高等数学 I-1 综合练习 5

一、填空题 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}\cdot\frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})=\int_0^1 f(x)dx$

定积分定义

1. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2}=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, 则 $f(x)=$ $\underline{\frac{1}{1+x^2}}$.

2. 设 $f(x)$ 是可导函数, 且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{f(1)-f(1-x)}=-1$, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线斜率为 $\underline{-2}$.

$\lim_{x\to0}\frac{-f(1)+f(1-x)}{-x}=f'(1)$ $\therefore f'(1)=-2$

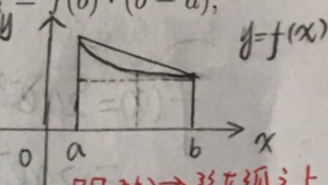
3. $\int xf''(x)\,\mathrm{d}x=$ $\underline{xf'(x)-f(x)+C}$. 分部积分

$=\int x\,df'(x)=xf'(x)-\int f'(x)\,dx=xf'(x)-f(x)+C$

4. 设在 $[a,b]$ 上, $f(x)>0, f'(x)<0, f''(x)>0$, 令 $s_1=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $s_2=f(b)\cdot(b-a)$, $s_3=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)$, 比较三者大小 $\underline{S_2<S_1<S_3}$

曲边梯形　矩形　梯形

$f\downarrow$ ↓　↓ f是凹



凹曲线 ⇒ 弦在弧之上

5. 设 $\varphi'(x)$ 存在, $y=\varphi(\sec^2x)$, 则 $\mathrm{d}y=$ $\underline{\varphi'(\sec^2x)\cdot2\sec x\cdot\sec x\cdot\tan x\,dx}$

二、选择题

$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x^k}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin x}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}\cdot\frac{1}{x^k}=C\Rightarrow k=1$ $(C\neq0)$

1. 当 $x\to0$ 时, $f(x)=\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小量, 则 $g(x)=$ (D).

(A) $\tan x-\sin x$; (B) $1-\cos x$; (C) $\sqrt{x}$; (D) x.

2. 若 $f(x)$ 在点 x_0 处连续, 则 (C).

$\cos(f(x_0))\neq0$ (A) $\tan[f(x)]$ 在点 x_0 连续; (B) $\sqrt{f(x)}$ 在点 x_0 连续; $f(x_0)\geq0$

(C) $|f(x)|$ 在点 x_0 连续; (D) $f[f(x)]$ 在点 x_0 连续. $f(x_0)$必须在f的定义域内

此题答案有误

3. 设函数 $f(x)=e^{\sqrt{x}}\sin3x$, 则下列结论正确的是 (A). $\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\sqrt{x}}\sin3x}{x-0}=3$

(A) $f'_+(0)=3$; (B) $f'_+(0)$不存在; (C) $f'_+(0)=1$; (D) $f'_+(0)=\frac{1}{3}$.

4. 方程 $\sqrt{x}+\int_0^x\sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t=\cos x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内 (A). $f(x)=\sqrt{x}+\int_0^x\sqrt{1+t^4}\,dt-\cos x$

(A) 有且仅有一个实根; (B) 有且仅有两个实根; $f(0)=-1$ $f(1)>0\Rightarrow$ 必有1根

(C) 有无穷多个根; (D) 无实根.

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\sqrt{1+x^4}+\sin x>0\Rightarrow f$单调

5. 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域内有三阶连续导数, 且 $f'(x_0)=f''(x_0)=0$, $f'''(x_0)\neq0$, 则下列说法正确的是 (C).

(A) $x=x_0$ 一定是极值点, $(x_0,f(x_0))$ 一定是拐点;

(B) $x=x_0$ 一定是极值点, $(x_0,f(x_0))$ 不一定是拐点;

(C) $x=x_0$ 一定不是极值点, $(x_0,f(x_0))$ 一定是拐点;

(D) $x=x_0$ 一定不是极值点, $(x_0,f(x_0))$ 一定不是拐点.

$f'''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}$

$x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$时 $\frac{f''(x)}{x-x_0}>0$ (或<0)

$\therefore x_0$的左右邻域 $f''(x)$变号.

$(x_0,f(x_0))$一定是拐点

不妨设 $f'''(x_0)>0$.

$x\in\mathring{U}(-\delta+x_0,x_0)$ $f''(x)<0\Rightarrow f'(x)\downarrow\Rightarrow f'(x)>f'(x_0)=0$ $\Rightarrow f(x)\uparrow$

$x\in\mathring{U}(x_0,x_0+\delta)$ $f''(x)>0$ $\Rightarrow f'(x)\uparrow\Rightarrow f'(x)>f'(x_0)=0$ $\Rightarrow f(x)\uparrow$

三、解答题

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{a_1^{\frac1x}+a_2^{\frac1x}+\cdots+a_n^{\frac1x}}{n}\right]^{nx}$ (其中 $a_1,a_2,\ldots,a_n>0$).

