TKU211103 Kalkulus Variabel Jamak

Derivatif Parsial Bag. 2

Tim Dosen Kalkulus Variabel Jamak

Semester Gasal 2021/2022 – 1 November 2021

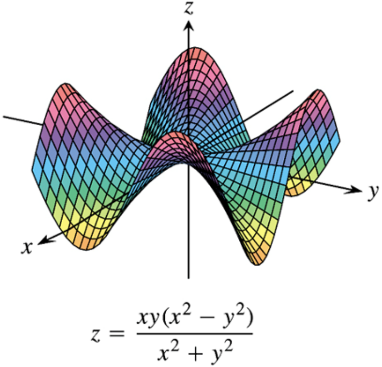
Departemen Matematika FMIPA UGM

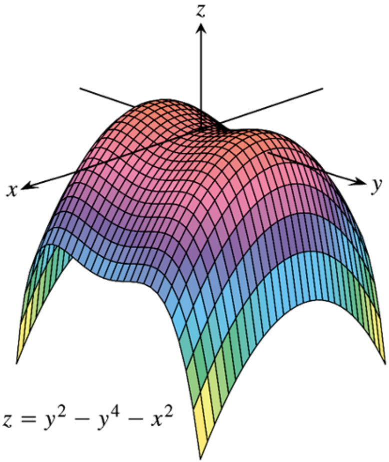
1. Tes Derivatif Kedua

Melanjutkan masalah pencarian maksimum atau minimum lokal pada suatu fungsi dua variabel tidak cukup hanya menentukan titik kritisnya saja. Kita dapat memanfaatkan derivatif parsial kedua untuk menyelidiki apakah maksimum atau minimum lokal terjadi pada suatu titik kritis.

Definisi

Fungsi terdiferensial $f(x, y)$ mencapai titik saddle pada titik kritis (a, b) jika pada setiap cakram terbuka yang berpusat di (a, b) terdapat titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) sehingga $f(x_1, y_1) > f(a, b)$ dan $f(x_2, y_2) < f(a, b)$. Titik $(a, b, f(a, b))$ pada permukaan $z = f(x, y)$ selanjutnya disebut titik saddle permukaan tersebut.


z
x
y
$z = \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$

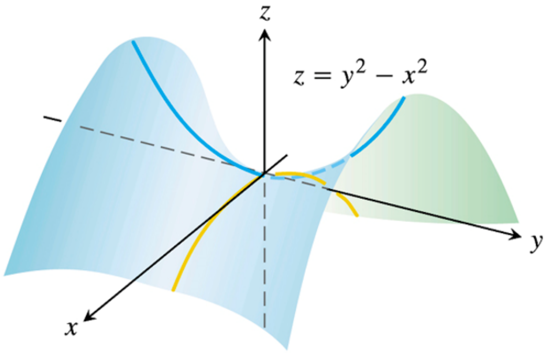

z
x
y
$z = y^2 - y^4 - x^2$

Tes Derivatif Kedua

Teorema

Diberikan fungsi $f(x, y)$ *dengan derivatif parsial pertama dan kedua kontinu pada suatu cakram yang berpusat di* (a, b) *dan berlaku* $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$. *Akibatnya*

- f *mencapai maksimum lokal di* (a, b) *jika* $f_{xx} < 0$ *dan* $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ *di* (a, b).
- f *mencapai minimum lokal di* (a, b) *jika* $f_{xx} > 0$ *dan* $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ *di* (a, b).
- f *mencapai titik saddle di* (a, b) *jika* $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$ *di* (a, b).
- *Tes tidak dapat menentukan jenis di* (a, b) *jika* $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ *di* (a, b).


z
$z = y^2 - x^2$
y
x

Contoh

Tentukan nilai ekstrem lokal fungsi $f(x,y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4$.

