南京信息工程大学
Nanjing University of Information Science & Technology

高等数学（上）

数学与统计学院　公共数学教学部

高等数学教学团队

第一节 定积分的概念与性质

1 定积分产生的背景

2 定积分的概念

3 定积分的性质

4 内容小结

定积分的概念与性质

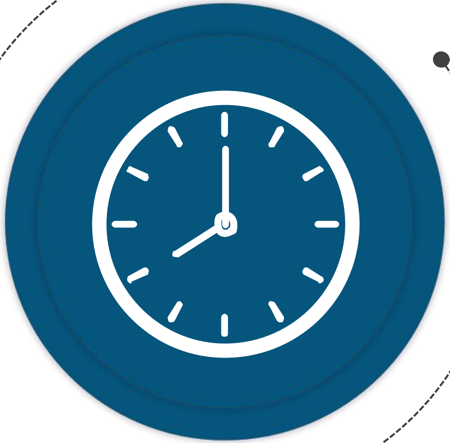
理解： 定积分的基本思想

定积分的概念、几何意义

掌握： 定积分的性质

定积分的定义计算极限

知识目标



重难点

重点： 定积分的概念与性质

定积分的几何意义

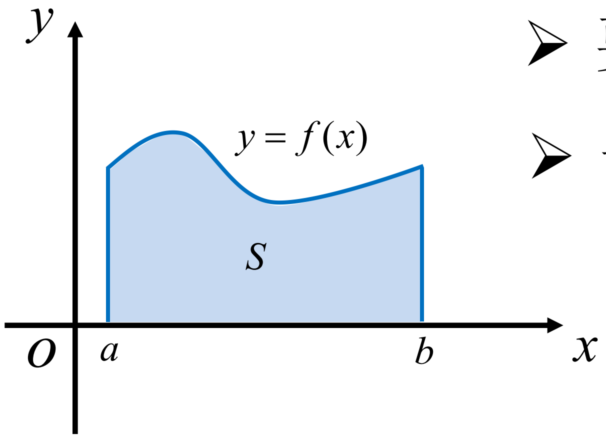
难点： 用定积分定义计算极限

积分中值定理

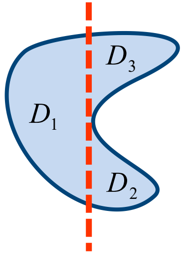
一、产生的背景

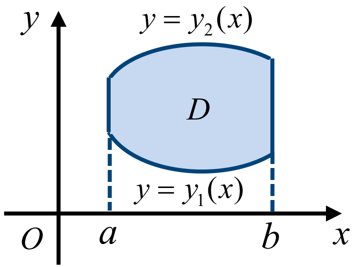
1、曲边梯形的面积

由$y=f(x)$, x轴，$x=a$，$x=b$围成.



- 要求与$//y$ 轴的直线至多有一个交点.
- 一般图形可化为曲边梯形计算面积.



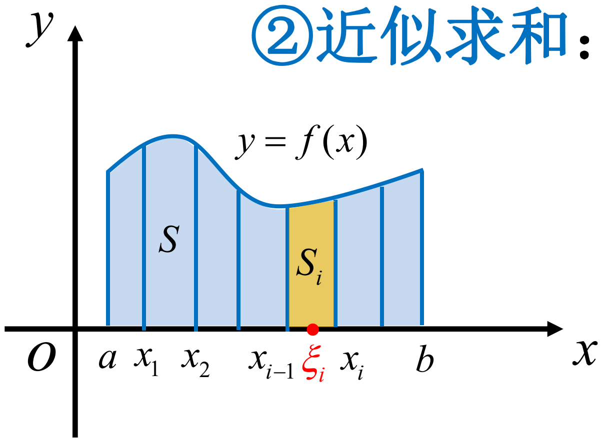


(1) 基本思想（极限思想）

- 小范围之内，以直代曲.

(2) 步骤 ①分割$[a,b]$：$a=x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n=b.$

第i个小区间为$[x_{i-1},x_i]$，区间长度$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$. $S=\sum_{i=1}^{n}S_i.$



②近似求和：$\forall \xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，$S_i\approx f(\xi_i)\Delta x_i.$

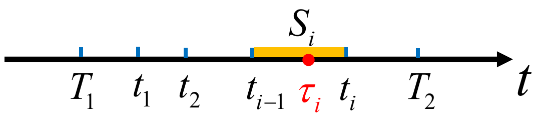
$$S=\sum_{i=1}^{n}S_i\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

③取极限：令$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta x_i$，则有

$$\boxed{S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.}$$

➢ $\lambda\to 0$与$n\to\infty$不等价.

