专题1 函数 极限 连续

第一部分 典型例题

1. 函数极限

例1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{t^{2n+1}}{2^n(2n+1)!}\mathrm{d}t-\dfrac{x^2}{2}}{x^3\left(\sqrt[3]{1+x}-\mathrm{e}^x\right)}=$________________.

【$\dfrac{1}{32}$】

例2 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\int_x^{x+1}\dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t+\sin t+x}}$.

【$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$】

例 3 设 $\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$，求 $\lim_{x \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \sqrt{k+x}$.

【 0 】

例 4 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，试证：对一切 x 满足 $f(2x) = f(x)\mathrm{e}^{x}$ 的充分必要条件是 $f(x) = f(0)\mathrm{e}^{x}$.

【提示：迭代取极限】

例 5 设 $f(x)$， $g(x)$ 在点 $x=0$ 附近有定义， $f'(0)=a$，且 $\left|g(x)-f(x)\right| \le \dfrac{\ln(1+x^2)}{2+\cos x}$，

$g'(0) =$ ____________.

【 a 】

例 6 设 $f(x)=a_1\ln(1+x)+a_2\ln(1+2x)+\cdots+a_n\ln(1+nx)$，其中 $a_k(k=1,2,\cdots,n)$ 为实常数；如果当 $x\in[0,1]$ 时，$\left|f(x)\right|\le\ln\left(1+x\right)$. 试证：$\left|a_1+2a_2+\cdots+na_n\right|\le 1$.

【提示：极限的保号性】

2. 数列极限

例 7 记 $a_n=\int_0^{+\infty}x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$，$n=0,1,2,\cdots$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{a_k}-\dfrac{1}{a_{k+1}}\right)=$__________.

【1】

例 8 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\pi\sqrt{1+4n^2}\right)^n$.

【$\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$】

例 9 设 $x_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1+k}{n}}}{n+\dfrac{k^2}{n^2}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【e−1】

例 10 设 $f(x)$ 是周期为 $T(T>0)$ 的连续函数，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$.

【提示：利用夹逼定理】

例 11 非负连续函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调减少，$a_n=\sum_{i=1}^{n} f(i)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x$，$n=1,2,\cdots$，

证明：数列 $\{a_n\}$ 收敛.

【提示：利用单调有界定理】

例 12 设 $x_1>0$，$x_{n+1}=x_n{}^2+x_n$, $n=1,2,\cdots$，试计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\cdots+\frac{1}{x_n+1}\right)$.

【 $\frac{1}{x_1}$ **】**

例 13 设数列$\left\{x_n\right\}$由以下关系式确定：$x_0=1$，$x_n=x_{n-1}+\dfrac{1}{x_{n-1}}$，$n\geq 1$．证明该数列发散，且$x_n\sim\sqrt{2n}$（$n\to\infty$）.

【提示：利用反证法和夹逼定理】

例 14 设 $x_1=\sqrt{5}$， $x_{n+1}=x_n^2-2$， $n\ge 1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1x_2\cdots x_n}{x_{n+1}}$.

【1】

例 15 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{\frac{n}{2}}}{n!}$.

【0】

例 16　(1) 设 $x_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\ln(1+n)$，讨论 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$ 的敛散性并证明 $\{x_n\}$ 收敛；

(2) 求 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$.

【收敛，1】

例 17 设数列 $\{x_n\}$ 满足关系式：$x_{n+1}=f(x_n)$，其中函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足：

(1) $a\le f(x)\le b$，$\forall x\in[a,b]$；

(2) $\forall x_1,x_2\in[a,b]$，恒有 $\left|f(x_2)-f(x_1)\right|\le\alpha\left|x_2-x_1\right|$，$0<\alpha<1$.

证明：对 $\forall x_1\in[a,b]$，有数列 $\{x_n\}$ 收敛于方程 $x=f(x)$ 在 $[a,b]$ 中的唯一解.

【提示：利用收敛级数的性质】

3. 无穷小与无穷大的比较

例 18 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某领域内连续，且当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 与 x^m 为同阶无穷小. 又当 $x\to 0$ 时，$F(x)=\int_0^{x^n} f(t)\mathrm{d}t$ 与 x^k 同阶，m 与 n 为正整数，则 $k=$__________.

【$nm+n$】

例 19 对充分大的一切 x，函数 1000^x，e^{3x}，$\lg x^{1000}$，$\mathrm{e}^{\frac{x^2}{1000}}$，$x^{10^{10}}$ 中最大的是________.

【$\mathrm{e}^{\frac{x^2}{1000}}$】

4. 极限反问题

例 20 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-\left(ax+bx^2\right)}{\int_0^{x^2}\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t}=\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\left(\ln x\right)^2}$，求常数 a，b.

【$a=1$，$b=-\dfrac{3}{2}$】

5. 函数的连续性

例 21 设函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上有定义，且 $\mathrm{e}^x f(x)$ 与 $\mathrm{e}^{-f(x)}$ 在区间 $(0,1)$ 上都是单调增加的函数. 证明：$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上连续.

【提示：利用夹逼定理】

6. 方程求根问题

例 22 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f(a)f(b)<0$，又当 $x\in(a,b)$ 时，有 $f'(x)>-f(x)$，

则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的零点个数为_____________.

