南京信息工程大学
Nanjing University of Information Science & Technology

高等数学（上）

数学与统计学院　公共数学教学部

高等数学教学团队

第四节 无穷小量与无穷大量

1. 无穷小量
2. 无穷大量
3. 无穷小量与无穷大量的关系
4. 内容小结与思考题

无穷小与无穷大

知识目标

了解：无穷大的概念

理解：无穷小量的概念，

掌握：无穷小量和极限的关系，

无穷大和无穷小之间的关系

重难点

重点：无穷小量、无穷大量的概念

难点：无穷小量和极限的关系与性质

无穷大与无界的关系

一、无穷小量

1、无穷小量的概念

定义1 如果 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = 0$，

则称函数 $f(x)$为当$x \to x_0$ (或$x \to \infty$)时的无穷小量，简称无穷小.

特别地， 若数列$\{x_n\}$满足 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$ ，

则称 $\{x_n\}$为当 $n \to \infty$时的无穷小.

例如 1) $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$ ，所以函数 $x-2$ 为当 $x\to 2$ 时的无穷小.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，函数 $\dfrac{1}{x}$ 为 $x\to\infty$ 当时的无穷小.

3) $\left\{\dfrac{1}{n+1}\right\}$，$\left\{\dfrac{1}{3^n}\right\}$ ，$\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$ 都是 $n\to\infty$ 时的无穷小.

由函数（或数列）极限的精确定义，易得：

2、无穷小量的精确定义：

（1）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0 \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有

$$|f(x)|<\varepsilon.$$

（2）$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0 \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，使得当 $|x|>X$ 时，恒有

$$|f(x)|<\varepsilon.$$

（3）$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0 \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists N(\in N^+)$，使得当 $n>N$ 时，恒有

$$|x_n|<\varepsilon.$$

注： 1）无穷小是变量,不能与很小很小的数混淆；

2）零是可以作为无穷小的**唯一的常数**；

3）函数是否为无穷小与自变量的变化过程密切相关.

如： $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ ，所以 $f(x) = x^2$ 当 $x \to 0$ 时为无穷小；

$\lim\limits_{x\to 1} x^2 = 1$，所以当 $x \to 1$ 时，$f(x) = x^2$ 不是无穷小.

3、无穷小量的性质

（1）无穷小量与函数极限的关系

定理1 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}[f(x)-A]=0$

证明: 以 $x\to x_0$为例

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0\text{，当 } 0<|x-x_0|<\delta\text{时，有 } |f(x)-A|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}[f(x)-A]=0.$$

证毕.

定理2 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$

其中$\alpha(x)$当 $x\to x_0$ (或$x\to\infty$)时为无穷小.

证明: 以$x\to x_0$为例

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$时, 有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

$$\overset{\text{令}\alpha(x)=f(x)-A}{\Longleftrightarrow} \lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)\text{（其中}\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0\text{)}.$$

证毕.

类似地可证明$x\to\infty$ 时的情形.

注： 将一般极限问题转化为特殊极限问题(无穷小)；

例1 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$

解： 因为 $\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2x^3}$，而 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2x^3}=0$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$.

(2) 无穷小量的运算性质（仅以 $x \to x_0$ 为例证明）

定理3 两个无穷小量的和仍是无穷小量.

证： 设α 及β 是当 $x \to x_0$ 时的两个无穷小,而 $\gamma = \alpha + \beta.$

$\forall\, \varepsilon > 0,$

由 $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha = 0,$ 对 $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0,$ $\exists \delta_1 > 0,$ 当$0 < |x - x_0| < \delta_1,$ $|\alpha| < \dfrac{\varepsilon}{2}.$

由 $\lim\limits_{x \to x_0} \beta = 0,$ 对 $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0,$ $\exists \delta_2 > 0,$ 当$0 < |x - x_0| < \delta_2,$ $|\beta| < \dfrac{\varepsilon}{2}.$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$，则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，

$|\alpha| < \dfrac{\varepsilon}{2}$　　$|\beta| < \dfrac{\varepsilon}{2}$　　同时成立.