1^∞型

$= e^{\ln a_1\cdots a_n} = a_1\cdots a_n$

法1. "e"抬起

原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{nx\ln\frac{a_1^{1/x}+\cdots+a_n^{1/x}}{n}}$

$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(a_1^{1/x}+\cdots+a_n^{1/x})-\ln n}{\frac1x}\cdot n}$

洛 $= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{a_1^{1/x}+\cdots+a_n^{1/x}}\cdot(a_1^{1/x}\ln a_1+\cdots+a_n^{1/x}\ln a_n)(-\frac1{x^2})}{-\frac1{x^2}}\cdot n}$

法2. "凑"重要极限2

原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{a_1^{1/x}+\cdots+a_n^{1/x}-n}{n}\right)^{\frac{n}{a_1^{1/x}+\cdots+a_n^{1/x}-n}}\right]^{\frac{a_1^{1/x}+\cdots+a_n^{1/x}-n}{n}\cdot nx}$

$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(a_1^{1/x}+\cdots+a_n^{1/x}-n)\cdot x}$

$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(a_1^{1/x}-1)\cdot x+\lim\limits_{x\to+\infty}(a_2^{1/x}-1)\cdot x+\cdots+\lim\limits_{x\to+\infty}(a_n^{1/x}-1)\cdot x}$

等价无穷小替换

$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac1x\ln a_1\cdot x+\cdots+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac1x\ln a_n\cdot x}$

$= e^{\ln a_1\cdots a_n} = a_1a_2\cdots a_n$

2. 求函数 $f(x)=x^2e^{-x^2}$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最大值和最小值.

$f'(x)=2xe^{-x^2}-2x^3e^{-x^2}$

$=2xe^{-x^2}(1-x^2)$

$f'(x)=0\Rightarrow x=0$ 或 $x=\pm1$

$f(0)=0 \quad f(1)=e^{-1}$

3. 求由方程 $\sqrt[x]{y}=\sqrt[y]{x}$ 所确定隐函数 $y=f(x)$ 的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

方程两边取对数 $\frac1x\ln y=\frac1y\ln x$

$y\ln y=x\ln x$

两边同时对x求导. $\frac{dy}{dx}\cdot\ln y+y\cdot\frac1y\cdot\frac{dy}{dx}=\ln x+x\cdot\frac1x$

$\frac{dy}{dx}=\frac{1+\ln x}{1+\ln y}$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac1x(1+\ln y)-\frac1y\cdot\frac{dy}{dx}\cdot(1+\ln x)}{(1+\ln y)^2}$

$=\frac{y(1+\ln y)^2-x(1+\ln x)^2}{xy(1+\ln y)^3}$

4. $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-pt}\sin\omega t\,dt,(p>0)$.

$I=-\int_0^{+\infty}\frac1w e^{-pt}\,d\cos wt$

$=-\frac1w e^{-pt}\cos wt\Big|_0^{+\infty}+\frac1w\int_0^{+\infty}\cos wt\cdot(-p)e^{-pt}dt$

$=\frac1w-\frac{p}{w^2}\int_0^{+\infty}e^{-pt}\,d\sin wt$

$=\frac1w-\frac{p}{w^2}\left(e^{-pt}\sin wt\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\sin wt\cdot(-p)e^{-pt}dt\right)$

$=\frac1w-\frac{p^2}{w^2}I$ 积分还原.

$\therefore I=\frac{w}{w^2+p^2}$

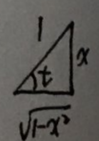
5. $\displaystyle\int\frac{x^7}{(1-x^2)^5}dx$. (三角代换)

令 $x=\sin t$. $t\in(-\frac\pi2,\frac\pi2)$

原式 $=\int\frac{\sin^7t}{(1-\sin^2t)^5}\cdot\cos t\,dt$

$=\int\frac{\sin^7t}{\cos^9t}dt$

$=\int\tan^7t\,d\tan t$



$=\frac18\tan^8t+C$

$=\frac18\cdot\frac{x^8}{(1-x^2)^4}+C$

四、设 $f(x)=(\sqrt[3]{1+x}-1)g(x)$，其中 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续，求 $f'(0)$.

$\sqrt[3]{1+x}-1 \sim \frac{1}{3}x$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[3]{1+x}-1)g(x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x\cdot g(x)}{x}=\frac{1}{3}g(0)$$

g在x=0处连续

五、设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin x, & 0\le x\le\pi,\\ 0, & x<0\text{或}x>\pi,\end{cases}$ 求 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的表达式.

