# 第 2 章　导数与微分

**本章学习要点：**

☑ 理解导数和微分的概念，理解导数与微分、可导性与连续性之间的关系。理解导数的几何意义，会求平面曲线的切线方程和法线方程，了解导数的物理意义，会用导数描述一些物理量。

☑ 掌握导数的四则运算法则，复合函数、反函数的求导法则，掌握基本初等函数的导数公式。

☑ 了解微分的四则运算法则和一阶微分形式的不变性，会求函数的微分。

☑ 了解高阶导数的概念，会求简单函数的 $n$ 阶导数。

☑ 会求分段函数的一阶、二阶导数。会求隐函数和由参数方程所确定的函数的一阶、二阶导数。

☑ 会求反函数的导数。

## 2.1　基本知识点

导数与微分是高等数学中又一基本且重要的概念，读者应充分理解导数与微分的内涵，掌握其运算法则和运算公式。

### 2.1.1　导数的概念和运算法则

#### 1. 导数的概念和几何意义

**导数的定义**　设 $f(x)$ 在 $x_0$ 的某个邻域内有定义，若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to x_0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，则称 $f(x)$ 在 $x_0$ 点处可导，且记为

$$\lim_{\Delta x\to x_0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)\ （或\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}|_{x=x_0}, y'|_{x=x_0}）$$

并称 $f'(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 $x_0$ 点处的导数。

若令 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x)$，则有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$；若令 $x=x_0+\Delta x$，则有 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$。若极限不存在，则称 $f(x)$ 在 $x_0$ 点处不可导。若 $f(x)$ 在某区间

上的每一点都可导，则称 $f(x)$ 在该区间上可导。区间上任意一点的导数为 $f'(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$，并称之为 $f(x)$ 的导函数。

利用左右极限的概念就能得到左右导数的概念，此处略。

可导的充要条件是左右导数存在且相等。

**导数的几何意义** $f'(x_0)$ 表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率。这时曲线在这一点的切线与法线方程分别为

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \text{ 和 } y-f(x_0)=\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

**2. 导数的运算法则**

**四则运算** 若 $u=f(x),v=g(x)$ 均可导，则

$$(ku\pm lv)'=ku'\pm lv' \quad (k,l \text{ 均为常数})$$

$$(uv)'=u'v+v'u$$

$$(\frac{u}{v})'=\frac{u'v-v'u}{v^2} \quad (v\neq 0)$$

**复合函数的导数** 若 $y=f(u),u=g(x)$ 分别在 $u,x$ 处可导，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y'=f'(u)u'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f'(u)g'(x)$$

**隐函数求导法则** 若 $y=f(x)$ 由方程 $F(x,y)=0$ 所确定，则 $\dfrac{\mathrm{d}F(x,f(x))}{\mathrm{d}x}=0$。由复合函数求导法则从上式中解出 $f'(x)=y'$ 即可。

**幂指数函数的导数**

$$(u(x)^{v(x)})'=(\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)})'=u(x)^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x)+\frac{u'(x)v(x)}{u(x)}\right)\text{，其中 } u(x)>0$$

**参数方程的导数** 若 $x=f(t),y=g(t)$ 可导，且 $f(t)$ 单调连续，$f'(t)\neq 0$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{g'(t)}{f'(t)}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}\text{。}$$

**极坐标方程的导数** 若 $r=r(\theta),r(\theta)$ 可导，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{r'(\theta)\tan\theta+r(\theta)}{r'(\theta)-r(\theta)\tan\theta} \quad (r'(\theta)-r(\theta)\tan\theta\neq 0)$$

**反函数的导数** 若函数 $y=f(x)$ 可微，且 $f'(x)\neq 0$，若 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(x)$ 存在，则

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}=\frac{1}{f'(x)}$$

**高阶导数** 若$u,v,$为$n$阶可导，则

$$(ku)^{(n)}=ku^{(n)}$$
$$(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$$
$$(uv)^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}c_n^i u^{(i)}v^{(n-i)}=c_n^0 u^{(n)}v+c_n^1 u^{(n-1)}v'+\cdots+c_n^n uv^{(n)}$$
$$=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}+\cdots+v^{(n)}u$$

## 2.1.2 微分的概念、性质与运算法则

**微分的定义**

如果函数 $y=f(x)$ 在 $x_0$ 点的某邻域有定义，且对自变量增量 $\Delta x$，函数增量 $\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$，其中 $A$ 为与 $\Delta x$ 无关的常量，则称函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 可微，且称 $A\Delta x$ 为函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 处的微分，记为 $\mathrm{d}y=A\Delta x$。若函数 $y=f(x)$ 在某区间上的每一点都可微，则称 $y=f(x)$ 在该区间上可微。若 $y=f(x)$ 可微，则 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$，且无论 $x$ 是自变量，还是中间变量，微分形式不变。

**可导、可微、连续的关系**

连续$\Leftarrow$可微$\Leftrightarrow$可导，即连续仅是可微（可导）的必要条件。

**微分运算法则**

（1）四则运算：若 $y=u(x), y=v(x)$ 都可微，则

$$\mathrm{d}(ku\pm lv)=k\mathrm{d}u\pm l\mathrm{d}v \quad （k,l\text{ 为常数}）$$
$$\mathrm{d}(uv)=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v$$
$$\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2} \quad （v\neq 0）$$

（2）若 $y=f(u), u=\varphi(x)$ 在 $u,x$ 可微，则 $\mathrm{d}y=\mathrm{d}f[\varphi(x)]=f'(u)\varphi'(x)\mathrm{d}x$。

**微分的几何意义**

函数在 $x$ 点处的微分 $\mathrm{d}y$，就是过点 $P(x,y)$ 的切线的纵坐标的增量，由公式 $\Delta y\approx \mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$ 可知，函数 $y=f(x)$ 局部的线性化是微分的本质。

**微分的近似计算**

（1）增量的计算 $\Delta y\approx f'(x_0)\Delta x$

（2）某点函数值的计算 $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$

# 2.2 例题分析

## 2.2.1 选择题

**【例 2.1】** 函数 $f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$ 不可导点的个数是______。

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

**解** 应选 B。由 $f(x)=(x^2-x-2)|x||x-1||x+1|$，故 $f(x)$ 的可能间断点为 $x=0,1,-1$，又 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-2)(x+1)|x||x-1||x+1|}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-2)(x+1)(1-x)(1+x)|x|}{x}=-2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$

极限不存在，故 $x=0$ 是不可导点。

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-2)(x+1)|x||x-1||x+1|}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-2)(x+1)x(1+x)|x-1|}{x-1}=-4\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x-1}$$

极限不存在，故 $x=1$ 是不可导点。

$$f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{(x-2)(x+1)|x||x-1||x+1|}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x-2)(x+1)(x-1)x|x+1|}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x-2)(x-1)x|x+1|}{1}=0$$

故 $x=-1$ 是可导点。所以不可导点只有两个。

**【例 2.2】** 设函数 $f(x)=|x^3-1|\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 在 $x=1$ 处连续，则 $\varphi(1)=0$ 是 $f(x)$ 在 $x=1$ 可导的______。

A. 充分必要条件　　B. 必要非充分条件
C. 充分但非必要条件　　D. 既非充分也非必要条件

**解** 应选 A。因为 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导的充要条件是极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 存在，而 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 存在的充要条件是 $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$，由题设知

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x^3-1)\varphi(x)-0}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(1-x)(x^2+x+1)\varphi(x)}{x-1}=-3\varphi(1)$$
$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x^3-1)\varphi(x)-0}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x^2+x+1)\varphi(x)}{x-1}=3\varphi(1)$$

即 $-3\varphi(1)=3\varphi(1)$，所以，$\varphi(1)=0$ 是 $f(x)$ 在 $x=1$ 可导的充分必要条件。

【例 2.3】 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x^2-1|}{x-1} & x\neq 1\\ 2 & x=1\end{cases}$，则在点 $x=1$ 处函数 $f(x)$______。

A. 不连续　　　　B. 连续但不可导
C. 可导且导数不连续　　　　D. 可导且导数连续

**解** 应选 A。由

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1^-}\frac{1-x^2}{x-1}=-2\neq 2=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=f(1+0)$$

故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续。

【例 2.4】 已知 $y=\dfrac{x}{\ln x}$ 且满足等式 $y'=\dfrac{y}{x}+\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$，则 $\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$ 的表达式为______。

A. $-\dfrac{y^2}{x^2}$　　　　B. $\dfrac{y^2}{x^2}$　　　　C. $-\dfrac{x^2}{y^2}$　　　　D. $\dfrac{x^2}{y^2}$

**解** 应选 A。将 $y=\dfrac{x}{\ln x}$ 代入等式 $y'=\dfrac{y}{x}+\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$，得 $\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}=\dfrac{1}{\ln x}+\varphi(\ln x)$，即 $\varphi(\ln x)=-\dfrac{1}{\ln^2 x}$。令 $\ln x=u$，有 $\varphi(u)=-\dfrac{1}{u^2}$，故 $\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)=-\dfrac{y^2}{x^2}$。

【例 2.5】 曲线 $y=x-e^x$ 在点________处的切线斜率等于 0。

A. $(0,1)$　　　　B. $(1,0)$　　　　C. $(0,-1)$　　　　D. $(-1,0)$

**解** 应选 C。$y'=1-e^x$，令 $y'=0$ 得 $x=0$，而 $y(0)=-1$，故选项 C 正确。

【例 2.6】 函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+6x+1$ 在点 $(0,1)$ 处切线与 $x$ 轴交点的坐标是______。

