第三部分 微分中值定理与导数的应用

一、 中值等式的证明

二、利用导数讨论函数的性质及曲线的性态

三、一元函数的最值问题

四、函数的零点问题

五、不等式的证明

六、泰勒公式

一、 中值等式的证明

方法：构造辅助函数利用中值定理

1、利用罗尔定理证明中值等式

例1、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在(a,b)上可导，$f(a)=f(b)=0$, 证明 $\exists\xi\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)+\xi f(\xi)=0$.

证明：令 $\varphi(x)=e^{\frac{x^2}{2}}f(x)$，利用罗尔定理即可。

注

常用辅助函数：$x^k f(x),(x-a)^k f(x),f(x)e^{g(x)}$, $f(x)g(x),e^{kx^n}f(x),\dfrac{f(x)}{x},\dfrac{f(x)}{g(x)}$等.

构照辅助函数方法一：原函数法

把$f'(\xi)+\xi f(\xi)=0$中ξ换成x,即

$$f'(x)+xf(x)=0 \quad (一阶齐次线性方程)$$

$$\Rightarrow f(x)=Ce^{-\int xdx}=Ce^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$\Rightarrow f(x)e^{\frac{1}{2}x^2}=C$$

令$\varphi(x)=e^{\frac{x^2}{2}}f(x)$，利用罗尔定理即可。

注：一阶齐次线性方程 $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=0.$

通解：$y=Ce^{-\int P(x)dx}.$

例2、设$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，$f(0)=f(1)$，证明

$$\exists \xi \in (0,1),\text{使得} f''(\xi)=\frac{2f'(\xi)}{1-\xi}$$

分析　把上式改写成$f''(x)+\dfrac{2}{x-1}f'(x)=0$

$$f'(x)=Ce^{-\int\frac{2}{x-1}dx}=\frac{C}{(x-1)^2}$$

证明　　令$F(x)=(x-1)^2 f'(x)$

$f(x)$在$[0,1]$上利用罗尔定理$\exists c\in(0,1)$，使得$f'(c)=0$

$F(x)$在$[c,1]$上利用罗尔定理:

$$\exists \xi \in (c,1),\text{使得} F''(\xi)=0,\text{即} f''(\xi)=\frac{2f'(\xi)}{1-\xi}$$

例3 设$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，$f(0)=0, f(1)=1,$

证明$\exists \xi \in (0,1)$, 使得$\xi f''(\xi)+(1+\xi)f'(\xi)=1+\xi$

$\boxed{\text{竞赛题}}$

分析 把上式改写成 $f''(x)+\dfrac{1+x}{x}f'(x)=\dfrac{1+x}{x}$

$$f'(x)=e^{-\int(1+\frac{1}{x})dx}\left[C+\int\frac{1+x}{x}e^{\int(1+\frac{1}{x})dx}dx\right]$$

$$=\frac{1}{x}e^{-x}(C+xe^{x})=\frac{C}{xe^{x}}+1 \Rightarrow xe^{x}[f'(x)-1]=C$$

注： 一阶非齐次线性方程 $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$

通解为：$y=e^{-\int P(x)dx}\left[C+\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx\right]$

证明 令$g(x)=f(x)-x$在$[0,1]$上利用罗尔定理

$\exists c\in(0,1)$,使得$g'(c)=0$,即$f'(c)=1$

再令$F(x)=xe^{x}[f'(x)-1]$

$F(x)$在$[0,c]$上利用罗尔定理:

$\exists\xi\in(0,c)$,使得$F'(\xi)=0$,

即$\xi f''(\xi)+(1+\xi)f'(\xi)=1+\xi$

例4 设$a<b<c, f(x)$在$[a,c]$上有二阶导数，证明$\xi\in(a,c)$,

$$\frac{f(a)}{(a-b)(c-a)}+\frac{f(b)}{(b-c)(a-b)}+\frac{f(c)}{(c-a)(b-c)}=-\frac{1}{2}f''(\xi)$$

