2023年本科一级A

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

专业________ 班级_______ 学号_________ 姓名___________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

得 分

一、计算下列各题（本大题分7小题，每题7分，共49分）

1、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\sin x)-\sin(\sin x)}{x-\sin x}$

解：令 $\sin x = t$

原式 $=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\tan t-\sin t}{\arcsin t-t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\tan t(1-\cos t)}{\arcsin t-t}$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}t^3}{\arcsin t-t}==\lim_{t\to 0}\frac{\frac{3}{2}t^2}{\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}-1}=\frac{3}{2}\lim_{t\to 0}\frac{t^2\sqrt{1-t^2}}{1-\sqrt{1-t^2}}=\frac{3}{2}\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{\frac{1}{2}t^2}=3$$

或原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\sin x)-\sin(\sin x)}{\frac{1}{6}x^3}$

令 $\sin x = t$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\tan t(1-\cos t)}{\frac{1}{6}t^3}=3$$

2、设 $y=f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)>0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{f(\frac{1}{n})f(\frac{2}{n})\ldots f(\frac{n-1}{n})f(1)}$.

解：令 $y_n=\sqrt[n]{f(\frac{1}{n})f(\frac{2}{n})\ldots f(\frac{n-1}{n})f(1)}$, 则

$$\ln y_n=\frac{1}{n}\left[\ln f(\frac{1}{n})+\ln f(\frac{2}{n})+\ldots+\ln f(\frac{n-1}{n})+\ln f(\frac{n}{n})\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\ln f(\frac{i}{n})\cdot\frac{1}{n}$$

且 $\lim_{n\to\infty}\ln y_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln f(\frac{i}{n})\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\ln f(x)dx$

于是有 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f(\frac{1}{n})f(\frac{2}{n})\dots f(\frac{n-1}{n})f(1)}=\lim_{n\to\infty}y_n=e^{\int_0^1\ln f(x)dx}$

3、设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=2t+t^2, \\ 2t-\int_0^{y+t}e^{-u^2}du=0, \end{cases}$（$t\geq 0$）确定，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$，$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$.

解：由方程组，$t=0$ 时，$x=0, y=0.$

方程组两个边对 t 求导：

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=2+2t, \\ 2-e^{-(y+t)^2}(\frac{dy}{dt}+1)=0, \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt}=2+2t, \\ \frac{dy}{dt}=2e^{(y+t)^2}-1, \end{cases} \quad \begin{cases} \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=2, \\ \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}=1, \end{cases}$$

从而 $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2e^{(y+t)^2}-1}{2+2t}, \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\left.\frac{2e^{(y+t)^2}-1}{2+2t}\right|_{\substack{t=0\\x=0\\y=0}}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{2e^{(y+t)^2}-1}{2+2t}\right)}{2+2t}$$

$$=\frac{1}{4}\frac{\left[4(y+t)e^{(y+t)^2}(\frac{dy}{dt}+1)\right](t+1)-(2e^{(y+t)^2}-1)}{(1+t)^3}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=-\frac{1}{4}.$$

4、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x dt\int_t^x e^{(t-u)^2}du}{\sqrt{1+\sin x^2}-1}$

解：$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \mathrm{d}t\int_t^x \mathrm{e}^{(t-u)^2}\mathrm{d}u}{\sqrt{1+\sin x^2}-1}==\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \mathrm{d}u\int_0^u \mathrm{e}^{(t-u)^2}\mathrm{d}t}{\frac{1}{2}x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \mathrm{e}^{(t-x)^2}\mathrm{d}t}{x}$$

$$\underline{\underline{t-x=s}}\ \lim_{x\to 0}\frac{\int_{-x}^0 \mathrm{e}^{s^2}\mathrm{d}s}{x}=1.$$

5、 $\int\dfrac{xe^x}{(1+x)^2}dx$

解：原式$=\int\dfrac{(x+1)e^x-e^x}{(1+x)^2}dx=\int\dfrac{e^x}{1+x}dx-\int\dfrac{e^x}{(1+x)^2}dx$

$$=\int\frac{e^x}{1+x}dx+\int e^x d\left(\frac{1}{1+x}\right)=\int\frac{e^x}{1+x}dx+\frac{e^x}{1+x}-\int\frac{e^x}{1+x}dx=\frac{e^x}{1+x}+C.$$