A. $(-\dfrac{1}{6},0)$　　　　B. $(-1,0)$　　　　C. $(\dfrac{1}{6},0)$　　　　D. $(1,0)$

**解** 应选 A。由于 $f'(0)=6$，故切线方程为 $y-1=6x$，令 $y=0$ 得 $x=-\dfrac{1}{6}$，所以选 A。

【例 2.7】 设 $f(x)$ 为可导函数且满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则过曲线 $y=f(x)$ 上点 $(1,f(1))$ 处的切线斜率为______。

A. 2　　　　B. $-1$　　　　C. 1　　　　D. $-2$

**解** 应选 D。因为

$$f'(1)=\lim_{x\to 0}\frac{f(1-x)-f(1)}{-x}=2\lim_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-2$$

**【例 2.8】** 设周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，其周期为 4，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(5,f(5))$ 处的切线的斜率为______。

A. 1/2　　B. 0　　C. −1　　D. −2

**解** 应选 D。因为

$$k=f'(5)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x+5)-f(5)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x+1)-f(1)}{x}$$
$$=2\lim_{h\to 0}\frac{f(1)-f(1-h)}{2h}=-2\ （令\ x=-h\ ）$$

故曲线 $y=f(x)$ 在点 $(5,f(5))$ 处的切线的斜率为−2。

**【例 2.9】** 若 $f(-x)=f(x)$（$-\infty<x<+\infty$），在 $(-\infty,0)$ 内 $f'(x)>0, f''(x)<0$，则在 $(0,+\infty)$ 内有______。

A. $f'(x)>0, f''(x)<0$　　B. $f'(x)>0, f''(x)>0$

C. $f'(x)<0, f''(x)<0$　　D. $f'(x)<0, f''(x)>0$

**解** 应选 C。由 $f(-x)=f(x)$，则 $-f'(-x)=f'(x), f''(-x)=f''(x)$，当 $x\in(-\infty,0)$ 则 $-x\in(0,+\infty)$，又由在 $(-\infty,0)$ 内 $f'(x)>0, f''(x)<0$，故在（$0,+\infty$）内 $f'(x)<0, f''(x)<0$。

**【例 2.10】** 若 $f(x+1)=af(x)$ 总成立，且 $f'(0)=b$（$a, b$ 为非零常数），则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处______。

A. 不可导　　B. 可导且 $f'(1)=a$

C. 可导且 $f'(1)=b$　　D. 可导且 $f'(1)=ab$

**解** 应选 D。因 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(0+x)-f(0)}{x}$，又 $f(x+1)=af(x)$，故 $f(0)=\dfrac{f(1)}{a}$。而

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x+1)-f(1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{af(x)-af(0)}{x}=af'(0)=ab$$

**【例 2.11】** 设 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(a+x)-f(a-x)}{x}=$______。

A. $f'(a)$　　B. $2f'(a)$　　C. 0　　D. $f'(2a)$

**解** 应选 B。因

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(a+x)-f(a-x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(a+x)-f(a)+f(a)-f(a-x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(a+x)-f(x)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{f(a-x)-f(a)}{-x}=2f'(a)$$

【例 2.12】 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内有定义，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是______。

A. $\lim\limits_{h\to+\infty} h\left[f\left(a+\frac{1}{h}\right)-f(a)\right]$ 存在　　B. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ 存在

C. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 存在　　D. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在

**解** 应选 D。由

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f[a+(-h)]-f(a)}{-h}=f'(a)$$

根据导数定义知 D 是正确的。

【例 2.13】 函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x^2} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$，在 $x=0$ 处______。

A. 极限不存在　　B. 极限存在但不连续

C. 连续但不可导　　D. 可导

**解** 应选 C。由 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x^2}=0=f(0)$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}\sin\frac{1}{x^2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{1}{x^2}}{\sqrt{x}}$$

极限不存在，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导。

【例 2.14】 设 $f(x)$ 可导且 $f'(x_0)=\frac{1}{2}$，则 $\Delta x\to 0$ 时，$f(x)$ 在 $x_0$ 处的微分 $\mathrm{d}y$ 与 $\Delta x$ 比较是____的无穷小。

A. 等价　　B. 同阶　　C. 低阶　　D. 高阶

**解** 应选 B。由 $f(x)$ 可导，故 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$，且 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{d}y}{\Delta x}=f'(x_0)=\frac{1}{2}$，所以 $\mathrm{d}y$ 与 $\Delta x$ 比较是同阶的无穷小。

【例 2.15】 设函数 $f(x)$ 有任意阶导数且 $f'(x)=f^2(x)$，则 $f^{(n)}(x)=$______ $(n>2)$。

A. $n!f^{n+1}(x)$　　B. $nf^{n+1}(x)$　　C. $f^{2n}(x)$　　D. $n!f^{2n}(x)$

**解** 应选 A。由 $f'(x)=f^2(x)$，故有

$$f''(x)=2f'(x)f(x)=1\cdot 2f^3(x),\quad f'''(x)=1\cdot 2\cdot 3f^4(x),\cdots,f^{(n)}(x)=n![f(x)]^{n+1}$$

【例 2.16】 设 $f(x)=3x^3+x^2|x|$，则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 $n=$______。

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

**解** 应选 C。因为

$$f(x)=3x^2+x^2|x|=\begin{cases}2x^3 & x<0\\4x^3 & x\geq 0\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}6x^2 & x<0\\12x^2 & x\geq 0\end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases}12x & x<0\\24x & x\geq 0\end{cases}$$

$$f'''(x)=\begin{cases}12 & x<0\\24 & x>0\end{cases}$$

显然 $f'''(0)$ 不存在，故使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 $n=2$。

【例 2.17】 设函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导，则函数 $|f(x)|$ 在点 $x=a$ 处不可导的充要条件是______。

A. $f(a)=0$ 且 $f'(a)=0$　　B. $f(a)=0$ 且 $f'(a)\neq 0$

C. $f(a)>0$ 且 $f'(a)>0$　　D. $f(a)<0$ 且 $f'(a)<0$

**解** 应选 B。由排除法判定。取 $f(x)=x^2, a=0$，则 $f(a)=0, f'(a)=0$，但 $|f(x)|=x^2$ 在 $x=a$ 处可导，故 A 不正确。分别取 $f(x)=x$、$f(x)=-x$；$a=1$，可判定 C、D 不正确。故选 B。

【例 2.18】 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则函数 $f(|x|)$ 在 $x=0$ 处可导的充要条件是______。

A. $f(0)=0$　　B. $f'(0)=0$

C. $f(0)=0$ 且 $f'(0)=0$　　D. 与 $f(0)$ 及 $f'(0)$ 的取值无关

**解** 应选 B。由于

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(|x|)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(|x|)-f(0)}{x}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{f(-x)-f(0)}{-x}=-f'(0)$$

所以，$f(|x|)$ 在 $x=0$ 处可导的充要条件是 $f'(0)=0$。

【例 2.19】 设 $f(x)$ 是不恒为零的奇函数，且 $f'(0)$ 存在，则函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$______。

A. 在 $x=0$ 处左极限不存在　　B. 有跳跃间断点 $x=0$

C. 在 $x=0$ 处右极限不存在　　D. 有可去间断点 $x=0$

**解** 应选 D。因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(0)=0$，由题设知 $x=0$ 是 $g(x)$ 的间断点。而

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$$

存在，故 $g(x)$ 有可去间断点 $x=0$。

**【例 2.20】** 设 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x} & x\neq 0\\ f(0) & x=0\end{cases}$，其中 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，$f'(0)\neq 0, f(0)=0$，则 $x=0$ 是 $F(x)$ 的______。

A. 连续点　　　　B. 第一类间断点

C. 第二类间断点　　　　D. 连续点或间断点不能由此确定

**解** 应选 B。由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)\neq 0=f(0)=F(0)$，故 $x=0$ 是 $F(x)$ 的第一类间断点。

**【例 2.21】** 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有连续的四阶导数，且当 $x\neq 0$ 时，$f(x)\neq 0$，又 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{\tan x-\sin x}{f(x)} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$，在 $x=0$ 处连续，则______。

A. $f'(0)=1$　　B. $f''(0)=2$　　C. $f'''(0)=3$　　D. $f^{(4)}(0)=4$

**解** 应选 C。由已知得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{f(x)}=1$，又

$$\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)\sim\frac{1}{2}x^3$$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+\frac{1}{6}f'''(0)x^3+o(x^3)$$

所以 $f'''(0)=3$。

**【例 2.22】** 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\delta,\delta)$ 内有定义，若当 $x\in(-\delta,\delta)$ 时，恒有 $|f(x)|\leq x^2$，则 $x=0$ 必是 $f(x)$ 的______。

A. 间断点　　　　B. 连续而不可导的点

C. 可导的点，且 $f'(0)=0$　　　　D. 可导的点，且 $f'(0)\neq 0$

**解** 应选 C。由题设知 $-x^2\leq f(x)\leq x^2$，故有 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，又

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}x=0$$

所以 $x=0$ 必是 $f(x)$ 的可导的点，且 $f'(0)=0$。

【例 2.23】 设函数 $f(u)$ 可导，$y=f(x^2)$，当自变量 $x$ 在 $x=-1$ 处取得增量 $\Delta x=-0.1$ 时，相应的函数增量 $\Delta y$ 的线性主部为 0.1，则 $f'(1)=$______。

A. -1　　B. 0.1　　C. 1　　D. 0.5

**解** 应选 D。由 $\mathrm{d}y=2xf'(x^2)\mathrm{d}x$，将 $x=-1, \mathrm{d}x=\Delta x=-0.1, \mathrm{d}y=0.1$ 代入得 $f'(1)=0.5$。

【例 2.24】 设函数 $f(x)=x^2$，则 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=$______。