Penyelesaian: Fungsi diatas mempunyai turunan parsial pertama dan kedua kontinu pada $\mathbb{R}^2$. Selanjutnya,

$$f_x = y - 2x - 2 = 0, \qquad f_y = x - 2y - 2 = 0$$

dipenuhi untuk $x = y = -2$ sehingga titik $(-2,-2)$ menjadi kandidat dimana f mencapai nilai ekstrem lokalnya. Untuk mengecek jenisnya, perhatikan bahwa

$$f_{xx} = -2, \qquad f_{yy} = -2, \qquad f_{xy} = 1$$

dan diperoleh diskriminan f di $(-2,-2)$ adalah $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 3$. Jadi berdasarkan teorema sebelumnya, f mencapai nilai maksimum lokal di $(-2,-2)$ dengan $f(-2,-2) = 8$.

Contoh

Tentukan titik kritis $z = -x^2 + y^2$.

Penyelesaian: Perhatikan bahwa $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -2x$ dan $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y$. Jelas bahwa titik dimana kedua derivatif parsial bernilai 0 adalah di titik $(0, 0)$. Akibatnya, hanya terdapat satu titik kritis di $(0, 0)$. Untuk mengecek jenisnya, perhatikan bahwa

$$f_{xx} = -2, \qquad f_{yy} = 2, \qquad f_{xy} = 0$$

dan diperoleh diskriminan f di $(0, 0)$ adalah $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = -4$. Jadi berdasarkan teorema sebelumnya, f mencapai titik saddle di $(0, 0)$.

2. Aturan Rantai

Aturan Rantai Fungsi Dua dan Tiga Variabel

Teorema

Jika $w = f(x, y)$ *mempunyai derivatif parsial kontinu* f_x *dan* f_y *dan jika* $x = x(t),\ y = y(t)$ *adalah fungsi terdiferensial terhadap* t*, maka fungsi komposisi* $w = f(x(t), y(t))$ *adalah fungsi terdiferensial terhadap* t *dengan*

$$\frac{df}{dt} = f_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + f_y(x(t), y(t)) \cdot y'(t)$$

atau

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

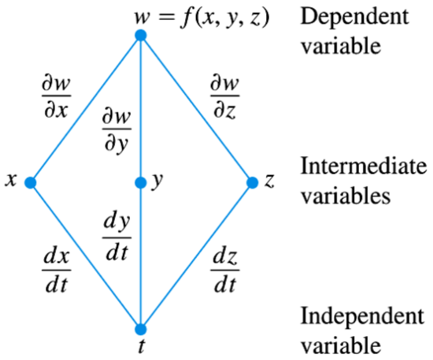
Teorema

Jika $w = f(x, y, z)$ *terdiferensial dan* x, y*, dan* z *adalah fungsi terdiferensial terhadap* t*, maka fungsi* w *adalah fungsi terdiferensial terhadap* t *dengan*

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

Aturan Rantai Fungsi Tiga Variabel

Chain Rule



$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

Contoh

Tentukan dw/dt jika $w = xy + z, \quad x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t$. Berapa derivatifnya saat $t = 0$?

Penyelesaian: Perhatikan bahwa

$$
\begin{aligned}
\frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt} \\
&= (y)(-\sin t) + (x)(\cos t) + (1)(1) \\
&= (\sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t) + (1)(1) \\
&= -\sin^2 t + \cos^2 t + 1 = 1 + \cos 2t
\end{aligned}
$$

