高等数学 I-1 综合练习 10

一、填空题

1. 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x}, & x\neq 0\\ k, & x=0\end{cases}$, 则当 $k=$ ________ 时, $f(x)$ 连续.

2. 设 $y=x^n+e^x$, 则 $y^{(n)}=$ ________.

3. $\int_0^2\sqrt{x^2-2x+1}\,dx=$ ________.

$\int_0^2\sqrt{(x-1)^2}\,dx=\int_0^2|x-1|\,dx=\int_0^1(1-x)\,dx+\int_1^2(x-1)\,dx$

4. 比较积分的大小: $\int_1^2\ln x\,dx$ ______ $\int_1^2\ln^2 x\,dx$.

5. 函数 $y=\ln(1-x^2)$ 的单调增加区间是 ________.

二、选择题

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}=($ $)$.

(A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) $\frac{1}{2}$.

2. 设 $f(0)=0$ 时, 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导的充要条件是 (B).

(A) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}[f(h)-f(-h)]$ 存在; (B) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}f[\ln(1+h)]$ 存在;

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(\sin h^2)$ 存在; $\to 0^+$ (D) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f\left(e^{h^2}-1\right)$ 存在. $\to 0^+$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(-h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\underbrace{\dfrac{f(h)-f(0)}{h}+\dfrac{f(-h)-f(0)}{-h}}_{\text{和的极限存在}}$

推不出分开后的两部分极限一定存在!

3. 设函数 $f(x)$ 连续, 则 $d\left[\int f(x)\,dx\right]=($ $)$.

(A) $f(x)$; (B) $f(x)\,dx$; (C) $f(x)+C$; (D) $f'(x)\,dx$.

4. 设 $f(u)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 x 与 t 无关, 则 ( ).

(A) $\int_a^b xf(x)\,dx=x\int_a^b f(x)\,dx$; (B) $\int_a^b tf(x)\,dx=t\int_a^b f(x)\,dx$;

(C) $\int_a^b tf(x)\,dt=t\int_a^b f(x)\,dt$; (D) $\int_a^b xf(t)\,dt=x\int_a^b f(t)\,dx$.

5. 连续函数 $f(x)=e^{\sqrt[3]{x}}-1+2x+o(x)$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 (B).

(A) 可微并且 $df(0)=2dx$; (B) 不可微;

(C) 可微并且 $df(0)=\frac{1}{3}dx$; (D) 可微性与微分的结果与 $o(x)$ 项有关.

$f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=e^0-1+0=0$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sqrt[3]{x}}-1+2x+o(x)-0}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sqrt[3]{x}}-1}{x}+2+0$

$=2+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x}=\infty$

三、解答题

1. 设 $y=x^{\sin x}(x>0)$, 求 y'.

$y=e^{\sin x\ln x}$ (e抬起, 幂指函数).

$y'=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\frac{1}{x}\sin x\right)$

2. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x+\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx.$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+\sin^2 x}dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin^2 x} d\sin x$$

$$= 0 + \arctan(\sin x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

3. $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{(x+7)\sqrt{x-2}}.$

令 $\sqrt{x-2}=t$ 则 $x=t^2+2$

$$原式 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+9)t}\cdot 2t\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{2\cdot 3}{9(1+(\frac{t}{3})^2)} d\frac{t}{3}$$

$$= \frac{2}{3}\arctan\frac{t}{3}\Big|_0^{+\infty} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}$$

4. $\displaystyle\int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}}\,dx.$

$$= -\int \frac{1}{2}\arctan e^x\, de^{-2x}$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}\arctan e^x + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\cdot\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}\arctan e^x + \frac{1}{2}\int \frac{e^x}{e^{2x}(1+e^{2x})}dx$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}\arctan e^x + \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{e^{2x}} - \frac{1}{1+e^{2x}}\right)de^x$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}\arctan e^x - \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}\arctan e^x + C$$

5. $\displaystyle\int_{-2}^{3} \min\{1, x^2\}\,dx.$

$$\min\{1,x^2\} = \begin{cases} 1 & -2<x<-1 \\ x^2 & -1\le x\le 1 \\ 1 & x>1 \end{cases}$$

$$原式 = \int_{-2}^{-1} 1\,dx + \int_{-1}^{1} x^2 dx + \int_1^3 1\,dx$$

$$= 1 + \frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1} + 2$$

$$= \frac{11}{3}$$

四、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且严格单增, 证明: $(a+b)\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx < 2\int_a^b xf(x)\,dx.$

令 $F(x) = (a+x)\int_a^x f(t)dt - 2\int_a^x tf(t)dt \quad x\in[a,b]$. 则 $F(a)=0$

$$F'(x) = \int_a^x f(t)dt + (a+x)f(x) - 2xf(x)$$

$$= f(\eta)(x-a) + (a-x)f(x) \quad (a\le\eta\le x)$$

$$= [f(\eta)-f(x)](x-a)$$

$f\nearrow \Rightarrow f(\eta)\le f(x) \quad \therefore F'(x)\le 0$

从而 $F(x)\downarrow \quad F(b)<F(a)$ 即 $(a+b)\int_a^b f(t)dt - 2\int_a^b tf(t)dt<0$

五、求曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 的渐近线.