A. $2x$　　B. 2　　C. 4　　D. 不存在

**解** 应选 C。因为 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$，且 $f(x)=x^2$，所以 $f'(2)=2x\big|_{x=2}=4$。

【例 2.25】 设 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x$，则 $f'(x)=$______。

A. $\dfrac{1}{x}$　　B. $-\dfrac{1}{x}$　　C. $\dfrac{1}{x^2}$　　D. $-\dfrac{1}{x^2}$

**解** 应选 D。先要求出 $f(x)$，再求 $f'(x)$。

因为 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x=\dfrac{1}{1/x}$，由此得 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，所以 $f'(x)=\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$。

【例 2.26】 设函数 $f(x)=(x+1)x(x-1)(x-2)$，则 $f'(0)=$______。

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. -2

**解** 应选 C。因为

$$f'(x)=x(x-1)(x-2)+(x+1)(x-1)(x-2)+(x+1)x(x-2)+(x+1)x(x-1)$$

其中的三项当 $x=0$ 时为 0，所以 $f'(0)=(0+1)(0-1)(0-2)=2$。

【例 2.27】 已知 $y=\sin x^2$，则 $y'=$______。

A. $\cos x^2$　　B. $-\cos x^2$　　C. $2x\cos x^2$　　D. $-2x\cos x^2$

**解** 应选 C。因为 $y'=\cos x^2\cdot(x^2)'=2x\cos x^2$。

【例 2.28】 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-\mathrm{e}^{-x^2})}=2$（$a^2+c^2\neq 0$），则______成立。

A. $b=4d$　　B. $b=-4d$　　C. $a=4c$　　D. $a=-4c$

**解** 应选 D。由

$$\lim_{x\to 0}\frac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-\mathrm{e}^{-x^2})}=\lim_{x\to 0}\frac{a\tan x/x+b(1-\cos x)/x}{c\ln(1-2x)/x+d(1-\mathrm{e}^{-x^2})/x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a\tan x/x+bx(1-\cos x)/x^2}{c\ln(1-2x)/x+d(-x)(1-\mathrm{e}^{-x^2})/-x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a}{c\ln[(1-2x)^{-\frac{1}{2x}}]^{-2}}=\frac{a}{-2c}=2$$

故 $a=-4c$。

## 2.2.2 填空题

**【例 2.29】** 设 $f(x)=x^2-4x+5$，则 $f[f'(x)]=$______。

**解** 应填 $4x^2-24x+37$。由 $f'(x)=2x-4$，故

$$f[f'(x)]=(2x-4)^2-4(2x-4)+5=4x^2-24x+37$$

**【例 2.30】** 设 $f(x)=\begin{cases}x^k\cos\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$，其导函数在 $x=0$ 处连续，则 $k$ 的取值范围是______。

**解** 应填 $k>2$。由

$$f'(x)=\begin{cases}kx^{k-1}\cos\dfrac{1}{x}+x^{k-2}\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

要 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=0$，必须 $k-2>0$，故 $k>2$。

**【例 2.31】** 曲线 $y=x+\sin^2 x$ 在点 $\left(\dfrac{\pi}{2},1+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 处的切线方程是______。

**解** 应填 $y=x+1$。因为 $y'=1+2\sin x\cos x=1+\sin 2x$，所以有 $y'\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=1$。故在点 $\left(\dfrac{\pi}{2},1+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的切线方程为 $y-1-\dfrac{\pi}{2}=x-\dfrac{\pi}{2}$，即 $y=x+1$。

**【例 2.32】** 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $xy+2\ln x=y^4$ 所确定，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程是______。

**解** 应填 $x-y=0$。等式 $xy+2\ln x=y^4$ 两边直接对 $x$ 求导，得 $y+xy'+\dfrac{2}{x}=4y^3y'$，将 $x=1, y=1$ 代入上式，有 $y'(1)=1$。故过点(1,1)处的切线方程为 $y-1=1\cdot(x-1)$，即 $x-y=0$。

【例 2.33】　已知曲线 $y=x^3-3a^2x+b$ 与 $x$ 轴相切，则 $b^2$ 可以通过 $a$ 表示为 $b^2=$_______。

**解**　应填 $4a^6$。由题设，在切点处有 $y'=3x^2-3a^2=0$，有 $x_0^2=a^2$，又在此点 $y$ 坐标为 0，于是有 $0=x_0^3-3a^2x_0+b$，故

$$b^2=x_0^2(3a^2-x_0^2)^2=a^2\cdot 4a^4=4a^6$$

【例 2.34】　设曲线 $f(x)=x^n$ 在点 $(1,1)$ 取的切线与 $x$ 轴的交点为 $(\xi_n,0)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)=$______。

**解**　应填 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$。因为 $f'(x)=nx^{n-1}$，所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 取的切线方程是 $y=1+n(x-1)$，令 $y=0$ 可得 $0=1+n(\xi_n-1)$，故 $\xi_n=1-\dfrac{1}{n}$，因此

$$\lim_{n\to\infty}f(\xi_n)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{\mathrm{e}}$$

【例 2.35】　过抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 上一点 $(x_0,y_0)$ 的切线过原点，其系数应满足______。

**解**　应填 $\dfrac{c}{a}\geq 0$，而 $b$ 为任意数。

由 $y'=2ax+b$，所以 $y'|_{x=x_0}=2ax_0+b$，可知过抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 上点 $(x_0,y_0)$ 处的切线方程为 $y-y_0=(2ax_0+b)(x-x_0)$，又切线过原点，即 $0-y_0=(2ax_0+b)(0-x_0)$ $=-2ax_0^2-bx_0$，变形得 $ax_0^2=y_0-ax_0^2-bx_0=c$，故有 $\dfrac{c}{a}=x_0^2\geq 0$，所以抛物线方程的系数值应满足 $\dfrac{c}{a}\geq 0$，而 $b$ 为任意数。

【例 2.36】　设方程 $\mathrm{e}^{xy}+y^2=\cos x$ 确定 $y$ 为 $x$ 的函数，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$______。

**解**　应填 $-\dfrac{y\mathrm{e}^{xy}+\sin x}{x\mathrm{e}^{xy}+2y}$。由 $\mathrm{e}^{xy}(y+xy')+2yy'=-\sin x$，故 $y'=-\dfrac{y\mathrm{e}^{xy}+\sin x}{x\mathrm{e}^{xy}+2y}$。

【例 2.37】　已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^y+6xy+x^2-1=0$ 确定，则 $y''(0)=$______。

**解**　应填-2。当 $x=0$ 时 $y=0$，又 $\mathrm{e}^y y'+6y+6xy'+2x=0$，故 $y'(0)=0$。
而 $\mathrm{e}^y(y')^2+\mathrm{e}^y y''+6y'+6xy''+6y'+2=0$，故 $y''(0)=-2$。

【例 2.38】　设函数 $y=f(x)$ 是由方程 $x=y^y$ 确定的，则 $\mathrm{d}y=$______。

**解** 应填 $dy=\dfrac{dx}{x(1+\ln y)}$。

利用对数恒等式 $x=e^{\ln x}$，故有 $x=e^{y\ln y}$，所以有 $e^{y\ln y}(y'\ln y+y')=1$，因此得

$$dy=\frac{dx}{x(1+\ln y)}$$

【例 2.39】 设 $y=f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)$ 且 $f'(x)=\arctan x^2$，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$______。

**解** 应填 $\dfrac{3\pi}{4}$。由

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)\frac{3(3x+2)-3(3x-2)}{(3x+2)^2}=\arctan\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)^2\cdot\frac{12}{(3x+2)^2}$$

故有
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\frac{3\pi}{4}$$

【例 2.40】 设 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，则 $y'''|_{x=\sqrt{3}}=$______。

**解** 应填 $\dfrac{5}{32}$。由

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}，\quad y''=-\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}，\quad y'''=-\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}+\frac{3x^2}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$$

故有
$$y'''|_{x=\sqrt{3}}=-\frac{1}{8}+\frac{9}{32}=\frac{5}{32}$$

【例 2.41】 设 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$，则 $y^{(n)}=$______。

**解** 应填 $\dfrac{(-1)^n 2\times(n!)}{(1+x)^{n+1}}$。由 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ 得

$$y'=\frac{-2}{(1+x)^2}，\quad y''=\frac{2\times 2}{(1+x)^3}，\quad y'''=\frac{(-1)^3 2\times(3!)}{(1+x)^{3+1}}$$

由递推公式得
$$y^{(n)}=\frac{(-1)^n 2\times(n!)}{(1+x)^{n+1}}$$

【例 2.42】 设 $y=f(\ln x)e^{f(x)}$，其中 $f$ 可微，则 $dy=$______。

**解** 应填 $e^{f(x)}\left[\dfrac{f'(\ln x)}{x}+f'(x)f(\ln x)\right]dx$。由

$$y' = [f(\ln x)\mathrm{e}^{f(x)}]' = [f(\ln x)]'\mathrm{e}^{f(x)} + [\mathrm{e}^{f(x)}]'f(\ln x)$$

$$= f'(\ln x)\frac{1}{x}\mathrm{e}^{f(x)} + \mathrm{e}^{f(x)}f'(x)f(\ln x) = \mathrm{e}^{f(x)}\left[\frac{f'(\ln x)}{x} + f'(x)f(\ln x)\right]$$

故

$$\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{f(x)}\left[\frac{f'(\ln x)}{x} + f'(x)f(\ln x)\right]\mathrm{d}x$$

