第二章　导数与微分同步测试 A 卷解析

一、选择题

(1)(B)　(2)(D)　(3)(B)　(4)(C)　(5)(D)　(6)(B)

(1) 解:由条件知 $f'(x)$ 存在且 $f(-x)=-f(x)$,因此在上式两端求导得:

$f'(-x)\cdot(-1)=-f'(x)$ 即 $f'(-x)=f'(x)$,

故 $f'(x)$ 是偶函数,应选(B).

(2)【思路探索】利用导数定义即可求解.

解:$f'(1)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+x)-f(1)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{af(x)-af(0)}{x}=a\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$=af'(0)=ab.$

故应选(D).

(3)【思路探索】利用微分及无穷小比较的概念即可.

解:由题设条件知:$\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x=3\Delta x$,于是得 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\mathrm{d}y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{3\Delta x}{\Delta x}=3$. 所以 $\mathrm{d}y$ 在 $\Delta x\to 0$ 时是 Δx 的同阶无穷小,故应选(B).

(4)【思路探索】利用极限的性质定理及导数定义即可.

解:由 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=1$ 及 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性知 $f(0)=0$,

$1=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=\lim\limits_{h^2\to 0}\dfrac{f(h^2)-f(0)}{h^2-0}=f'_+(0)$,

故应选(C).

【方法点击】注意左导数、右导数与函数在一点的导数定义的异同.

$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$;

$f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$;

$f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

(5)【思路探索】利用导数的定义及导数的几何意义即可得.

解:由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=\dfrac{1}{2}f'(1)=-1$,

得 $f'(1)=-2$,由导数的几何意义知切线斜率为 -2. 故应选(D).

(6) 解:$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-\frac{2}{3}}{x-1}=\infty$,

$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{3}}{x-1}=2.$

故应选(B).

二、填空题

(7) 27

(8) $-\dfrac{1}{x^2}e^{\tan\frac{1}{x}}\left(\cos\dfrac{1}{x}+\tan\dfrac{1}{x}\cdot\sec\dfrac{1}{x}\right)$

(9) $-\dfrac{3}{2}$　　(10) $-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}$

(11) $y=1-2x$　　(12) $(\ln 2-1)\mathrm{d}x$

(7) 解:当 $t=3$ 时,

$V_{瞬时}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{(3+\Delta t)^3+20-(3^3+20)}{\Delta t}$

$=27.$

故应填 27.

(8) 解:$y'=e^{\tan\frac{1}{x}}\cdot\cos\dfrac{1}{x}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)+\sin\dfrac{1}{x}\cdot e^{\tan\frac{1}{x}}\cdot\sec^2\dfrac{1}{x}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$=-\dfrac{1}{x^2}e^{\tan\frac{1}{x}}\left(\cos\dfrac{1}{x}+\tan\dfrac{1}{x}\cdot\sec\dfrac{1}{x}\right).$

故应填 $-\dfrac{1}{x^2}e^{\tan\frac{1}{x}}\left(\cos\dfrac{1}{x}+\tan\dfrac{1}{x}\cdot\sec\dfrac{1}{x}\right)$.

(9) 解:$y=\dfrac{1}{2}[\ln(1-x)-\ln(1+x^2)]$,

$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{1-x} - \frac{2x}{1+x^2}\right)$.

$y'' = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\right]$,

$y''|_{x=0} = -\frac{3}{2}$.

故应填 $-\frac{3}{2}$.

【方法点击】求导前先利用对数的性质把函数化简,可使求导运算简便.

(10)【思路探索】利用在 $x=1$ 处的可导性及连续性.

解:要使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导,则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处必连续.

由 $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = f(1)$ 可得 $a+b=0$,即 $b=-a$.

又 $f'_+(1) = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to1^+} \frac{ax^2-a}{x-1} = 2a$,

$f'_-(1) = \lim\limits_{x\to1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^-} \frac{x\cos\frac{\pi}{2}x}{x-1}$

$\xlongequal{y=x-1} \lim\limits_{y\to0^-} \frac{-(y+1)\sin\frac{\pi}{2}y}{y}$

$= -\lim\limits_{y\to0^-} \frac{\sin\frac{\pi}{2}y}{y} = -\frac{\pi}{2}$,

由于 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导,则 $2a = -\frac{\pi}{2}$,

得 $a = -\frac{\pi}{4}$. 故应填 $a = -\frac{\pi}{4}, b = \frac{\pi}{4}$.

