

期末试卷样卷

_____ 学院 _____ 专业 _____ 班
学号 _____ 姓名 _____ 得分 _____

一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1、 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2、设 L 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$, 则 $\oint_L (x^2 + y^2)^n ds = \underline{\hspace{2cm}}.$

3、设 $\vec{A} = (x^2 + yz)\vec{i} + (y^2 + xz)\vec{j} + (z^2 + xy)\vec{k}$, 则 $\operatorname{div} \vec{A} = \underline{\hspace{2cm}}.$

4、级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n+2}$ 的收敛半径是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

5、设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数, 在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为 $f(x) = x$, 若 $f(x)$ 的傅立叶级数的和函数记为 $S(x)$, 则 $S(-\pi) = \underline{\hspace{2cm}}.$

二、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1、设函数 $f(x, y) = 2x^2 + ax + xy^2 + 2y$ 在点 $(1, -1)$ 取得极值, 则常数 $a = (\quad)$.

(A) -1 ; (B) 1 ; (C) 5 ; (D) -5 .

2、函数 $f(x, y) = xy + 2$ 在点 $(1, 2)$ 处取得的最大方向导数值为 (\quad) .

(A) 3 ; (B) $\sqrt{5}$; (C) 5 ; (D) 2 .

3、设 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, 则 $\oiint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) ds = (\quad)$.

(A) $4\pi R^4$; (B) $\iiint_{\Omega} R^2 dr$;

(C) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^R r^4 \sin \varphi dr$; (D) $\frac{4\pi R^5}{3}$.

4、函数 $f(x) = \frac{1}{1+2x}$ 在点 $x=0$ 处的幂级数展开式为 (\quad) .

(A) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n, |x| < 2$; (B) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n x^n, |x| < \frac{1}{2}$;

$$(C) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{n+1} x^n, \quad |x| < \frac{1}{2};$$

$$(D) \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} x^n, \quad |x| < 2.$$

5、若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x-2)^n$ 在 $x=-2$ 处收敛, 则此级数在 $x=5$ 处().

(A) 一定发散;

(B) 一定条件收敛;

(C) 一定绝对收敛;

(D) 收敛性不能确定.

三、计算题 (每小题 6 分, 共 30 分)

1、设 z 是由方程 $x+y-z=e^z$ 所确定的 x, y 的函数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 及 dz .

2、求曲面 $z-e^z+2xy=3$ 在点 $(1, 2, 0)$ 处的切平面方程.

3、求由圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和抛物面 $z=x^2+y^2$ 所围立体的体积.

4、判断数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\sqrt{n^2 + n}}$ 的敛散性, 若收敛, 是绝对收敛还是条件收敛?

5、求方程 $y'' + 2y' + 5y = 0$ 的通解.

四、(本题 8 分) 求方程 $xy' + (1-x)y = e^{2x}$ ($0 < x < +\infty$) 满足 $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = 1$ 的解.

五、(本题 8 分) 设曲线积分 $\int_c xy^2 dx + y\varphi(x)dy$ 与路径无关, 其中 $\varphi(x)$ 具有连续的导数, 且 $\varphi(0) = 0$, 计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2 dx + y\varphi(x)dy$ 的值.

六、(本题 8 分) 求 $\iint_{\Sigma} (z^2 + x)dydz - z dx dy$, Σ 是 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 介于 $z = 0$ 及 $z = 2$ 之间部分的下侧.

七、(本题 8 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3n}$ 的收敛域及和函数.

八、(本题 8 分) 设 $f(t)$ 连续可导, 且

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \iint_{x^2+y^2 \leq t^2} f\left(t - \sqrt{x^2 + y^2}\right) dx dy + t, \text{ 求 } f(t).$$