**【例 2.43】** 设 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)+a\sin x}{x} & x\neq 0\\ A & x=0\end{cases}$，在 $x=0$ 处连续，其中 $f(x)$ 是连续的可导函数，且 $f(0)=0, f'(0)=b$，则 $A=$______。

**解** 应填 $a+b$。可求

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+a\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} + a = f'(0)+a = a+b$$

由题设知，$\lim\limits_{x\to 0}F(x)=F(0)$，即 $a+b=A$。

**【例 2.44】** 设曲线 $f(x)=x^3+ax$ 与 $g(x)=bx^2+c$ 的交点为 $(-1,0)$，在此点处有公切线，则 $a=$______，$b=$______，$c=$______。

**解** 应填 $-1$；$-1$；$1$。由题设知 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $(-1,0)$ 相交、相切，所以有 $b+c=0$，$a+1=0$，$3+a=-2b$，故 $a=-1$，$b=-1$，$c=1$。

**【例 2.45】** 设 $f'(x_0)=-1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}=$______。

**解** 应填 1。由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0-x)-f(x_0)}{-x}=f'(x_0)=-1$，故有

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0-x)}$$

$$= \frac{1}{2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0-2x)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0-x)}{2x}}$$

$$= \frac{1}{-2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0-2x)-f(x_0)}{-2x} + \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0-x)-f(x_0)}{-x}}$$

$$= -\frac{1}{f'(x_0)} = 1$$

**【例 2.46】** 设 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2tx}$，则 $f'(t)=$______。

**解** 应填 $\mathrm{e}^{2t}(1+2t)$。由

$$f(t)=\lim_{x\to\infty}t\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2tx}=t\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{2t}=te^{2t}$$

故
$$f'(t)=e^{2t}(1+2t)$$

**【例 2.47】** 设 $f'(3)=2$，则 $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(3-h)-f(3)}{2h}=$______。

**解** 应填$-1$。因

$$\lim_{h\to0}\frac{f(3-h)-f(3)}{2h}=-\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\frac{f(3-h)-f(3)}{-h}=-\frac{1}{2}f'(3)=-1$$

**【例 2.48】** 设 $x\to0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价的无穷小，则常数 $a=$______。

**解** 应填$-\frac{3}{2}$。由

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}(1+ax^2)^{-\frac{2}{3}}\cdot2ax}{-\sin x}=-\frac{2}{3}a\lim_{x\to0}(1+ax^2)^{-\frac{2}{3}}=-\frac{2}{3}a=1$$

故
$$a=-\frac{3}{2}$$

**【例 2.49】** 设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$，则 $f'(0)=$______。

**解** 应填 $n!$。因

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}(x+1)(x+2)\cdots(x+n)=n!$$

**【例 2.50】** 已知函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导，$f(x)>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$，且满足 $\lim\limits_{h\to0}\left(\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}}=e^{\frac{1}{x}}$，则 $f(x)=$______。

**解** 应填$e^{-\frac{1}{x}}$。由

$$\lim_{h\to0}\left(\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}}=e^{\lim\limits_{h\to0}\frac{\ln\frac{f(x+hx)}{f(x)}}{h}}=e^{x\lim\limits_{h\to0}\frac{\ln f(x+hx)-\ln f(x)}{hx}}=e^{x[\ln f(x)]'}=e^{\frac{1}{x}}$$

即 $x[\ln f(x)]'=\frac{1}{x}$，$[\ln f(x)]'=\frac{1}{x^2}$，所以 $\ln f(x)=-\frac{1}{x}+c_1$，故有 $f(x)=ce^{-\frac{1}{x}}$。

由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$，得 $c=1$，因此 $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$。

【例2.51】 设$\begin{cases}x=1+t^2\\y=\cos t\end{cases}$，则$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$______。

**解** 应填$\dfrac{\sin t-t\cos t}{4t^3}$。因

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-\sin t}{2t},\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{-\sin t}{2t}\right)\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=-\frac{1}{4}\frac{t\cos t-\sin t}{t^3}$$

【例2.52】 设$\begin{cases}x=f(t)-\pi\\y=f(\mathrm{e}^{3t}-1)\end{cases}$，其中$f$可导，且$f'(0)\neq 0$，则$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}=$______。

**解** 应填3。因 $$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}=\left.\frac{3\mathrm{e}^{3t}f'(\mathrm{e}^{3t}-1)}{f'(t)}\right|_{t=0}=3$$

【例2.53】 设函数$f(x)$在$x=0$邻近有定义，且$f(0)=0,f'(0)=1$，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=$______。

**解** 应填1。由 $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=1$$

【例2.54】 曲线$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$在点（1, 1）处切线的斜率是______。

**解** 应填$-\dfrac{1}{2}$。由导数的几何意义知，曲线$f(x)$在$x=x_0$处切线的斜率是$f'(x_0)$，即为函数在该点处的导数，于是

$$y'=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}},\ y'(1)=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\bigg|_{x=1}=-\frac{1}{2}$$

### 2.2.3 综合训练题

【例2.55】 设$y=(1+x^2)\arctan x$，求$y''$。

**解** $$y'=2x\arctan x+(1+x^2)\frac{1}{1+x^2}=2x\arctan x+1$$
$$y''=(2x\arctan x+1)'=2\arctan x+\frac{2x}{1+x^2}$$

【例2.56】 设$y=\tan 2x+2^{\sin x}$，求$\mathrm{d}y\big|_{x=\frac{\pi}{2}}$。

**解** 由导数四则运算法则和复合函数求导法则可求

$$y' = \frac{2}{\cos^2 2x} + \cos x \cdot 2^{\sin x} \ln 2$$

由此得 $$\mathrm{d}y\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = \left( \frac{2}{\cos^2 \pi} + \cos\frac{\pi}{2} \cdot 2^{\sin\frac{\pi}{2}} \ln 2 \right) \mathrm{d}x = 2\mathrm{d}x$$

**【例 2.57】** 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $xy + \mathrm{e}^y = \ln\frac{x}{y}$ 确定，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

**解** 方法 1：等式两端对 $x$ 求导得

$$y + xy' + y'\mathrm{e}^y = \frac{y}{x} \cdot \frac{y - xy'}{y^2}$$

整理得 $$y' = \frac{y - xy^2}{x^2 y + xy\mathrm{e}^y + x}$$

方法 2：由一阶微分形式不变性和微分法则，原式两端求微分得

$$左端 = \mathrm{d}(xy + \mathrm{e}^y) = \mathrm{d}(xy) + \mathrm{d}(\mathrm{e}^y) = y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + \mathrm{e}^y\mathrm{d}y$$

$$右端 = \mathrm{d}(\ln\frac{x}{y}) = \frac{y}{x}\mathrm{d}(\frac{x}{y}) = \frac{y}{x} \cdot \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{y^2}$$

由此得 $$y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + \mathrm{e}^y\mathrm{d}y = \frac{y}{x} \cdot \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{y^2}$$

整理得 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y - xy^2}{x^2 y + xy\mathrm{e}^y + x}$$

**【例 2.58】** 已知 $x + 2\sqrt{x-y} + 4y = 2$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

**解** 已知 $x + 2\sqrt{x-y} + 4y = 2$，两端关于 $x$ 求导，得 $1 + \frac{1}{\sqrt{x-y}}(1 - y'_x) + 4y'_x = 0$，则

$$y'_x = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{x-y}}}{\frac{1}{\sqrt{x-y}} - 4} = \frac{\sqrt{x-y} + 1}{1 - 4\sqrt{x-y}}$$

**【例 2.59】** 设 $f(x) = \left(\tan\frac{\pi x}{4} - 1\right)\left(\tan\frac{\pi x^2}{4} - 2\right)\cdots\left(\tan\frac{\pi x^{100}}{4} - 100\right)$，求 $f'(1)$。

**解** 注意到 $\left(\tan\frac{\pi x}{4} - 1\right)\Big|_{x=1} = 0$，因此，将 $f(x)$ 看作两个因子的积，而不用 100 个因子积的导数公式。因为

$$f(x)=\left(\tan\frac{\pi x}{4}-1\right)\cdot\prod_{k=2}^{100}\left(\tan\frac{\pi x^k}{4}-k\right)$$

所以
$$f'(x)=\frac{\pi}{4}\sec^2\frac{\pi x}{4}\cdot\prod_{k=2}^{100}\left(\tan\frac{\pi x^k}{4}-k\right)+\left(\tan\frac{\pi x}{4}-1\right)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\prod_{k=2}^{100}\left(\tan\frac{\pi x^k}{4}-k\right)$$

故
$$f'(1)=\frac{\pi}{4}\cdot 2\cdot\prod_{k=2}^{100}(1-k)\overset{k-1=t}{=\!=\!=}\frac{\pi}{2}\cdot\prod_{t=1}^{99}(-t)=\frac{\pi}{2}\cdot(-1)^{99}\cdot 99!=-\frac{\pi}{2}99!$$

**【例2.60】** 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\dfrac{t^2}{2}\\ y=1-t\end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

**解** 由参数求导法得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{-1}{2t/2}=-\frac{1}{t}$$

**【例2.61】** 设 $\begin{cases}x=t+1/t\\ y=t^2+1/t^2\\ z=t^3+1/t^3\end{cases}$ $(t\neq 0)$，确定 $y=y(x)$，$z=z(x)$。试证：$3x\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}$。

**证** 因为
$$y=t^2+\frac{1}{t^2}=\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-2=x^2-2$$
$$z=t^3+\frac{1}{t^3}=\left(t+\frac{1}{t}\right)^3-3\left(t+\frac{1}{t}\right)=x^3-3x$$

所以 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=2$，$\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}=6x$，故 $3x\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=6x=\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}$。