(11)【思路探索】利用参数方程所确定函数的求导法则确定函数的导数,进一步由导数的几何意义确定法线斜率,写出法线方程.

解:$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{e^t\cos t - e^t\sin t}{e^t\sin 2t + 2e^t\cos 2t}$

$= \frac{\cos t - \sin t}{\sin 2t + 2\cos 2t}$,

当 $x=0, y=1$ 时,$t=0$,从而 $\frac{dy}{dx}\Big|_{t=0} = \frac{1}{2}$,

所以法线斜率 $k=-2$,则曲线在 $(0,1)$ 处法线方程为 $y=1-2x$. 故应填 $y=1-2x$.

【方法点击】(1) $f'(x_0)$ 在几何上表示过曲线 $y=f(x)$ 上点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率.

(2) 若 $f'(x_0) \neq 0$,则 $-\frac{1}{f'(x_0)}$ 为过曲线 $y=f(x)$ 上点 $(x_0, f(x_0))$ 处的法线的斜率. 若 $f'(x_0)=0$ 则法线方程为 $x=x_0$.

(12) 解:把 $x=0$ 代入方程得 $y=1$,

方程两端对 x 求导得

$$2^{xy}\cdot\ln2\cdot(y+xy') = 1+y',$$

把 $x=0, y=1$ 代入上式,得 $y'\Big|_{\substack{x=0\\y=1}} = \ln2-1$,

所以 $dy\Big|_{x=0} = (\ln2-1)dx$.

三、解答题

(13) 解:原式 $= \lim\limits_{x\to0} \frac{g(1-\cos x)}{1-\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{\sin(x^2)}$

$= \lim\limits_{t\to0} \frac{g(t)}{t}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}$

$= \frac{1}{2}\lim\limits_{t\to0}\frac{g(t)-g(0)}{t} = \frac{1}{2}g'(0)$.

(14) 解:把 $x=0$ 代入方程 $\ln(x^2+y) = x^3y+\sin x$ 得 $\ln y=0$,则 $y=1$.

方程两边关于 x 求导得:

$$\frac{1}{x^2+y}\left(2x+\frac{dy}{dx}\right) = 3x^2y + x^3\frac{dy}{dx} + \cos x.$$

把 $x=0, y=1$ 代入上式,得:$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0} = 1$.

【方法点击】(1) 欲求由方程 $F(x)=0$ 所确定的隐函数 $y=f(x)$ 的一阶导数,要把方程中的 x 看作自变量,而将 y 视为 x 的函数,方程中关于 y 的函数便是 x 的复合函数,用复合函数的求导法则,便可得到关于 y' 的一次方程,从中解得 y' 即为所求.

(2) 若求 $y'\Big|_{x=x_0}$,由于(1)中所得 y' 的表达式通常用隐函数 y 及自变量 x 表示,所以,在计算 $x=x_0$ 的导数时,通常由原方程解出相应的 y_0,然后将 (x_0, y_0) 一起代入 y' 的表达式中,便可求得 $y'\Big|_{x=x_0}$.

(15)【思路探索】首先由极坐标方程写出曲线的参数方程,然后利用参数方程确定的函数求导法求出函数在给定点处的导数,进一步可求得切线与法线方程.

解:此曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = r\cos\theta = (1-\cos\theta)\cos\theta, \\ y = r\sin\theta = (1-\cos\theta)\sin\theta, \end{cases}$$

即 $\begin{cases} x = \cos\theta - \cos^2\theta, \\ y = \sin\theta - \cos\theta\cdot\sin\theta, \end{cases}$

由 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 得切点坐标为 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

$\frac{dy}{dx}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{6}}$

$= \frac{\cos\theta-\cos^2\theta+\sin^2\theta}{-\sin\theta+2\cos\theta\sin\theta}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = 1$,

于是所求切线方程为

$$y-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}=x-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{4},$$

即 $x-y-\frac{3}{4}\sqrt{3}+\frac{5}{4}=0$.

法线方程为 $y-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}=-\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{4}\right)$,

即 $x+y-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}=0$.

