高等数学 I-1 综合练习 7

一、填空题

1. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^{2x}=$ $\underline{e^8}$.

2. 已知 $y=y(x)$ 是由方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 确定的, 则 $y''(0)=$ $\underline{-2}$.

3. $y=\cos^2 x$, 则 $y^{(n)}=$ $\underline{2^{n-1}\cdot\cos(2x+\frac{n}{2}\pi)}$.

4. $f(x)=\begin{cases}ax+1, & x>1,\\ b+2\cos\dfrac{\pi x}{2}, & x\le 1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处可导, 则 $a=$ $\underline{-\pi}$, $b=$ $\underline{1-\pi}$.

5. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续可微, 且 $f(a)=f(b)=0$, $\int_a^b f(x)\,dx=1$, 则 $\int_a^b xf'(x)dx=$ $\underline{-1}$.

1∞型.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{4}}\right]^{\frac{4}{x-2}\cdot 2x}=e^8$

2. $e^y\cdot\frac{dy}{dx}+6y+6x\cdot\frac{dy}{dx}+2x=0\Rightarrow e^y\cdot\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dy}{dx}+e^y\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+6\frac{dy}{dx}+6\frac{dy}{dx}+6x\frac{d^2y}{dx^2}+2=0$

其中 $x=0$ 时, $y=0\Rightarrow y'(0)=0$

$y''(0)=-2$

3. $y=\frac{1+\cos 2x}{2}$

而 $(\cos 2x)^{(n)}=\cos(2x+\frac{n\pi}{2})\cdot 2^n$

连续. $\lim\limits_{x\to1^+}(ax+1)=\lim\limits_{x\to1^-}(b+2\cos\frac{\pi x}{2})$ 可导. $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{ax+1-b}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{b+2\cos\frac{\pi x}{2}-b}{x-1}$

$=\int_a^b x\,df(x)$

$=xf(x)\big|_a^b-\int_a^b f(x)\,dx$

二、选择题

1. $x=0$ 是函数 $f(x)=\dfrac{x}{\tan x}$ 的（ B ）.

   (A) 跳跃间断点; (B) 可去间断点; (C) 无穷间断点; (D) 连续点.

   $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\tan x}=1$

2. 当 $x\to0$ 时, $1-\cos 2x$ 是 x^2 的（ A ）.

   (A) 同阶无穷小, 但不等价; (B) 低阶无穷小;

   (C) 等价无穷小; (D) 高阶无穷小.

   $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac12(2x)^2}{x^2}=2$

3. 若 $F(x),G(x)$ 均为 $f(x)$ 的原函数, 则 $F'(x)-G'(x)=$（ B ）.

   (A) $f(x)$; (B) 0; (C) $F(x)$; (D) $f'(x)$.

   $\int f(x)dx=F(x)+C_1$
   $=G(x)+C_2$

4. 设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x)+[f'(x)]^2=x$, 且 $f'(0)=0$, 则（ C ）.

   (A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值; (B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值;

   (C) 点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点;

   (D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, 点 $(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

   $f''(0)=0$

   $f''(x)=x-[f'(x)]^2$

   $\Rightarrow f'''(x)=1-2f'(x)\cdot f''(x)$

   $f'''(0)=1$

5. 下列反常积分发散的是（ C ）.

   (A) $\int_0^{+\infty}e^{-x}dx$; (B) $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; (C) $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$; (D) $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}$.

   $\int_{-1}^0\frac1x dx+\int_0^1\frac1x dx$

   $\int_{-1}^0\frac1x dx=[\ln|x|]_{-1}^0=\lim\limits_{x\to0^-}\ln|x|-0$ 不存在.

三、解答题

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sin^2 x}$;

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot\frac12x^2}{x^3}\cdot\dfrac12=\dfrac14$

注：严格来说，此题应有证明 $\int_0^{+\infty}(\arctan t)^2 dt = +\infty$，涉及到比较审敛法.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x(\arctan t)^2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+1}}$；（$\frac{\infty}{\infty}$型）

$$\overset{洛}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\arctan x)^2}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\arctan x)^2}{\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}}}$$

$$=\frac{\pi^2}{4}$$

3. $\int\dfrac{1}{x^5+x}\,\mathrm{d}x$；

$$=\int\frac{1}{x(x^4+1)}dx=\int\frac{x^3}{x^4(x^4+1)}dx$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^4+1}\right)dx^4$$

$$=\frac{1}{4}\left(\ln x^4-\ln(x^4+1)\right)+C$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{x^4}{x^4+1}+C$$

4. $\int_0^1\arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

令 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2$

$$原式=\int_0^1\arctan t\,dt^2$$

$$=t^2\cdot\arctan t\Big|_0^1-\int_0^1 t^2\cdot\frac{1}{1+t^2}dt$$

$$=\frac{\pi}{4}-\left[t-\arctan t\right]_0^1$$

$$=\frac{\pi}{2}-1$$

5. $\int_{-1}^1 x^2\left(\dfrac{x\cos x}{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)\mathrm{d}x$.

奇

$$=0+\int_{-1}^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$=2\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx \quad 令\ x=\sin t$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cdot\cos t\,d\sin t=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\sin^2 2t\,dt$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)\,dt=\frac{1}{4}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{8}$$

四、设 $x_1=10, x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}\,(n=1,2,\cdots)$，试证数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并求此极限.

