গণিত ১ম পত্র।। অধ্যায়-১০।। যোগজীকরণ

* Summation এর S থেকে '$\int$' integration sign এসেছে।
* যোগজ দুই ধরনের। ① অনির্দিষ্ট যোগজ ② নির্দিষ্ট যোগজ।
* ① অনির্দিষ্ট যোগজ → যোগজ হলো অন্তরজের বিপরীত প্রক্রিয়া।

যদি $\frac{d}{dx}f(x) = \phi(x)$ হয় তবে এর যোগজ $\int \phi(x)\,dx = f(x) + c$ হবে।
c → অনির্দিষ্ট যোগজের ক্ষেত্রে ধ্রুবক।

* $\int (\ )\,dx = x$ → যোগজীকরণ অপারেটর। x এর সাপেক্ষে
* কোনো ফাংশনের যোগজ নির্ণয়ের পদ্ধতিকে যোগজীকরণ বলে।
* $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad [n \neq -1]$
* $\int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a} + c \quad [n \neq -1]$
* $\int x^{-1}\,dx$ বা $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$ [মডুলাস কারণ ln(-ve) অসংজ্ঞায়িত]
* $\int dx = x + c$
* $\int 2\,d\theta = 2\theta + c$
* $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
* $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log_e a}$
* $\int \cos x\,dx = \sin x + c$
* $\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + c = -\ln\frac{1}{\sec x} + c = \ln|\sec x| + c$

দুটি ফাংশন ভগ্ন আকারে থাকলে এবং হরের অন্তরজ করে লব পাওয়া গেলে ফাংশনটির যোগজ হবে $\ln|\text{হর}| + c$

যেমন: $\int \frac{\cos x}{3+\sin x}\,dx = \ln(3+\sin x) + c$; $\int \frac{\cos x}{3+2\sin x}\,dx = \frac{\ln(3+2\sin x)}{2} + c$

* $\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + c = \ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + c$
* $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$

* $\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + c = -\ln|\operatorname{cosec} x| + c$

* $\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + c$

* $\int \operatorname{cosec} x \cot x\,dx = -\operatorname{cosec} x + c$

* $\int \operatorname{cosec} x\,dx = \ln|\operatorname{cosec} x - \cot x| + c = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$

* $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1}x + c$

* $\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \cos^{-1}x + c$

* $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1}x + c$

* $\int \frac{-1}{1+x^2}\,dx = \cot^{-1}x + c$

* $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \sec^{-1}x + c$

* $\int \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{cosec}^{-1}x + c$

* $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\sqrt{1-x^2} + c$

* $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \sqrt{1+x^2} + c$

আদর্শ যোগজের সূত্র:

1. $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c$
2. $\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$
3. $\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$
4. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = \ln\left|\sqrt{a^2+x^2} + x\right| + c$
5. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\frac{x}{a} + c$
6. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \ln\left|\sqrt{x^2-a^2} + x\right| + c$
7. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + c$

Technic: $\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx$, $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$, $\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx \rightarrow \boxed{\frac{x}{2}(\text{Integrand}) + \frac{a^2}{2}\int\frac{1}{\text{Integrand}}}$

* $\int x^n \ln x\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right)$

* $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + c$

* দুটি ফাংশনের গুণফলের যোগজ:

$$\int uv\,dx = u\int v\,dx - \int\left\{\frac{d}{dx}u \int v\,dx\right\}dx$$

= ১ম ফাংশন x 2য় ফাংশনের যোগজ − (১ম ফাংশনের অন্তরজ x ২য় ফাংশনের যোগজ) এর যোগজ

* কাকে ১ম ফাংশান ও কাকে ২য় ফাংশান ধরব তা LIATE দেখে বুঝাতে হবে।

L → লগারিদমিক; I → Inverse function; A → অ্যালজেব্রিক ফাংশান; T → ত্রিকোণমিতিক ফাংশান; E → Exponencial

অথবা, যার যোগজ করা সম্ভব নয় তাকে u এবং অন্যটিকে v ধরব।

* দুটি ফাংশান গুণ বা ভাগ আকারে থাকলে তাদের একটির বা যেকোনো একটির আংশিক অন্তরজ করলে যদি অপর ফাংশানটি সম্পূর্ণ রূপে পাওয়া যায় তবে যার অন্তরজ করলে অপর ফাংশানটি ~~ফাংশ~~ পাওয়া যায়, তার পরিবর্তে z ধরে প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে যোগজ নির্ণয় করা হয়।