2、变速直线运动的路程 $v(t)\in C[T_1,T_2]$.



(1) 基本思想 ➢ 小范围之内，以匀速近似代替变速.

(2) 步骤 ①分割 $[a,b]$：$T_1=t_0,t_1,t_2,\cdots,t_{n-1},t_n=T_2$.

第 i 个小区间为 $[t_{i-1},t_i]$，区间长度 $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$. $S=\sum_{i=1}^{n}S_i$.

②近似求和：$\forall\tau_i\in[t_{i-1},t_i]$，$S=\sum_{i=1}^{n}S_i\approx\sum_{i=1}^{n}v(\tau_i)\Delta t_i$.

③取极限：令 $\lambda=\max_{1\le i\le n}\Delta t_i$，则有 $\boxed{S=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}v(\tau_i)\Delta t_i.}$

二、定积分的概念

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

分割
⇩
近似求和
⇩
取极限

1、定义 设 $f(x)$在 $[a,b]$ 上有界. ①用分点将$[a,b]$分成 n 个区间，$a = x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n = b$. ② $\forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 作乘 $f(\xi_i)\Delta x_i$, 作和 $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$. ③ $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta x_i$. 令 $\lambda\to 0$, 若 $\lim\limits_{\lambda\to 0} S_n$ 存在，且与$[a,b]$的分法及 ξ_i 的取法无关， 称**极限值**为$f(x)$在$[a,b]$上的**定积分**.

- $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. 即有

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.}$$

也称 $f(x)$在 $[a,b]$ 上**可积**.

$f(x)$ --被积函数. $f(x)\mathrm{d}x$ --被积表达式.

x --积分变量. C --积分常数. $\int$ --**积分号**.

a --积分下限. b --积分上限. $[a,b]$ --积分区间.

$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ --积分和.

- 定积分--**数**. 不定积分--**原函数族**. $\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.}$
- 定积分的值不依赖于积分变量的选择.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(u)\mathrm{d}u=\cdots$$

①被积函数.
②积分区间.

- 定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$中，必有$\boxed{x\in[a,b].}$

2、可积的条件 ①$f(x)\in C[a,b]\Rightarrow$可积.

②$f(x)$在$[a,b]$有界，且只有有限个第一类间断点$\Rightarrow$可积.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

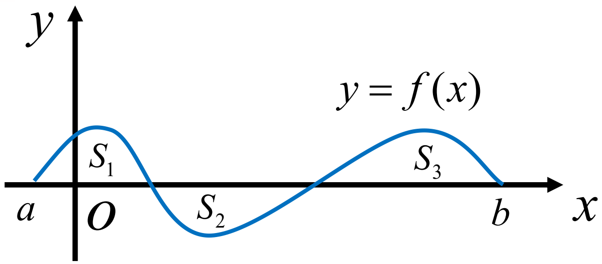
3、几何意义

①$f(x)\ge 0$时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ -- $y=f(x), x$轴，$x=a$，$x=b$围成的曲边梯形的**面积**.

②$f(x)\le 0$时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ --曲边梯形**面积的负值**.

$$S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[-f(\xi_i)]\Delta x_i = -\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

③一般，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ --各部分**面积的代数和**.（轴上为＋，下为－）



如图：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = S_1 - S_2 + S_3$, $S_i > 0$.

$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x = S_1 + S_2 + S_3$, $S_i > 0$.

4、**物理意义**　变速直线运动在时间间隔内走过的**路程**.

5、**利用定义计算定积分**　　取 n **等分**.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left[a+\frac{i}{n}(b-a)\right]\cdot\frac{b-a}{n}.$$

$$\boxed{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}.}$$

例1 利用定义计算定积分 $\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x$.（连续 $\Rightarrow$ 可积 $\Rightarrow$ 与分法及点的取法无关）

解 ① n 等分 $[0,1]$：$0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{n-1}{n},1.$ $\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]$，$\Delta x_i=\frac{1}{n}.$

②取 $\xi_i=\frac{i}{n}$，则 $S_n=\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$

③ $\lambda=\frac{1}{n}$，$\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}\boxed{=\frac{1}{3}.}$

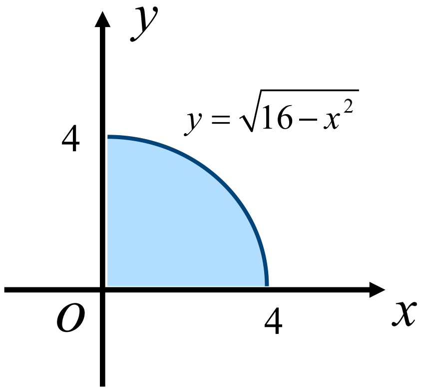
例2 利用几何意义计算定积分 $\int_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx.$

解 由几何意义，该定积分表示由圆周 $y=\sqrt{16-x^2}$，x 轴，

$x=0$，$x=4$ 所围成的曲边梯形的**面积**.

