Ćwiczenia XIV
Symulacja chaotycznej mapy kwantowej

Jakub Tworzydło

Katedra Teorii Materii Skondensowanej
Instytut Fizyki Teoretycznej
telefon: (022)5532-314

15/01/2013 Hoża, Warszawa

Plan

1. Wzory definiujące mapę
2. Symulacja mapy
3. Czułość na warunki początkowe

Plan

1. Wzory definiujące mapę
2. Symulacja mapy
3. Czułość na warunki początkowe

Plan

1. Wzory definiujące mapę
2. Symulacja mapy
3. Czułość na warunki początkowe

Dynamika mapy kwantowej

W obrazie Schrödingera: $\psi(x,t) = \mathcal{F}^t \psi(x,0)$
z operatorem (stroboskopowej) ewolucji

$$\mathcal{F} = \exp\left(-\frac{i\hat{p}^2}{2\hbar}\right) \exp\left(-\frac{iK\cos(\hat{x})}{\hbar}\right)$$

$x, p \in [0, 2\pi]$ periodyczne dla $\hbar = 2\pi/M$
oraz dyskretne $x = 2\pi n/M$, $p = 2\pi l/M$ przy $n, l = 0, \ldots, M-1$
funkcja falowa – wektor $\psi_n = \psi(x_n)$

Unitarny operator ewolucji w przedstawieniu położeniowym

$$\mathcal{F}_{n'n} = \frac{1}{\sqrt{M}} \exp\left(\frac{i\pi(n'-n)^2}{M} - i\frac{MK}{2\pi}\cos\frac{2\pi n}{M}\right)$$

Pakiet gaussowski

- pakiet centrowany na (x_0, p_0) ma postać

$$\psi_0(x) = \mathcal{N} e^{ip_0 x/\hbar} e^{-(x-x_0)^2/2\hbar}$$

(zapewnia minimalną nieoznaczoność $\Delta x \Delta p = \hbar/2$)

- dla mapy kwantowej: periodyczny oraz $(x_0, p_0) = \frac{2\pi}{M}(n_0, l_0)$

$$\psi_0(x_n) = \mathcal{N} e^{i2\pi l_0 n/M} \sum_m e^{-\frac{\pi}{M}(n-n_0+mM)^2}$$

- wystarczy $m = -4, \dots, 4$; obliczamy numerycznie $\mathcal{N}$

Funkcja Husimi

Funkcję falową ψ przedstawiamy w p. fazowej za pomocą

$$Q(x_0, p_0) = \sum_n \psi_0^*(x_n)\psi(x_n)$$

gdzie ψ_0 jest pakietem gaussowskim centrowanym w (x_0, p_0)

Uwaga techniczna:
całą zależność od $p_0 = 2\pi l_0/M$ uzyskujemy jedną FFT

Zadanie 1

- napisz funkcję przygotowującą (unormowany) pakiet Gaussa $\psi_0(x_n)$
- wykreśl amplitudę prawdopodobieństwa $|\psi_0|^2$ zaznaczając wartość x_0
- wykreśl amplitudę prawdopodobieństwa dyskretnej transformaty Fouriera (FFT) wektora $\psi_0(x_n)$, zaznacz p_0, sprawdź unormowanie

wektor indeksów można reprezentować np. tablicą numpy

```
n = np.arange(mbig)
```

... i dalej obliczamy na tej tablicy: `np.exp, np.cos, sp.fft`

Zadanie 2

- zaimplementować dynamikę mapy kwantowej Chirikova przy pomocy jednej FFT (!)
- wykreślić $|\psi(x_n)|^2$ dla kilku pierwszych kroków czasowych, biorąc pakiet gaussowski jako początkowy (z niewielkim $p_0 \neq 0$) oraz dla $K = 0$
- to samo dla $K = 2.1$

Zadanie 3

- obliczać funkcję Husimi $Q(x_0, p_0)$ i przedstawić jej amplitudę kolorowym wykresem (`plt.imshow` lub `plt.pcolor`)
- wykreślić funkcję Husimi dla kilku pierwszych kroków czasowych naszej dynamiki, biorąc pakiet gaussowski jako początkowy oraz dla $K = 0.6, 2.1, 6.1$

Zadanie 4: obliczanie fidelity (wierności)