যেমন: $\int \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; $\int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)}dx$

* দুটি sin বা দুটি cos বা একটি sin একটি cos অনুপাত গুণ আকারে থাকে, তাহলে তাদের যোগ বিয়োগ আকারে প্রকাশ করার পর যোগজ করতে হবে। যেমন: $\int \sin px \cos qx\, dx$; $\int \sin 5x \sin 3x\, dx$; $\int 3\sin 3x \cos 4x\, dx$

*** sin এবং cos অনুপাত 1 ভিন্ন যেকোনো সূচক যুক্ত হলে ~~হয়~~ অর্থাৎ $\int \sin^m x \cdot \cos^n x\, dx$ এই রূপে থাকলে সূচকমুক্ত করার পর যোগজ করতে হবে বা যার পাওয়া বিজোড় থাকলে তাকে ভেঙে dx এর সাথে লিখতে হবে এবং অপরটির প্রতিস্থাপন করতে হবে।

যেমন: $\int \sin^4 x \cos^3 x\, dx$; $\int \cos^4 x\, dx$; $\int \sin^4 x\, dx$; $\int \sin^5 x\, dx$

$= \int \sin^4 x \cos^2 x \cos x\, dx$

ধরি, $z = \sin x$

$\Rightarrow dz = \cos x\, dx$

⋮

(Ans)

$= \int \sin^4 x \sin x\, dx$

$= \int (1-(\cos^2 x))^2 \sin x\, dx$

~~ধরি~~, $\sin x = z$

* $\int \frac{1}{\psi(x)\sqrt{\phi(x)}}dx$ আকারে থাকলে এবং:

① $\psi(x)$ একঘাত ও $\phi(x)$ দ্বিঘাত হলে $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$ এই ফর্মে এনে $\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx = \sec^{-1}x + c$ এই সূত্র প্রয়োগ করতে হবে।

যেমন: $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-1}} = \int \frac{2}{2x\sqrt{(2x)^2-1}}dx = \frac{\cancel{2}\sec^{-1}(2x)}{\cancel{2}} + c$ (Ans)

$\int\frac{dx}{(2x+3)\sqrt{4x^2+12x+8}} = \int\frac{dx}{(2x+3)\sqrt{(2x+3)^2-1}} = \frac{\sec^{-1}(2x+3)}{2}+c$

অথবা, $\phi(x) = \frac{1}{z}$ ধরতে হবে।

② $\psi(x)$ এবং $\phi(x)$ উভয় একঘাত হলে, $\phi(x) = z^2$ ধরতে হবে।

* যোজ্য রাশিটি যদি $\int\frac{x^2+1}{ax^4+bx^3+cx^2+dx+c}dx$ আকারে থাকে x^2 দ্বারা ভাগ করতে হবে লব এবং হরকে, ফলে লব $1\pm\frac{1}{x^2}$ এবং হর $x^2\mp\frac{1}{x^2}$ দ্বারা প্রকাশিত হবে। হরে তখন $x\mp\frac{1}{x}$ (সূত্র প্রয়োগ করে) দ্বারা প্রকাশ করে প্রতিস্থাপন নিয়ম use করতে হবে।

যেমন: $\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx = \int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2x\frac{1}{x}}dx$ ধরি, $x-\frac{1}{x} = z$ $\Rightarrow \left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx = dz$

$= \int\frac{dz}{z^2+(\sqrt{2})^2}$

$\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx$ do

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{z}{\sqrt{2}} + c$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{2}} + c$ (Ans)

* যোগ্য রাশিটি যদি $\int e^x\{f(x)+f'(x)\}dx$ আকারে থাকে তবে যোজিত ফল

$= e^x f(x) + c$

যেমন: $\int e^x \sec x(1+\tan x)dx = \int e^x(\sec x + \sec x\tan x)dx = e^x \cdot \sec x + c$

→ এই ফর্মে না থাকলে করে নিতে হবে। যেমন:

$\int e^x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx = e^x \cdot \frac{1}{x} + c$ (Ans) ; $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx = \int e^x \frac{x+1-1}{(x+1)^2}dx$

$= \int e^x\left\{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right\}dx$

$= e^x \cdot \frac{1}{x+1}$ (Ans)

$\int \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{(\ln x)^2}\right]dx$ | ধরি, $z = \ln x$

$= \int e^z\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}\right)dz$ | ~~$\Rightarrow dz = \frac{1}{x}dx$~~

$= e^z \frac{1}{z} + c$ | $\Rightarrow e^z = x$

| $\Rightarrow e^z dz = dx$

$= x \cdot \frac{1}{\ln x} + c$ (Ans)

