第五单元　定积分　测试题及详解

一、填空题

1、$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(1+\sin^2 x)dx =$__________。

2、$\int_1^4 \sqrt{1+x}dx =$__________。

3、$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3 xdx =$ __________ 。

4、$\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx =$ _________ 。

5、$\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx =$ _________ 。

6、$\int_0^2 (1-x)^2 dx =$ _________ 。

7、设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $\frac{d}{dx}\int_{3x}^{\sin x^2} f(t)dt =$______________。

8、设 $f(x)$ 在 $[0,4]$ 上连续，且 $\int_1^{x^2-2} f(t)dt = x-\sqrt{3}$，则 $f(2)=$_______。

9、$\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} =$_____________。

10、$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x^2+1)} =$_____________。

11、$\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{2\sin x\cdot(x^4+3x^2+1)}{1+x^2}+\cos x\right]dx =$_____________。

12、$\int f'(x)dx =$___________，$\int_a^b f'(2x)dx =$_____________。

13、$\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}dx =$__________。

二、单项选择

1、$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right) =$（　　）

（A） 0 ；　（B） e ；　（C） ln2 ；　（D） 1 。

2、若 $f(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x \sin(t-x)dt$，则 $f(x)$ 等于（　　）。

（A）　$-\sin x$ ；　（B）　$-1+\cos x$ ；　（C）　$\sin x$；　（D） 0 。

3、定积分$\int_{-2}^{2}(|x|+x)e^{|x|}dx$的值是（　　）。

（A） 0 ；　　（B） 2 ；　　（C） 2e²+2；　　（D） $\dfrac{6}{e^2}$ 。

4、设$f''(u)$连续，已知$n\int_0^1 xf''(2x)dx=\int_0^2 tf''(t)dt$，则 n=（　　）

（A） 1/4 ；　　（B） 1 ；　　（C） 2 ；　　（D） 4 。

5、若连续函数$f(x)$满足关系式$f(x)=\int_0^{2x} f\left(\dfrac{t}{2}\right)dt+\ln 2$，则$f(x)$等于（　　）。

（A）$e^x\ln 2$；　　（B） $e^{2x}\ln 2$；　　（C） $e^x+\ln 2$；　　（D） $e^{2x}+\ln 2$。

6、设$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{2\sin x}{1+x^4}\cos^2 xdx$，$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos^2 x)dx$，

$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^4\sin^5 x-\cos^2 x)dx$则有（　　）

（A）$N<P<M$；　（B）$M<p<N$；（C）$N<M<P$；（D）$P<M<N$。

7、设$f(x)=x^2-\int_0^{x^2}\cos(t^2)dt, g(x)=\sin^{10}x$则当$x\to 0$时，$f(x)$是$g(x)$的

（A）等价无穷小；（B）同阶但非等价无穷小；（C）高阶无穷小；（D）低阶无穷小。

8、设$f(x)$是连续函数，且$F(x)=\int_{x^2}^{e^{-x}} f(t)dt$，则$F'(x)$等于（　　）

（A）$-e^{-x}f(e^{-x})-2xf(x^2)$；　（B）$-e^{-x}f(e^{-x})+f(x^2)$；

（C）$e^{-x}f(e^{-x})-2xf(x^2)$；　（D）$e^{-x}f(e^{-x})+f(x^2)$。

9、设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$f(x>0)$，则方程$\int_a^x f(t)dt+\int_b^x \dfrac{1}{f(t)}dt=0$ 在

开区间(a,b)内的根有（　）

（A）0 个；　（B）1 个；　（C）2 个；　（D）无穷多个。

10、设$f(x)$连续，则$\dfrac{d}{dx}\int_0^x tf(x^2-t^2)dt=$（　　　）

（A）$xf(x^2)$；　　（B）$-xf(x^2)$；　　（C）$2xf(x^2)$；　　（D）$-2xf(x^2)$。

11、设$f(x)$是连续函数，且$f(x)=x+2\int_0^1 f(t)dt$，则$f(x)=$（　　　）

（A）$x-1$；　　（B）$x+1$；　　（C）$-x+1$；　　（D）$-x-1$。

12、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}=$（　　　　）

（A）1；　　　　（B）0；　　　　（C）-1；　　　　（D）∞。

三、计算解答

1、计算下列各题

(1) $\int_0^2 x^3\sqrt{4-x^2}\,dx$；　　　　(2) $\int_{-1}^4 x\sqrt{|x|}\,dx$；

(3) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$；　　　　(4) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(x+\cos^2 x\right)^2 dx$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin^2 t dt}{x^3}$；　　　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \ln(1+t)dt}{x^2}$。

