《高等数学Ⅰ（2）》（理工）期末 B 卷参考答案及评分标准

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1．若 $|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=4\sqrt{2}$，则 $|\vec{a}\times\vec{b}|=$ $\underline{4\sqrt{2}}$.

2．二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\dfrac{\sin xy}{y}=\underline{2}$.

3．改变二次积分次序：$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y=\underline{\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x}$.

4．设 L 为连接 $(1,0)$ 与 $(0,1)$ 两点的直线段，则 $\int_L (x+y)\mathrm{d}s=\underline{\sqrt{2}}$.

5．微分方程 $y'+y\tan x=\cos x$ 的通解为 $\underline{y=(x+C)\cos x}$（$C$ 为任意常数）.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．平面 Π_1：$x+2y+z+1=0$ 与 Π_2：$2x+y-z+2=0$ 的夹角为（ D ）

(A) $\dfrac{\pi}{6}$　(B) $\dfrac{\pi}{4}$　(C) $\dfrac{\pi}{2}$　(D) $\dfrac{\pi}{3}$

2．设函数 $u=xe^{yz}$，则 u 在点 $(2,1,0)$ 处的梯度为（ C ）

(A) $(1,2,0)$　(B) $\sqrt{5}$　(C) $(1,0,2)$　(D) 3

3．设区域 D：$1\le x^2+y^2\le 4$，则二重积分 $\iint\limits_D (x+y+1)\mathrm{d}\sigma=$（ A ）

(A) 3π　(B) 2π　(C) π　(D) 15π

4．下列常数项级数中，收敛的是（ B ）

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n-1}{5^n}$　(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$

5．若 $y_1=\mathrm{e}^{3x}$，$y_2=x\mathrm{e}^{3x}$，则它们所满足的微分方程为（ D ）

(A) $y''+6y'+9y=0$　(B) $y''-9y=0$

(C) $y''+9y=0$　(D) $y''-6y'+9y=0$

三、计算题（每小题 5 分，共 30 分）

1．求平行于平面$6x+y+6z+5=0$且与三个坐标面所围成的四面体体积为1的平面方程.

解：设所求平面方程为$6x+y+6z-D=0$，即 $\dfrac{x}{\frac{D}{6}}+\dfrac{y}{D}+\dfrac{z}{\frac{D}{6}}=1$.

由已知条件，得$\dfrac{1}{6}\left|\dfrac{D}{6}\cdot D\cdot\dfrac{D}{6}\right|=1$，$D=\pm 6$. ……………… 3 分

所求平面方程为$6x+y+6z+6=0$或$6x+y+6z-6=0$. ……………… 5 分

2．设二元函数$z=e^u\sin v$，而$u=xy$，$v=3x+2y$，求偏导数$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}$

$=e^u\sin v\cdot y+e^u\cos v\cdot 3=e^u\left(y\sin v+3\cos v\right)$ ……………… 3 分

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}$

$=e^u\sin v\cdot x+e^u\cos v\cdot 2=e^u\left(x\sin v+2\cos v\right)$. ……………… 5 分

3．计算二重积分$\iint\limits_D(x^2+2y)\mathrm{d}\sigma$，其中$D$是由三条直线$x=2$，$y=1$及$y=x+1$所围成的闭区域.

解：原式$=\int_0^2\mathrm{d}x\int_1^{x+1}(x^2+2y)\mathrm{d}y$ ……………… 2 分

$=\int_0^2\left[x^2y+y^2\right]_1^{x+1}\mathrm{d}x=\int_0^2(x^3+x^2+2x)\mathrm{d}x=\dfrac{32}{3}$. ……………… 5 分

4. 计算$\oint_L(y\,\mathrm{e}^x-y^3)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x+x^3)\mathrm{d}y$，其中$L$为圆周$x^2+y^2=a^2\ (a>0)$取逆时针方向.

解：记D：$x^2+y^2\le a^2$．由格林公式，

原式$=\iint\limits_D\left(\mathrm{e}^x+3x^2-\mathrm{e}^x+3y^2\right)\mathrm{d}\sigma$ ……………… 2 分

$=3\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\sigma=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\rho^3\mathrm{d}\rho\ =3\times 2\pi\times\dfrac{\rho^4}{4}\Big|_0^a=\dfrac{3}{2}\pi a^4$. ………… 5 分

5．判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$的敛散性，若收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

解：此级数为交错级数，因为 $\dfrac{1}{\sqrt{n}} > \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$，

所以由莱布尼兹定理，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛. ……………… 2 分

又正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 发散，故原级数条件收敛 . ……………… 5 分

6．求微分方程 $xy'' + y' = 0$ 的通解.

