南京信息工程大学 2022-2023 学年第二学期

《高等数学 I（2）》（理工）期末 B 卷参考答案及评分标准

一、填空题 (每小题 3 分，共 24 分)

1. 曲线 L：$\begin{cases} y = x \\ z = 0 \end{cases}$ 绕 x 轴旋转一周所形成的旋转曲面的方程为 $\underline{\quad x^2 = y^2 + z^2 \quad}$.

2. 曲面 $z = x^2 + y^2 - 1$ 在点 $(2,1,4)$ 处的切平面方程为 $\underline{\quad 4x + 2y - z - 6 = 0 \quad}$.

3. 二次积分 $\int_1^3 \mathrm{d}x \int_{x-1}^2 \sin y^2 \mathrm{d}y = \underline{\quad \dfrac{1}{2}(1-\cos 4) \quad}$.

4. 函数 $f(x) = \dfrac{1}{1+2x}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数为 $\underline{\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{2^n}{3^{n+1}}(x-1)^n,\ \left(-\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{5}{2}\right) \quad}$.

5. 已知 $\Sigma : z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$，则 $\iint\limits_{\Sigma} z \mathrm{d}S = \underline{\quad \pi R^3 \quad}$.

6. 设 $(3x + ky)dx + (x + 2y)dy = 0$ 为全微分方程，则其通解为 $\underline{\quad \dfrac{3x^2}{2} + y^2 + xy = C \quad}$.

7. 设函数 $f(x)$ 以 2π 为周期，在 $[-\pi,\pi]$ 的表达式为 $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x \le 0 \\ 1, & 0 < x \le \pi \end{cases}$，记 $f(x)$ 的傅立叶级数的和函数为 $S(x)$，则 $S(0) = \underline{\quad \dfrac{1}{2} \quad}$.

8. 设 $f(x) = \int_0^{2x} f\left(\dfrac{t}{2}\right)\mathrm{d}t + \ln 2$，则 $f(x) = \underline{\quad \mathrm{e}^{2x}\ln 2 \quad}$.

二、选择题 (每小题 3 分，共 15 分)

1. 直线 $L: \dfrac{x+3}{-2} = \dfrac{y+4}{-7} = \dfrac{z}{3}$ 与平面 $\pi: \Pi: 4x - 2y - 2z = 3$ 的关系是 (A)

(A) 平行； (B) 垂直相交； (C) L 在 Π 上； (D)相交但不垂直.

2. 函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 处具有连续的偏导数是它在此点可微的 (C)

(A) 充要条件； (B) 必要条件； (C) 充分条件； (D) 以上都不是.

3. 设函数 f 具有二阶连续导数，$z = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ (D)

(A) $\dfrac{y}{x^2}f''$； (B) $-\dfrac{1}{x^2}f'$； (C) $\dfrac{y}{x}f''+f'$； (D) $-\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{y}{x}f''+f'\right)$.

4. 设 $I=\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 由 $x^2+y^2=a^2$ 所围成，则 $I=$ (B)

(A) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a a^2\rho\mathrm{d}\rho=\pi a^4$； (B) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a \rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho=\dfrac{1}{2}\pi a^4$；

(C) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a \rho^2\mathrm{d}\rho=\dfrac{2}{3}\pi a^3$； (D) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a a^3\mathrm{d}\rho=2\pi a^4$.

5. 已知 L 为连接 $(1,0)$ 及 $(0,2)$ 两点的直线段，则 $\int\limits_L (2x+y)\mathrm{d}s$ 等于 (C)

(A) 0； (B) $2\sqrt{3}$； (C) $2\sqrt{5}$； (D) $\sqrt{5}$.

三、解答题（每小题 7 分，共 21 分）（写出文字说明、演算步骤）

1. 计算由两曲面 $z=x^2+y^2, z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 所围成的立体的体积.

解： 设由曲面 $z=x^2+y^2, z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 所围成的立体为 Ω，

则 Ω 在在 xoy 面上的投影为 $z=0, x^2+y^2\le 1$，则

$$V=\iiint\limits_\Omega \mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}}\mathrm{d}z$$ ……4 分

……7 分

$$=2\pi\int_0^1\rho(\sqrt{2-\rho^2}-\rho^2)\,\mathrm{d}\rho=\frac{(8\sqrt{2}-7)\pi}{6}$$

2. 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{(n+1)!}$ 的敛散性。

解： $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+2)!3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{(n+2)}=0<1$， ……5 分

由比值法可知，原级数收敛。 ……7 分

3. 求微分方程（$x^2-1)y'+2xy-\cos x=0$,满足 $y(0)=-1$ 的特解.

