উচ্চতর গণিত ১ম পত্র ।। অধ্যায় ৩ ।। সরলরেখা

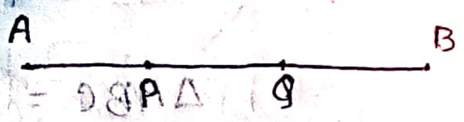
* x অক্ষ থেকে যেকোনো বিন্দুর দূরত্ব = | বিন্দুটির কোটি | $= |y|$
* y অক্ষ থেকে যেকোনো বিন্দুর দূরত্ব = | বিন্দুটির ভুজ | $= |x|$
* কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক ও পোলার স্থানাঙ্কের মধ্যে সম্পর্ক : $\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\}$ পোলার থেকে কার্তেসীয়

$\left.\begin{array}{l} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \end{array}\right\}$ কার্তেসীয় থেকে পোলার

* $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ হলে কার্তেসীয় পদ্ধতিতে এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব, $AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
* $A(r_1, \theta_1)$, $B(r_2, \theta_2)$ হলে পোলার পদ্ধতিতে এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব, $AB = \sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)}$
* x অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ, $y = b$, $b \in R$ এবং $\boxed{b \neq 0}$ → $b = 0$ হলে এ x অক্ষের সমীকরণ
* y অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ, $x = a$, $a \in R$ এবং $\boxed{a \neq 0}$ → $a=0$ হলে, তা y অক্ষের সমীকরণ
* $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ বিন্দু দুইটি $m_1 : m_2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করলে বিভক্ত বিন্দুর স্থানাঙ্ক, $(x, y) \equiv \left(\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$
* বহির্বিভক্ত করলে বিভক্ত বিন্দুর স্থানাঙ্ক, $(x, y) \equiv \left(\frac{m_1x_2-m_2x_1}{m_1-m_2}, \frac{m_1y_2-m_2y_1}{m_1-m_2}\right)$
* $m_1 = m_2$ হলে মধ্যবিন্দুতে বিভক্ত হবে ∴ স্থানাঙ্ক $(x, y) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$
* একটি সরলরেখা সমান তিনটি অংশে বিভক্ত হলে

$AP : PB = 1 : 2$

$AQ : QB = 2 : 1$



অনুপাত (+) → অন্তর্বিভক্ত
অনুপাত (−) → বহির্বিভক্ত

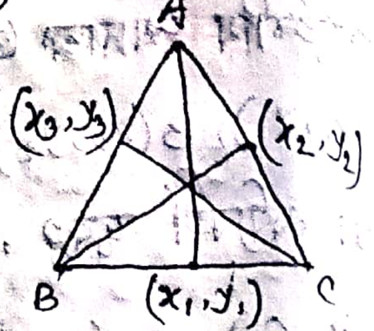
* MCQ Shortcut : (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশকে x অক্ষ $\left|\frac{y_1}{y_2}\right|$ এবং y অক্ষ $\left|\frac{x_1}{x_2}\right|$ অনুপাতে বিভক্ত করে।
* ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক, $(x, y) \equiv \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

পরিকেন্দ্র বের করতে বললে $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ব্যবহার করে $(-g, -f)$ নির্ণয় করব, অন্তঃকেন্দ্র $\equiv \left(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right)$; লম্বকেন্দ্রের ক্ষেত্রে $(m_1m_2 = -1)$ apply করব

* MCQ Shortcut: রম্বস / বর্গ / আয়ত / সামান্তরিকের যেকোনো তিনটি শীর্ষের স্থানাঙ্ক জানা থাকলে চতুর্থ শীর্ষের স্থানাঙ্ক,

$$(x, y) \equiv \{(x_1+x_3-x_2), (y_1+y_3-y_2)\}$$

* ΔABC এর বাহুর মধ্যবিন্দু জানা থাকলে শীর্ষের স্থানাঙ্ক নির্ণয়:

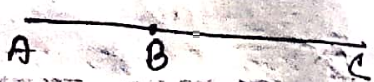


$$A = (x_2+x_3-x_1,\ y_2+y_3-y_1)$$
$$B = (x_1+x_3-x_2,\ y_1+y_3-y_2)$$
$$C = (x_1+x_2-x_3,\ y_1+y_2-y_3)$$

* A, B, C বিন্দু তিনটি একটি ত্রিভুজ গঠন করবে যদি $AB+BC > AC$, $AB+AC > BC$, $AC+BC > AB$ হয়। এর মানে যেকোনো দুই বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তম হতে হবে।

