专题 2-1 一元函数微分学

第一部分 典型例题

1. 利用导数定义解题

例 1. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内有连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x^2}+\dfrac{f(x)}{x}\right)=2$，求 $f(0)$ 及 $f'(0)$.

【$f(0)=-1, f'(0)=2$】

例 2. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2\mathrm{e}^{n(x-1)}+ax+b}{1+\mathrm{e}^{n(x-1)}}$，求 $f(x)$，并讨论 $f(x)$ 的连续性与可导性.

【$f(x)=\begin{cases} x^2, & x>1 \\ \dfrac{1}{2}(a+b+1), & x=1 \\ ax+b, & x<1 \end{cases}$，当 $a+b=1$ 时，$f(x)$ 在 $x=1$ 处连续；

当且仅当 $a=2,b=-1$ 时，$f(x)$ 在 $x=1$ 处可导】

例 3. 设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处可微，且满足 $2f\left(2+x\right)+f\left(2-x\right)=3+2x+o(x)$，这里 $o(x)$ 表示比 x 高阶的无穷小（当 $x\to 0$ 时），试求微分 $\mathrm{d}f(x)\big|_{x=2}$，并求曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(2,f(2)\right)$ 处的切线方程.

【$\mathrm{d}f(x)\big|_{x=2}=2\mathrm{d}x$，$2x-y-3=0$】

2. 求高阶导数

例 4. 求 $y=\arctan x$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数.

【 $y^{(n)}(0)=\begin{cases} 0, & n\text{为偶数} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot(n-1)!, & n\text{为奇数} \end{cases}$ 】

例 5. 已知 $f(x)=x^2\ln(1-x)$，则当 $n>2$ 时，$f^{(n)}(0)=$ ____________.

【 $f^{(n)}(0)=-\dfrac{n!}{n-2}$ 】

例 6. 设 $f(x)=\dfrac{x^n}{x^2-1}\ (n=1,2,3,\cdots)$，求 $f^{(n)}(x)$.

【 $f^{(n)}(x)=\dfrac{n!}{2}\left[\dfrac{(-1)^n}{(x-1)^{n+1}}-\dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}\right],n=1,2,3,\cdots$ 】

3. 与微分中值定理有关的证明题

例 7. 设函数 $f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，在 $\left(a,b\right)$ 内可导，且有 $f(a)=a$，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(b^2-a^2\right)$，求证：在 $\left(a,b\right)$ 内至少有一点 ξ，使得 $f'(\xi)=f(\xi)-\xi+1$.

例 8. 设函数 $f(x)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上连续，在 $\left(0,1\right)$ 内可导，且有 $f(0)=0, f(1)=1$，若 $a>0,b>0$，求证：$\exists\xi\in\left(0,1\right),\eta\in\left(0,1\right),\xi\neq\eta$，使得 (1) $\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b$； (2) $af'(\xi)+bf'(\eta)=a+b$.

例 9. 设函数 $f(x)$ 在 $\left[-2,2\right]$ 上二阶可导，且 $\left|f(x)\right|\le 1$，又 $\left[f(0)\right]^2+\left[f'(0)\right]^2=4$，试证：在 $\left(-2,2\right)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f\left(\xi\right)+f''\left(\xi\right)=0$.

例 10. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续可导，$f(0)=1$，且对一切 $x\geq 0$ 有 $\left|f(x)\right|\leq \mathrm{e}^{-x}$，求证：$\exists\xi\in(0,+\infty)$，使得 $f'\left(\xi\right)=-\mathrm{e}^{-\xi}$.

例 11. 设函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续可导，且 $f'(x)=\dfrac{1}{1+f^2(x)}\left[\sqrt{\dfrac{1}{x}}-\sqrt{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}\right]$，

证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在.

例 12. 当 $x\geq 0$ 时，求证：$\exists\theta(x)\in(0,1)$，使得 $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$，并求 $\lim\limits_{x\to0^+}\theta(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)$.

4. 利用泰勒公式证明

例 13. 设函数 $f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上二阶可导，$f'(a)=0, f'(b)=0$，求证：$\exists \xi \in \left(a,b\right)$，使得 $\left|f''\left(\xi\right)\right| \geq 4\dfrac{\left|f(b)-f(a)\right|}{(b-a)^2}$.

例 14. 设函数 $f(x)$ 的二阶导数 $f''(x)$ 在 $\left[2,4\right]$ 上连续，且 $f(3)=0$，试证：在 $(2,4)$ 上至少存在一点 ξ，使得 $f''\left(\xi\right)=3\int_2^4 f(t)\mathrm{d}t$.

例 15. 设函数 $f(x)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上二阶可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$f(x)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上的最小值等于 -1，试证至少存在一点 $\xi \in (0,1)$，使得 $f''(\xi) \geq 8$.

例 16. 设函数 $f(x)$ 三阶可导，且 $f'''(a)\neq 0$，

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''[a+\theta(x-a)]}{2}(x-a)^2\ (0<\theta<1),$$

证明：$\lim\limits_{x\to a}\theta=\dfrac{1}{3}$.

