高等数学 I-1 综合练习 8

一、填空题

$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1 \sim \frac{1}{3}ax^2$　　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{3}ax^2}{-\frac{1}{2}x^2} = -\frac{2}{3}a = 1$

$\cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$

1. 已知当 $x \to 0$ 时, $(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x - 1$ 是等价无穷小, 则常数 $a =$ $\underline{\;-\frac{3}{2}\;}$.

2. 设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续, 且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x-x_0} = A$ (A 为常数), 则 $f'(x_0) =$ $\underline{\;A\;}$.

$f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x-x_0}(x-x_0) = 0$

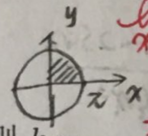
3. 已知 $\displaystyle\int_a^b \frac{f(x)}{f(x)+g(x)}\,\mathrm{d}x = c$ ①, 则 $\displaystyle\int_a^b \frac{g(x)}{f(x)+g(x)}\,\mathrm{d}x =$ $\underline{\;b-a-c\;}$ ②.

①+②
$\displaystyle\int_a^b \frac{f(x)+g(x)}{f(x)+g(x)}\,dx = b-a$

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$

4. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left(x^2\sin^3 x + \sqrt{\pi^2 - x^2}\right)\mathrm{d}x =$ $\underline{\;2\int_0^{\pi}\sqrt{\pi^2-x^2}\,dx\;}$ $= \frac{1}{2}\pi^3$

奇　　偶　　→ $\frac{1}{2}$圆面积



5. 设 $f(x) = k(x^2-3)^2$, 若该曲线的拐点处的法线通过原点, 则 $k =$ $\underline{\;\pm\frac{\sqrt{2}}{8}\;}$.

二、选择题

$f'(x) = 2k(x^2-3)\cdot 2x = 4k(x^3-3x)$　　$f''(x) = 2k(x^2-3)\cdot 2 + 2k\cdot 2x\cdot 2x = 12k(x^2-1) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ 且 $f'''(x) = 24kx$

拐点 $(1, 4k)$　$(-1, 4k)$　　$f'(1) = -8k$　$f'(-1) = 8k$

$y - 4k = \frac{1}{8k}(x-1)$ 过原点 $\Rightarrow k = \pm\frac{\sqrt{2}}{8}$

1. 当 $x \to 0$ 时, 与 x 为等价无穷小的函数为 (C).

(A) $\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$;　　(B) $\ln(1-x)$;　　(C) $\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\tan x}$;　　(D) $x\sin\dfrac{1}{x}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\tan x}{x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x})} = 1$

2. 若 $f(x)$ 的一个原函数为 xe^x, 则 $\displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x =$ (D).

$\int f(x)dx = xe^x + C$　　$= f(x) + C = (xe^x)' + C$

(A) $(x+1)\mathrm{e}^x$;　　(B) $x\mathrm{e}^x$;　　(C) $x\mathrm{e}^x + C$;　　(D) $(x+1)\mathrm{e}^x + C$.

3. 设曲线 $y = \dfrac{1+\mathrm{e}^{-x^2}}{1-\mathrm{e}^{-x^2}}$, 则该曲线 (D).

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}} = 1$　　$y=1$. (水平渐近线)

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}} = \infty$

∴ $x=0$ 铅直渐近线

(A) 没有渐近线;　　(B) 仅有水平渐近线;

(C) 仅有铅直渐近线;　　(D) 既有水平又有铅直渐近线.

4. 下列反常积分中收敛的是 (C).

(A) $\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$;　　(B) $\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$;

(C) $\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x$; $=\left[-\dfrac{1}{\ln x}\right]_e^{+\infty}$　　(D) $\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,\mathrm{d}x$.

5. 曲线 $y = \ln(1-x^2)$ 在 $0 \le x \le \dfrac{1}{2}$ 上的一段弧长为 (B).

(A) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\frac{1}{(1-x^2)^2}}\,\mathrm{d}x$;　　(B) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1+x^2}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$;

(C) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\frac{-2x}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$;　　(D) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+[\ln(1-x^2)]^2}\,\mathrm{d}x$.

$ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx = \sqrt{1+\left(\frac{-2x}{1-x^2}\right)^2}\,dx = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}\,dx$

三、解答题

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3^{x^2}-3^{2-2\cos x}}{\arctan x^4}$. $\frac{0}{0}$型

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3^{2-2\cos x}(3^{x^2-2+2\cos x}-1)}{x^4}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-2+2\cos x}{x^4}\cdot\ln3$

$=\ln3\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x-2\sin x}{4x^3}$

$=\ln3\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{6x^2}$

$=\frac{1}{12}\ln3$

2. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{\ln(1+x)}}$. 1^∞型

法1

$=\lim\limits_{x\to0}\left[\left(1+\dfrac{\tan x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\tan x-x}}\right]^{\frac{\tan x-x}{x}\cdot\frac{1}{\ln(1+x)}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^2}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sec^2x-1}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos^2x}{2x\cdot\cos^2x}}=e^0=1$

法2.

$=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{\ln(1+x)}\ln\frac{\tan x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\tan x-\ln x}{\ln(1+x)}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\tan x-\ln x}{x}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{\tan x}\cdot\sec^2x-\frac{1}{x}}{1}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x\cos x}{x\sin x\cdot\cos x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x\cos x}{x^2}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{2}\cos 2x\cdot2}{2x}}=e^0=1$

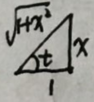
3. 设 $\begin{cases}x=\mathrm{e}^{-t},\\ y=\displaystyle\int_0^t\ln(1+u^2)\,\mathrm{d}u\end{cases}$ 确定函数 $y=y(x)$, 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\ln(1+t^2)}{-e^{-t}}=-e^t\ln(1+t^2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-e^t\ln(1+t^2)-e^t\cdot\frac{2t}{1+t^2}}{-e^{-t}}=e^{2t}\left(\ln(1+t^2)+\frac{2t}{1+t^2}\right)$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=0$$

4. $\displaystyle\int\frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$. 令$x=\tan t$



$=\displaystyle\int\frac{\tan t\cdot e^t}{\sec^3t}\cdot\sec^2t\,dt$

$=\displaystyle\int e^t\cdot\sin t\,dt$

$=\displaystyle\int\sin t\,de^t$

$=e^t\sin t-\displaystyle\int e^t\cdot\cos t\,dt$

$=e^t\sin t-\displaystyle\int\cos t\,de^t$

$=e^t\sin t-e^t\cos t-\displaystyle\int e^t\sin t\,dt$

$\therefore$ 原式$=\frac{1}{2}e^t(\sin t-\cos t)+C$

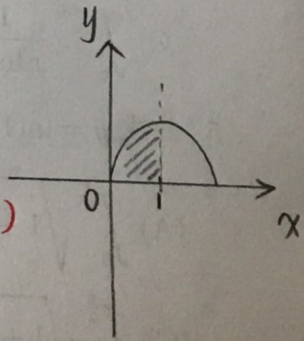
$=\frac{1}{2}e^{\arctan x}\dfrac{x-1}{\sqrt{1+x^2}}+C$

5. $\displaystyle\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x$.

法1

$=\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx$

$=\frac{1}{4}\pi$ (定积分几何意义)



法2. 令$x-1=\sin t$

原式$=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^0\cos t\cdot\cos t\,dt=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^0(1+\cos2t)\,dt$

$=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin2t\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0=\frac{\pi}{4}$

四、当 $0<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$, 证明: $\frac{\tan x_2}{\tan x_1}>\frac{x_2}{x_1}$. $\Leftrightarrow \frac{\tan x_2}{x_2}>\frac{\tan x_1}{x_1}$ （利用单调性证明）

证：令 $F(x)=\frac{\tan x}{x}$

$$F'(x)=\frac{\sec^2 x\cdot x-\tan x}{x^2}=\frac{x-\frac{1}{2}\sin 2x}{x^2\cdot\cos^2 x}$$

令 $\varphi(x)=x-\frac{1}{2}\sin 2x$

$\varphi'(x)=1-\cos 2x>0 \quad x\in(0,\frac{\pi}{2})$

$\therefore \varphi(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上 $\uparrow$

从而 $\varphi(x)>\varphi(0)=0$

$\therefore F'(x)>0$

$\therefore F(x)\uparrow$

对 $0<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$，有

$F(x_2)>F(x_1)$

即 $\frac{\tan x_2}{\tan x_1}>\frac{x_2}{x_1}$

五、设 $f(x)$ 有连续导数, $f(0)=0, f'(0)\neq 0, F(x)=\int_0^x (x^2-t^2)f(t)\,\mathrm{d}t$, 且当 $x\to 0$ 时, $F'(x)$ 与 x^k 是同阶无穷小, 求 k 值.