* A, B, C বিন্দু তিনটি সমরেখ হবে বা একই সরলরেখায় অবস্থান করবে যদি $\Delta ABC = 0$; $AB+BC = AC$; $AB+AC = BC$; $BC+AC = AB$ হয়

* AC রেখার ঢাল = AB অথবা BC রেখার ঢাল।



* ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষ $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ হলে

$$\Delta ABC = \frac{1}{2}\,|\underbrace{SABC}_{\text{নির্ণায়ক}}|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{array}\right|$$

(4,4) (5,3) (2,1)
(6,6) (3,-1) (1,-1)

* ΔABC এর BC, CA, AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F হলে

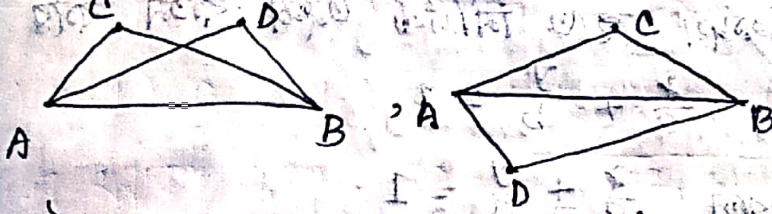
$$\Delta ABC = 4\ \Delta DEF$$

$$\Delta ABC : \Delta DEF = 4 : 1$$

* ΔABC এর মধ্যমা তিনটির মধ্যবিন্দু P, Q, R হলে,

$$\Delta ABC = 16 \cdot \Delta PQR$$

$$\therefore \Delta ABC : \Delta PQR = 16 : 1$$

* 

C ও D বিন্দু দুটি AB রেখার একই পাশে অবস্থান করবে যদি $\delta ABC \times \delta ABD > 0$ হয় ও বিপরীত পাশে অবস্থান করবে যদি $\delta ABC \times \delta ABD < 0$ হয়

* আনতির ব্যবধি, $0° \leq \theta \leq 180°$, $\theta \neq 90°$

* ঢাল, $m = \tan\theta$ । সূক্ষ্মকোণের ঢাল ধনাত্মক, স্থূলকোণের ঢাল ঋণাত্মক।

* কোনো সরলরেখা x অক্ষের ধনাত্মক বা ঋণাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে রেখাটির ঢাল যথাক্রমে, $m = \tan\theta$; $m = -\tan\theta$

* ঢাল নির্ণয়ের পদ্ধতি : (i) কোণের মাধ্যমে $m = \tan\theta$

(ii) (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখার ঢাল, $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

(iii) θ কোণ উৎপন্ন করে ও নির্দিষ্ট অংশ ছেদ করে, $y = mx + c$

(iv) সরলরেখার সমীকরণ থেকে ঢাল, $m = -\frac{x \text{ এর সহগ}}{y \text{ এর সহগ}}$

* সরলরেখার আদর্শ সমীকরণ $y = mx + c$

$c = 0$ হলে, $y = mx$ । যা মূলবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ।

* $ax + by + c = 0$ রেখাটি x অক্ষের সমান্তরাল হবে যদি $a = 0$ হয়

y " " " $b = 0$ হয়

কখনও x বা y = 0 এর জন্য নয়।

* (x_1, y_1) বিন্দুগামী ও m ঢালবিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ, $y - y_1 = m(x - x_1)$

* (x_1, y_1), (x_2, y_2) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ, $\frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{x - x_1}{x_1 - x_2}$

$f(x,y) \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0$; $g(x,y) \equiv a_2x + b_2y + c_2 = 0$ রেখাদ্বয় এর ছেদবিন্দু ও (x_1, y_1) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $\frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{f(x_1,y_1)}{g(x_1,y_1)}$

* যদি $ax+by+c=0$ সরলরেখাটি (α,β) বিন্দুগামী হয় তবে উক্ত বিন্দু অর্থাৎ (α,β), $ax+by+c=0$ রেখাটিকে সিদ্ধ করবে। অর্থাৎ

$$a\alpha+b\beta+c=0$$

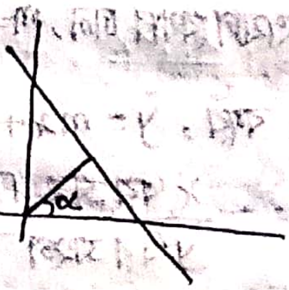
* উভয় অক্ষকে ছেদ করে এবং অক্ষদ্বয় হতে নির্দিষ্ট অংশ কর্তন করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$
* সমান সমান অংশ কর্তন করলে, $\frac{x}{a}\pm\frac{y}{a}=1$
* একই চিহ্ন বিশিষ্ট অংশ কর্তন করলে, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$
* বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট অংশ কর্তন করলে, $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1$
* এই সমীকরণের বৈশিষ্ট্য:

রেখাটি দ্বারা অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিত অংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$

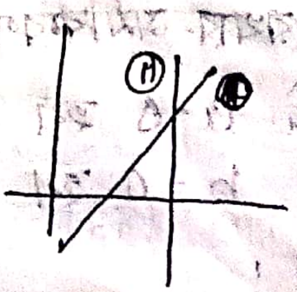
" " " " " " দৈর্ঘ্য $\sqrt{a^2+b^2}$

" " " " " অংশ কোনো বর্গের বাহু হলে তার ক্ষেত্রফল $=a^2+b^2$ বর্গএকক

" " " সাথে গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}|ab|$ বর্গ একক

* 

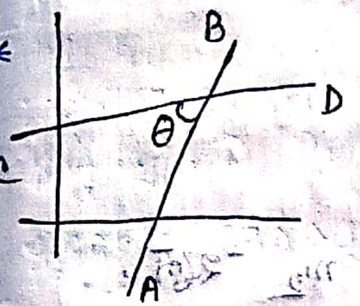
উভয় অক্ষকে ছেদ করে এবং মূলবিন্দু থেকে উক্ত রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য p এবং অঙ্কিত লম্বরেখাটি x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে α কোণ উৎপন্ন করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ, $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$

* 

$$\left.\begin{array}{l} a_1x+b_1y+c_1=0 \quad \text{(i)} \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \quad \text{(ii)} \end{array}\right\}$$ দুটি অসমান্তরাল সরলরেখার ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$(x,y)\equiv\left(\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1},\frac{a_2c_1-a_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}\right)$$

* x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে এবং রেখাটির উপর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু (x_1, y_1) থেকে যেকোনো বিন্দুর দূরত্ব r এরূপ সরলরেখার সমীকরণ, $\frac{x-x_1}{\cos\theta} = \frac{y-y_1}{\sin\theta}$ এবং r দূরত্বে অবস্থিত বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x, y) \equiv (x_1 + r\cos\theta, y_1 + r\sin\theta)$



* AB রেখার ঢাল, m_1 ; CD রেখার ঢাল, m_2 এবং অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে, $\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$

$\tan\theta = +ve$ হলে সূক্ষ্মকোণ

$\tan\theta = -ve$ হলে স্থূলকোণ

নির্দিষ্ট করে সূক্ষ্মকোণের কথা হলে $| \; |$ use করতে হবে।

তখন, $\theta = 90^\circ$ হলে, $m_1 m_2 = -1$, অর্থাৎ রেখাদ্বয়ের ঢালের গুণফল -1 হলে তারা পরস্পর লম্ব।

অথবা, x এর সহগদ্বয়ের গুণফল + y এর সহগদ্বয়ের গুণফল $= 0$ হয় তাহলে তারা ~~রেখা~~ অর্থাৎ রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে।

$a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$

* ধ্রুবক দুই প্রকার। (i) স্থির ধ্রুবক। (ii) পরিবর্তনশীল ধ্রুবক।

* লম্ব সরলরেখার সমীকরণ:

$ax + by + c = 0$ রেখাটির ঢাল, $m_1 = -\frac{a}{b}$ হলে লম্ব রেখার ঢাল, $m_2 = \frac{b}{a}$

এবং লম্ব সরলরেখাটির সমীকরণ, $bx - ay + K = 0$

* $ax + by + c = 0$ রেখাটির উপর লম্ব এবং (α, β) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়:

পদ্ধতি-১: $bx - ay = b\alpha - a\beta$

পদ্ধতি-২: $m_1 = -\frac{a}{b}$ । $\therefore m_2 = \frac{b}{a}$ । সুতরাং, $\frac{b}{a}$ ঢাল বিশিষ্ট (α, β)

বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ, $(y-\beta) = \frac{b}{a}(x-\alpha)$

$$bx - ay = b\alpha - a\beta$$

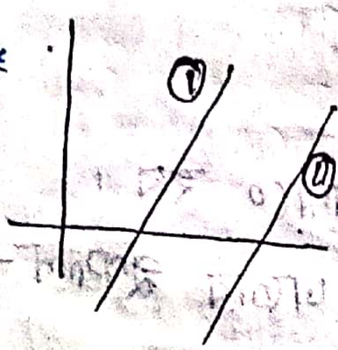
পদ্ধতি-৩: $ax+by+c=0$ এর লম্ব সরলরেখা $bx-ay+k=0$ ...(i) যা

(α, β) বিন্দুগামী। $\Rightarrow b\alpha - a\beta + k = 0$

$$\therefore k = -b\alpha + a\beta$$

$\therefore$ (i) হতে পাই, $bx - ay - b\alpha + a\beta = 0$

$$\therefore bx - ay = b\alpha - a\beta$$

* 

(i) এর ঢাল m_1 ও (ii) এর ঢাল m_2 হলে,

$$\tan 0^\circ = \pm \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

$$\therefore m_1 = m_2$$

অর্থাৎ, দুইটি রেখার ঢাল সমান হলে তারা পরস্পর সমান্তরাল হবে। অথবা,

x এর সহগদ্বয়ের অনুপাত = y এর সহগদ্বয়ের অনুপাত

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

এদের কোনো ছেদবিন্দু থাকবে না।

* সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়:

$ax+by+c=0$ রেখাটির ঢাল $m_1 = -\frac{a}{b}$ হলে সমান্তরাল সরলরেখাটির ঢালও হবে, $-\frac{a}{b}$

এখন, $ax+by+c=0$ রেখার সমান্তরাল ও (α, β) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $(y-\beta) = -\frac{a}{b}(x-\alpha)$

পদ্ধতি-১: $\therefore ax + by = a\alpha + b\beta$

পদ্ধতি-২, পদ্ধতি-৩ } অনুরূপ

একগুচ্ছ সরলরেখার সমীকরণ, $a_1x+b_1y+c_1+k(a_2x+b_2y+c_2)=0$, $k\in R,\ k\neq 0$

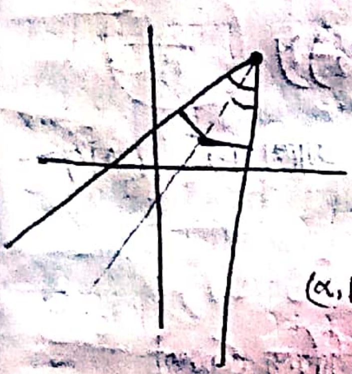
একটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে একটি সরলরেখার লম্ব দূরত্ব নির্ণয়:

(α,β) বিন্দু থেকে $ax+by+c=0$ রেখার লম্ব দূরত্ব, $d=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

এবং, প্রতিবিম্বের দূরত্ব, $d=2\cdot\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

* দুটি সমান্তরাল সরলরেখার $\left.\begin{array}{l} ax+by+c_1=0 \\ ax+by+c_2=0 \end{array}\right\}$ মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্ব নির্ণয়:

$d=\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ [x ও y এর সহগ সমান করে নিতে হবে]



* দুটি অসমান্তরাল সরলরেখার অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ, $\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\pm\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$

(α,β) বিন্দুধারী হলে $f(\alpha,\beta)\times g(\alpha,\beta)\times(a_1a_2+b_1b_2)>0$ → স্থূলকোণের, $\square<0$ হলে সূক্ষ্মকোণের

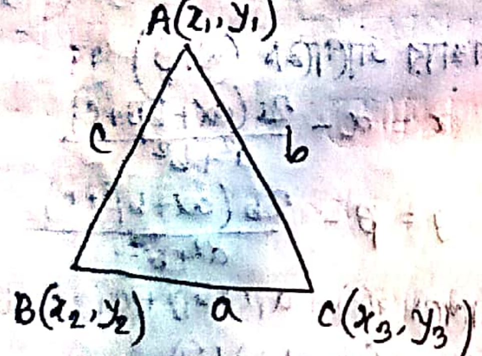
সূক্ষ্মকোণের জন্য '+' হবে যখন $a_1a_2+b_1b_2<0$ হবে,

" " '−' হবে, " $a_1a_2+b_1b_2>0$ হবে,

স্থূলকোণের জন্য '+' হবে, " $a_1a_2+b_1b_2>0$ হবে।

" " '−' হবে, " $a_1a_2+b_1b_2<0$ হবে।

Next page দ্রষ্টব্য

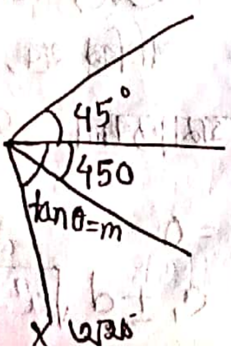


* অন্তঃকেন্দ্র, $I\equiv\left(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c},\frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right)$