* $\int e^x \cdot x^2 dx$ → Written এর জন্য uv সূত্র প্রয়োগ করতে হবে। কিন্তু

$\Rightarrow x^2 \cdot e^x - \int 2xe^x dx$ MCQ তে → $\int e^x x^2 dx = e^x[+x^2 - 2x + 2] + c$

$\Rightarrow e^x x^2 - 2xe^x + e^x \cdot 2$

$\Rightarrow e^x(x^2 - 2x + 2)$ → $\int e^x \cdot x^4 dx = e^x[x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24] + c$

(Ans)

→ $\int e^x x^3 dx = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + c$

(Ans)

$\int e^{5x} x^2 dx$ | $\int e^{5x}dx = \frac{e^{5x}}{5}$ → $\int e^{5x}x^2 dx = e^{5x}\left[\frac{x^2}{5} - \frac{2x}{5^2} + \frac{2}{5^3}\right]$

→ $\int e^{4x} x^3 dx = e^{4x}\left[\frac{x^3}{4} - \frac{3x^2}{4^2} + \frac{6x}{4^3} - \frac{6}{4^4}\right] + c$

(Ans)

$\int e^{x^3} x^8 dx$ | ধরি, $x^3 = z$

$= \int e^{x^3} (x^3)^2 x^2 dx$ | $\Rightarrow 3x^2 dx = dz$

$= \frac{1}{3}\int e^z z^2 dz$

$= \frac{1}{3} e^z [z^2 - 2z + 2] + c$

sign change

→ $\int e^{ax}\sin(bx+c)dx = \frac{e^{ax}[a\sin(bx+c) - b\cos(bx+c)]}{a^2+b^2}$

→ $\int e^{ax}\cos(bx+c)dx = \frac{e^{ax}[a\cos(bx+c) + b\sin(bx+c)]}{a^2+b^2}$

Laplace & Foriar

* $\int \frac{e^{m\tan^{-1}x}}{1+x^2}dx$ এর প্রতিস্থাপন পদ্ধতি, কিন্তু $\int \frac{e^{m\tan^{-1}x}}{(1+x^2)^2}dx$

ধরি, $\theta = \tan^{-1}x$
$\Rightarrow x = \tan\theta$
$\Rightarrow dx = \sec^2\theta\, d\theta$

$$= \int \frac{e^{m\theta}}{(\sec^2\theta)^2}\sec^2\theta\, d\theta$$

$$= \int e^{m\theta}\cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int e^{m\theta}\, 2\cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int e^{m\theta}(1+\cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int e^{m\theta}\, d\theta + \frac{1}{2}\int e^{m\theta}\cos 2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{e^{m\theta}}{2m} + \frac{1}{2}\,\frac{e^{m\theta}\,[m\cos 2\theta + 2\sin 2\theta]}{m^2+2^2}$$

where $\theta = \tan^{-1}x$ (Ans)

* $\int e^{e^{e^x}} e^{e^x} e^x dx = ?$

$= e^{e^{e^x}} + c$

ধরি, $z = e^{e^{e^x}}$

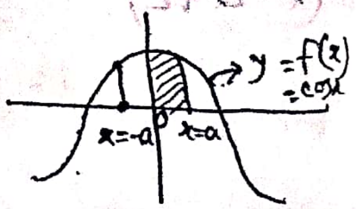
$dz = e^{e^{e^x}} e^{e^x} e^x dx$

$\boxed{\text{সর্বোচ্চ} + C}$

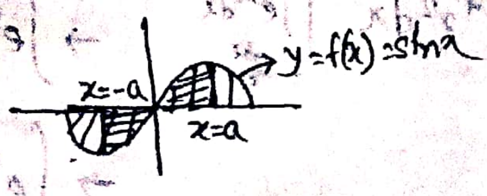
* যদি কোনো ফাংশানের ক্ষেত্রে $f(-x) = f(x)$ হয় তবে তাকে যুগ্ম ফাংশান বলে। even
$f(x) = \cos x$ অনুরূপ $|x|$, x^2
$f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$

* যদি কোনো ফাংশানের ক্ষেত্রে $f(-x) = -f(x)$ হয় তবে তাকে অযুগ্ম ফাংশান বলে। → odd
যেমন: $\sin x$, x^3

* $f(x)$ যুগ্ম ফাংশান হলে, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$



* $f(x)$ অযুগ্ম ফাংশান হলে, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$



