2017－2018 学年 第二学期 高等数学理工科 课程试卷(B 卷)答案

本试卷共 5 页；考试时间 120 分钟；任课教师______________；出卷时间 2018 年 6 月

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1、曲线 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切线方程为 $\underline{\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}}$.

2、设 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$，则 $\oint_L (x^2+y^2)ds = \underline{2\pi a^3}$.

3、设 $\vec{A}=(3x-z)\vec{i}+(2z-3y)\vec{j}+(y-2x)\vec{k}$，则 $\operatorname{div}\vec{A}=$ $\underline{\quad 0 \quad}$.

4、级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n+3}x^n$ 的收敛半径是 $\underline{R=\dfrac{1}{3}}$.

5、设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数, 在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $f(x)=x$，若 $f(x)$ 的傅立叶级数的和函数记为 $S(x)$, 则 $S(\pi)=$ $\underline{\quad 0 \quad}$.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 处（ D ）.

(A) 不连续； (B) 偏导数存在；

(C) 可微； (D) 任一方向的方向导数存在.

2、设函数 $f(x,y)=x^3-4x^2+2xy-y^2$，则下面结论正确的是（ B ）.

(A) 点 $(2,2)$ 是极小值点； (B) 点 $(0,0)$ 是极大值点；

(C) 点 $(2,2)$ 是 $f(x,y)$ 的驻点，且为极大值点；

(D) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的驻点，但不是极值点.

3、已知 $\dfrac{(x+ay)dx+ydy}{(x+y)^2}$ 为某个函数的全微分，则 $a=$（ A ）.

(A) 2； (B) 0；

(C) 1； (D) -1.

4、函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+3x}$ 在点 $x=0$ 处的幂级数展开式为（ B ）.

(A) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$，$|x|<3$；　　(B) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 3^n x^n$，$|x|<\frac{1}{3}$　；

(C) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 3^{n+1} x^n$，$|x|<\frac{1}{3}$；　　(D) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{n+1} x^n$，$|x|<3$.

5、级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛的充要条件是（ C ）.

(A) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$；　　(B) $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = r < 1$；

(C) 部分和数列$\{S_n\}$有极限；　　(D) $u_n \le \frac{1}{n^2}$.

三、计算题（每小题 6 分，共 30 分）

1、设z是由方程$z^3-3xyz=a^3$所确定的x,y的函数，求dz.

解：令$F(x,y,z)=z^3-3xyz-a^3$,则$F_x=-3yz, F_y=-3xz, F_z=3z^2-3xy$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}-\frac{-3yz}{3z^2-3xy}=\frac{yz}{z^2-xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}-\frac{-3xz}{3z^2-3xy}=\frac{xz}{z^2-xy}$$ 4 分

$$dz=\frac{yz}{z^2-xy}dx+\frac{xz}{z^2-xy}dy$$ 6 分

2、求$\int_L 2xydx+(x^2+y+1)dy$，其中L为曲线$x^2+y^2=2x$上从点$(0,0)$到点$(1,1)$的一段.

解：由于$\frac{\partial P}{\partial y}=2x=\frac{\partial Q}{\partial x}$，所以该曲线积分与路径无关.　　2 分

于是 $\int_L 2xydx+(x^2+y+1)dy$

$=\int_0^1 (2+y)dy$　　4 分

$=\frac{5}{2}$.　　6 分

3、求$z=x^2+y^2$和平面$z=a^2 (a>0)$所围成的空间立体的体积.

解： $V=\iiint\limits_{\Omega}dV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a rdr\int_{r^2}^{a^2}dz$ 3 分

$=2\pi\int_0^a(a^2-r^2)rdr=\dfrac{1}{2}\pi a^4$. 6 分

4、判断数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n(1+n)^3}$ 的敛散性, 若收敛, 是绝对收敛，还是条件收敛?

解： $\left|\dfrac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n(1+n)^3}\right|\le\left|\dfrac{1}{n(1+n)^3}\right|<\dfrac{1}{n^4}$ 3 分

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}$ 收敛，由比较判别法，原级数绝对收敛. 6 分

5、求方程 $y''-2y'+10y=0$ 的通解.