6、$\int_0^1\dfrac{\arctan x}{(1+x^2)^2}dx$

解 $$\int_0^1\frac{\arctan x}{(1+x^2)^2}dx\ \underline{\underline{令\arctan x=t}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}t\cos^2 t\,dt$$

$$=\left.[\frac{t^2}{4}+\frac{1}{4}t\sin 2t+\frac{1}{8}\cos 2t)]\right|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^2}{64}+\frac{\pi}{16}-\frac{1}{8}$$

7、$f(x)$在$[a,b]$上连续，（1） 证明$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_0^a[f(x)+f(-x)]dx.$ （2）计算$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin^5 x\cdot\arctan(e^x)dx$

解： （1）$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{0} f(x)dx+\int_0^a f(x)dx$ 前者令$x=-t$，得证

或者：记$p(x)=f(x)+f(-x),\quad q(x)=f(x)-f(-x),$ 则易见$p(x)$为偶函数，$q(x)$为奇函数，且$f(x)=\dfrac{p(x)+q(x)}{2}.$ 所以

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\frac{1}{2}[\int_{-a}^{a} p(x)dx+\int_{-a}^{a} q(x)dx]=\int_0^a p(x)dx=\int_0^a[f(x)+f(-x)]dx$$

（2）原式 $=\int_0^{\pi} x\sin^5 x\cdot\arctan(e^x)dx+\int_0^{\pi}(-x)\sin^5(-x)\cdot\arctan(e^{-x})dx$

$=\int_0^{\pi} x\sin^5 x\cdot[\arctan(e^x)+\arctan(e^{-x})]dx$

$=\int_0^{\pi} x\sin^5 x\cdot[\arctan(e^x)+\arctan(\frac{1}{e^x})]dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} x\sin^5 xdx$

$=(\frac{\pi}{2})^2\int_0^{\pi}\sin^5 xdx=2(\frac{\pi}{2})^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 xdx=2(\frac{\pi}{2})^2\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{4\pi^2}{15}.$

得 分

二、（9 分）设$0<x_0<y_0\le\dfrac{\pi}{2}$,用递推公式$x_{n+1}=\sin x_n$和$y_{n+1}=\sin y_n$，$(n=0,1,2,\cdots)$生成两个数列$\{x_n\},\{y_n\}$，证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=1$.

证明: （1）因为$0<x_0<\dfrac{\pi}{2}$, 假设$0<x_n<\dfrac{\pi}{2}$, 则$0<x_{n+1}=\sin x_n<x_n<\dfrac{\pi}{2}$, 即数列$\{x_n\}$单调减有下界，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在．设为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则由$A=\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=\sin(\lim\limits_{n\to\infty}x_n)=\sin A,$ 所以 $A=0.$ 同理$\{x_n\}$单调减，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0.$

（2） 因为 $0<x_0<y_0$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$, 所以存在正整数$k$,使得$0<y_k<x_0<y_0$, 则

由归纳法可知，$0<y_{n+k}<x_n<y_n$，（k 固定，$n=1,2,\cdots,$）于是 $0<\dfrac{y_{n+k}}{y_n}<\dfrac{x_n}{y_n}<1,$

而由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_{n+1}}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin y_n}{y_n}=1,$ 可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+k}}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+k}}{y_{n+k-1}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+k-1}}{y_{n+k-2}}\cdot\cdots\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+2}}{y_{n+1}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}}{y_n}=1,$$

所以由夹逼准则，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=1$

得 分

三、（9 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶连续导数，且 $f(0)=0,\ f(1)=1,$ $\int_0^1 f(x)dx=1,$ 证明：(1) 存在 $\xi\in(0,1),$ 使得 $f'(\xi)=0;$ (2) 存在 $\eta\in(0,1),$ 使得 $f''(\eta)<-2.$