$\int_{-1}^{1} x^3\cos x\, dx = ?$

$f(x) = x^3\cos x$
$f(-x) = -x^3\cos x = -f(x)$ = অযুগ্ম

$\therefore \int_{-1}^{1} x^3\cos x\, dx = 0$

* Walis Theory : যদি limit 0, $\pi/2$ এবং sin or cos

$$\therefore \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-3}{n-2} \times \cdots \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \quad (n \text{ জোড়})$$

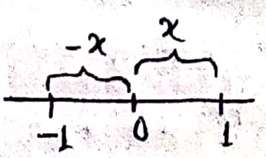
$$= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-3}{n-2} \times \cdots \times \frac{2}{3} \quad (n \text{ বিজোড়})$$

$$\therefore \int_0^{\pi/2} \sin^7 x\,dx = \frac{6}{7} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \quad \text{(Ans)}$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^6 x\,dx = \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \quad \text{(Ans)}$$

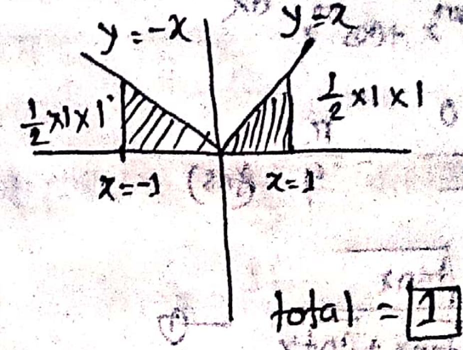
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{\boxed{\cos^7 x}}_{\text{যুগ্ম}} dx = 2\int_0^{\pi/2} \cos^7 x\,dx = 2 \times \frac{6}{7} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \quad \text{(Ans)}$$

* $\int_{-1}^{1} |x|\,dx = ?$



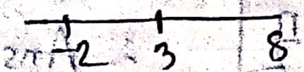
$$= \int_{-1}^{0} -x\,dx + \int_0^1 x\,dx$$

$$= \boxed{1} \quad \text{(Ans)}$$



total = $\boxed{1}$

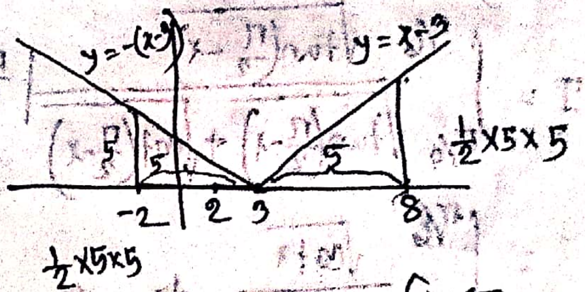
* $\int_{-2}^{8} |x-3|\,dx = ?$



$$= \int_{-2}^{3} -(x-3)\,dx + \int_{2}^{8} (x-3)\,dx$$

$0 = y = |x-3|$
$\therefore x = 3$

$= 25$



$\frac{1}{2} \times 5 \times 5$

total = 25

তুমি যত উল্টাও তত

* $\int_0^1 f(x)\,dx = 5$ হলে, $\int_{-1/2}^{0} f(2x+1)\,dx = ?$

ধরি, $z = 2x+1$ | $x = -\frac{1}{2}$ হলে, $z = 0$
$\Rightarrow dz = 2dx$ | $x = 0$ হলে, $z = 1$

$\frac{1}{2}\int_0^1 f(z)\,dz = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{5}{2}$ কিন্তু লিমিটে 0 1 না হয়ে 1 0 হলে $-\frac{5}{2}$ হবে

$\int_8^5 f(x)\,dx = 7$; $\int_0^1 f(3x+5)\,dx = -\frac{7}{3}$

$\int_0^1 f(x) = 5$ হলে, $\int_{10}^{11} f(x-10)\,dx = \frac{5}{1} = 5$

* $\int_a^b f(x) = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$

$z = a+b-x$ | $x=a,\ z=b$

$dz = -dx$ | $x=b,\ z=a$

$\therefore \int_b^a f(z)(-)dz$

$\Rightarrow \int_a^b f(z)\,dz$

$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \longrightarrow$ যখন, $a+b = \frac{\pi}{2}$ হলে