【方法点击】(1) 一般地,由极坐标表示的曲线,可把 θ 视作参数,写出曲线的参数方程,再利用参数方程求导公式即可得出函数的导数.

(2) 一般地,极坐标方程 $r=r(\theta)$ 均可化为参数方程 $\begin{cases}x=r(\theta)\cos\theta\\ y=r(\theta)\sin\theta\end{cases}$.

(16)【思路探索】对方程进行适当的恒等变形,然后利用隐函数求导法则求导即可.

解:$y^{\frac{1}{x}}=x^{\frac{1}{y}}$,等价于 $\frac{1}{x}\ln y=\frac{1}{y}\ln x$,

即有 $y\ln y=x\ln x$,对等式两端关于 x 求导得

$$(1+\ln y)\frac{dy}{dx}=1+\ln x,$$

即 $\frac{dy}{dx}=\frac{1+\ln x}{1+\ln y}$.

$$\text{所以}\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{1}{x}(1+\ln y)-\frac{1}{y}y'(1+\ln x)}{(1+\ln y)^2}$$

$$=\frac{y(1+\ln y)^2-x(1+\ln x)^2}{xy(1+\ln y)^3}.$$

(17) 解:$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{3t^2+2t}{1-\frac{1}{1+t}}=(t+1)(3t+2)$.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{6t+5}{1-\frac{1}{1+t}}=\frac{(6t+5)(t+1)}{t}.$$

(18)【思路探索】首先利用函数的恒等表达式写出 $f(x)$ 在 $[-2,0]$ 上的表达式,再利用导数定义判别即可.

解:(Ⅰ) 当 $-2\leqslant x\leqslant 0$ 时,$0\leqslant x+2\leqslant 2$,

$$f(x)=kf(x+2)=k(x+2)[(x+2)^2-4]$$
$$=kx(x+2)(x+4).$$

(Ⅱ) 因为 $f_-(0)=f_+(0)=f(0)=0$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(x^2-4)}{x}=-4,$$
$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{kx(x+2)(x+4)}{x}=8k.$$

令 $f'_+(0)=f'_-(0)$,得 $k=-\frac{1}{2}$,

即当 $k=-\frac{1}{2}$ 时,$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

(19) 解:$f(x)=-1+2(1+x)^{-1}$,

$f'(x)=2\cdot(-1)\cdot(1+x)^{-2}$,

$f''(x)=2\cdot(-1)(-2)\cdot(1+x)^{-3}$,

$f'''(x)=2\cdot(-1)(-2)(-3)\cdot(1+x)^{-4},\cdots$,

$f^{(n)}(x)=2\cdot(-1)(-2)\cdot\cdots\cdot(-n)\cdot(1+x)^{-n-1}=\frac{(-1)^n\cdot 2\cdot n!}{(1+x)^{n+1}}$.

【方法点击】(1) 求 $f(x)$ 的 n 阶导数时,一般先求出前几阶导数,从中找出规律,进而得出 $f(x)$ 的 n 阶导数表达式.

(2) 对于某些复杂函数求高阶导数,需先化简、恒等变形,化为常见函数类,再求其 n 阶导数.

(20)【思路探索】由于点 $(2,0)$ 不在曲线上,必须另设切点,利用切线过点 $(2,0)$,求出切线方程.

解:设切点为 $(x_0,x_0{}^3)$,则过切点的切线方程为:

$$y-x_0^3=3x_0^2(x-x_0),$$

即 $y=3x_0^2x-2x_0^3$.

由于切线过点 $(2,0)$,于是有 $6x_0^2-2x_0^3=0$,

解得 $x_0=0$ 或 $x_0=3$,相应切点为 $(0,0)$ 与 $(3,27)$,切线方程分别为 $y=0$ 与 $y=27x-54$.

第二章　导数与微分同步测试 B 卷解析

一、选择题

(1)(A) (2)(D) (3)(D) (4)(B) (5)(B) (6)(D)

(1) 解:$F(x)=\begin{cases}f(x)(1-\sin x), & x<0\\ f(0), & x=0\\ f(x)(1+\sin x), & x>0\end{cases}$

$$F'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)(1-\sin x)-f(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}-\lim_{x\to 0^-}f(x)\cdot\frac{\sin x}{x}$$
$$=f'(0)-f(0),$$
$$F'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)(1+\sin x)-f(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}+\lim_{x\to 0^+}f(x)\cdot\frac{\sin x}{x}$$
$$=f'(0)+f(0).$$

若使 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导,则必须 $F'_-(0)=F'_+(0)$. 则 $f(0)=0$. 故应选(A).

