^4}};}$$

$$\{f[\varphi(x)]\}'=f'[\varphi(x)]\varphi'(x)\boxed{=\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}.}$$

一定要区别如下三种情况：内函数对自变量求导、复合函数对中间变量求导，复合函数对自变量求导.

五、内容小结与思考题

- 四则运算求导中注意：

$$[u(x)\cdot v(x)]' \neq u'(x)\cdot v'(x);\quad [\frac{u(x)}{v(x)}]' \neq \frac{u'(x)}{v'(x)}.$$

- 反函数的求导法则（注意成立条件）
- 复合函数的求导法则（注意函数的复合过程, 合理分解正确使用链式求导法）；

能求导的函数：可分解成基本初等函数、常数与基本初等函数的和、差、积、商或复合形式.

思考题：

1、说明 $f'[\varphi(x)]$ 与 $\{f[\varphi(x)]\}'$ 各表示的含义是什么？

【答：$f'[\varphi(x)]$ 指 $f(u)$ 对 u 的导数；$\{f[\varphi(x)]\}'$ 指 $f[\varphi(x)]$ 对 x 的导数】

2、设 $f(x)=\max\{x,x^2\},0<x<2$，求 $f'(x)$.

【答：$f'(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 2x, & 1<x<2\end{cases}$.】

南京信息工程大学
Nanjing University of Information Science & Technology

没有规矩不成方圆。