从而 $|\gamma| = |\alpha + \beta| \le |\alpha| + |\beta| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

即当 $x \to x_0$ 时，$\gamma = \alpha + \beta$ 是无穷小.

推论1 有限个无穷小量的和也是无穷小量.

定理4 有界函数与无穷小量的乘积是无穷小量.

证： 不妨设函数u 在$\overset{\circ}{U}(x_0,\delta_1)$ 内有界,则$\exists M>0,\delta_1>0,$

使得当 $0<|x-x_0|<\delta_1$时，恒有 $|u|\le M$.

又设α 是当$x\to x_0$ 时的无穷小，即 $\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\delta_2(\delta_2<\delta_1)>0,$

当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时， $|u|<M$ 及 $|\alpha|<\dfrac{\varepsilon}{M}$ 同时成立.

从而 $|u\cdot\alpha|=|u|\cdot|\alpha|<M\cdot\dfrac{\varepsilon}{M}=\varepsilon,$

所以当 $x\to x_0$时， $u\cdot\alpha$ 是无穷小. 即 $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0}u(x)\alpha(x)=0.}$

推论2 常数与无穷小量的乘积是无穷小量.

推论3 有限个无穷小量的乘积是无穷小量.

注意： 两个无穷小量的商不一定是无穷小量.

如 $x, 2x$，当 $x \to 0$ 时都是无穷小，但 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}$.

利用定理4可以求一类特殊极限.

例2 求 $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$

解 因为 $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$， 而 $|\sin x|\le 1$， 即 $\sin x$ 是有界函数，

由定理4可知， $\frac{1}{x}\sin x$ 是当 $x\to\infty$ 时的无穷小量.即

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$$

例3 求 $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)\arctan[\frac{1}{2}\ln(x^2+2x)]$

解 因为 $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$，又 $\left|\arctan[\frac{1}{2}\ln(x^2+2x)]\right|\le\frac{\pi}{2}$，

即 $\arctan[\frac{1}{2}\ln(x^2+2x)]$ 是有界函数，因此

$$\lim_{x\to 2}(x-2)\arctan[\frac{1}{2}\ln(x^2+2x)]=0.$$

二、无穷大量

1、无穷大量的概念

定义2 如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ 或x\to\infty}} f(x)=\infty$ ，

则称函数 $f(x)$为当$x\to x_0$ (或$x\to\infty$)时的无穷大量，简称无穷大.

特别地， 若数列$\{x_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$，

则称 $\{x_n\}$为当 $n\to\infty$时的无穷大量.

特殊情形： 正无穷大，负无穷大. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} f(x)=+\infty$ ，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} f(x)=-\infty$

例如 1) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-2)=\infty$， 所以函数 $x-2$ 为 $x\to\infty$ 时的无穷大.

2) $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{|x|}}=\infty$， 函数 $e^{\frac{1}{|x|}}$ 为 $x\to 0$ 时的无穷大.

3) $\ln n$， $\{3^n\}$， $\{3n^2+1\}$ 都是 $n\to\infty$ 时的无穷大.

由函数（或数列）极限的精确定义，易得：

2、无穷大量的精确定义：

（1）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty \Longleftrightarrow \forall M>0$，$\exists\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有

$$|f(x)|>M.$$

（2）$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty \Longleftrightarrow \forall M>0$，$\exists X>0$, 使得当 $|x|>X$ 时，恒有

$$|f(x)|>M.$$

（3）$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty \Longleftrightarrow \forall M>0$，$\exists N(\in N^+)$,使得当$n>N$ 时，恒有

$$|x_n|>M.$$

注： 1）无穷大是个变量，绝对值很大的常数不是无穷大.

2）说一个函数是无穷大，必须指明自变量的变化趋势.

例如： $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$， 故 $\tan x$是 $x \to \frac{\pi}{2}$时的无穷大；

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\sin x} = \infty$， 故 $\frac{1}{\sin x}$ 是$x \to 0$时的无穷大.