2、 已知 $f(x)$ 在 $x=12$ 的邻域内可导，且 $\lim\limits_{x\to 12} f(x)=0, \lim\limits_{x\to 12} f'(x)=997$，求

$$\lim_{x\to 12}\frac{\int_{12}^x\left[\int_t^{12} tf(u)du\right]dt}{(12-x)^3}。$$

3、设 $f(x)=\int_1^x \dfrac{\ln t}{1+t}dt$ 其中 $x>0$，求 $f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$。

4、证明方程 $\ln x=\dfrac{x}{e}-\int_0^\pi\sqrt{1-\cos 2x}dx$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有且仅有两个不同实根。

5、已知 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，且 $f(0)=0$，证明 $\left|\int_0^a f(x)dx\right|\le\dfrac{Ma^2}{2}$，其中

$M=\max\limits_{a\le x\le b}|f'(x)|$。

6、已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，定义 $g(x)=\int_0^x f(t)dt, h(x)=\int_0^x (x-t)f(t)dt, x\in[0,1]$，证明

$h(x)=\int_0^x g(u)du$，并求 $h''(x)$。

第五单元　定积分测试题详细解答

一、填空题

1、$\underline{\dfrac{3}{2}\pi}$　$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(1+\sin^2 x)dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(1+\dfrac{1-\cos 2x}{2})dx=\dfrac{3}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}dx-\dfrac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\cos 2xdx$

$=\dfrac{3}{2}\pi-\dfrac{1}{4}\sin 2x\,\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}=\dfrac{3}{2}\pi$。

2、$\underline{\frac{2}{3}(5^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{3}{2}})}$ $\int_1^4\sqrt{1+x}dx=\int_1^4(1+x)^{\frac{1}{2}}d(1+x)=\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4=\frac{2}{3}(5^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{3}{2}})$。

3、$\underline{\frac{5\sqrt{2}}{12}+\frac{2}{3}}$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3 xdx=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos^2 x)d\cos x=\frac{1}{3}\cos^3 x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{5\sqrt{2}}{12}+\frac{2}{3}$。

4、$\underline{\frac{\pi^2}{8}}$ $\int_0^1\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^1\arcsin xd(\arcsin x)=\frac{1}{2}(\arcsin x)^2\Big|_0^1=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2})^2=\frac{\pi^2}{8}$。

5、$\underline{\frac{1}{2}\ln 2}$ $\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx^2=\frac{1}{2}\ln|x^2+1|\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln 2$。

6、$\underline{\frac{2}{3}}$ $\int_0^2(1-x)^2dx=\int_0^2\left(x^2-2x+1\right)dx=\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right)_0^2=\frac{2}{3}$

7、$\underline{\frac{1}{4}}$ 两边求导：$2xf(x^2-2)=1$，令 $x=2$ 得 $f(2)=\frac{1}{4}$

8、$\underline{2}$ $\int_1^{e^3}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}=\int_1^{e^3}(1+\ln x)^{-\frac{1}{2}}d(1+\ln x)=2\sqrt{1+\ln x}\Big|_1^{e^3}=2$

9、$\underline{\frac{1}{2}\ln 2}$ $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x^2+1)}=\int_1^{+\infty}(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1})dx=\left[\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_1^{+\infty}$

$=\lim_{x\to+\infty}(\ln x-\ln\sqrt{x^2+1})-0+\frac{1}{2}\ln 2=\frac{1}{2}\ln 2$

10、$\underline{0}$ $\int_{-\pi}^{\pi}[\frac{2\sin x\cdot(x^4+3x^2+1)}{1+x^2}+\cos x]dx=2\int_0^{\pi}\cos xdx=2\sin x\Big|_0^{\pi}=0$