অন্তঃব্যাসার্ধ, $r=\frac{|\triangle ABC|}{a+b+c}$

$(y-\beta)=m(x-\alpha)$

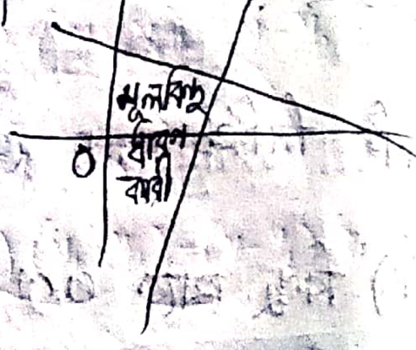
* Simple rule for buet AT: (α,β)



$3x-y+7=0$ | এখন, $m=\tan(\theta+45^\circ)$

$m=\tan(\theta-45^\circ)$

* মূলবিন্দু ধারণকারী কোণের ক্ষেত্রে $c_1 \times c_2 > 0$ হবে।
এবং চিহ্ন হবে ধনাত্মক অর্থাৎ স্থূলকোণ



* ঋণাত্মক চিহ্ন হবে যদি $c_1 \times c_2 < 0$ হয়।
এক্ষেত্রে সমদ্বিখন্ডক হবে সূক্ষ্মকোণ।

Shortcut:

(x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাকে (x, y) বিন্দু $k : 1$ অনুপাতে বিভক্ত করতে $k = \dfrac{x_1 - x}{x - x_2}$ বা, $\dfrac{y_1 - y}{y - y_2}$ [অনুপাত (−) হলে অন্তর্বিভক্ত, ” (+) ” বহির্বিভক্ত]

(x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখার লম্বদ্বিখন্ডকের সমীকরণ

$$\frac{1}{2}\left\{x_1^2 + y_1^2 - (x_2^2 + y_2^2)\right\} = (x_1 - x_2)x + (y_1 - y_2)y.$$

l দৈর্ঘ্যের একটি সরলরেখার মূলবিন্দু হতে অঙ্কিত লম্ব x অক্ষের সাথে $45°$ কোণ তৈরি করলে তার সমীকরণ: $x + y = \dfrac{l}{\sqrt{2}}$

$ax + by + c = 0$

Ratio 1:1 বা 0:something হলে No intersection

$$\frac{AC}{BC} = \left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{ax_2 + by_2 + c}\right|$$

+ হলে বহির্বিভক্ত
− হলে অন্তর্বিভক্ত

(3, 2) ও (5, −7) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাকে $2x + 3y + 1 = 0$ রেখাটি কি অনুপাতে বিভক্ত করে? $\left|\frac{13}{-10}\right| = 13 : 10$ কিন্তু অন্তর্বিভক্ত

(i) বিন্দুর সাপেক্ষে বিন্দুর প্রতিবিম্ব → মধ্যবিন্দু concept

(ii) $P(\alpha, \beta)$ বিন্দুর x অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিবিম্ব $P'(\alpha, -\beta)$

(iii) $P(\alpha, \beta)$ বিন্দুর y অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিবিম্ব $P'(-\alpha, \beta)$

(iv) $y = x$ রেখার সাপেক্ষে $P(\alpha, \beta)$ বিন্দুর প্রতিবিম্ব $P'(\beta, \alpha)$

(v) $ax + by + c = 0$ রেখার সাপেক্ষে (α, β) এর প্রতিবিম্ব (x, y) হলে, $x = \alpha - \dfrac{2a(a\alpha + b\beta + c)}{a^2 + b^2}$

$$y = \beta - \frac{2b(a\alpha + b\beta + c)}{a^2 + b^2}$$

(vi) $f(x) = ax + by + c$ এর সাপেক্ষে $g(x) = a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এর প্রতিবিম্ব হবে, $(a^2 + b^2)g(x) - 2(aa_1 + bb_1)f(x) = 0$

$ax + by + c_1 = 0$ রেখার সমান্তরাল এবং d একক দূরবর্তী রেখার সমীকরণ: $ax + by + c_2 = 0$

$$c_2 = c_1 \pm d\sqrt{a^2 + b^2}$$