【$\lim\limits_{x\to 0^+}\theta(x)=\dfrac{1}{4}$，$\lim\limits_{x\to +\infty}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$】

5. 证明等式或不等式

例 17. 设 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$，证明：$\dfrac{4}{\pi^2}<\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\tan^2 x}<\dfrac{2}{3}$.

例 18. 证明：当 $0<x<\pi$ 时，有 $\sin\dfrac{x}{2}>\dfrac{x}{\pi}$.

例 19. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上二阶可导，$f(0)=1, f'(0)\le 1, f''(x)<f(x)$，求证：$x>0$ 时，$f(x)<\mathrm{e}^{x}$.

例 20. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可微，$f(0)=0$，且存在常数 $A>0$，使得 $|f'(x)|\le A|f(x)|$ 在 $[0,+\infty)$ 上成立，试证明在 $(0,+\infty)$ 上有 $f(x)\equiv 0$.

6. 导数的几何应用（求极值、单调性、凹凸性、拐点与渐近线）

例 21. 设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x)+\left[f'(x)\right]^2=x$，且 $f'(0)=0$，则（　　　）

A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值　　　　B. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

C. 点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

D. $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，点 $(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

【C】

例 22. 设常数 $k>0$，函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{\mathrm{e}}+k$ 在 $(0,+\infty)$ 内零点的个数为（　　　）

A. 3　　　B. 2　　　C. 1　　　D. 0.

【B】

例 23. 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}-\dfrac{x^{3}}{6}$，问 $f(x)=0$ 有几个实根？并说明理由.

【无实根】

例 24.　设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内具有直到 n 阶的连续导数，且 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$，而 $f^{(n)}(x_0)\neq 0$，试证：

(1) 当 n 为偶数，且 $f^{(n)}(x_0)>0$，则 $f(x_0)$ 为极小值；当 n 为偶数，且 $f^{(n)}(x_0)<0$，则 $f(x_0)$ 为极大值；(2) 当 n 为奇数时，$f(x_0)$ 不是极值.

第二部分 强化训练

1. 设命题：若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}=a\ (a\in\mathrm{R})$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=a$.

判断该命题是否成立. 若成立，给出证明；若不成立，举一反例并作出说明.（2016 年江苏省赛）

2. 已知函数 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶连续导数，且 $\varphi(0)=0$. 问：当常数 a,b 为何值时，函数

$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x)}{x}, x>0\\ ax+b, x\le 0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导？并讨论 $f'(x)$ 的连续性.

3. 设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 的某邻域内可微，且满足 $f(1+x)-3f(1-x)=4+2x+o(x)$，其中 $o(x)$ 是当 $x\to 0$ 时 x 的高阶无穷小，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为____________.

（第 14 届年国赛预赛补赛）

4. 设函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}\ (x>0)$，证明 $f(x)=\mathrm{e}+Ax+Bx^2+o(x^2)\ (x\to 0^+)$，并求 $f'(0)$，$f''(0)$.

5. 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}\displaystyle\int_0^x\frac{t^{2023}}{1+t^2}\mathrm{d}t$，正整数 $t\le 2023$，求导数 $f^{(n)}(0)$.　　（第 14 届国赛预赛补赛）

6. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内二阶可导，且 $f''(x)\neq 0$.

(1) 证明对 $\forall x\neq 0$，存在唯一 $\theta(x)\ (0<\theta(x)<1)$，使得 $f(x)=f(0)+xf'(x\theta(x))$；

(2) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)$.

7. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$，

证明：(1) 存在 $x_0\in(0,1)$ 使得 $f(x_0)=2-3x_0$；

(2) 存在 $\xi,\eta\in(0,1)$，且 $\xi\neq\eta$，使得 $[1+f'(\xi)][1+f'(\eta)]=4$.　　（第 12 届国赛预赛）

8. 已知函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\neq 0$，证明：在区间 $[0,1]$ 上存在三个不同的点 x_1,x_2,x_3，使得 $\dfrac{\pi}{8}\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{1+{x_1}^2}\int_0^{x_1}f(x)\mathrm{d}x+f(x_1)\arctan x_1\right]x_3$

$$=\left[\frac{1}{1+x_2{}^2}\int_0^{x_2} f(x)\mathrm{d}x+f(x_2)\arctan x_2\right]\left(1-x_3\right).$$ （第 9 届国赛决赛）

9. 设 $\alpha>0$，函数 $f(x)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上有二阶导数，$f(0)=0$，若 $f(x)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上非负且不恒为零，证明：存在 $\xi\in\left(0,1\right)$，使得 $\xi f''\left(\xi\right)+\left(\alpha+1\right)f'\left(\xi\right)>\alpha f\left(\xi\right)$.

10. 设 $0<x_k<\dfrac{\pi}{2}\left(k=1,2,\cdots,n\right)$，令 $x=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$，证明：$\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin x_k}{x_k}\le\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n$.

【参考答案】

1. 命题成立

2. $a=\dfrac{\varphi''(0)}{2},b=\varphi'(0)$，$f'(x)$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 内连续

3. $x-2y-5=0$

4. $f'(0)=-\dfrac{\mathrm{e}}{2}$，$f''(0)=\dfrac{11\mathrm{e}}{12}$

5. 0

6. $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$