**【例2.62】** 设 $y=y(x)$ 由方程组 $\begin{cases}x=3t^2+2t+3\\ \mathrm{e}^y\sin t-y+1=0\end{cases}$ 确定，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}$。

**解** 方法1：$y$ 作为 $t$ 的隐函数，由第二个方程确定。

因为 $\mathrm{e}^y\cdot y'_t\sin t+\mathrm{e}^y\cos t-y'_t=0$，而 $y|_{t=0}=1$，所以 $y'_t|_{t=0}=\mathrm{e}$；

因为 $(\mathrm{e}^y\cdot y'_t)'\sin t+\mathrm{e}^y\cdot y'_t\cos t+\mathrm{e}^y\cdot y'_t\cos t-\mathrm{e}^y\sin t-y''_t=0$，所以 $y''_t|_{t=0}=2\mathrm{e}^2$。

而 $x'_t|_{t=0}=(6t+2)|_{t=0}=2$，$x''_t|_{t=0}=6$，故

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\left.\frac{x'_ty''_t-y'_tx''_t}{(x'_t)^3}\right|_{t=0}=\frac{2\cdot 2\mathrm{e}^2-\mathrm{e}\cdot 6}{2^3}=\frac{\mathrm{e}^2}{2}-\frac{3}{4}\mathrm{e}$$

方法2：因为 $\mathrm{e}^y\cdot y'_t\sin t+\mathrm{e}^y\cos t-y'_t=0$，所以

$$y'_t = \frac{e^y \cos t}{1 - e^y \sin t} \qquad ①$$

又因为 $x'_t = 6t + 2$，所以

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{e^y \cos t}{(6t+2)(1 - e^y \sin t)} \qquad ②$$

从而

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt} = \frac{e^y y'_t \cos t - e^y \sin t}{(6t+2)(1 - e^y \sin t)} - \frac{e^y \cos t[6(1 - e^y \sin t) + (6t+2)(-e^y y'_t \sin t - e^y \cos t)]}{(6t+2)^2(1 - e^y \sin t)^2}$$

又因为 $y\big|_{t=0} = 1$，得 $y'_t\big|_{t=0} = e$；所以

$$\left.\frac{d(dy/dx)}{dt}\right|_{t=0} = \frac{e^2}{2} - \frac{e[6 + 2\times(-e)]}{4} = e^2 - \frac{3}{2}e$$

由②式得 $x'_t\big|_{t=0} = 2$，故

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0} = \left.\frac{d(dy/dx)}{dx}\right|_{t=0} = \frac{e^2}{2} - \frac{3}{4}e$$

**【例 2.63】** 设 $y = f(e^x)e^{f(x)}$，其中 $f(x)$ 为可微函数，求 $y'$。

**解**

$$\begin{aligned} y' &= [f(e^x)]'e^{f(x)} + f(e^x)[e^{f(x)}]' \\ &= f'(e^x)[e^x]'e^{f(x)} + f(e^x)e^{f(x)}[f(x)]' \\ &= f'(e^x)e^x e^{f(x)} + f(e^x)e^{f(x)}f'(x) \\ &= e^{f(x)}[f'(e^x)e^x + f(e^x)f'(x)] \end{aligned}$$

**【例 2.64】** 设 $y = f[\phi(x) + y^2]$，其中 $x, y$ 满足方程 $y + e^y = x$，且 $f(x), \phi(x)$ 均为二阶可导，试求 $\frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}$。

**解** 因为 $\frac{du}{dx} = f'[\phi(x) + y^2]\left[\phi'(x) + 2y\frac{dy}{dx}\right]$，所以

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f''[\phi(x) + y^2]\left[\phi'(x) + 2y\frac{dy}{dx}\right]^2 + f'[\phi(x) + y^2]\left[\phi''(x) + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y\frac{d^2y}{dx^2}\right]$$

又因为 $\frac{dy}{dx} + e^y\frac{dy}{dx} = 1$，所以

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+e^y}，\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-e^y\dfrac{dy}{dx}}{(1+e^y)^2}=-\frac{e^y}{(1+e^y)^3}$$

故
$$\frac{du}{dx}=f'[\phi(x)+y^2]\left[\phi'(x)+2y\frac{dy}{dx}\right]$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}=f''[\phi(x)+y^2]\left[\phi'(x)+2y\frac{dy}{dx}\right]^2+f'[\phi(x)+y^2]\left[\phi''(x)+\frac{2(1+e^y-ye^y)}{(1+e^y)^3}\right]$$

**【例 2.65】** 设函数 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $y'\neq 0, x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数。试将 $x=x(y)$ 所满足的微分方程 $\dfrac{d^2x}{dy^2}+(y+\sin x)\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^3=0$ 变换为 $y=y(x)$ 满足的微分方程。

**解** 由反函数的求导公式知 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{y'}$，于是有

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y'}\right)\cdot\frac{dx}{dy}=\frac{-y''}{y'^2}\cdot\frac{1}{y'}=-\frac{y''}{(y')^3}$$

代入原微分方程得
$$y''-y=\sin x$$

**【例 2.66】** 若 $f(x)$ 有 $n$ 阶导数，试用数学归纳法证明 $[f(ax+b)]^{(n)}=a^nf^{(n)}(ax+b)$。

**证** 当 $n=1$ 时，有 $[f(ax+b)]'=f'(ax+b)(ax+b)'=af'(ax+b)$，设当 $n=k$ 时，$[f(ax+b)]^{(k)}=a^kf^{(k)}(ax+b)$，则当 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}[f(ax+b)]^{(k+1)}&=\frac{d}{dx}[f(ax+b)]^{(k)}=\frac{d}{dx}[a^kf^{(k)}(ax+b)]\\&=a^kf^{(k+1)}(ax+b)(ax+b)'=a^{k+1}f^{(k+1)}(ax+b)\end{aligned}$$

故由数学归纳法可知，对于任意自然数 $n$，$[f(ax+b)]^{(n)}=a^nf^{(n)}(ax+b)$ 成立。

**注意**：求复合函数的导数时，要先搞清函数的复合构成，即复合函数是由哪些基本初等函数复合而成的，特别要分清复合函数的复合层次，然后由外层开始，逐层使用复合函数求导公式，一层一层求导，关键是不要遗漏，最后化简。

**【例 2.67】** 设 $f(x)$ 在 $x_0$ 处有 $f(x_0)=f'(x_0)=0$，而 $g(x)$ 在 $x_0$ 点的邻域内有定义且有界。试证：函数 $F(x)=f(x)g(x)$ 在 $x_0$ 点可导，并求 $F'(x_0)$。

证 $$\lim_{h\to 1}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=\lim_{h\to 1}\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-0}{h}$$
$$=\lim_{h\to 1}\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0+h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 1}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}g(x_0+h)$$

因为 $\lim\limits_{h\to 1}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)=0$， $g(x_0+h)$ 有界，故

$$\lim_{h\to 1}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}g(x_0+h)=0\text{，即 }F'(x_0)=0$$

**【例 2.68】** 求满足方程 $f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$ 的 $f(x)$ 表达式，其中 $x_1,x_2$ 为任意实数，且已知 $f'(0)=2$。

**解** 由 $f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$，令 $x_1=x_2=0$，则有 $f(0)[f(0)-1]=0$。于是有 $f(0)=0$ 或 $f(0)=1$。如果 $f(0)=0$，则由导数定义有

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(0)f(x)-f(0)}{x}=0$$

显然，这与已知 $f'(0)=2$ 相矛盾，故舍去 $f(0)=0$。

当 $f(0)=1$ 时，由导数定义有

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)f(\Delta x)-f(0)f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}f(x)\frac{f(\Delta x)-1}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}f(x)\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=f(x)f'(0)=2f(x)$$

由 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=2$ 得 $(\ln f(x))'=2$，所以 $\ln f(x)=2x$，故 $f(x)=ce^{2x}$，因为 $f(0)=1$，所以 $c=1$。故 $f(x)=e^{2x}$。

**【例 2.69】** 设 $f(x)$ 对任意实数 $x_1$， $x_2$ 有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$，且 $f'(0)=1$。试证： $f'(x)=f(x)$。

**证** 因为 $f'(0)\neq 0$，所以 $f(x)$ 一定不恒为 0，于是有 $f(x_0)\neq 0$，从而

$$f(x_0)=f(x_0+0)=f(x_0)f(0)$$

所以 $f(0)=1$。又

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)f(\Delta x)-f(x)f(0)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}f(x)\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=f(x)f'(0)$$

由 $f'(0)=1$，故 $f'(x)=f(x)$。

【例 2.70】 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，且 $F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，证明：$F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充要条件是 $f(0)=0$。

**证 必要性**：如果 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$，又 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导，$F(x)-f(x)=f(x)|\sin x|$。则 $f(x)|\sin x|$ 在 $x=0$ 处可导，故其在 $x=0$ 的左右导数都存在且相等，又显然 $f(x)|\sin x|$ 在 $x=0$ 处取值为 0。于是

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)|\sin x|-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)|\sin x|-0}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0^+}f(x)=-f(0)$$

所以 $f(0)=-f(0)$，故 $f(0)=0$

**充分性**：如果 $f(0)=0$，则 $F(0)=0$，又因为 $f'(0)$ 存在，则

$$F'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)(1+|\sin x|)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\cdot\lim_{x\to 0^+}(1+|\sin x|)=f'(0)$$

故 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导且 $F'(0)=f'(0)$。

【例 2.71】 设函数 $f(x)$ 在 $[x_0,x_0+H]$（$H>0$）上连续，在 $(x_0,x_0+H)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)=K$，试证：$f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=K$。