证明：(1) 应用积分中值定理，必存在 $c\in(0,1),$ 使得

$\int_0^1 f(x)dx=f(c)(1-0)=f(c)\ \Rightarrow f(c)=1.$ 因 $f(x)$ 在 $[c,1]$ 上可导，

$f(c)=f(1),$ 应用罗尔定理，必存在 $\xi\in(c,1)\subset(0,1),$ 使得 $f'(\xi)=0.$

(2) 作辅助函数 $F(x)=f(x)+x^2,$ 则 $F'(x)=f'(x)+2x,\ F''(x)=f''(x)+2,$

因 $F(x)$ 在 $[0,c]$ 上可导，$F(0)=0,$ $F(c)=1+c^2,$ 应用拉格朗日中值定理，必存在 $d\in(0,c),$ 使得 $F'(d)=\dfrac{F(c)-F(0)}{c-0}=\dfrac{1+c^2}{c}.$ 因 $F'(x)$ 在 $[d,\xi]$ 上可导，应用拉格朗日中值定理，必存在 $\eta\in(d,\xi)\subset(0,1),$ 使得

$$F''(\eta)=\frac{F'(\xi)-F'(d)}{\xi-d}=\frac{2\xi-\dfrac{1+c^2}{c}}{\xi-d}=\frac{2\xi c-(1+c^2)}{(\xi-d)c}.$$

又由于 $F''(\eta)=f''(\eta)+2,$ 且 $0<d<c<\xi<1,$ 我们有

$$f''(\eta)+2=\frac{2\xi c-(1+c^2)}{(\xi-d)c}<\frac{\xi^2+c^2-(1+c^2)}{(\xi-d)c}=\frac{(\xi-1)(\xi+1)}{(\xi-d)c}<0.$$

于是 $f''(\eta)<-2$.

得 分

四、（**8 分**） 设二元函数 $f(x,y)$ 在 R^2 上有连续的二阶偏导数，且 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=f(0,0)=0$，证明：

$$f(x,y)=\int_0^1(1-t)(x^2 f_{xx}(tx,ty)+2xyf_{xy}(tx,ty)+y^2 f_{yy}(tx,ty))dt$$

证明: 由于 $f(x,y)$ 在 R^2 上有连续的二阶偏导数，于是

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(tx,ty)}{\mathrm{d}t^2}=x^2 f_{xx}(tx,ty)+2xyf_{xy}(tx,ty)+y^2 f_{yy}(tx,ty)$$

从而

$$\int_0^1(1-t)(x^2 f_{xx}(tx,ty)+2xyf_{xy}(tx,ty)+y^2 f_{yy}(tx,ty))\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^1(1-t)\frac{\mathrm{d}^2 f(tx,ty)}{\mathrm{d}t^2}\mathrm{d}t=\int_0^1(1-t)\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}f(tx,ty)}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$=(1-t)\frac{\mathrm{d}f(tx,ty)}{\mathrm{d}t}\bigg|_0^1-\int_0^1\frac{\mathrm{d}f(tx,ty)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}(1-t)$$

$$=0-xf_x(tx,ty)+xf_y(tx,ty)\Big|_{t=0}+\int_0^1\ \mathrm{d}f(tx,ty)$$

$$=0-(xf_x(0,0)+yf_y(0,0))+f(tx,ty)\Big|_0^1=f(x,y)-f(0,0)=f(x,y).$$

得 分

五、（9 分）设 $f''(x)$ 连续，且 $f''(x)>0,\ f(0)=f'(0)=0,$ 试求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^{u(x)}f(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$，其中 $u(x)$ 是曲线 $y=f(x)$ 点 $(x,f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距.

解：曲线 $y=f(x)$ 点 $(x,f(x))$ 处的切线为 $Y-f(x)=f'(x)(X-x)$. 令 $Y=0$,

得 $X=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$，即 $u(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$，$u'(x)=\dfrac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$.

法 I：应用 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的麦克劳林公式，有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2)=\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2),$$

$$f'(x)=f'(0)+f''(0)x+o(x)=f''(0)x+o(x),$$

因此，$u(x)=x-\dfrac{\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2)}{f''(0)x+o(x)}$，且当 $x\to 0$ 时，有

$$\frac{u(x)}{\frac{x}{2}}=2-\frac{f''(0)x+o(x)}{f''(0)x+o(x)}\to 1,$$ 故 $u(x)=\dfrac{x}{2}+o(x)$，且 $\lim\limits_{x\to 0^+}u(x)=0$.