【方法点击】含有绝对值的函数应作为分段函数对待，因此函数在分界点的导数应按导数定义，通过左、右导数进行分析.

$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导的充要条件是左、右导数存在且相等.

(2)【思路探索】利用 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$ 的极限状态判别间断点 $x=0$ 的类型.

解：由题意知 $f(0)=0$，$x=0$ 为 $g(x)$ 的间断点，

则 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$，

所以 $x=0$ 为可去间断点. 故应选(D).

【方法点击】若 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的间断点，则有：

(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$，或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$，则 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点.

(3) 若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 存在，$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 存在且 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$，则 $x=x_0$ 为跳跃间断点.

(3) 解：$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{\sqrt{x}}$

$=0=f(0)$，

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}x^2g(x)=0=f(0)$，

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处极限存在，且连续，(A)、(B) 不正确.

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2g(x)-0}{x}=\lim_{x\to 0^-}xg(x)=0,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^{\frac{3}{2}}}=0$$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

故应选(D).

【方法点击】分段函数在分界点的极限、连续和可导问题一般应采用定义通过左、右两端进行讨论. 极限、连续和可导三者之间的关系是：可导 $\Rightarrow$ 连续 $\Rightarrow$ 极限存在，但反过来未必成立.

(4) 解：对数螺线的参数方程为 $\begin{cases}x=e^{\theta}\cos\theta\\ y=e^{\theta}\sin\theta\end{cases}$，

$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 处对应点为 $(0,e^{\frac{\pi}{2}})$.

而 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/d\theta}{dx/d\theta}=\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$，所以 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=-1$.

则对数螺线在 $(0,e^{\frac{\pi}{2}})$ 的切线方程为 $y-e^{\frac{\pi}{2}}=-x$.

即 $x+y=e^{\frac{\pi}{2}}$，故应选(B).

(5)【思路探索】利用导数的定义进行判别.

解：选项(B)：

因为 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f(1-e^h)$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^h)-f(0)}{1-e^h}\cdot\dfrac{1-e^h}{h}$

$=-\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^h)-f(0)}{1-e^h}$

$\xlongequal{\Delta x=1-e^h}-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=-f'(0)$，

选项(A)：

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cos h)$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cos h)-f(0)}{1-\cos h}\cdot\dfrac{1-\cos h}{h^2}=\dfrac{1}{2}f'_+(0)$，

选项(C)：

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(h-\sin h)$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h)-f(0)}{h-\sin h}\cdot\dfrac{h-\sin h}{h^2}=0$，

选项(D)：

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(h)}{h}$ 存在，可知 $\lim\limits_{h\to 0}[f(2h)-f(h)]=0$，不能保证 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，因此，不能判别 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导. 故应选(B).

【方法点击】由 $f(0)=0$ 知，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充要条件是 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在. 选择时关键是验证选项中哪一个与上述极限等价.

事实上，由 $1-\cos h\geqslant 0$ 知(A)不对；

由 $h-\sin h=o(h^2)$（当 $h\to 0$ 时）知(C)不对；

由 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(h)}{h}$ 存在不能保证 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，知(D)亦不对；

由 $1-e^h\sim -h$ 知选项(B)正确.

(6)【思路探索】利用周期函数的导数的性质与导数的几何意义即可.

解：由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=\dfrac{1}{2}f'(1)=-1$，

知 $f'(1)=-2$.

由 $f(x)$ 以 4 为周期知，$f'(x)$ 也以 4 为周期，则 $f'(5)=f'(4+1)=f'(1)=-2$.

故应选(D).

【方法点击】(1) 设 $f(x)$ 为可导的周期函数，则 $f'(x)$ 为周期函数且周期不变.

(2) 设 $f(x)$ 可导，若 $f(x)$ 为奇函数，则 $f'(x)$ 为偶函数；若 $f(x)$ 为偶函数，则 $f'(x)$ 为奇函数.