由题设可知 $x_n>0,\ n=1,2,\cdots$

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{6+x_n}-\sqrt{6+x_{n-1}}$$

$$=\frac{x_n-x_{n-1}}{\sqrt{6+x_n}+\sqrt{6+x_{n-1}}}$$

$\therefore\ x_{n+1}-x_n$ 与 x_n-x_{n-1} 同号

$x_2-x_1=\sqrt{16}-10<0$

假设 $x_n-x_{n-1}<0$

则 $x_{n+1}-x_n<0$

数学归纳法

$\therefore\ \{x_n\}\downarrow$ 且有下界 0.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$

$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$ 两边同时取极限

$A=\sqrt{6+A}$

$A=3$ 或 $A=-2$（舍去）

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$

五、 设 $f(x)=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\arctan\frac{1}{x}(x<0)$, 求 $f(x)$ 的极值及曲线 $y=f(x)$ 的凹区间.

$f'(x)=\frac{x+1}{1+x^2}$, $f''(x)=\frac{1-2x-x^2}{(1+x^2)^2}$

令 $f'(x)=0 \Rightarrow x=-1$ $(x<0)$

$f''(x)=0 \Rightarrow x=-1-\sqrt{2}$

又∵ $f''(-1)>0$ 得极小值 $f(-1)=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}$

$-1-\sqrt{2}<x<0$ 时 $f''(x)>0$ 得凹区间 $(-1-\sqrt{2},0)$

六、 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 在 $x=0$ 的某去心邻域内 $f(x)\neq 0$, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$, $f''(0)=4$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$. ($1^\infty$型)

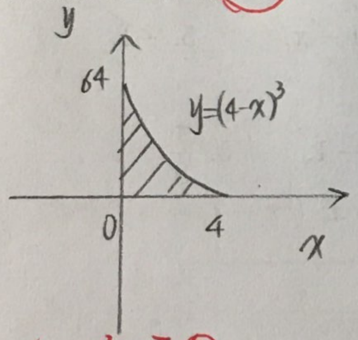
$$\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{x}{f(x)}}\right]^{\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}}=e^2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}\overset{洛}{=}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}\overset{洛}{=}\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2}\overset{f''连续}{=}\frac{1}{2}f''(0)=2$$

其中 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0 \Rightarrow f(0)=0$, $f'(0)=0$.

(分母极限为0,商极限存在 则分子极限一定为0.)

七、 求由曲线 $y=(4-x)^3$ 与坐标轴所围成的平面图形的面积, 并求此平面图形绕 x 轴旋转而成的立体的体积.



$$A=\int_0^4(4-x)^3dx=-\frac{1}{4}(4-x)^4\Big|_0^4=64$$

$$V_x=\pi\int_0^4\left[(4-x)^3\right]^2dx=\pi\int_0^4(4-x)^6dx$$

$$=-\frac{\pi}{7}(4-x)^7\Big|_0^4=\frac{4^7}{7}\pi$$

$y=(4-x)^3$ 作图.

$y'=-3(x-4)^2$

$y''=-6(x-4)$

$x=4$ 时 $y'=y''=0$

$x\neq 4$ 时 $y'<0$ $y\downarrow$

$x<4$ 时 $y''>0$ y为凹

$x>4$ 时 $y''<0$ y为凸

八、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $\int_0^{\frac{2}{\pi}} \mathrm{e}^{f(x)} \arctan x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}$, $f(1)=0$. 证明: $\exists\, \xi \in [0,1]$, 使得 $(1+\xi^2)\, f'(\xi) \arctan \xi = -1$.

令 $F(x) = e^{f(x)} \arctan x$，则 $F'(x) = e^{f(x)}\left(f'(x) \arctan x + \frac{1}{1+x^2}\right)$

$$\int_0^{\frac{2}{\pi}} e^{f(x)} \arctan x \, dx \underset{\text{积分中值定理}}{=} e^{f(\eta)} \arctan \eta \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{1}{2} \Rightarrow F(\eta) = \frac{\pi}{4} \quad \eta \in [0, \tfrac{2}{\pi}]$$

$F(1) = e^{f(1)} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

$F(x)$ 在 $[\eta,1]$ 上连续，在 $(\eta,1)$ 内可导 由罗尔定理.

$\exists\, \xi \in (\eta,1) \subset [0,1]$，使 $F'(\xi) = 0$

即 $(1+\xi^2) f'(\xi) \arctan \xi = -1$

参考答案 7

一、填空题

1. e^8. 2. -2. 3. $2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$. 4. $-\pi, 1-\pi$. 5. -1.

二、选择题 B. A. B. C. C.

三、1. $\frac{1}{4}$. 2. $\frac{\pi^2}{4}$. 3. $\ln|x| - \frac{1}{4}\ln|x^4+1| + C$. 4. $\frac{\pi}{2}-1$. 5. $\frac{\pi}{8}$.

四、提示：证明数列 $\{x_n\}$ 单调递减有下界. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$.

五、函数无极大值, 极小值为 $f(-1) = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}$;

曲线 $y=f(x)$ 的凹区间为 $(-1-\sqrt{2}, 0)$.

六、e^2. 七、$64\pi, \frac{4^7}{7}$.

八、提示: 设 $F(x) = \mathrm{e}^{f(x)}\arctan x$, 应用积分中值定理和罗尔定理.