解： 将微分方程写成 $y'+\dfrac{2x}{x^2-1}y=\dfrac{\cos x}{x^2-1}$ ……2 分

由一阶线性微分方程的通解公式，得

$$y=\mathrm{e}^{-\int\frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x}[\int\frac{\cos x}{x^2-1}\mathrm{e}^{\int\frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]=\frac{\sin x+C}{x^2-1}$$ ……5 分

由 $y(0)=-1$，得 $C=1$．故所求特解为 $y=\dfrac{\sin x+1}{x^2-1}$． ……7 分

四、(本题满分 8 分) 求函数 $z=x^2+y^2$ 满足条件 $\left(x-\sqrt{2}\right)^2+\left(y-\sqrt{2}\right)^2=9$ 的最大值与最小值.

解： 设 $F=x^2+y^2+\lambda[(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2)-9]$， ……2 分

由 $\begin{cases} F_x=2x+2\lambda(x-\sqrt{2})=0 \\ F_y=2y+2\lambda(y-\sqrt{2})=0 \\ F_\lambda=(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2)-9=0 \end{cases}$，

解得 $x=y=\dfrac{5\sqrt{2}}{2},\quad x=y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$， ……4 分

$z\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2},\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right)=25$ ， $z\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=1$， ……6 分

由题意可知，函数满足条件的最大值与最小值都存在. 因此

最大值为 $z\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2},\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right)=25$ ，最小值为 $z\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=1$． ……8 分

五、(本题满分 8 分) 设 L 为上半圆周 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 上由点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$ 的一段弧，计算曲线积分 $\int_L (x^2-y)\mathrm{d}x-(x+\sin^2 y)\mathrm{d}y$.

解： 设 $P=x^2-y, Q=-(x+\sin^2 y)$，由于 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-1=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，

所以曲线积分与路径无关, ……3 分

将积分路径改为折线 OBA, 其中 B 为点 $(1,0)$, A 为点 $(1,1)$, 则有

原积分 $=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x-\int_0^1(1+\sin^2 y)\mathrm{d}y$ ……6 分

$=\dfrac{1}{3}-1-\int_0^1\dfrac{1-\cos 2y}{2}\mathrm{d}y=-\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\sin 2=-\dfrac{7}{6}+\dfrac{1}{4}\sin 2$ ……8 分

六、(本题满分 8 分) 设曲面 Σ 是 $z=x^2+y^2$（$0\le z\le 2$）的下侧，计算曲面积分

$I=\iint\limits_{\Sigma} 4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解： 补曲面 Σ_1： $z=2$，方向取上侧，设闭曲面所围成的区域为 Ω，由高斯公式得

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} 4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}(4z-2z-2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint_{\Omega} 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$$ ……4 分

又 $\iint_{\Sigma_1} 4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D:x^2+y^2\le 2}(1-2^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-6\pi$ ……6 分

所以 $I=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1} 4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{\Sigma_1} 4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=0-(-6\pi)=6\pi$ ……8 分

七、(本题满分 8 分) 求微分方程 $y''-y=e^{2x}$ 的通解.

解：对应齐次线性方程的特征方程为 $r^2-1=0$，特征根为 $r=\pm 1$，

则对应齐次方程的通解为 $\overline{y}=c_1e^x+c_2e^{-x}$， ……3 分

设特解为 $y^*=ae^{2x}$，代入原方程得 $4ae^{2x}-ae^{2x}=e^{2x}$， $a=\frac{1}{3}$，

于是 $y^*=\frac{1}{3}e^{2x}$， ……6 分

故原方程的通解为 $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+\frac{1}{3}e^{2x}$ ……8 分

八、(本题满分 8 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的收敛域及和函数，并求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 的和.

解：由于 $\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{n}=1$ ，所以 $R=1$,当 $x=-1$ 时，幂级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n$ ，是发散的，

当 $x=1$ 时，幂级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} n$ ，也是发散的，所以收敛域为 $(-1,1)$· ……3 分

设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ ， $x\in(-1,1)$，则

$$S(x)=x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=x\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{x}{(1-x)^2}.$$ ……6 分

取 $x=\frac{1}{2}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2}=2$ ……8 分

注：有的题目有多种解法，以上解答和评分标准仅供参考.