二、填空题

(7) $\dfrac{\cot\frac{1}{x}}{2x^2\cdot\sqrt{\sin\frac{1}{x}}}$　(8) $4a^6$

(9) $2x-y-12=0$　(10) $\dfrac{(-1)^n 2^n n!}{3^{n+1}}$

(11) $\dfrac{-f''[f^{-1}(x)]}{\{f'[f^{-1}(x)]\}^3}$

(12) $e^{f(x)}\left[\dfrac{1}{x}f'(\ln x)+f(\ln x)\cdot f'(x)\right]dx$

(7) 解：$y=\dfrac{1}{\sqrt{\sin\frac{1}{x}}}=\left(\sin\dfrac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}$，

$$y'=-\frac{1}{2}\left(\sin\frac{1}{x}\right)^{-\frac{3}{2}}\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=\frac{\cot\frac{1}{x}}{2x^2\cdot\sqrt{\sin\frac{1}{x}}}.$$

故应填 $\dfrac{\cot\frac{1}{x}}{2x^2\cdot\sqrt{\sin\frac{1}{x}}}$.

【方法点击】复合函数的求导关键在于搞清复合关系，从外层到内层一步一步进行求导运算，不要遗漏，尤其当既有四则运算，又有复合函数运算时，要根据题目中给出的函数表达式决定先用四则运算求导法则还是先用复合函数求导法则.

(8)【思路探索】利用切线与切点的几何意义即可求得结论.

解：设曲线 $y=x^3-3a^2x+b$ 在 $x=x_0$ 处与 x 轴相切，则 $y'(x_0)=0, y(x_0)=0$，即有 $3x_0^2=3a^2$，且 $x_0^3-3a^2x_0+b=0$. 解得：$x_0^2=a^2, b^2=4a^6$.

故应填 $4a^6$.

(9) 解：由 $\lim\limits_{x\to0}[f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)]=\lim\limits_{x\to0}[8x+\alpha(x)]$，得 $f(1)-3f(1)=0$，故 $f(1)=0$.

又 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{8x}{\sin x}+\dfrac{\alpha(x)}{x}\right]=8$，

设 $\sin x=t$，则有

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}$

$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(1+t)-f(1)}{t}+3\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(1-t)-f(1)}{-t}$

$=4f'(1)$，

所以 $f'(1)=2$.

由于 $f(x+5)=f(x)$，

所以 $f(6)=f(1)=0, f'(6)=f'(1)=2$.

故所求的切线方程为 $y=2(x-6)$.

即 $2x-y-12=0$.

(10)【思路探索】可以直接求导，然后依据规律写出结论，也可直接应用公式.

解：利用公式 $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$，知

$\left(\dfrac{1}{2x+3}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^n 2^n n!}{(2x+3)^{n+1}}$.

所以 $y^{(n)}(0)=\dfrac{(-1)^n 2^n n!}{3^{n+1}}$.

故应填 $\dfrac{(-1)^n 2^n n!}{3^{n+1}}$.

【方法点击】求高阶导数的基本思路是逐阶求导，利用各阶导数的规律写出 $y^{(n)}$ 的表达式. 对于一些比较特殊的函数，读者应记住其高阶导数公式：

① $y=\sin x, y^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$；

② $y=\dfrac{1}{x}$，$y^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$；

③ $y=xe^x$，$y^{(n)}=(x+n)e^x$.

(11) 解：因为 $f'[f^{-1}(x)]\neq0$，所以由反函数的导数公式有

$$\frac{df^{-1}(x)}{dx}=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{f'(y)}=\frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$$

$$\frac{d^2f^{-1}(x)}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}\right)$$

$$=\frac{-\{f'[f^{-1}(x)]\}'}{\{f'[f^{-1}(x)]\}^2}$$

$$=\frac{-f''[f^{-1}(x)][f^{-1}(x)]'}{\{f'[f^{-1}(x)]\}^2}$$

$$=\frac{-f''[f^{-1}(x)]}{\{f'[f^{-1}(x)]\}^2}\cdot\frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$$

$$=\frac{-f''[f^{-1}(x)]}{\{f'[f^{-1}(x)]\}^3}.$$

故应填 $\dfrac{-f''[f^{-1}(x)]}{\{f'[f^{-1}(x)]\}^3}$.