构照辅助函数方法二：常数k值法

证明 令 $\frac{f(a)}{(a-b)(c-a)}+\frac{f(b)}{(b-c)(a-b)}+\frac{f(c)}{(c-a)(b-c)}=k$

$$f(a)(b-c)+f(b)(c-a)+f(c)(a-b)-k(a-b)(b-c)(c-a)=0$$

$$F(x)=f(a)(b-x)+f(b)(x-a)+f(x)(a-b)-k(a-b)(b-x)(x-a)$$

$F(a)=F(b)=F(c)=0$ $\exists\xi_1\in(a,b),\xi_2\in(b,c)$,

$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$ 利用罗尔定理$\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,c)$,

$F''(\xi)=0 \quad \Rightarrow -\frac{1}{2}f''(\xi)=k$

例5 设$f(x)$在$[0,c]$上二阶可导，证明$\xi\in(0,c)$,

$$使\int_0^c f(x)dx=\frac{c}{2}(f(0)+f(c))-\frac{c^3}{12}f''(\xi)$$

证明 记$\frac{6}{c^2}(f(0)+f(c))-\frac{12}{c^3}\int_0^c f(x)dx=k$

$$\Rightarrow\frac{c}{2}(f(0)+f(c))-\int_0^c f(x)dx=\frac{c^3}{12}k$$

令$F(x)=\int_0^x f(t)dt-\frac{x}{2}(f(0)+f(x))+\frac{k}{12}x^3$

$\because F(0)=F(c)=0$ 由罗尔定理$\xi_1\in(0,c),F'(\xi_1)=0$

又$F'(x)=f(x)-\frac{1}{2}(f(0)+f(x))-\frac{x}{2}f'(x)+\frac{k}{4}x^2$

$F'(0)=F'(\xi_1)=0$ 由罗尔定理$\xi\in(0,\xi_1)$,

使得$F''(x)\Big|_{x=\xi}=-\frac{x}{2}f''(x)+\frac{k}{2}x\Big|_{x=\xi}=0$ 即$f''(\xi)=k$

例6 设$f(x)$在$[a,b]$上连续, 在(a,b)上二阶可导, 且

$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\frac{a+b}{2})$,证明:$\exists\xi\in(a,b)$,使得$f''(\xi)=0$

期末试题

证明 令$F(x)=\int_a^x f(t)dt-(x-a)f(\frac{a+x}{2})$

$F(x)$在$[a,b]$上利用罗尔定理$\exists c\in(0,1)$,使得$F'(c)=0$

$$\because F'(x)=f(x)-f(\frac{a+x}{2})-\frac{x-a}{2}f'(\frac{a+x}{2})$$

$$\Rightarrow f(c)-f(\frac{a+c}{2})=\frac{c-a}{2}f'(\frac{a+c}{2})$$

$f(x)$在$[\frac{a+c}{2},c]$上利用拉格朗日中值定理: $\exists d\in(\frac{a+c}{2},c)$

使得$f(c)-f(\frac{a+c}{2})=f'(d)(c-\frac{a+c}{2})=\frac{c-a}{2}f'(d)$

$\Rightarrow f'(\frac{a+c}{2})=f'(d)$ $f'(x)$在$[\frac{a+c}{2},d]$上利用罗尔定理得证.

构照辅助函数方法三：构造变限积分法

2 利用拉格朗日、柯西中值定理

例1 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，证明:

$$\exists \xi \in (a,b), \text{使} f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{b - \xi}.$$

分析：要证$f'(\xi) = \dfrac{f(\xi) - f(a)}{b - \xi}$

$$\Leftrightarrow f(\xi) + f'(\xi)(\xi - b) = f(a).$$

证明：令$\varphi(x) = (x - b) f(x)$，在$[a,b]$利用拉格朗日值定理。

注:也可用罗尔定理

$$f(x) + f'(x)(x - b) = f(a).$$

--------一阶非齐次线性微分方程

令$\varphi(x) = (x - b) f(x) - f(a)x$在$[a,b]$利用罗尔定理。

例2 设$f(x)$在$[a,b]$上可导，$a,b>0$，证明$\exists \xi \in (a,b)$，

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = f(\xi)-\xi f'(\xi)$$

证明 令$F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$，$G(x)=\dfrac{1}{x}$

在$[a，b]$上由柯西中值定理得

$$\frac{\dfrac{f(b)}{b}-\dfrac{f(a)}{a}}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}} = \frac{\dfrac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}}{-\dfrac{1}{\xi^2}}$$