**证** 由拉格朗日中值定理，有

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0+\theta\Delta x)\ （0<\theta<1）$$

于是，在题设条件下有

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}f'(x_0+\theta\Delta x)=K$$

【例 2.72】 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，$f'(0)=1$，且对 $\forall x,y\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(x+y)=\mathrm{e}^y f(x)+a\mathrm{e}^x f(y)$，求常数 $a$ 及 $f(x)$。

**解** 令 $x=y=0$，得 $f(0)=f(0)+af(0)$，即 $af(0)=0$。

（1）如 $a=0$，则 $f(x+y)=\mathrm{e}^y f(x)$，此时

$$f'(x)=\lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\mathrm{e}^y f(x)-f(x)}{y}=f(x)\lim_{y\to 0}\frac{\mathrm{e}^y-1}{y}=f(x)$$

得 $f(x)=C\mathrm{e}^x$，又 $f'(0)=1$，得 $C=1$，即 $f(x)=\mathrm{e}^x$。

（2）如 $a\neq 0$，则 $f(0)=0, f(x+y)=\mathrm{e}^y f(x)+a\mathrm{e}^x f(y)$，此时

$$f'(x)=\lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{e^y f(x)+ae^x f(y)-f(x)}{y}$$
$$=f(x)\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}+ae^x\lim_{y\to 0}\frac{f(y)-f(0)}{y}$$
$$=f(x)+ae^x f'(0)=f(x)+ae^x$$

即 $f'(x)=f(x)+ae^x$，又 $f'(0)=1$，得 $a=1$，所以 $f'(x)=f(x)+e^x$（解微分方程），故得 $f(x)=xe^x$。

因此，当 $a=0$ 时，$f(x)=e^x$；当 $a=1$ 时，$f(x)=xe^x$。

**【例 2.73】** 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有定义，且对于任意 $x>0$，$y>0$，都有 $f(xy)=f(x)+f(y)$，又 $f'(1)$ 存在且等于 $a$，试求 $f'(x)$ 及 $f(x)$。

**解** 由题设条件包含“$f(x)$ 可导”要求 $f'(x)$，就只能根据导数的定义，使之与“$f'(1)=a$”这一条件联系起来。

在恒等式 $f(xy)=f(x)+f(y)$ 中，取 $x=y=1$ 有 $f(1)=0$，于是

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left[x\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right]-f(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)+f\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)-f(1)}{\frac{\Delta x}{x}}\cdot\frac{1}{x}=f'(1)\cdot\frac{1}{x}=\frac{a}{x}$$

从而 $f(x)=a\ln x+c$，由 $f(1)=0$，得 $c=0$。故 $f(x)=a\ln x$（$x>0$）。

**【例 2.74】** 求满足方程 $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$ 的函数 $f(x)$，其中已知 $f'(0)$ 存在。

**解** 由已知 $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$，令 $x=0$，$y=0$，则 $f(0)=0$。由

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{f(y)-f(0)}{y-0}=f'(0)$$

故

$$\lim_{y\to 0}f(y)=f(0)=0$$

则

$$f'(x)=\lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}-f(x)}{y}$$
$$=\lim_{y\to 0}\frac{f(y)[1+f^2(x)]}{y[1-f(x)f(y)]}=f'(0)[1+f^2(x)]$$

故 $\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}=f'(0)$，故 $\arctan[f(x)]=f'(0)x$，所以 $f(x)=\tan[f'(0)x]$。

**【例 2.75】** 已知 $f(x)$ 在数轴上处处有定义，$f'(0)$ 存在，且对任何 $x,\xi$，恒有 $f(x+\xi)=f(x)+f(\xi)+2x\xi$，试求 $f'(x)$。

**解** 由 $f'(0)$ 存在，即由定义

$$f'(0)=\lim_{\xi\to 0}\frac{f(0+\xi)-f(0)}{\xi}=\lim_{\xi\to 0}\frac{f(\xi)}{\xi}\quad(f(0+\xi)=f(0)+f(\xi),f(0)=0)$$

又由 $f(x+\xi)=f(x)+f(\xi)+2x\xi$，得 $\dfrac{f(x+\xi)-f(x)}{\xi}=\dfrac{f(\xi)}{\xi}+2x$，故

$$f'(x)=\lim_{\xi\to 0}\frac{f(x+\xi)-f(x)}{\xi}=\lim_{\xi\to 0}\frac{f(\xi)}{\xi}+\lim_{\xi\to 0}2x=f'(0)+2x$$

**【例 2.76】** 设 $f(x)=\varphi(a+bx)-\varphi(a-bx)$，其中 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且在点 $a$ 处可导，求 $f'(0)$。

**解** 
$$\begin{aligned}f'(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(a+bx)-\varphi(a-bx)}{x}\\&=\lim_{x\to 0}b\cdot\frac{[\varphi(a+bx)-\varphi(a)]-[\varphi(a-bx)-\varphi(a)]}{bx}\\&=\lim_{x\to 0}b\cdot\frac{\varphi(a+bx)-\varphi(a)}{bx}+\lim_{x\to 0}b\cdot\frac{\varphi(a-bx)-\varphi(a)}{-bx}\\&=b\varphi'(a)+b\varphi'(a)=2b\varphi'(a)\end{aligned}$$

**【例 2.77】** 设 $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$，求 $f'(1)$。

**解** 
$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-2)(x-3)\cdots(x-n)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}=\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}$$

**【例 2.78】** 设 $f(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-100)$，求 $f'(1)$。

**解** 
$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x-2)(x-3)\cdots(x-100)=-99!$$

**【例 2.79】** 设 $f(x)=(x^2-a^2)g(x)$，其中 $g(x)$ 在 $x=a$ 处连续，求 $f'(a)$。

**解** 
$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x^2-a^2)g(x)}{x-a}=2ag(a)$$

**【例 2.80】** 设 $y=f(x)=x\cdot\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$，求 $f'(0)$。

**解** $$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{x}=\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=1$$

**【例 2.81】** 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=2$，求 $f'(1)$。

**解** 因为 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，于是

$$f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}(x-1)\frac{f(x)}{x-1}=0$$

故 $$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=2$$

**【例 2.82】** 若函数 $f(x)$，$g(x)$ 都在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且满足条件：

（1）$f(x+y)=f(x)g(y)+f(y)g(x)$；
（2）$f(0)=0$，$g(0)=1$，$f'(0)=1$，$g'(0)=0$。

试证：$f(x)$ 处处可导。

**证** 因为 $$\lim_{h\to 1}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 1}\frac{f(x)g(h)+f(h)g(x)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 1}\frac{f(x)[g(h)-1]+g(x)[f(h)-0]}{h}$$
$$=\lim_{h\to 1}\left\{f(x)\frac{g(h)-g(0)}{h}+g(x)\frac{f(h)-f(0)}{h}\right\}$$
$$=f(x)g'(0)+g(x)f'(0)=g(x)$$

所以对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ 有 $f'(x)=g(x)$，故 $f(x)$ 处处可导。

**【例 2.83】** 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是对 $x$ 的所有值都有定义的函数，具有下列性质：

（1）$f(x+y)=f(x)g(y)+f(y)g(x)$；
（2）$f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x=0$ 处可微，且当 $x=0$ 时，$f(0)=0, g(0)=1, f'(0)=1, g'(0)=0$。

证明：$f(x)$ 对所有 $x$ 都可微，且 $f'(x)=g(x)$。

**证** 由于 $f(x)$，$g(x)$ 在 $x=0$ 处可微，所以有

$$f'(0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(y)-f(0)}{y}=1=\lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{y}$$
$$g'(0)=\lim_{y\to 0}\frac{g(y)-g(0)}{y}=0=\lim_{y\to 0}\frac{g(y)-1}{y}$$

故
$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y} \\
&= \lim_{y\to 0}\frac{f(x)g(y)+f(y)g(x)-f(x)}{y} \\
&= \lim_{y\to 0}\frac{f(x)[g(y)-1]+f(y)g(x)}{y} \\
&= \lim_{y\to 0}\frac{f(x)[g(y)-1]+[f(y)-0]g(x)}{y} \\
&= \lim_{y\to 0}f(x)\frac{g(y)-g(0)}{y}+\lim_{y\to 0}g(x)\frac{f(y)-f(0)}{y} \\
&= f(x)g'(0)+g(x)f'(0)=g(x)
\end{aligned}
$$

**【例 2.84】** 设 $f(x)=(x-a)\varphi(x)$，$\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续但不可导，求 $f'(a)$。

**解** 因为 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续，则 $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\varphi(a)$，且

$$
f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)\varphi(x)-0}{x-a}=\lim_{x\to a}\varphi(x)=\varphi(a)
$$

**【例 2.85】** 设 $y=f(x)=|x-a|\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 点连续，问在什么条件下，$f(x)$ 在 $x=a$ 处可导？

**解** 因为 $\Delta y=f(a+\Delta x)-f(a)=|\Delta x|\varphi(a+\Delta x)$，又 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}\varphi(a+\Delta x)$，则

$$
f'_-(a)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0^-}\varphi(a+\Delta x)=-\varphi(a)
$$
$$
f'_+(a)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0^+}\varphi(a+\Delta x)=\varphi(a)
$$

为使 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，只需 $f'_-(a)=f'_+(a)$ 即可。由

$$
\varphi(a)=-\varphi(a)\Rightarrow\varphi(a)=0
$$

综上所述，当 $\varphi(a)=0$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导且 $f'(a)=0$。

**【例 2.86】** 设 $f'(x)$ 存在，试证：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+a\Delta x)-f(x-b\Delta x)}{\Delta x}=(a+b)f'(x)$。