$x<0$时 $\Phi(x)=-\int_x^0 f(t)dt=-\int_x^0 0\,dt=0$

$0\le x\le\pi$时 $\Phi(x)=\int_0^x \frac{1}{2}\sin t\,dt=-\frac{1}{2}\cos t\Big|_0^x=-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}$

$x>\pi$时 $\Phi(x)=\int_0^\pi \frac{1}{2}\sin t\,dt+\int_\pi^x 0\,dt=-\frac{1}{2}\cos t\Big|_0^\pi=1$

$$\therefore \Phi(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ -\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2} & 0\le x\le\pi\\ 1 & x>\pi\end{cases}$$

六、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $|f'(x)|\le M$，$f(a)=0$，证明：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le\frac{M}{2}(b-a)^2.$$

法1 令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ （写出F(x)的一阶泰勒公式）

$$F(x)=F(a)+F'(a)(x-a)+\frac{F''(\xi)}{2!}(x-a)^2$$ ξ介于a与x之间

其中 $F(a)=0$ $F'(a)=f(a)$ $F''(\xi)=f'(\xi)$

$$\therefore F(x)=\int_a^x f(t)dt=f(a)(x-a)+\frac{f'(\xi)}{2!}(x-a)^2=\frac{f'(\xi)}{2!}(x-a)^2$$

$$\int_a^b f(t)dt=\frac{f'(\xi)}{2}(b-a)^2\le\frac{|f'(\xi)|}{2}(b-a)^2\le\frac{M}{2}(b-a)^2.$$

法3. 令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt-\frac{M}{2}(x-a)^2$

$F'(x)=f(x)-\frac{M}{2}\cdot 2(x-a)$

$F''(x)=f'(x)-M\le 0\Rightarrow F'(x)\downarrow$

$F'(x)\le F'(a)=0\Rightarrow F(x)\downarrow$

$\Downarrow$

$F(x)\le F(a)$

#

法2. 对 $f(x)$ 应用拉格朗日中值定理. $f(x)-f(a)=f'(\xi)\cdot(x-a)$

两边同时取定积分 $\int_a^b f(x)dx-0=f'(\xi)\int_a^b(x-a)dx$

$$=\frac{1}{2}(b-a)^2f'(\xi)\le\frac{1}{2}(b-a)^2|f'(\xi)|\le\frac{M}{2}(b-a)^2$$

七、 讨论函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{\sin x}{x^2(\pi-x)}$ 的连续区间及间断点, 并判别间断点的类型.

$x=0,1,\pi$ 时 $f(x)$ 无定义

$f(x)$ 在 $(-\infty,0),(0,1),(1,\pi),(\pi,+\infty)$ 上连续

$\lim\limits_{x\to0}\arctan\frac{1}{x-1}+\frac{\sin x}{x(\pi-x)}=\infty$ 第二类无穷型

$\lim\limits_{x\to1^+}\arctan\frac{1}{x-1}+\frac{\sin x}{x(\pi-x)}=\frac{\pi}{2}+\frac{\sin1}{\pi-1}$

$\lim\limits_{x\to1^-}\arctan\frac{1}{x-1}+\frac{\sin x}{x(\pi-x)}=-\frac{\pi}{2}+\frac{\sin1}{\pi-1}$

$x=1$ 是第一类跳跃型

$\lim\limits_{x\to\pi}\arctan\frac{1}{x-1}+\frac{\sin x}{x(\pi-x)}$

$=\arctan\frac{1}{\pi-1}+\frac{1}{\pi^2}$ 第一类可去型

八、 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导, 且 $f(a)=f(b)=0$, 又存在 $c\in(a,b)$, 使 $f(c)<0$, 证明: 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f''(\xi)>0$.

由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导, 则在 $[a,c]$ 及 $[c,b]$ 上对 $f(x)$ 分别用拉格朗日中值定理.

$f'(\xi_1)=\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}<0\quad a<\xi_1<c$

$f'(\xi_2)=\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}>0\quad c<\xi_2<b$

又 $f'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上满足拉格朗日中值定理. 则 $\exists\ \xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$.

使 $f''(\xi)=\dfrac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}>0$

参考答案 5

一、填空题 1. $\dfrac{1}{x^2+1}$. 2. -2. 3. $xf'(x)-f(x)+C$. 4. $s_2<s_1<s_3$.

5. $2\sec^2x\tan x\varphi'(\sec^2x)\mathrm{d}x$.

二、选择题 D. C. ~~B.~~A A. C.

三、1. $a_1a_2\cdots a_n$. 2. $f_{\min}(0)=0, f_{\max}(1)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. 3. $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{y(1+\ln y)^2-x(1+\ln x)^2}{xy(1+\ln y)^3}$.

4. $\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$. 5. $\dfrac{1}{8(1-x^2)^4}-\dfrac{1}{2(1-x^2)^3}+\dfrac{3}{4(1-x^2)^2}-\dfrac{1}{2(1-x^2)}+C$ 或 $\dfrac{x^8}{8(1-x^2)^4}+C$.

四、$\dfrac{1}{3}g(0)$.

五、$\Phi(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \sin^2\dfrac{x}{2}, & 0\le x\le\pi\\ 1, & x>\pi\end{cases}$. 六、略.

七、 $x\neq0,1,\pi$的区间为连续区间; $x=0$, 第二类无穷间断点; $x=1$, 第一类跳跃间断点; $x=\pi$, 第一类可去间断点. 八、略.