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_{t=0} = 1 + \cos(0) = 2.$$

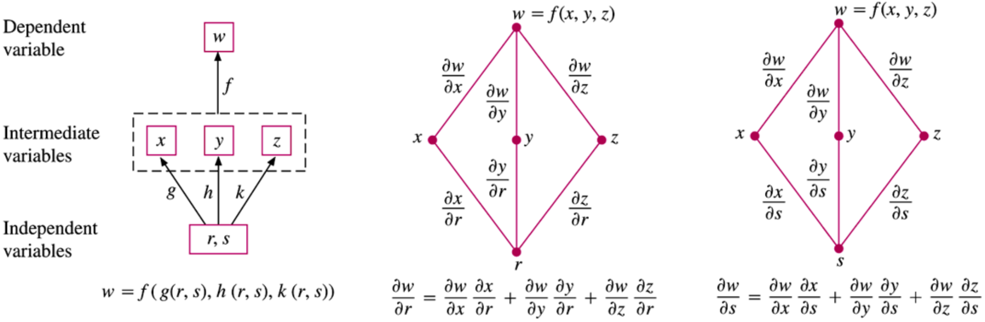
Aturan Rantai

Teorema

Misalkan jika $w = f(x, y, z)$, $x = g(r, s)$, $y = h(r, s)$, *dan* $z = k(r, s)$. *Jika keempat fungsi tersebut terdiferensial, maka fungsi* w *mempunyai derivatif parsial terhadap* r *dan* s *yang diberikan oleh rumus berikut*

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$


Dependent variable
w
f
Intermediate variables
x
y
z
g
h
k
Independent variables
r, s
w = f(g(r, s), h(r, s), k(r, s))
w = f(x, y, z)
∂w/∂x
∂w/∂y
∂w/∂z
x
y
z
∂x/∂r
∂y/∂r
∂z/∂r
r
∂w/∂r = ∂w/∂x ∂x/∂r + ∂w/∂y ∂y/∂r + ∂w/∂z ∂z/∂r
w = f(x, y, z)
∂w/∂x
∂w/∂y
∂w/∂z
x
y
z
∂x/∂s
∂y/∂s
∂z/∂s
s
∂w/∂s = ∂w/∂x ∂x/∂s + ∂w/∂y ∂y/∂s + ∂w/∂z ∂z/∂s

(a) (b) (c)

Contoh

Nyatakan $\partial w/\partial r$ dan $\partial w/\partial s$ dalam variabel r dan s jika

$$w = x + 2y + z^2, \qquad x = \frac{r}{s}, \qquad y = r^2 + \ln s, \qquad z = 2r.$$

Penyelesaian: Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} \\
&= (1)\left(\frac{1}{s}\right) + (2)(2r) + (2z)(2) \\
&= \frac{1}{s} + 4r + (4r)(2) = \frac{1}{s} + 12r.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} \\
&= (1)\left(-\frac{r}{s^2}\right) + (2)\left(\frac{1}{s}\right) + (2z)(0) = \frac{2}{s} - \frac{r}{s^2}.
\end{aligned}$$

Teorema

- *Jika* $w = f(x, y)$, $x = g(r, s)$, *dan* $y = h(r, s)$, *maka*

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

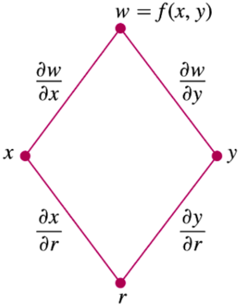
$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

- *Jika* $w = f(x)$ *dan* $x = g(r, s)$, *maka*

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{dw}{dx}\frac{\partial x}{\partial r} \qquad \text{dan} \qquad \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{dw}{dx}\frac{\partial x}{\partial s}.$$

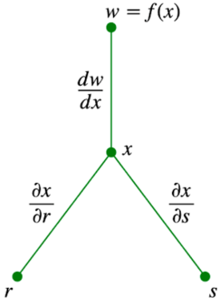
Aturan Rantai Fungsi Komposisi

Chain Rule



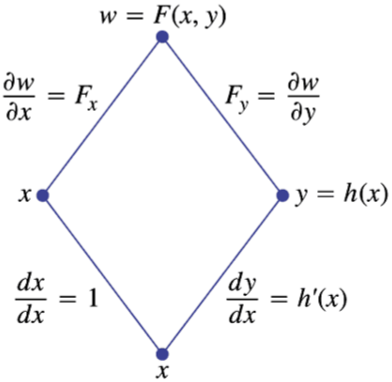
$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

Chain Rule



$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{dw}{dx}\frac{\partial x}{\partial r}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{dw}{dx}\frac{\partial x}{\partial s}$$



$$\frac{dw}{dx} = F_x \cdot 1 + F_y \cdot \frac{dy}{dx}$$

Teorema

Misalkan $F(x, y)$ terdiferensial dan persamaan $F(x, y) = 0$ menyatakan y sebagai fungsi terdiferensial terhadap x. Akibatnya, untuk setiap titik dimana $F_y \neq 0$ berlaku