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right]=\infty$ 铅直渐近线 $x=0$

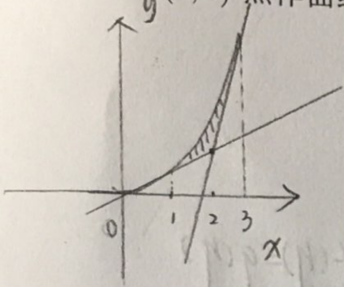
$\lim\limits_{x\to -\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right]=0$ 水平渐近线 $y=0$

$k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+x\ln(1+e^x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)+\frac{xe^x}{1+e^x}}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{2x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2(1+e^x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2(1+e^x)}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2(e^{-x}+1)}=1$

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)-\underset{\ln e^x}{\underset{\parallel}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\ln\frac{1+e^x}{e^x}\right)=0$ 斜渐近线 $y=x$

六、过 $(2,3)$ 点作曲线 $y=x^2$ 的切线, 求该曲线和切线围成图形的面积.



令切点为 (x_0,y_0) 则 $y_0=x_0^2$

$y-x_0^2=2x_0(x-x_0)$

代过点 $(2,3)$ $\quad 3-x_0^2=2x_0(2-x_0)\Rightarrow x_0=1$ 或 3

切线: $y=2x-1$ 及 $y=6x-9$

$A=\int_1^2[x^2-(2x-1)]dx+\int_2^3[x^2-(6x-9)]dx=\frac{2}{3}$

七、已知 $f(t)=\displaystyle\int_1^t e^{-x^2}\,dx$, 求 $\displaystyle\int_0^1 t^2 f(t)\,dt$.

$f'(t)=e^{-t^2}$, $f(1)=0$

$\int_0^1 t^2 f(t)dt=\frac{1}{3}\int_0^1 f(t)dt^3=\frac{1}{3}\left(t^3 f(t)\Big|_0^1-\int_0^1 t^3 df(t)\right)$

$=\frac{1}{3}f(1)-\frac{1}{3}\int_0^1 t^3 e^{-t^2}dt$

$=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\int_0^1 e^{-t^2}dt^4$ 令 $t^2=u$

$=-\frac{1}{12}\int_0^1 e^{-u}du^2=-\frac{1}{6}\int_0^1 e^{-u}\cdot u\,du=+\frac{1}{6}\int_0^1 u\,de^{-u}$

$=\frac{1}{6}ue^{-u}\Big|_0^1-\frac{1}{6}\int_0^1 e^{-u}du=\frac{1}{6}e^{-1}+\frac{1}{6}e^{-u}\Big|_0^1=\frac{1}{3}e^{-1}-\frac{1}{6}$

八、设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值，$f(a)=g(a), f(b)=g(b)$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

设 $F(x)=f(x)-g(x)$ $x\in[a,b]$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内二阶可导. 且 $F(a)=F(b)=0$

1° 证明 $\exists\eta\in(a,b)$ 使 $F(\eta)=0$

由 (a,b) 内 $f(x),g(x)$ 存在相等的最大值.

不妨设 $x_1,x_2\in(a,b)$，$f(x_1)=g(x_2)=M$ 最大值）

若 $x_1=x_2$，则 $\eta=x_1=x_2$ 有 $f(\eta)=g(\eta)$

若 $x_1\neq x_2$，则由 $F(x)$ 在 $[x_1,x_2]$（或 $[x_2,x_1]$）上连续，

$F(x_1)=f(x_1)-g(x_1)=M-g(x_1)>0$

$F(x_2)=f(x_2)-g(x_2)=f(x_2)-M<0$

由零点 Th，$\exists\eta\in(x_1,x_2)$ 或 (x_2,x_1) $\to F(\eta)=0$ 即 $f(\eta)=g(\eta)$

2° 证明 $\exists\xi\in(a,b)\to f''(\xi)=g''(\xi)$

在 $[a,\eta]$ 及 $[\eta,b]$ 使用 Rolle Th. $F(a)=F(b)=F(\eta)=0$

$\exists\xi_1\in(a,\eta)$，$\xi_2\in(\eta,b)$ 使 $F'(\xi_1)=0$ $F'(\xi_2)=0$ $(\xi_1<\xi_2)$

再对 $F'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上使用 Rolle Th. $\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$

使 $F''(\xi)=0$ 即 $f''(\xi)=g''(\xi)$

参考答案 10

一、填空题 1. 2. 2. $n!+\mathrm{e}^x$. 3. 1. 4. $>$. 5. $(-1,0)$.

二、选择题 D. B. B. B. B.

三、1. $y'=x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln x+\dfrac{\sin x}{x}\right)$. 2. $\dfrac{\pi}{2}$. 3. $\dfrac{\pi}{3}$.

4. $-\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-2x}\arctan\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+\arctan\mathrm{e}^x\right)+C$. 5. $\dfrac{11}{3}$.

四、略. 五、铅直渐近线 $x=0$; 水平渐近线 $y=0$; 斜渐近线 $y=x$.

六、$\dfrac{2}{3}$. 提示：切线方程 $y=2x-1$ 及 $y=6x-9$.

七、$\dfrac{1}{3\mathrm{e}}-\dfrac{1}{6}$. 八、略.