(12) 解：$dy=d(f(\ln x)e^{f(x)})$

$=df(\ln x)\cdot e^{f(x)}+f(\ln x)\cdot d(e^{f(x)})$

$=f'(\ln x)e^{f(x)}d(\ln x)+f(\ln x)\cdot e^{f(x)}df(x)$

$=\left(\dfrac{1}{x}e^{f(x)}f'(\ln x)+f(\ln x)e^{f(x)}f'(x)\right)dx$

$=e^{f(x)}\left[\dfrac{1}{x}f'(\ln x)+f(\ln x)f'(x)\right]dx.$

故应填 $e^{f(x)}\left[\dfrac{1}{x}f'(\ln x)+f(\ln x)f'(x)\right]dx$.

三、解答题

(13)【思路探索】利用分段函数求导的方法求出 $f'(x)$，然后讨论其连续性即可.

解：当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=\arctan\frac{1}{x^2}-\frac{2x^2}{1+x^4}$，

当 $x=0$ 时，$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\arctan\frac{1}{x^2}}{x}=\frac{\pi}{2}$，

又因为

$$\lim_{x\to0}f'(x)=\lim_{x\to0}\left[\arctan\frac{1}{x^2}-\frac{2x^2}{1+x^4}\right]$$
$$=\frac{\pi}{2}=f'(0),$$

所以 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

【方法点击】本题考查了分段函数导数的求法及导函数在某点处连续的定义. 一般地，分段函数在区间上的导数可用求导法则及公式计算，而分段函数在分界点的导数应按导数定义计算. 若分段函数在分界点两侧表达式不同，则应分别求左、右导数.

(14)【思路探索】本题是参数方程所确定的函数的求导问题，其中 y 又是关于 t 的复合函数，因此利用参数方程求导法及复合函数求导法即可.

解：令 $u=e^{3t}-1$，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{[f'_u(u)]3e^{3t}}{f'_t(t)},$$

当 $t=0$ 时，$u=0$，因此 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\dfrac{f'(0)\cdot 3}{f'(0)}=3.$

(15)【思路探索】利用导数的几何意义写出切线方程，进而求出截距即可得.

证明：设抛物线上任一点的坐标为 (x_0,y_0)，方程两边对 x 求导得

$$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y'=0,$$

即 $y'=-\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$，$y'\big|_{x=x_0}=-\dfrac{\sqrt{y_0}}{\sqrt{x_0}}$，

过点 (x_0,y_0) 处的切线方程为

$$y-y_0=-\frac{\sqrt{y_0}}{\sqrt{x_0}}(x-x_0),$$

在 x 轴上的截距为 $x=\sqrt{x_0}(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0})$，

在 y 轴上的截距为 $y=\sqrt{y_0}(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0})$，

所以 $x+y=(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0})^2=1$.

(16)【思路探索】首先写出 $f(x)$ 的表达式，然后分别讨论 $f(x)$ 的连续性与可导性.

解：① 先讨论连续性.

$$f(x)=\begin{cases}ax+b, & x<1,\\ \dfrac{a+b+1}{2}, & x=1,\\ x^2, & x>1.\end{cases}$$

因 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=a+b$，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=1$，

$$f(1)=\frac{a+b+1}{2},$$

所以当 $a+b=1$ 时，$f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

而 $x\neq1$ 时 $f(x)$ 为初等函数，显然连续.

从而有当 $a+b=1$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

② 现在 $a+b=1$ 下讨论 $f(x)$ 的可导性.

当 $x<1$ 时，$f'(x)=a$，

当 $x>1$ 时，$f'(x)=2x$，

在 $x=1$ 处，

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1^-}\frac{ax+b-(a+b)}{x-1}=a,$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=2,$$

故当 $a=2,b=-1$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导.

(17)【思路探索】先求出过点 $(\alpha,\frac{1}{\sqrt{\alpha}})$ 的切线方程，再求切线在 x 轴、y 轴上的截距，即可求得图形的面积 S，进而可讨论 S 的极限.

