Matematika Diskret dan Logika

Dasar Pembuktian Matematis

Dr. I Wayan Mustika, ST., M.Eng.

Terminologi

- **Axiom**: pernyataan yang dianggap benar
- **Definition**: digunakan untuk membuat konsep baru
- **Theorem**: proposisi yang telah dibuktikan benar
- **Lemma**: teorema yang umumnya tidak menarik tetapi berguna dalam membuktikan teorema yang lain
- **Corollary**: teorema yang mengikuti teorema sebelumnya

Metode Pembuktian Langsung

- Pembuktian Konstruktif
- Pembuktian Eksistensi Tak Konstruktif
- Pembuktian Berdasarkan Kasus-Kasus

Pembuktian Konstruktif

- Metode untuk membuktikan teorema dalam bentuk "$\exists x$ sedemikian sehingga P(*x*)."
- Teorema ini menjamin eksistensi bahwa sedikitnya ada satu nilai *x* yang membuat P(*x*) benar
- Pembuktian atas teorema tersebut bersifat **konstruktif** (*constructive*) yaitu membuktikan dengan cara menemukan nilai *x* tertentu atau menunjukkan algoritma untuk menemukan nilai *x* yang membuat P(*x*) benar.

Contoh:

•Tunjukkan bahwa ada suatu bilangan integer positif yang mana kuadratnya merupakan penjumlahan dari kuadrat dua bilangan integer yang lain?

•Tunjukkan bahwa ada suatu bilangan integer yang mana x^2 = 15.129?

Pembuktian Eksistensi Tak Konstruktif

- Metode pembuktian eksistensi tak konstruktif (*nonconstructive existence proof*) adalah metode yang menunjukkan eksistensi dari *x* menggunakan teorema yang telah terbukti (aksioma) atau asumsi bahwa tidak ada *x* yang menimbulkan kontradiksi
- Teorema ini sering muncul dalam bentuk "$\forall x \in D$ jika $P(x)$ maka $Q(x)$." $P(x)$ disebut hipotesis dan $Q(x)$ disebut kesimpulan

Contoh

- Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan integer $1 \le n \le 10$, $n^2 - n + 11$ adalah bilangan prima

Solusi

- Proposisi dapat ditulis dalam bentuk "$\forall n \in N$, jika $1 \le n \le 10$ maka $P(n)$ adalah bilangan prima" dimana $P(n) = n^2 - n + 11$. Selanjutnya dapat ditunjukkan bahwa

$P(1) = 11$; $P(2) = 13$; $P(3) = 17$; $P(4) = 23$; $P(5) = 31$;

$P(6)=41$; $P(7)=53$; $P(8)=67$; $P(9) = 83$; $P(10) = 101$.

Pembuktian Berdasarkan Kasus-Kasus

- Metode untuk membuktikan proposisi bersyarat $p_1 \vee p_2 \vee \ldots p_n \rightarrow q$
- Metode ini termasuk membuktikan $p_1 \rightarrow q$,

$p_2 \rightarrow q, \cdots, p_n \rightarrow q$

Contoh

- Tunjukkan bahwa jika n adalah bilangan integer positif maka $n^3 + n$ adalah genap

Solusi

- Kasus 1. Misalkan n adalah genap. Maka ada nilai $k \in N$ sedemikian sehingga $n = 2k$. Dalam kasus ini, $n^3 + n = 8k^3 + 2k = 2(4k^3 + k)$ yang mana adalah genap
- Kasus 2. Misalkan n adalah ganjil. Maka ada nilai $k \in N$ sedemikian sehingga $n = 2k+1$. Jadi, $n^3 + n = 2(4k^3 + 6k^2 + 4k + 1)$ yang mana adalah genap

Jadi terbukti bahwa $n^3 + n$ adalah genap

Metode Pembuktian Tak Langsung

- Pembuktian dengan kontradiksi
- Pembuktian dengan kontraposisi

Pembuktian Dengan Kontradiksi

- Misalkan kita ingin menunjukkan bahwa *p* bernilai benar. Kita asumsikan bahwa ~ *p* benar, kemudian menunjukkan pengandaian tersebut akan menyebabkan terjadinya kontradiksi
- Langkah-langkah:
  - Misalkan bahwa negasi dari pernyataan yang akan dibuktikan bernilai benar
  - Tunjukkan bahwa pada akhirnya pemisalan tersebut akan sampai pada suatu kontradiksi
  - Simpulkan bahwa pernyataan yang akan dibuktikan benar

Contoh

Teorema

- Jika n^2 adalah bilangan integer genap, maka n juga bilangan integer genap

Bukti

- Misalkan kebalikannya yaitu n adalah bilangan integer ganjil. Maka ada suatu bilangan integer k yang mana $n = 2k+1$. Dalam kasus ini, $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ adalah ganjil dan kontradiksi dengan asumsi bahwa n^2 adalah genap. Jadi, n haruslah bilangan integer genap

Pembuktian Dengan Kontraposisi

- Telah diketahui bahwa $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$.

  Jadi untuk membuktikan $p \rightarrow$ q dapat dilakukan dengan membuktikan kebenaran kontraposisinya $\sim q \rightarrow \sim p$

Contoh

- Jika n adalah bilangan integer sedemikian sehingga n^2 adalah ganjil maka n juga ganjil

Solusi

- Misalkan bahwa n adalah bilangan integer genap. Maka ada suatu bilangan integer k yang mana $n = 2k$. Kemudian $n^2 = 2(2k^2)$ yang berarti genap

Metode mana yang paling mudah atau tepat ?

- Masing-masing metode memiliki sifat-sifat dan kemampuan, dan kekhususan tersendiri
- Suatu pernyataan kadang bisa dibuktikan dengan beberapa metode, tapi kadang hanya bisa diselesaikan dengan metode tertentu saja

Tips

Sering latihan dan membiasakan diri dalam membuktikan pernyataan-pernyataan

Tugas

1. Buktikan bahwa untuk semua $n, m \in \mathrm{Z}$, jika *m* dan *n* genap maka *m*+*n* juga genap.
2. Buktikan bahwa setiap bilangan bulat adalah bilangan rasional.