$$F(x)=x^2\int_0^x f(t)dt-\int_0^x t^2 f(t)dt$$

$$F'(x)=2x\int_0^x f(t)dt+x^2f(x)-x^2f(x)$$

$$=2x\int_0^x f(t)dt$$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{F'(x)}{x^k}=C$ （且 $C\neq0$）

$$\lim_{x\to0}\frac{2x\int_0^x f(t)dt}{x^k}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\int_0^x f(t)dt}{x^{k-1}}$$

$$\overset{洛}{=}\lim_{x\to0}\frac{2f(x)}{(k-1)x^{k-2}}=\frac{2}{k-1}\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x^{k-2}}$$

则 $k=3$ 时 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)\neq0$

满足 $x\to0$ 时 $F'(x)$ 与 x^k 是同阶无穷小

六、设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+x^3)}{x^2}, & x>0,\\ \sin x\cos x, & x\leq 0,\end{cases}$ 求 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$, 并讨论导函数的连续性.

分段函数求导.

$x>0 \quad f'(x)=\frac{\frac{3x^2}{1+x^3}\cdot x^2-2x\cdot\ln(1+x^3)}{x^4}=\frac{3}{1+x^3}-\frac{2\ln(1+x^3)}{x^3}$

$x<0 \quad f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\cos 2x\cdot 2=\cos 2x$

$x=0$ 时 $\quad f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{\ln(1+x^3)}{x^2}-0}{x}=1$

分段点处导数 必须用定义讨论

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\sin x\cos x-0}{x}=1$

$$\therefore f'(x)=\begin{cases}\frac{3}{1+x^3}-\frac{2\ln(1+x^3)}{x^3} & x>0\\ 1 & x=0\\ \cos 2x & x<0\end{cases}$$

$\because \lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{3}{1+x^3}-\frac{2\ln(1+x^3)}{x^3}$

$=3-2=1$

$\lim\limits_{x\to0^-}f'(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\cos 2x=1$

$=f'(0)$

$\therefore f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

$\therefore f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

七、求 c 的值, 使得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\int_{-\infty}^{c} te^{2t}\,\mathrm{d}t$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{2c}{x-c}\right)^{\frac{x-c}{2c}}\right]^{\frac{2c}{x-c}\cdot x}=e^{2c} \quad (1^{\infty})$$

$$\int_{-\infty}^{c} te^{2t}dt=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{c} t\,de^{2t}=\frac{1}{2}te^{2t}\Big|_{-\infty}^{c}-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{c}e^{2t}dt \quad (\text{反常积分})$$

$$=\frac{1}{2}ce^{2c}-\frac{1}{2}\lim_{t\to-\infty}\frac{t}{e^{-2t}}-\frac{1}{4}e^{2t}\Big|_{-\infty}^{c}=\frac{1}{2}\left(c-\frac{1}{2}\right)e^{2c}-\frac{1}{2}\lim_{t\to-\infty}\frac{1}{-2e^{-2t}}+\frac{1}{4}\lim_{t\to-\infty}e^{2t}$$

$$=\frac{1}{2}\left(c-\frac{1}{2}\right)e^{2c} \qquad \therefore e^{2c}=\frac{1}{2}\left(c-\frac{1}{2}\right)e^{2c}\Rightarrow c=\frac{5}{2}$$

八、设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f'(x)\neq 0$, 则 $\exists\,\xi,\eta\in(a,b)$, 使得

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a}{b-a}\mathrm{e}^{-\eta}.$$

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足拉格朗日中值定理 则 $\exists\,\xi\in(a,b)$

使 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ①

又 e^x, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足柯西中值定理, $\exists\,\eta\in(a,b)$

使 $\frac{e^{\eta}}{f'(\eta)}=\frac{e^b-e^a}{f(b)-f(a)}$ ②　　由①②得 $\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{e^b-e^a}{b-a}e^{-\eta}$

参考答案 8

一、填空题　1. $-\frac{3}{2}$.　2. A.　3. $b-a-c$.　4. $\frac{\pi^3}{2}$.　5. $\pm\frac{\sqrt{2}}{8}$.

二、选择题　C.　D.　D.　C.　B.

三、1. $\frac{\ln 3}{12}$.　2. 1.　3. 0.　4. $\frac{(x-1)e^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}}+C$.　5. $\frac{\pi}{4}$.

四、略.　五、$k=3$.

六、$f'(x)=\begin{cases}-\frac{2\ln(1+x^3)}{x^3}+\frac{3}{1+x^3}, & x>0,\\ 1, & x=0,\\ \cos 2x, & x>0,\end{cases}$ $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

七、$c=\frac{5}{2}$.　八、略.