11、$\underline{f(x)+C}$ ，$\underline{\frac{1}{2}[f(2b)-f(2a)]}$

$\int f'(x)dx=f(x)+C$

$\int_a^b f'(2x)dx\xlongequal{令u=2x}\int_{2a}^{2b}f(u)\frac{1}{2}du=\frac{1}{2}f(u)\Big|_{2a}^{2b}=\frac{1}{2}[f(2b)-f(2a)]$

12、$\underline{4(\sqrt{2}-1)}$ 原式$=\int_0^{\pi}\sqrt{(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2})^2dx}=\int_0^{\pi}|\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}|dx$

$=\int_0^{\pi/2}(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2})dx+\int_{\pi/2}^{\pi}(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2})dx$

$$=2[(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})|_0^{\pi/2}-(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2})|_{\pi/2}^{\pi}]$$

$$=4(\sqrt{2}-1)$$

二、选择题

1、选（C）$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+n})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}})=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2$$

2、选（A）$f(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x\sin(t-x)dt=\frac{d}{dx}\left[-\cos(t-x)\right]_0^x=-\sin x$

3、选（C）$\int_{-2}^{2}(|x|+x)e^{|x|}dx=\int_{-2}^{0}0dx+\int_0^2 2xe^x dx=2xe^x|_0^2-2e^x|_0^2=2e^2+2$

4、选（D）$n\int_0^1 xf''(2x)dx$ 令 $2x=t$ 得 $n\int_0^2\frac{t}{2}f''(t)\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{n}{4}\int_0^2 tf''(t)dt$

$\therefore n=4$

5、选（B）两边求导 $f'(x)=2f(x)$

6、选（D） 因为$M=0,N=0+2\int_0^{\pi/2}\cos^2 xdx>0$，$P=0-2\int_0^{\pi/2}\cos^2 xdx<0$

7、选（B） $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}\underline{\underline{\frac{0}{0}}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-\int_0^{x^2}\cos(t^2)dt}{x^{10}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2-2\cos x^4}{10x^8}=\frac{\frac{x^8}{2}}{5x^8}=\frac{1}{10}$

8、选（A） $F'(x)=f(e^{-x})(e^{-x})'-f(x^2)(x^2)'=-e^{-x}f(e^{-x})-2xf(x^2)$。

9、选（B） 因为$F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x\frac{1}{f(t)}dt$，则有

$F(a)=\int_b^a\frac{1}{f(t)}dt<0$，$F(b)=\int_a^b f(t)dt>0$

又$F'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}>0$. 可知$F(x)$是严格增的，由介值定理知存在唯一的一个$\xi$，

使$F(\xi)=0$。

10、选（A）首先通过积分换元，把被积函数中的参变量x“解脱”出来：

$$\int_0^x tf(x^2-t^2)dt=-\frac{1}{2}\int_0^x f(x^2-t^2)d(x^2-t^2)\overset{x^2-t^2=u}{=\!=\!=\!=\!=}-\frac{1}{2}\int_{x^2}^0 f(u)du=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}f(u)du$$

由此，　原式$=\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dx}\int_0^{x^2} f(u)du = xf(x^2)$。

11、选（A）设$\int_0^1 f(t)dt = a$，则有恒等式$f(x)=x+2\int_0^1 f(t)dt$。为求常数a，两边取由 0 到 1 的积分得$a=\int_0^1 xdx+2a$，解得$a=-\int_0^1 xdx=-\dfrac{1}{2}$。由此，$f(x)=x-1$。

12、选（A）　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x^2}{1}=1$

三、计算解答

1、计算下列各题

（1）解：$\int_0^2 x^3\sqrt{4-x^2}dx$　令$x=2\sin t$　得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 8\sin^3 t\cdot 2\cos t\cdot 2\cos tdt = 32\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 x-1)\cos^2 td\cos t$$

$$=32(\frac{1}{5}\cos^5 x-\frac{1}{3}\cos^3 t)_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{64}{15}$$

（2）解：$\int_{-1}^4 x\sqrt{|x|}dx=\int_{-1}^1 x\sqrt{|x|}dx+\int_1^4 x^{\frac{3}{2}}dx=\dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_1^4=\dfrac{62}{5}$

