উচ্চতর গণিত - ২য় পত্র || অধ্যায় - ৪ || বহুপদী ও বহুপদী সমীকরণ

* বহুপদী একটি বীজগাণিতিক রাশি।
* বহুপদী হওয়ার শর্ত: চলকের ঘাত ঋণাত্মক হওয়া যাবে না।
* n ঘাতের বহুপদী রাশি → $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a^n$
* চলকের যেসকল মানের জন্য বহুপদী রাশিটি শূন্য হয়, তাকে মূল / বীজ / সমাধান বলে।
* সমীকরণ সমাধানের পদ্ধতি: ① উৎপাদক বা ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে।
② সাধারণ সূত্র প্রয়োগের মাধ্যমে।
* বাস্তব বা মূলদ সহগ বিশিষ্ট কোনো সমীকরণের কাল্পনিক ও অমূলদ মূল জোড় আকারে বা অনুবন্ধি আকারে থাকে।

অর্থাৎ, একটি মূল $1+i$ হলে অপরটি $1-i$ হবে।

একটি মূল $2+\sqrt{3}$ হলে অপরটি $2-\sqrt{3}$ হবে।

* $ax^2+bx+c=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের মূল সহগ সম্পর্ক: (α, β) দুইটি মূল হলে, $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a} = x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$

∴ মূলদ্বয়ের যোগফল, $\alpha+\beta = -\frac{b}{a}$

" গুণফল, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

* $ax^3+bx^2+cx+d=0$ ত্রিঘাত সমীকরণের মূল সহগ সম্পর্ক:

α, β, γ তিনটি মূল হলে,

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a} = x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma$$

∴ মূলত্রয়ের যোগফল, $\alpha+\beta+\gamma = -\frac{b}{a}$

যেকোনো দুটি করে মূলের গুণফলের সমষ্টি, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = \frac{c}{a}$

মূলত্রয়ের গুণফল, $\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$

* $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ চতুর্ঘাত সমীকরণের মূলে সহগ সম্পর্ক:

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ চারটি মূল হলে,

$$x^4+\frac{b}{a}x^3+\frac{c}{a}x^2+\frac{d}{a}x+\frac{e}{a} = x^4-(\alpha+\beta+\gamma+\delta)x^3+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta+\alpha\delta+\alpha\gamma+\beta\delta)x^2-(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\beta\gamma\delta+\gamma\delta\alpha)x+\alpha\beta\gamma\delta.$$

$\therefore \alpha+\beta+\gamma+\delta = -\frac{b}{a}$; $\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\delta+\beta\gamma+\delta\gamma = \frac{c}{a}$

$\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\beta\gamma\delta+\alpha\gamma\delta = -\frac{d}{a}$, $\alpha\beta\gamma\delta = \frac{e}{a}$

* দ্বিঘাত সমীকরণ গঠনের শর্ত: $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$
* ত্রিঘাত " " " : $x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma=0$
* অনুরূপভাবে চতুর্ঘাত সমীকরণও

* α, β, γ যেকোনো তিনটি রাশি হলে,
  - $\sum\alpha = \alpha+\beta+\gamma$
  - $\sum\alpha^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2$
  - $(\sum\alpha)^2 = (\alpha+\beta+\gamma)^2$
  - $\sum\alpha\beta = \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$
  - $\sum\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$
  - $\sum\alpha^2\beta = \alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\beta^2\alpha+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha+\gamma^2\beta$
    $= \sum\alpha\sum\alpha\beta-3\alpha\beta\gamma$

* ax^2+bx+c দ্বিঘাত রাশিটি একটি পূর্ণবর্গ রাশির সমান হবে যদি $b^2-4ac=0$ হয়।

* নিশ্চায়ক / প্রত্যায়ক / নির্ধারক / নিরূপক / Discriminant / D :

$b^2-4ac>0$ এবং পূর্ণবর্গ হলে মূলদ্বয় বাস্তব, মূলদ, অসমান

$b^2-4ac>0$ এবং পূর্ণবর্গ না হলে মূলদ্বয় বাস্তব, অমূলদ, অসমান

$b^2-4ac=0$ হলে মূলদ্বয় বাস্তব, মূলদ, সমান

$b^2-4ac<0$ হলে মূলদ্বয় জটিল, অসমান, (অনুবন্ধি)

* $\left.\begin{array}{l} a_1x^2+b_1x+c_1=0 \\ a_2x^2+b_2x+c_2=0 \end{array}\right\}$ দ্বিঘাত সমীকরণ দুইটির একটি সাধারণ

মূল থাকার শর্ত: $(a_2c_1-a_1c_2)^2=(b_1c_2-b_2c_1)(a_1b_2-a_2b_1)$

[সমাধান পদ্ধতি: সাধারণ মূল α ধরে তা দ্বারা উভয় সমীকরণকে সিদ্ধ করতে হবে এবং তারপর শর্ত প্রয়োগ করে বা বজ্রগুণ করে কাঙ্ক্ষিত সমাধান নির্ণয় করতে হবে] | উভয় মূল সাধারণ হলে $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$

* $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\{a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)\}$

* কোনো ফাংশনকে 'K + পূর্ণবর্গ' আকারে প্রকাশ করা যায় তবে সর্বনিম্ন মান হচ্ছে K ।

আবার 'K − পূর্ণবর্গ' আকারে প্রকাশ করা গেলে সর্বোচ্চ মান K ।