解： 特征方程为 $r^2-2r+10=0$， 2 分

有一对共轭复根 $r_1=1+3i$， $r_2=1-3i$ 4 分

所求通解为 $y=e^x(C_1\cos3x+C_2\sin3x)$. 6 分

四、（本题 8 分） 求原点到曲面 $z^2=xy+x-y+4$ 的最短距离.

解： 设 (x,y,z) 为曲面上任一点，到原点的距离为 $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，为计算方便，求 d^2 的最小值，即为 d 的最小值. 作拉格朗日函数

$L=x^2+y^2+z^2+\lambda(z^2-xy-x+y-4)$ 2 分

$\begin{cases}L_x=2x-\lambda(y+1)=0\\ L_y=2y-\lambda(x+1)=0\\ L_z=2z+2\lambda z=0\\ L_\lambda=z^2-xy-x+y-4=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-1\\ y=1\\ z=\pm1\end{cases}$ 6 分

即有两点且距离均为 $\sqrt{3}$，即为所求最短距离. 8 分

五、（本题 8 分） 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}s$，$\Sigma$ 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

解： Σ 在 xoy 面上的投影为 D_{xy}： $x^2+y^2\le a^2$，

原式 $=\iint\limits_{D_{xy}}(x+y+\sqrt{a^2-x^2-y^2})\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$ 4 分

$$=a\iint\limits_{D_{xy}}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy+a\iint\limits_{D_{xy}}\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy+a\iint\limits_{D_{xy}}dxdy$$

$=0+0+a\times\pi a^2=\pi a^3$. 8 分

六、(本题8分) 求 $\iint\limits_{\Sigma}xdydz+ydxdz+zdxdy$，$\Sigma$ 是 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 介于 $z=0$ 及 $z=h(>0)$ 之间部分的下侧.

解： 补平面 Σ_1：$z=h$，取上侧， 2 分

由 Gauss 公式，

$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}xdydz+ydxdz+zdxdy=\iiint\limits_{\Omega}3dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^h rdr\int_r^h 3dz=\pi h^3$ 5 分

又 $\iint\limits_{\Sigma_1}xdydz+ydxdz+zdxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le h^2}hdxdy=\pi h^3$，

所以 $\iint\limits_{\Sigma}xdydz+ydxdz+zdxdy=0$. 8 分

七、(本题 8 分) 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ 的收敛域及 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+1}{2^n}$ 之和.

解： 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=1$，收敛半径 $R=1$，

当 $x=\pm1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n(x)\neq0$，因而收敛域为 $(-1,1)$. 3 分

设和函数 $s(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x^{n+1})'=(\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n+1})'$

$=(\dfrac{x}{1-x})'=\dfrac{1}{(1-x)^2}$，$(|x|<1)$ 6 分

于是 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+1}{2^n}=s\left(\dfrac{1}{2}\right)=4$. 8 分

八、（本题 8 分） 设函数 $f(x)$ 连续，且满足 $f(x)=e^x+\int_0^x (x-t)f(t)dt$，求 $f(x)$.

解： $f'(x)=e^x-[\int_0^x (x-t)f(t)dt]'=e^x+\int_0^x f(t)dt$，

$f''(x)-f(x)=e^x$， $f(0)=f'(0)=1$；

特征方程为 $r^2-1=0$，得 $r_1=1$， $r_2=-1$， 3 分

设 $y^*=axe^x$，代入原方程得， $a=\dfrac{1}{2}$，

通解为 $f(x)=C_1e^{-x}+C_2e^x+\dfrac{1}{2}xe^x$ ， 6 分

又 $f(0)=f'(0)=1$，代入通解，得 $c_1=\dfrac{1}{4}$， $c_2=\dfrac{3}{4}$；

所求函数为 $f(x)=\dfrac{1}{4}e^{-x}+\dfrac{1}{2}(\dfrac{3}{2}+x)e^x$. 8 分