【1】

例 23 依次求解下列问题：

(1) 证明方程 $\mathrm{e}^x+x^{2n+1}=0$ 有唯一实根 x_n， $n=0,1,2,\cdots$；

(2) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在并求其值 A；(3) 证明当 $n\to\infty$ 时， x_n-A 与 $\dfrac{1}{n}$ 是同阶无穷小.

【提示：利用零点定理， $A=-1$，利用微分中值定理】

例 24 设 n 为正整数，$F(x)=\int_1^{nx}\mathrm{e}^{-t^3}\,\mathrm{d}t+\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^{(n+1)x}}\frac{t^2}{t^4+1}\,\mathrm{d}t$. 证明：

(1)对于给定的 n，$F(x)$ 有且仅有1个正的零点，记该零点为 a_n；

(2) $\{a_n\}$ 随 n 的增加而严格单调减少且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

【提示：利用零点定理，0】

7. 闭区间上连续函数的性质

例 25 设 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，$f(x)$ 只取有理数值，已知 $f(1)=3$，求 $f(2)$.

【提示：利用最值性和介值性】

8. 连续函数应用问题

例 26 有一张所占区域为凸区域的饼放在方形的餐桌上，能否一刀将这张饼切为面积相等的两半，而刀口平行于餐桌的某条指定的边？如果可以做到，问这种切法是否唯一？

【提示：利用介值性】

例 27 两张所占区域为凸区域的饼分开摆在桌面上，能否只用一刀将每张饼都切成面积相等的两部分.

【提示：利用零点定理】

【巩固练习】

1. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+2)\ln(x+2)-2(x+1)\ln(x+1)+x\ln x\right]x$.

2. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\dfrac{a}{n}-\arctan\dfrac{a}{n+1}\right)$，$a\neq 0$.

3. 设 $f(x),\ g(x)$ 在 $x=0$ 的某一邻域 U 内有定义，对任意 $x\in U$，$f(x)\neq g(x)$，

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}g(x)=a>0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[f(x)\right]^{g(x)}-\left[g(x)\right]^{g(x)}}{f(x)-g(x)}=$____________.

4. 设 $u_1=1$，$u_2=2$，当 $n\geq 3$ 时，$u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{u_n}$.

5. 数列 $\{x_n\}$ 满足：$0<x_1<\pi$，$x_{n+1}=\sin x_n$，$n=1,2,\cdots$.

(1) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}$ 存在并求极限；　　(2) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

6. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{a^2}+\cdots+\dfrac{n}{a^n}\right)$，$a>1$.

7. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & |x|\leq c\\ \dfrac{2}{|x|}, & |x|>c\end{cases}$ 处处连续，则 $c=$____________.

8. 正方形的木桌有四条长度一样的腿，指定将它摆放在房间的某个位置.由于房间的地面有些凹凸不平. 问该方桌能否在这个位置摆放稳妥，即四条腿同时着地.

【参考答案】

1. 1　　2. a　　3. a^a　　4. 0　　5. 0，$e^{-\frac{1}{6}}$　　6. $\dfrac{a}{(a-1)^2}$

7. 1　　8. 提示：利用零点定理

第二部分 强化训练

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}\,\dfrac{x-\ln(\mathrm{e}^x+x)}{x}$．（13届国赛预赛）

2. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x^n+7x^4+1)^m-x\right]=b$，$n>4$，$b\neq 0$，求 n，m，b．

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$．（2014考研真题）

4. 设 $a_k,p_k>0$，$k=1,2,\cdots,m$，$p=\sum\limits_{k=1}^{m}p_k$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{p_1\sqrt[n]{a_1}+p_2\sqrt[n]{a_2}+\cdots+p_m\sqrt[n]{a_m}}{p_1+p_2+\cdots+p_m}\right)^n$．

5. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\mathrm{e}^i}{\mathrm{e}^n+i^2}$．

6. 设 $x\in(-\infty,+\infty)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{(n\,\mathrm{e}^x+i)(n\,\mathrm{e}^x+i+1)}$．（14届国赛预赛补赛）

7. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}\sum\limits_{i=1}^{n}(2i-1)^2$．（14届国赛预赛第二次补赛）

8. 设 n 为正整数，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\sqrt[4]{\dfrac{1+2x}{1-2x}}\sqrt[6]{\dfrac{1+3x}{1-3x}}\cdots\sqrt[2n]{\dfrac{1+nx}{1-nx}}-1}{3\pi\arcsin x-(x^2+1)\arctan^3 x}$．（12届国赛决赛）

9. 设 $x_0=1$，当 $n\geq 1$ 时，有 $x_n=\ln(1+x_{n-1})$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n$．（13届国赛预赛补赛）

10. 设 $\{a_n\}$ 满足 $a_1>1$，$a_{n+1}({a_n}^2-1)={a_n}^3$．求：(1) $A=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{n}}$．(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\ln n}\left(\dfrac{a_n}{\sqrt{n}}-A\right)$．

【参考答案】

1. 0　　2. $n=5$，$m=\dfrac{1}{5}$，$b=\dfrac{7}{5}$　　3. $\dfrac{1}{2}$　　4. $({a_1}^{p_1}{a_2}^{p_2}\cdots{a_m}^{p_m})^{\frac{1}{p}}$

5. $\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$　　6. $\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{2}$　　7. $\dfrac{4}{3}$　　8. $\dfrac{n}{3\pi}$　　9. 2

10. $\sqrt{2}$，$\dfrac{3}{4\sqrt{2}}$