3）无穷大与无界量是两个不同概念，无穷大必是无界量，但无界量未必是无穷大(见例5).

例4 证明 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x-1} = \infty$

证： 对 $\forall M > 0$，要使 $\left|\dfrac{1}{x-1}\right| = \dfrac{1}{|x-1|} > M$，只要 $|x-1| < \dfrac{1}{M}$.

取 $\delta = \dfrac{1}{M}$，当 $0 < |x-1| < \delta$ 时，有 $\left|\dfrac{1}{x-1}\right| > M$，

故 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x-1} = \infty$.

三、无穷小量与无穷大量的关系

定理5 (无穷大与无穷小的关系)　在自变量的同一变化过程中，如果 $f(x)$ 为无穷大量，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小量;反之，如果 $f(x)$ 为无穷小量，且 $f(x)\neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大量.

（定理5 :即在同一过程中,无穷大的倒数为无穷小;

恒不为零的无穷小的倒数为无穷大.）

证： 设 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\therefore \forall M>0, \exists X>0$, 使得当 $|x|>X$ 时，恒有 $|f(x)|>M$,

取 $M=\dfrac{1}{\varepsilon}$, $|f(x)|>M=\dfrac{1}{\varepsilon}$, 即 $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|<\varepsilon$, 故当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小.

反之，设 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$，则 $\forall M>0$, 取 $\varepsilon=\dfrac{1}{M}>0, \exists X>0$,

使得当 $|x|>X$ 时，恒有 $|f(x)|<\varepsilon$, 则 $|f(x)|<\varepsilon=\dfrac{1}{M}$,

由于 $f(x)\neq 0$, 从而 $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|>M$. 所以，当 $x\to\infty$ 时 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

（类似地可证明 $x\to x_0$ 时的情形.）

注： 因此无穷大问题都可归结为无穷小问题.

例5 证明函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{\sqrt{x}}$ 无界，但不是 $x\to 0^+$ 时的无穷大量.

证明（1）先证明函数无界. 取 $x_k=\frac{1}{(2k\pi)^2}(k\in z)$,

当 $k\to\infty$ 时, $x_k\to 0^+$ ⟹ 此时 $f(x_k)=(2k\pi)^4\to+\infty$,

因此对任意 $M>0$, $\exists k_0$, 当 $k>k_0$ 时， $f(x_k)>M$

故函数 $f(x)$ 无界.

（2）再证函数不是$x \to 0^+$ 时的无穷大.

取 $x_k = \dfrac{1}{(2k\pi + \frac{\pi}{2})^2}(k \in z)$， 当$k \to \infty$时，$x_k \to 0^+$

⇨ 此时 $f(x_k) = 0$， 则$\lim\limits_{\substack{k\to\infty \\ x_k\to 0}} f(x_k) = 0$， 因此$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \neq \infty$，

即函数 $f(x)$不是 $x \to 0^+$ 时的无穷大.

四、内容小结

- **主要内容：** 两个定义；两个定理.
- **几点注意：**

(1) 无穷小（大）是变量，不能与很小（大）的数混淆，

零是唯一的无穷小的数；

(2) 无穷小与无穷大是相对于过程而言的；

(3) 无界变量未必是无穷大.

思考题：

1、 试问函数 $f(x)=x\sin x$ 是无界函数吗？

当 $x\to 0$时，$f(x)=x\sin x$ 是无穷大吗？ 说明理由.

【答：$f(x)=x\sin x$ 是无界函数，但不是 $x\to 0$时的无穷大量.】

2、求 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\arctan x}{4+e^{-x}}$ 【答：0 】

南京信息工程大学
Nanjing University of Information Science & Technology

没有任何问题可以象无穷那样深深的触动人的情感，很少有别的观念能像无穷那样激励理智产生富有成果的思想，然而也没有任何其他的概念能象无穷那样需要加以阐明。

——希尔伯特