《线性代数》期中练习卷 1

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分)

1. 若排列 1 2 7 4 i 5 6 k 9 是偶排列，则 i 和 k 分别为 <u>8，3</u>.

2．设 $\boldsymbol{A}$ 是 4×3 的矩阵，且 $R(\boldsymbol{A})=2$，而 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&3\end{pmatrix}$，则 $R(\boldsymbol{AB})=$ <u>2</u>.

3．设方阵满足 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵，则 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\underline{\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})}$.

4. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=3$，则 $|2\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}|=\underline{\frac{2^{2n-1}}{3}}$.

5. 已知 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&-1&t\\3&1&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}$ 是三阶非零矩阵，且 $\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{O}$，则 $t=\underline{-1}$.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵，则必有　　　　　　　　　　　　(D)

(A) $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$；　　(B) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$；

(C) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$；　　(D) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$.

2. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵且 $(\boldsymbol{AB})^2=\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵，下列命题错误的是 (B)

(A) $(\boldsymbol{BA})^2=\boldsymbol{E}$；　(B) $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$；　(C) $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$；　(D) $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{BAB}$.

3．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{D}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 都是可逆方阵，则　　　　　　(A)

(A) $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}^{-1}&-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{C}^{-1}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}^{-1}\end{pmatrix}$；　(B) $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}^{-1}&\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{C}^{-1}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}^{-1}\end{pmatrix}$；

(C) $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}^{-1}&\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}^{-1}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}^{-1}\end{pmatrix}$；　(D) $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}^{-1}&-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}^{-1}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}^{-1}\end{pmatrix}$.

4. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则必有 (C)

(A) $\boldsymbol{AP}_1\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{B}$；　(B) $\boldsymbol{AP}_2\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{B}$；　(C) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$；　(D) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

5. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，齐次方程组 $\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{0}$ 有非零解，则 $t=$ (B)

(A) -1；　(B) -3；　(C) 3；　(D) 1.

三、计算题（每小题 8 分，共 24 分）

1. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & b & a & b \\ a & b & 1 & b \\ b & 0 & b & a \\ b & a & b & 0 \end{vmatrix}$ 的值.

解：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & b & a & b \\ a & b & 1 & b \\ b & 0 & b & a \\ b & a & b & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & b & a & b \\ a-1 & 0 & 1-a & 0 \\ b & 0 & b & a \\ 0 & a & 0 & -a \end{vmatrix}=(a-1)a\begin{vmatrix} 1 & b & a & b \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ b & 0 & b & a \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=(a-1)a\begin{vmatrix} 1 & 2b & a & b \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ b & a & b & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-(a-1)a\begin{vmatrix} 1 & 2b & a \\ 1 & 0 & -1 \\ b & a & b \end{vmatrix}$$

$$=-(a-1)a\begin{vmatrix} 1 & 2b & a+1 \\ 1 & 0 & 0 \\ b & a & 2b \end{vmatrix}=(a-1)a\begin{vmatrix} 2b & a+1 \\ a & 2b \end{vmatrix}=(a-1)a[4b^2-(a+1)a].$$

2. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,2,3)$，$\boldsymbol{b}=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$，设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$，求 $\boldsymbol{A}^n$.

解： 由 $\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}=3$，得 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}})\dots(\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{b}=3^{n-1}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$.

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}，则\ \boldsymbol{A}^n=3^{n-1}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}.$$

3. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&2&1&0\\7&1&14&7&1\\0&5&1&4&6\\2&1&1&-10&-2\end{pmatrix}$，求 $R(\boldsymbol{A})$.

解：
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&2&1&0\\7&1&14&7&1\\0&5&1&4&6\\2&1&1&-10&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&1&0\\0&1&0&0&1\\0&5&1&4&6\\0&1&-3&-12&-2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&2&1&0\\0&1&0&0&1\\0&0&1&4&1\\0&0&-3&-12&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&1&0\\0&1&0&0&1\\0&0&1&4&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

故 $R(\boldsymbol{A})=3$.

四、(本题满分 12 分) 设 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-2&0\\1&-2&0\\-1&2&0\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{X}$.

解： 由 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 得 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}$，

$$\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}1&-2&0\\1&-1&0\\-1&2&1\end{vmatrix}=1\neq0$$，所以 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 可逆，则 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}$.

计算得: $$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix}-1&2&0\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

所以 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

五、(本题满分 12 分) 已知五阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}=27.$$

求 $A_{41}+A_{42}+A_{43}$ 和 $A_{44}+A_{45}$，其中 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式.

解： $\begin{cases} A_{41}+A_{42}+A_{43}+2(A_{44}+A_{45})=27 \\ 2(A_{41}+A_{42}+A_{43})+(A_{44}+A_{45})=0 \end{cases}$,

得 $\begin{cases} A_{41}+A_{42}+A_{43}=-9 \\ A_{44}+A_{45}=18 \end{cases}$.

六、(本题满分 12 分) 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4=1 \\ 4x_1+9x_2+16x_3+25x_4=1 \\ 8x_1+27x_2+64x_3+125x_4=1 \end{cases}.$$

解： 方程组的系数行列式为范德蒙行列式，故

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 \end{vmatrix}=12\neq 0$$

由克莱姆法则知，方程组有唯一解.

D_1,D_2,D_3,D_4 均为范德蒙行列式，计算可得

$$D_1=48, D_2=-72, D_3=48, D_4=-12.$$

$$x_1=\frac{D_1}{D}=4,\ x_2=\frac{D_2}{D}=-6,\ x_3=\frac{D_3}{D}=4,x_4=\frac{D_4}{D}=-1.$$

七、(本题满分 10 分) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{4\times 4}$，$A_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式，且 $a_{11}\neq 0$，

$A_{ij}=-a_{ij}\,(i,j=1,2,3,4)$，求证：$|\boldsymbol{A}|=-1$.

证明： 由 $A_{ij}=-a_{ij}$ 得 $\boldsymbol{A}^*=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

而 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，则 $-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$.

两边取行列式得：$(-1)^4|\boldsymbol{A}|^2=|\boldsymbol{A}|^4$，则 $|\boldsymbol{A}|=0$或者$|\boldsymbol{A}|=\pm 1$.

另一方面，由题设知，

$$|\boldsymbol{A}|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+a_{14}A_{14}=-(a_{11}{}^2+a_{12}{}^2+a_{13}{}^2+a_{14}{}^2)<0$$

故 $|\boldsymbol{A}|=-1$.

注：有的题目有多种解法，以上解答仅供参考.