$$\frac{af(b)-bf(a)}{a-b} = f(\xi)-\xi f'(\xi)$$

注：

令$\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}=k$

令$F(x)=\dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{k}{x}$

用罗尔定理也可

3 利用拉格朗日结合其它定理

例1 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$上可导，$f(0)=0$，$f(1)=1$，对任意给定的正数a,b，证明$\exists\xi_1,\xi_2\in(0,1)$，且$\xi_1\neq\xi_2$，使$\dfrac{a}{f'(\xi_1)}+\dfrac{b}{f'(\xi_2)}=a+b$

证明 $f(0)=0<\dfrac{a}{a+b}<1=f(1)$

由介值定理：$\exists\xi\in(0,1)$，使得$f(\xi)=\dfrac{a}{a+b}$

对$f(x)$分别在$[0,\xi]$，$[\xi,1]$上应用拉格朗日中值定理

$$f(\xi)-f(0)=f'(\xi_1)(\xi-0)$$

$$f(1)-f(\xi)=f'(\xi_2)(1-\xi)\quad 0<\xi_1<\xi<\xi_2<1),$$

$$左边=\frac{\frac{a}{a+b}-0}{f'(\xi_1)}+\frac{1-\frac{a}{a+b}}{f'(\xi_2)}=\frac{f(\xi)-f(0)}{f'(\xi_1)}+\frac{f(1)-f(\xi)}{f'(\xi_2)}$$

$$=\xi+1-\xi=1$$

$$\Rightarrow\frac{a}{f'(\xi_1)}+\frac{b}{f'(\xi_2)}=a+b$$

例2 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$上可导，$f(0)=0, f(1)=1$,对任意给定的n个正数$a_1,a_2\cdots a_n$,证明∃互不相等的$\xi_1,\xi_2\cdots\xi_n\in(0,1)$,使

$$\frac{a_1}{f'(\xi_1)}+\frac{a_2}{f'(\xi_2)}+\cdots\frac{a_n}{f'(\xi_n)}=a_1+a_2\cdots+a_n$$

提示 $\dfrac{a_1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{a_2}{f'(\xi_2)}+\cdots\dfrac{a_n}{f'(\xi_n)}=a_1+a_2\cdots+a_n$变形为

$$\frac{\dfrac{a_1}{a_1+a_2\cdots+a_n}}{f'(\xi_1)}+\frac{\dfrac{a_1+a_2}{a_1+a_2\cdots+a_n}-\dfrac{a_1}{a_1+a_2\cdots+a_n}}{f'(\xi_2)}+\cdots$$

$$+\frac{\dfrac{a_1+a_2\cdots+a_n}{a_1+a_2\cdots+a_n}-\dfrac{a_1+a_2\cdots+a_{n-1}}{a_1+a_2\cdots+a_n}}{f'(\xi_n)}=1$$

$$0<\frac{a_1}{a_1+a_2\cdots+a_n}<1 \qquad \frac{a_1}{a_1+a_2\cdots+a_n}-0=f(\eta_1)-f(0)$$

$$\frac{a_1+a_2}{a_1+a_2\cdots+a_n}-\frac{a_1}{a_1+a_2\cdots+a_n}=f(\eta_2)-f(\eta_1)\cdots$$

例2 设$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，$f(0)=0, f(1)=1,$

$\int_0^1 x^2 f(x)dx=0$证明$\exists\xi\in(0,1)$, 使得$f''(\xi)=10$

证明 $F(x)=f(x)-(5x^2-4x)$

$$F(0)=0, F(1)=0$$

$$\int_0^1 x^2F(x)dx=\int_0^1 x^2[f(x)-5x^2+4x]dx=0$$

$\underline{\underline{c\in(0,1)}}$ $c^2F(c)=0$ 即$F(c)=0$ (积分中值定理）

$F(x)$分别在$[0,c],[c,1]$上利用罗尔定理:

$\exists\xi_1\in(0,c),\xi_2\in(c,1)$, 使得$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$

$F'(x)$分别在$[\xi_1,\xi_2]$上利用罗尔定理得证