巴塞尔问题：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = ?$

首先，我们已经有很多种方法证明这个级数是收敛的
所以跳过这一步

法一.（欧拉的方法）$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$$

下面我们记右侧的幂函数为 $f(x)$，因式分解得：

$$f(x) = A[(x-\pi)(x+\pi)][(x-2\pi)(x+2\pi)]\cdots$$

令 $x=0$ 得：$1 = A(-\pi^2)(-4\pi^2)\cdots$

$$\therefore A = \frac{1}{(-\pi^2)(-4\pi^2)\cdots}$$

对于下面的式子，我们比较 x^2 的系数：

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \cdots = A(x^2-\pi^2)(x^2-4\pi^2)\cdots = (1-\frac{x^2}{\pi^2})(1-\frac{x^2}{4\pi^2})\cdots$$

$$\therefore -\frac{1}{6} = -\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{4\pi^2} - \cdots$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

欧拉看到了我们没有看到的东西

物理学圣剑：比较系数法

法二（傅里叶级数）

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot e^{-jnt}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\cdot e^{-jnt}\,dt$$

$$= \frac{2\cdot(-1)^n}{n^2}, \quad n \neq 0$$

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\,dt$$

$$= \frac{\pi^2}{3}$$

$$f(\pi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)e^{jn\pi}$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)\cdot(-1)^n$$

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\cdot(-1)^n}{n^2}(-1)^n$$

$$= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{n^2}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

经典方法

法三：（简单的微积分）费曼积分法

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\cdot\int_0^1 x^{n-1}\,dx$$

$$= \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\cdot x^{n-1}\,dx$$

$$= -\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx$$

下面我们求 $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx$

令 $f(\alpha) = \int_0^1 \arctan(\frac{\cos x - \alpha}{\sin x})\,dx$

分别考察 $f(0)$，$f(1)$，$\frac{df(\alpha)}{d\alpha}$

代入 $f(1) - f(0) = \int_0^1 \frac{df(\alpha)}{d\alpha}\,d\alpha$ 即可

只需要极低的思维含量与太基础的知识即可完成
相应的代价是爆炸的计算量（级数的和函数、费量含参积分笔者不再计算）

法四（Wallis公式）

令 $A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}x\,dx$，$B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^{2n}x\,dx$

$$A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x)'\cos^{2n}x\,dx = x\cdot\cos^{2n}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot 2n\cdot\cos^{2n-1}x\,(-\sin x)\,dx$$

$$= 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^{2n-1}x\cdot\sin x\,dx = n\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2)'\cdot\cos^{2n-1}x\cdot\sin x\,dx$$

$$= n\left(x^2\cdot\cos^{2n-1}x\cdot\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2[x^2(2n-1)\cdot\cos^{2n-2}x\cdot(-\sin^2 x) + \cos^{2n-1}x\cdot\cos x]\,dx\right)$$

$$= n\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cdot(2n-1)\cos^{2n-2}x\cdot(1-\cos^2 x)\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\cos^{2n}x\,dx\right)$$

$$= n\left((2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^{2n-2}x\,dx - 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cdot\cos^{2n}x\,dx\right)$$

$$= n\left((2n-1)\cdot B_{n-1} - 2n\cdot B_n\right)$$

又 $A_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$

$$\therefore \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2n^2}\cdot\frac{4}{\pi}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot n\left((n-1)B_{n-1} - 2nB_n\right)$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(\frac{(2n-2)!!}{(2n-3)!!}B_{n-1} - \frac{2n!!}{(2n-1)!!}B_n\right) \qquad (*)$$

由Jardon不等式：$\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$，$x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\therefore B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^{2n}x\,dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2}\sin x)^2\cos^{2n}x\,dx$$

$$= \frac{\pi^3}{8}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}$$

对 $(*)$ 式迭代求和：

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{4}{\pi}\left(B_0 - \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}B_n\right)$$

取 $n\to\infty$，易证 $\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}B_n \to 0$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

解法来自京大，巧妙的配凑