**证** 根据导数的定义，有

$$
\text{原式左边}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x+a\Delta x)-f(x)}{a\Delta x}\cdot a+b\cdot\frac{f(x-b\Delta x)-f(x)}{-b\Delta x}\right]=(a+b)f'(x)=\text{右边}
$$

**【例 2.87】** 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且对任意 $x$，$x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$，$f(x)=1+xg(x)$，其中 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=1$。证明：$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处可导。

**证** 因对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=f(x)\cdot f(\Delta x)-f(x)=f(x)[f(\Delta x)-1]=f(x)\cdot\Delta x\cdot g(\Delta x)$$

所以
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f(x)g(\Delta x)$$

由导数定义有
$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}f(x)\cdot g(\Delta x)=f(x)$$

故 $f'(x)=f(x)$， $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处可导。

**【例 2.88】** 求函数 $f(x)=\begin{cases}e^{x-1} & 1<x<+\infty\\ x^2 & 0\le x<1\\ x^3 & -\infty<x<0\end{cases}$ 的导数。

**解** 在各开区间内分别对 $f(x)$ 求导有

$$f'(x)=\begin{cases}e^{x-1} & 1<x<+\infty\\ 2x & 0\le x<1\\ 3x^2 & -\infty<x<0\end{cases}$$

考察分界点 $x=0$ 与 $x=1$ 处的可导性。

当 $x=0$ 时，
$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}f'(x)=\lim_{x\to 0^-}(3x^2)=0$$
$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0^+}(2x)=0$$

所以 $f'(0)=0$，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导。

当 $x=1$ 时，
$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}f'(x)=\lim_{x\to 1^-}(2x)=2$$
$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}f'(x)=\lim_{x\to 1^+}e^{x-1}=1$$

得 $f'_-(1)\ne f'_+(1)$，故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导。因此

$$f'(x)=\begin{cases}e^{x-1} & 1<x<+\infty\\ \text{不存在} & x=1\\ 2x & 0\le x<1\\ 3x^2 & -\infty<x<0\end{cases}$$

**【例 2.89】** 设 $f(x)=\begin{cases}x^2e^{-x^2} & |x|\le 1\\ 1/e & |x|\ge 1\end{cases}$，求 $f'(x)$。

**解** 当 $|x|>1$ 时，$f'(x)=0$；当 $|x|<1$ 时，$f'(x)=2x(1-x^2)e^{-x^2}$，即

$$f'(x)=\begin{cases}0 & x<-1\\ 2x(1-x^2)\mathrm{e}^{-x^2} & -1<x<1\\ 0 & x>1\end{cases}$$

对于 $x=-1, x=1$ 的情况分别讨论。

当 $x=-1$ 时，
$$f'_-(-1)=\lim_{x\to-1^-}f'(x)=\lim_{x\to-1^-}0=0$$
$$f'_+(-1)=\lim_{x\to-1^+}f'(-1)=\lim_{x\to-1^+}2x(1-x^2)\mathrm{e}^{-x^2}=0$$

所以 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处可导，且 $f'(-1)=0$。

当 $x=1$ 时，
$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}f'(x)=\lim_{x\to1^-}2x(1-x^2)\mathrm{e}^{-x^2}=0$$
$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}f'(x)=\lim_{x\to1^+}0=0$$

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=0$。因此

$$f'(x)=\begin{cases}0 & |x|\geq1\\ 2x(1-x^2)\mathrm{e}^{-x^2} & |x|\leq1\end{cases}$$

**【例 2.90】**　设 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x} & x\neq0\\ a & x=0\end{cases}$，求 $f'(x)$。

**解**　$x\neq0$ 时，$f'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$。

$x=0$ 时，容易判断：当 $a\neq0$ 时，$f(x)$ 不连续，因而函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导；当 $a=0$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，但由于 $\lim\limits_{x\to0}2x\sin\dfrac{1}{x}=0, \lim\limits_{x\to0}\cos\dfrac{1}{x}$ 不存在，所以极限 $\lim\limits_{x\to0}f'(x)$ 不存在，这时就要根据导数的定义来判断函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的可导性。由导数定义

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{(\Delta x)^2\sin\dfrac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=0$$

可知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=0$。所以

当 $a\neq0$ 时，$f'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}\quad x\neq0$

当 $a=0$ 时，$f'(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$

**【例 2.91】**　讨论 $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi}{2}x & |x|\leq1\\ |x-1| & |x|>1\end{cases}$ 的连续性与可导性。

**解** 方法1：因
$$f(x)=\begin{cases}-x+1 & x<-1\\ \cos\frac{\pi}{2}x & -1\le x\le 1\\ x-1 & x>1\end{cases}$$

显然 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$，$(-1,1)$，$(1,+\infty)$ 内是初等函数，是连续可导的。

因为
$$\lim_{x\to -1^-}(-x+1)=2,\quad \lim_{x\to -1^+}\cos\frac{\pi}{2}x=0$$

所以 $x=-1$ 是 $f(x)$ 的第一类跳跃间断点，从而 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处不可导。

因为
$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\cos\frac{\pi}{2}x=0=f(0)$$
$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x-1)=0=f(0)$$

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续。

因为
$$f'_-(1)=\lim_{h\to 0^-}\frac{\cos\frac{\pi}{2}(1+h)-\cos\frac{\pi}{2}}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-\sin\frac{\pi}{2}h}{h}=-\frac{\pi}{2}$$
$$f'_+(1)=\lim_{h\to 0^+}\frac{[(1+h)-1]-\cos\frac{\pi}{2}}{h}=1$$

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导。

综上所述，$f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$，$(-1,+\infty)$ 上连续，$x=-1$ 是它的第一类跳跃间断点。除 $x=\pm 1$ 外，$f(x)$ 处处可导，且
$$f'(x)=\begin{cases}-1 & x<-1\\ -\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x & -1<x<1\\ 1 & x>1\end{cases}$$

方法2：$f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$，$(-1,1)$，$(1,+\infty)$ 内的连续性与可导性，以及在 $x=-1$ 处的不连续性和不可导性的讨论与方法1相同。

因为
$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\cos\frac{\pi}{2}x=0=f(0)$$
$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x-1)=0=f(0)$$

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续。$(x-1)\big|_{x=1}=0$ 有意义。

因为 $\cos\frac{\pi}{2}x$ 和 $x-1$ 在 $x=1$ 处均可导，则
$$f'_-(1)=\left(\cos\frac{\pi}{2}x\right)'\bigg|_{x=1}=\left(-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x\right)\bigg|_{x=1}=-\frac{\pi}{2}$$

$$f'_+(1) = (x-1)'\big|_{x=1} = 1$$

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导。

**【例 2.92】** 设 $f(x)=\begin{cases}\ln(x^2+a^2) & x>1\\ \sin b(x-1) & x\le 1\end{cases}$，试确定常数 $a,b$，使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导。

**解** 由 $f(x)$ 在 $x=1$ 可导知

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)\\ f'_+=f'_-\end{cases}，即 \begin{cases}\ln(1+a^2)=0\\ \left.\dfrac{2x}{x^2+a^2}\right|_{x=1}=b\cos b(x-1)\big|_{x=1}\end{cases}$$

于是 $a=0, b=2$。

**【例 2.93】** 某人以 2m/s 的速度通过一座桥，桥面高出水面 20m，在此人的正下方有一条小船以 $\frac{4}{3}$ m/s 的速度在与桥垂直的方向航行，求经过 5s 后，人与小船相分离的速度。

**解** 设经时间 $t$ (s)后船与人的距离为 $s$ (m)，人行走距离为 $x$ (m)，船航行距离为 $y$ (m)，则 $s^2(t)=x^2(t)+y^2(t)+20^2$，所建立的方程并不是 $s$ 与 $t$ 的直接函数关系，但因为所求的 $v=\dfrac{ds}{dt}$，且已知 $\dfrac{dx}{dt}=2$，$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{4}{3}$，所以可借助相关变化率来求。

方程两边对 $t$ 求导得 $$2s\frac{ds}{dt}=2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}$$

当 $t=5$ 时，$x=10, y=\dfrac{20}{3}$，$s=\sqrt{10^2+\left(\dfrac{20}{3}\right)^2+20^2}=\dfrac{70}{3}$，代入上式得

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=5}=\left(10\cdot 2+\frac{20}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)\bigg/\frac{70}{3}=\frac{26}{21}\ \text{（m/s）}$$

**【例 2.94】** 求曲线 $x^2+2xy^2+3y^4=6$ 在点 $(1,-1)$ 处的切线与法线方程。

**解** 因 $$2x+2y^2+4xyy'+12y^3y'=0$$

把 $(1,-1)$ 代入上式，得

$$2+2-4y'(1)-12y'(1)=0$$

即 $y'(1)=\dfrac{1}{4}$。

于是：在 $(1,-1)$ 处曲线的切线方程为 $y+1=\dfrac{1}{4}(x-1)$，即 $x-4y-5=0$；

在 $(1,-1)$ 处曲线的法线方程为 $y+1=-4(x-1)$，即 $4x+y-3=0$。

【例 2.95】 设曲线方程为$\begin{cases} x=t+2+\sin t \\ y=t+\cos t \end{cases}$，求此曲线在点$x=2$处的切线方程。

**解** 因为$x=2$时，$t+\sin t=0$，而$t+\sin t$是增函数，所以方程只有一解$t=0$。从而

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=2}=\left.\frac{1-\sin t}{1+\cos t}\right|_{t=0}=\frac{1}{2}$$