因此，$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{u(x)}f(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(u(x))u'(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(u(x))}{[f'(x)]^2}\cdot f''(x)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}f''(0)u^2(x)+o(u^2(x))}{[f''(0)x+o(x)]^2}\cdot f''(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}f''(0)(\frac{x}{2})^2+o(x^2)}{[f''(0)x+o(x)]^2}\cdot f''(0)=\frac{1}{8}.$$

法 II：因为 $$\lim_{x\to 0^+}\frac{u(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}[1-\frac{f(x)}{xf'(x)}]=1-\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{xf'(x)}=1-\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)}{f'(x)+xf''(x)}$$

$$=1-\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+x\frac{f''(x)}{f'(x)}}=1-\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+\frac{f''(x)}{\frac{f'(x)-f'(0)}{x}}}=1-\frac{1}{1+\frac{f''(0)}{f''(0)}}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

所以 $u(x)\sim\dfrac{1}{2}x(x\to 0)$，且 $\lim\limits_{x\to 0^+}u(x)=0$.

又 $$\lim_{x\to 0^+}u'(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{[f'(x)]^2}\cdot f''(0)=f''(0)\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)}{2f'(x)f''(x)}$$

$$=f''(0)\cdot\lim_{x\to0^+}\frac{1}{2f''(x)}=\frac{1}{2}.$$

所以

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{u(x)}f(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(u(x))u'(x)}{f(x)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0^+}\frac{f'(u(x))u'(x)}{f'(x)}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{f'(u(x))-f'(0)}{u(x)}}{\frac{f'(x)-f'(0)}{x}}\cdot\frac{u(x)}{x}=\frac{1}{4}\frac{f''(0)}{f''(0)}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}.$$

得 分

六、（8 分）函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且对于 $t\in[0,1]$ 及 $x_1,x_2\in[a,b]$ 满足 $f(tx_1+(1-t)x_2)\le tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$. 证明：

$$f(\frac{a+b}{2})\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le\frac{1}{2}(f(a)+f(b))$$

证明 令 $x=a+t(b-a)$, 则有

$$\int_a^b f(x)dx=\int_0^1 f[a+t(b-a)]\cdot(b-a)dt\le(b-a)\int_0^1[(1-t)f(a)+tf(b)]dt$$

$$\le\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)],$$

所以 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le\frac{1}{2}(f(a)+f(b))$，右边不等式成立。

又令 $x=a+b-u$，有

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(x)dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx=\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(a+b-u)du+\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx$$

$$=2\int_{\frac{a+b}{2}}^b[\frac{1}{2}f(a+b-x)+\frac{1}{2}f(x)]dx\ge2\int_{\frac{a+b}{2}}^b[f\left(\frac{1}{2}(a+b-x)+\frac{1}{2}x\right)dx$$

$$=2\int_{\frac{a+b}{2}}^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx=f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a),$$

所以 $f(\frac{a+b}{2}) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$，左边不等式成立。

得 分

七、**（8 分）**.计算二重积分 $\iint_D \frac{1-x^3y^2}{(y+2\sqrt{1-x^2})^2}dxdy$，其中

D：$x^2+y^2 \le 1, -y \le x \le y.$

解：由奇偶对称性

原式 $=2\iint_{D(x\ge 0)} \frac{1}{(y+2\sqrt{1-x^2})^2}dxdy+0$

$$=2\iint_{D(x\ge 0)} \frac{1}{(y+2\sqrt{1-x^2})^2}dxdy+0$$

$$=2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_x^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{(y+2\sqrt{1-x^2})^2}dy$$

$$=-2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{1}{y+2\sqrt{1-x^2}}\Bigg|_x^{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$$

$$=2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{x+2\sqrt{1-x^2}}dx-\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

第一个积分令 $x=\sin t$，

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{x+2\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos t}{\sin t+2\cos t}dt=\frac{1}{5}\ln 3-\frac{3}{10}\ln 2+\frac{\pi}{10}.$$

原式 $=2(\frac{1}{5}\ln 3-\frac{3}{10}\ln 2+\frac{\pi}{10})-\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{2}{5}\ln 3-\frac{3}{5}\ln 2+\frac{\pi}{30}.$