Ans: $\frac{b-a}{2}$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{100} x}{\sin^{100} x + \cos^{100} x}\,dx$$

$$= \frac{\frac{\pi}{2}-0}{2} = \frac{\pi}{4} \text{ (Ans)}$$

$$I = \int_{\pi/3}^{\pi/6} \frac{\sqrt{\tan x}}{\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x}} \text{ --- (i)}$$

$$I = \int_{\pi/3}^{\pi/6} \frac{\sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}{\sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}+\sqrt{\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}} \quad \Bigg| \ \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$$

$$= \int_{\pi/3}^{\pi/6} \frac{\sqrt{\cot x}}{\sqrt{\cot x}+\sqrt{\tan x}}\,dx \text{ --- (ii)}$$

$$\text{(i)} + \text{(ii)} \rightarrow 2I = \int_{\pi/3}^{\pi/6} 1\,dx = [x]_{\pi/3}^{\pi/6}$$

$$= \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}$$

$$I = \frac{\frac{\pi}{6}(-)\frac{\pi}{3}}{2}$$

অর্থাৎ, $\int_a^b \frac{(\text{couple } 1)^n}{(\text{couple } 1)^n + (\text{couple } 2)^n}$ $\boxed{1}$

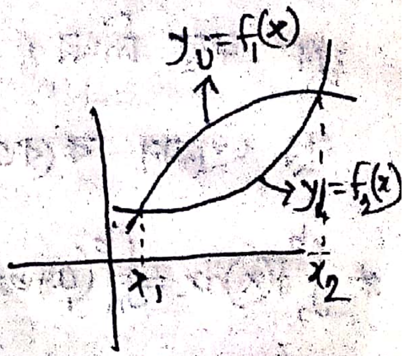
$\therefore$ Ans: $\frac{b-a}{2}$

* ক্ষেত্রফল বা Area : লিমিট বা কে বড় কে ছোট বুঝতে না পারলে || use করব।

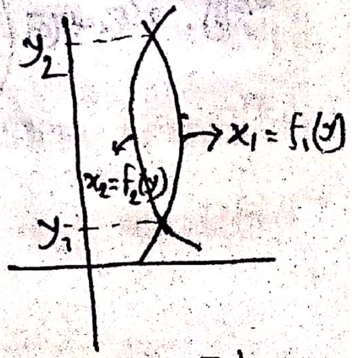
x অক্ষের সাপেক্ষে, $\Delta = \int_{x_1}^{x_2} (y_U - y_1)\, dx$

x_2 → Right

x_1 → Left

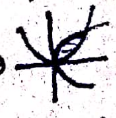


y অক্ষের সাপেক্ষে, $\Delta = \int_{y_1}^{y_2} (x_1 - x_2)\, dy$

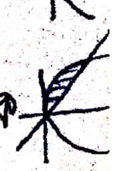


মনে রাখব: limit x এর বসালে function হবে y এর।

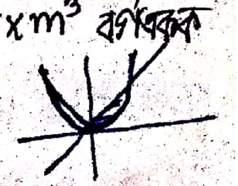
* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ সম্পূর্ণ ক্ষেত্রফল $= \pi ab$ বর্গএকক ; একটি চতুর্ভাগের ক্ষেত্রফল $= \frac{\pi ab}{4}$ বর্গএকক

* $y^2=4ax$ এবং $x^2=4ay$ দ্বারা আবদ্ধ মাঝের ক্ষেত্রফল $= \frac{16}{3}a^2$ বর্গএকক 

* $y^2=4ax$ এবং $x^2=4by$ ” ” ” ” $= \frac{16}{3}ab$ বর্গএকক 

* $y^2=4ax$ এবং $y=mx$ ” ” ” ” $= \frac{8}{3}\times\frac{a^2}{m^3}$ বর্গএকক 

* $x^2=4ay$ এবং $y=mx$ ” ” ” ” $= \frac{8}{3}\times a^2 \times m^3$ বর্গএকক



* $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx = 2\sqrt{f(x)}+c$; $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+\tan x}}$

* $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}} = 2\ln\left|\sqrt{x-\alpha}+\sqrt{x-\beta}\right|+c$

* $\int \frac{1}{1\pm\sin x}dx$, $\int \frac{1}{1\pm\cos x}dx$ এরকম থাকলে লব ও হরকে অনুবন্ধি দ্বারা গুণ করে লিখব। তবে cos এর ক্ষেত্রে $1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$ বা এর অন্য সূত্র প্রয়োগ করেও দেখতে হবে।

* $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b (a+b-x)\,dx$; $\int_0^4 y\sqrt{4-y}\,dy = \int_0^4 (4-0-y)\sqrt{4-(4-0-y)}\,dy$

অর্থাৎ. x এর স্থলে (upper limit + lower limit − x) $= \int_0^4 (4-y)\sqrt{y}\,dy$