解：图形如图 2(b)-1 所示：

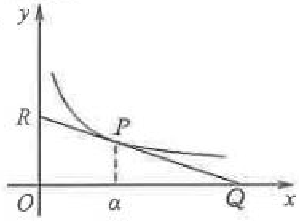

图 2(b)-1

由 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，得

$y'=-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$，

则过点 $(\alpha,\frac{1}{\sqrt{\alpha}})$ 的切线方程为

$$y-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}=-\frac{1}{2\sqrt{\alpha^3}}(x-\alpha),$$

切线与 x 轴和 y 轴的交点分别为 $Q(3\alpha,0)$ 和 $R(0,\dfrac{3}{2\sqrt{\alpha}})$，于是，$\triangle ORQ$ 的面积

$$S=\frac{1}{2}\cdot3\alpha\cdot\frac{3}{2\sqrt{\alpha}}=\frac{9}{4}\sqrt{\alpha}.$$

当切点按 x 轴正方向趋于无穷远时，有 $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}S=+\infty$.

当切点按 y 轴正方向趋于无穷远时，有 $\lim\limits_{\alpha\to0^+}S=0$.

(18)【思路探索】利用导数定义建立极限与函数的关系即可求解.

解：设 $y=\left[\dfrac{f(x+hx)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}$，

则 $\ln y=\dfrac{1}{h}\ln\dfrac{f(x+hx)}{f(x)}$.

因为 $\lim\limits_{h\to0}\ln y=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}\ln\dfrac{f(x+hx)}{f(x)}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{x[\ln f(x+hx)-\ln f(x)]}{hx}=x[\ln f(x)]',$$

故$\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(x+hx)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}=e^{x[\ln f(x)]'}$.

由已知条件知 $e^{x[\ln f(x)]'}=e^{\frac{1}{x}}$,

因此 $x[\ln f(x)]'=\dfrac{1}{x}$,即$[\ln f(x)]'=\dfrac{1}{x^2}$,

$f(x)=c\cdot e^{-\frac{1}{x}}$. 又 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$,

则 $c=1$,所以 $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$.

(19)【思路探索】利用 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性、可导性即可确定参数.

解:要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,必有 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,即

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)=1$,

得 $a+b=1$,即当 $a+b=1$ 时,$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

由导数定义及 $a+b=1$,有

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1+\ln(1-2x)-1}{x}=-2,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{a+be^x-(a+b)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{b(e^x-1)}{x}=b,$$

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,

则 $f'_-(0)=f'_+(0)$,得 $b=-2$,

于是 $a=3$,且有 $f'(0)=-2$,

$$故\ f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{2}{1-2x}, & x\leqslant 0,\\ -2e^x, & x>0.\end{cases}$$

(20)【思路探索】利用导数定义及复合函数求导法则直接求导.

解:如果 $f(x)$ 在 x_0 处可导且 $f(x_0)\neq 0$,根据复合函数的求导法则,有

$$[|f(x)|]'\Big|_{x=x_0}=[\sqrt{f^2(x)}]'\Big|_{x=x_0}=\frac{2f(x)f'(x)}{2\sqrt{f^2(x)}}\Big|_{x=x_0}=\frac{f(x_0)f'(x_0)}{|f(x_0)|}.$$

因此,当 $f(x)$ 在 x_0 可导,而 $|f(x)|$ 在 x_0 不可导时,一定有 $f(x_0)=0$,所以 $a=0$.

又当 $f(x_0)=0$ 时,设 $g(x)=|f(x)|$,则

$$g'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{|f(x)|-|f(x_0)|}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{|f(x)|}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|=|f'(x_0)|,$$

$$g'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{|f(x)|-|f(x_0)|}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{|f(x)|}{x-x_0}=-\lim_{x\to x_0^-}\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|=-|f'(x_0)|.$$

函数在一点可导的充分必要条件是其在该点左、右导数存在并相等,故 $g(x)=|f(x)|$ 在 x_0 处不可导,一定有 $|f'(x_0)|\neq-|f'(x_0)|$,

即 $|f'(x_0)|\neq 0$,从而 $f'(x_0)\neq 0$.

即 $b\neq 0,a=0$.

【方法点击】利用定义求导数是考研题中常出现的题型. 考生应深刻理解导数定义,并牢记函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导的充要条件是:$f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$.