即四分之一圆的面积.

原式 $=\dfrac{1}{4}\times\pi\times4^2 \boxed{=4\pi.}$



例3 利用定积分表示下列极限：① $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}$.

② $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$. ③ $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-i^2}}$.

$$\boxed{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}.}$$

解 ①原式 $\boxed{=\int_0^1\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x.}$

②原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^p\cdot\frac{1}{n}$

$\boxed{=\int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x.}$

③原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{i}{n}\right)^2}}\cdot\frac{1}{n}$

$\boxed{=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}.}$

三、定积分的性质

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i}$$

1、 $\boxed{\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.}$

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\Delta x_i = k\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

2、 $\boxed{\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.}$

➢ 定积分本质为极限，可推广到有限个函数的线性组合.

定积分的概念与性质

3、若 $f(x)$ 在 $[a,c],[c,b]$ 及 $[a,b]$ 上均可积，$a<c<b$，则有

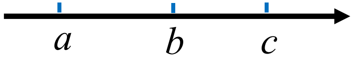
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

区间可加性

➢ 为应用方便，**规定**：

①$a=b$ 时，$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0.$ ②$a>b$ 时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x.$

➢ 区间可加性对 a,b,c 的**任意次序**均成立.



如： $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$

4、若 $f(x)\equiv 1$，则 $\boxed{\int_a^b \mathrm{d}x = b-a.}$

①几何意义.
②定义证明.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

5、若 $\forall x\in[a,b], f(x)\geq 0$，则 $\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0.}$

Cor1 若 $\forall x\in[a,b], f(x)\leq g(x)$，则 $\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.}$

如：比较大小 $\int_0^1 x\mathrm{d}x$ __>__ $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x.$

保号性

Cor2 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，则 $|f(x)|$ 也可积，且

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.}$$

$$\Leftarrow -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

Cor3 若 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上最值为m, M, 则有

$$\boxed{m(b-a) \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M(b-a).}$$

估值性

例4 估计定积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 \mathrm{d}x$ 的大致范围.

解 $y = x^2$ 在$\left[\frac{1}{2}, 1\right]$上单调递增, $m = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}, M = f(1) = 1.$

$$\frac{1}{4} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \le \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 \mathrm{d}x \le 1 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \boxed{\Rightarrow \frac{1}{8} \le \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 \mathrm{d}x \le \frac{1}{2}.}$$

6、设 $f(x)\in C[a,b]$，则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，

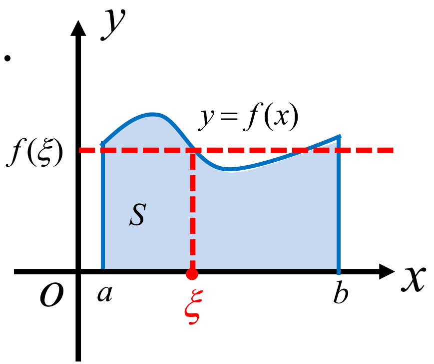
积分中值定理

$$\boxed{\ni \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).}$$

分析 即证 $\boxed{f(\xi)=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.}$ —— $f(x)$ **在** $[a,b]$ **上的平均值**.

$$f(x)\in C[a,b],\quad m(b-a)\le\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le M(b-a).$$

$$m\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le M.$$



由闭区间上连续函数的**介值性**，可得.

四、内容小结

- 定积分产生的背景、基本思想 $\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i}$
- 定积分的定义、几何意义、物理意义
- 利用定积分的定义计算极限 $\boxed{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}.}$
- 定积分的性质

思考题：

1、比较大小 $\int_1^2 x^2 dx$ ___ $\int_1^2 x^3 dx$. 【答：< 】

2、求证：$1 \le \int_0^1 e^{x^2} dx \le e$. 【答：利用估值性或积分中值定理】

3、判断 $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 \ln x dx$ 的符号. 【答：< 】

4、计算 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_n^{n+a} x \sin\frac{1}{x} dx$. 【答：$a$ 】

南京信息工程大学
Nanjing University of Information Science & Technology

不积跬步，
无以至千里。
不积小流，
无以成江海。