解：设 $y' = p$， $y'' = p' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$， ……………… 2 分

则 $xp' + p = 0$，即 $\dfrac{\mathrm{d}p}{p} = -\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$.

两端积分得 $\ln|p| = -\ln|x| + \ln|C_1|$. 即 $p = y' = \dfrac{C_1}{x}$， ……………… 4 分

再积分，得方程的通解为 $y = C_1\ln|x| + C_2$（C_1, C_2 为任意常数）. ……………… 5 分

四、(本题满分 8 分) 设函数 $z = f(x^2 + y^2, 2xy)$，f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xf_1' + 2yf_2'$. ……………… 4 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2f_1' + 2x\left(f_{11}''\cdot 2x + f_{12}''\cdot 2y\right) + 2y\left(f_{21}''\cdot 2x + f_{22}''\cdot 2y\right)$$ ………………6 分

$$= 2f_1' + 4x^2 f_{11}'' + 8xyf_{12}'' + 4y^2 f_{22}''.$$ ……………… 8 分

五、(本题满分 8 分) 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\mathrm{d}v$，其中 Ω 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 所围成的闭区域.

解：原式 $= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a}\sqrt{r^2}\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r$ ……………… 4 分

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{a}r^3\mathrm{d}r = 2\pi\left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi}\cdot\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{a}$$ ……………… 6 分

$$= \pi a^4.$$ ……………… 8 分

六、(本题满分 8 分) 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} x\sin y\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x - z\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是曲面 $z = 1 - x^2 - y^2$ 在 xOy 面上方部分的上侧.

解：补曲面 Σ_1： $z = 0$， $x^2 + y^2 \le 1$，取下侧.

$I_1 = \iint\limits_{\Sigma_1} x\sin y\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x - z\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$. ………………… 2 分

设 Ω 是由 Σ， Σ_1 所围立体，由高斯公式，

原式 $= \iiint\limits_{\Omega} (\sin y + 2 - \sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - 0$ ………………… 4 分

$= 2\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 2\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \rho \mathrm{d}\rho \int_0^{1-\rho^2} \mathrm{d}z$ ………………… 6 分

$= 2 \times 2\pi \int_0^1 \rho(1-\rho^2)\mathrm{d}\rho = 4\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \pi$. ………………… 8 分

七、(本题满分 8 分) 求微分方程 $y'' + 2y' - 8y = 2\mathrm{e}^x$ 的通解.

解：对应齐次微分方程的特征方程为 $r^2 + 2r - 8 = 0$，特征根为 $r_1 = -4$， $r_2 = 2$.

对应齐次微分方程的通解为 $Y = C_1\mathrm{e}^{-4x} + C_2\mathrm{e}^{2x}$. ………………… 2 分

设原方程的一个特解为 $y^* = A\mathrm{e}^x$，则 ………………… 4 分

$y^{*\prime} = y^{*\prime\prime} = A\mathrm{e}^x$，代入原方程得， $A = -\frac{2}{5}$， $y^* = -\frac{2}{5}\mathrm{e}^x$. ………………… 6 分

原方程的通解为 $y = C_1\mathrm{e}^{-4x} + C_2\mathrm{e}^{2x} - \frac{2}{5}\mathrm{e}^x$（$C_1, C_2$ 为任意常数）. ………………… 8 分

八、(本题满分 8 分) 将 $f(x) = \arctan\frac{1+x}{1-x}$ 展开为 x 的幂级数，并写出其收敛域.

解： $f'(x) = \dfrac{\frac{2}{(1-x)^2}}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$， $-1 < x < 1$. ……… 3 分

积分得， $f(x) - f(0) = \int_0^x f'(x)\mathrm{d}x = \int_0^x \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\mathrm{d}x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$. ……… 5 分

由 $f(0) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$，得 $f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$， $-1 < x < 1$. ……………6 分

当 $x=\pm 1$ 时，交错级数 $\pm\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 收敛．又 $f(x)$ 在 $x=1$ 处无定义，收敛域为 $[-1,1)$.

即 $f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ ， $-1\le x<1$. ……………… 8 分

注：有的题目有多种解法，以上解答和评分标准仅供参考.