故曲线在$(2,1)$点处的切线方程为$y-1=\frac{1}{2}(x-2)$，即$x-2y=0$。

【例 2.96】 求$y=x^2+ax$与$y=x^2+bx$（$b>a>0$）的公切线方程。

**解** 记曲线$C_1$为$y=x^2+ax$，曲线$C_2$为$y=x^2+bx$，设公切线$L$在$C_1,C_2$上的切点分别是$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$，则公切线$L$方程可写作

$$y-(x_1^2+ax_1)=(x^2+ax)'\big|_{x=x_1}(x-x_1)\text{，即 }y=(2x_1+a)x-x_1^2$$

同理，公切线$L$的方程也可写作$y=(2x_2+b)x-x_2^2$，从而

$$\begin{cases} 2x_1+a=2x_2+b \\ x_1^2=x_2^2 \end{cases}\Rightarrow x_1=\pm x_2$$

若$x_1=x_2$，则易得$a=b$，这与假设矛盾。所以$x_1=-x_2$，将之代入，得

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b-a}{4} \\ x_2=-\dfrac{b-a}{4} \end{cases}$$

故公切线$L$的方程为 $$y=\frac{b+a}{2}x-\frac{(b-a)^2}{16}$$

【例 2.97】 设$f(x)$可导且$f(x)\neq 0$，证明：曲线$y=f(x)$与$y=f(x)\sin x$在交点处相切。

**证** 要证两曲线在交点处相切，只要证这两条曲线在交点处具有公切线，利用导数的几何意义即可证明此题。先求两曲线的交点，由$f(x)=f(x)\sin x$，有$\sin x=1$，得$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$（$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$）。曲线$y=f(x)\sin x$在$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$处的切线斜率为

$$K_1=[f'(x)\sin x+f(x)\cos x]\Big|_{x=2k\pi+\frac{\pi}{2}}=f'\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$$

而曲线$y=f(x)$在$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$处的切线斜率为

$$K_2 = f'\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

因 $K_1 = K_2$，可知两曲线在交点处有公切线，故两曲线在交点处相切。

【例 2.98】　求三叶玫瑰线 $r = a\sin 3\theta$ 在对应 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 的点处的切线方程。

**解**　利用直角坐标与极坐标间的关系，将所给的极坐标方程化为参数方程

$$\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta = a\sin 3\theta\cos\theta \\ y = r(\theta)\sin\theta = a\sin 3\theta\sin\theta \end{cases}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}} = \frac{3a\cos 3\theta\sin\theta + a\sin 3\theta\cos\theta}{3a\cos 3\theta\cos\theta - a\sin 3\theta\sin\theta}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$$

切点为 $x = \frac{a}{2}, y = \frac{a}{2}$，故切线方程为 $x - 2y + \frac{a}{2} = 0$。

【例 2.99】　已知曲线 $y = f(x)$ 在点(1,0)处的切线在 $y$ 轴上的截距为−1，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}[1 + f(1 + \frac{1}{n})]^n$。

**解**　曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, 0)$ 处的切线方程为 $y = f'(1)(x-1)$，令 $x = 0$，得切线在 $y$ 轴上的截距为 $-f'(1) = -1$，所以 $f'(1) = 1$，故

$$\lim_{n\to\infty}\left[1 + f\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]^n = \mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty} nf\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f\left(1+\frac{1}{n}\right)-f(1)}{\frac{1}{n}}} = \mathrm{e}^{f'(1)} = \mathrm{e}$$

【例 2.100】　设 $f'(a)$ 存在，$f(a) \neq 0$，试求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{f(a+1/n)}{f(a-1/n)}\right]^n$。

**解**　方法 1：原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{e}^{n\left[\ln f\left(a+\frac{1}{n}\right) - \ln f\left(a-\frac{1}{n}\right)\right]} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left[\ln f\left(a+\frac{1}{n}\right)-\ln f(a)\right]-\left[\ln\left(a-\frac{1}{n}\right)-\ln f(a)\right]}{\frac{1}{n}}}$

$$= \mathrm{e}^{2[\ln f(x)]'\big|_{x=a}} = \mathrm{e}^{2\frac{f'(a)}{f(a)}}$$

方法 2：令 $y_n = \left[\frac{f(a+1/n)}{f(a-1/n)}\right]^n$，则

$$\ln y_n = n\left[\ln f\left(a+\frac{1}{n}\right)-\ln f\left(a-\frac{1}{n}\right)\right]=\frac{\ln f\left(a+\frac{1}{n}\right)-\ln f(a)}{\frac{1}{n}}+\frac{\ln f\left(a-\frac{1}{n}\right)-\ln f(a)}{-\frac{1}{n}}$$

从而 $$\lim_{n\to\infty}\ln y_n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\ln f\left(a+\frac{1}{n}\right)-\ln f(a)}{\frac{1}{n}}\right]+\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\ln f\left(a-\frac{1}{n}\right)-\ln f(a)}{\left(-\frac{1}{n}\right)}\right]$$

$$=2[\ln f(x)]'\Big|_{x=a}=2\frac{f'(a)}{f(a)}$$

所以 $$y_n=\mathrm{e}^{2\frac{f'(a)}{f(a)}}，即\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f\left(a-\frac{1}{n}\right)}\right]^n=\mathrm{e}^{2\frac{f'(a)}{f(a)}}$$

方法3：利用公式 $\lim\limits_{n\to\infty}u^v\overset{1^\infty}{=\!=}\mathrm{e}^{\lim v\ln u}$，得

$$原式\overset{1^\infty}{=\!=}\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f\left(a-\frac{1}{n}\right)}-1\right]}$$

而 $$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f\left(a-\frac{1}{n}\right)}\right]^n\overset{0\cdot\infty}{=\!=}\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f\left(a-\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{f\left(a-\frac{1}{n}\right)}=2f'(a)\cdot\frac{1}{f(a)}$$

故 $$原式=\mathrm{e}^{2\frac{f'(a)}{f(a)}}$$

**【例 2.101】** 设函数 $\theta(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，又设 $f(x)=\cos\theta(x)$，$f'(x)=\sin\theta(x)$，证明：对满足 $\theta(x)\neq n\pi$ 的一切 $x$，$\theta(x)$ 可导，且 $\theta'(x)=-1$。

**证** 要 $\theta(x)$ 在任意点 $x_0$ 可导，需讨论 $\dfrac{\theta(x)-\theta(x_0)}{x-x_0}$ 的极限。

为了使用条件 $f(x)=\cos\theta(x)$ 和 $f'(x)=\sin\theta(x)$，将此式改写为

$$\frac{\theta(x)-\theta(x_0)}{x-x_0}=\frac{\theta(x)-\theta(x_0)}{\cos\theta(x)-\cos\theta(x_0)}\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

这自然要用到保证让分母不为零的条件 $\theta(x_0)\neq n\pi$。设 $\theta(x_0)\neq n\pi$，则由 $\theta(x)$ 连续性，$\exists\delta>0$，使当 $|x-x_0|<\delta$ 时，$\theta(x_0)\neq n\pi$，于是对于任意 $x_0$，有

$$\theta'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\theta(x)-\theta(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{\theta(x)-\theta(x_0)}{\cos\theta(x)-\cos\theta(x_0)}\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right]$$

$$=\frac{1}{[\cos\theta(x)]'_{x=x_0}}[f(x)]'_{x=x_0}=-\frac{1}{\sin\theta(x_0)}\cdot\sin\theta(x_0)=-1$$

由 $x_0$ 的任意性，$\theta'(x)=-1$。

**【例 2.102】** 设 $f(x)$ 定义在 $R$ 上，对于任意的 $x_1,x_2$，有 $|f(x_1)-f(x_2)|\le(x_1-x_2)^2$，则 $f(x)$ 是常值函数。

**证** 对于 $\forall x_1,x_2\in R$，有 $\left|\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right|\le|x_1-x_2|$。令 $x_2\to x_1$，则得 $f'(x_1)=0$，由 $x_1$ 的任意性知，$f(x)=c$。

**【例 2.103】** 设 $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx$，且 $|f(x)|\le|\sin x|$，试证：$|a_1+2a_2+\cdots na_n|\le 1$。

**证** 因为 $f'(x)=a_1\cos x+2a_2\cos 2x+\cdots+na_n\cos nx$，所以

$$|f'(0)|=|a_1+2a_2+\cdots+na_n|$$

又因为 $f(0)=0$，$|f(x)|\le|\sin x|$，所以

$$|f'(0)|=\lim_{x\to 0^+}\frac{|f(x)|-|f(0)|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|f(x)|}{|x|}\le\lim_{x\to 0^+}\frac{|\sin x|}{|x|}=1$$

故 $|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\le 1$。

**【例 2.104】** 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可微，若 $f(0)=0$，且处处有 $f'(x)\le|f(x)|$，试证 $f(x)\equiv 0$。

**证** 若 $f(x)\ne 0$，则 $\exists x_0\in(-\infty,+\infty)$，使得 $f(x_0)\ne 0$，不妨设 $f(x_0)>0$（$f(x_0)<0$ 类似可证），记 $x_1=\inf\{x\,|\,(x,x_0)$ 上 $f(x)>0\}$，由连续函数局部保号性，只能 $f(x_1)=0$，而在 $(x_1,x_0)$ 内 $f(x)>0$，令 $g(x)=\ln f(x)$（当 $x\in(x_1,x_0)$ 时），则 $|g'(x)|=\left|\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right|\le 1$，故 $g(x)$ 在有限区间 $(x_1,x_0)$ 上有界，但 $\lim\limits_{x\to x_1^+}f(x)=f(x_1)=0$，所以 $\lim\limits_{x\to x_1^+}g(x)=-\infty$，矛盾。