（3）解：$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\arcsin xd\sqrt{1-x^2}=-\sqrt{1-x^2}\arcsin x\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}+x\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$

$$=1-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$$

（4）解：$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x+\cos^2 x)^2dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2+2x\cos^2 x+\cos^4 x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x^2+\cos^4 x)dx$

$$=\frac{2}{3}x^3\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1+\cos 2x}{2})^2dx=\frac{\pi^3}{12}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)dx$$

$$=\frac{\pi^3}{12}+\frac{1}{2}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{4}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{8}\sin 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^3}{12}+\frac{3\pi}{8}$$

（5）解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin^2 tdt}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$。

（6）解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \ln(1+t)dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2(1+x)}=\dfrac{1}{2}$。

2、解：$\lim\limits_{x\to 12}\dfrac{\int_{12}^{x}[\int_{t}^{12}tf(u)du]dt}{(12-x)^3}=\lim\limits_{x\to 12}\dfrac{x\int_{x}^{12}f(u)du}{-3(12-x)^2}=\lim\limits_{x\to 12}\dfrac{x\int_{12}^{x}f(u)du}{3(12-x)^2}$

$=\lim\limits_{x\to 12}\dfrac{\int_{12}^{x}f(u)du+xf(x)}{-6(12-x)}=\lim\limits_{x\to 12}\dfrac{f(x)+f(x)+xf'(x)}{6}$

$=\dfrac{12\times 997}{6}=1994$

3、解：$\because f(\dfrac{1}{x})=\int_{1}^{\frac{1}{x}}\dfrac{\ln t}{1+t}dt \overset{t=\frac{1}{u}}{=\!=\!=} \int_{1}^{x}\dfrac{\ln\frac{1}{u}}{1+\frac{1}{u}}\cdot(-\dfrac{1}{u^2})du$

$=\int_{1}^{x}\dfrac{\ln u}{u^2+u}du=\int_{1}^{x}\dfrac{\ln u}{u(u+1)}du=\int_{1}^{x}\dfrac{\ln t}{t(t+1)}dt$

$\therefore f(x)+f(\dfrac{1}{x})=\int_{1}^{x}\dfrac{\ln t}{1+t}dt+\int_{1}^{x}\dfrac{\ln t}{t(t+1)}dt=\int_{1}^{x}[\dfrac{\ln t}{1+t}+\dfrac{\ln t}{t(t+1)}]dt$

$=\int_{1}^{x}\dfrac{\ln t}{t}dt=\dfrac{1}{2}\ln^2 t\,|_1^x=\dfrac{1}{2}\ln^2 x$

4、解：$\because \int_{0}^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx=\int_{0}^{\pi}\sqrt{2\sin^2 x}dx=\sqrt{2}\int_{0}^{\pi}\sin xdx=-\sqrt{2}\cos x\,|_0^{\pi}=2\sqrt{2}$

令 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}+2\sqrt{2}$ 则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e}=\dfrac{e-x}{ex}$

令 $f'(x)=0\Rightarrow$ 驻点 $x=e$

在 $(0,e)$ 内，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调增加. 在 $(e,+\infty)$ 内 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调减少

又 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x-\dfrac{x}{e})=-\infty$ $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x-\dfrac{x}{e})=-\infty$

而 $f(e)=2\sqrt{2}>0$

$\therefore f(x)$ 在 $(0,e)$ 内有且仅有一个零点，在 $(e,+\infty)$ 内有且仅有一个零点

即 方程 $\ln x=\dfrac{x}{e}-\int_{0}^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且仅有两个不同实根

5、解：证：$|\int_{0}^{a}f(x)dx|=|\int_{0}^{a}[f(0)+f'(\xi)x]dx|$ 其中 $\xi\in(0,x)$

$=|\int_{0}^{a}f'(\xi)xdx|=|\dfrac{x^2}{2}f'(\xi)\,|_0^a|=|\dfrac{a^2}{2}f'(\xi)|\le\dfrac{Ma^2}{2}$

6、解：$\because h(x)=x\int_{0}^{x}f(t)dt-\int_{0}^{x}tf(t)dt$

$\therefore h'(x)=\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=g(x)$

$\therefore \int_0^x h'(x)dx=\int_0^x g(x)dx$

即 $h(x)|_0^x=\int_0^x g(u)du \quad \Rightarrow \quad h(x)-h(0)=\int_0^x g(u)du$

而 $h(0)=0 \quad \therefore h(x)=\int_0^x g(u)du \quad h''(x)=g'(x)=f(x)$