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}.$$

Contoh

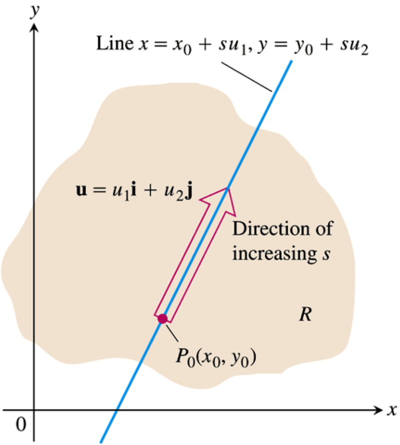
Gunakan Teorema sebelumnya untuk menentukan dy/dx jika $y^2 - x^2 - \sin xy = 0$.

Penyelesaian: Kita dapat misalkan $F(x, y) = y^2 - x^2 - \sin xy$. Diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{-2x - y\cos xy}{2y - x\cos xy} \\ &= \frac{2x + y\cos xy}{2y - x\cos xy}. \end{aligned}$$

Perhitungan ini lebih sederhana dibandingkan pada perhitungan fungsi satu variabel.

3. Derivatif Berarah dan Gradien



Laju perubahan f dengan arah vektor $\overline{u}$ pada titik P_0 adalah laju perubahan f sepanjang garis biru (searah vektor $\overline{u}$) di titik P_0.

Definisi (Derivatif Berarah)

Derivatif fungsi f di $P_0(x_0, y_0)$ dengan arah searah vektor satuan $\overline{u} = u_1\overline{i} + u_2\overline{j}$ adalah bilangan

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\overline{u},P_0} = \lim_{s\to 0} \frac{f(x_0 + su_1, y_0 + su_2) - f(x_0, y_0)}{s}$$

asalkan nilai limitnya ada.

Contoh

Tentukan derivatif fungsi $f(x, y) = x^2 + xy$ *di titik* $P_0(1, 2)$ *dengan arah searah vektor satuan* $\mathbf{u} = (1/\sqrt{2})\mathbf{i} + (1/\sqrt{2})\mathbf{j}$.

Penyelesaian: Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\left(\frac{df}{ds}\right)_{\mathbf{u},P_0} &= \lim_{s\to 0} \frac{f(x_0 + su_1, y_0 + su_2) - f(x_0, y_0)}{s} \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{f\left(1 + s\frac{1}{\sqrt{2}}, 2 + s\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - f(1, 2)}{s} \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{\left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\left(2 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right) - (1^2 + 1\cdot 2)}{s} \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{\left(1 + \frac{2s}{\sqrt{2}} + \frac{s^2}{2}\right) + \left(2 + \frac{3s}{\sqrt{2}} + \frac{s^2}{2}\right) - 3}{s}
\end{aligned}$$

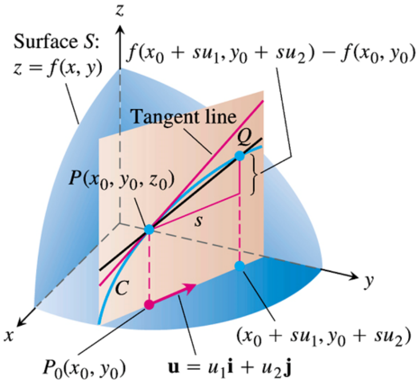
Contoh

Tentukan derivatif fungsi $f(x,y)=x^2+xy$ di titik $P_0(1,2)$ dengan arah searah vektor satuan $\mathbf{u}=(1/\sqrt{2})\mathbf{i}+(1/\sqrt{2})\mathbf{j}$.

Penyelesaian Lanjutan:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{df}{ds}\right)_{\mathbf{u},P_0} &= \lim_{s\to 0}\frac{\left(1+\frac{2s}{\sqrt{2}}+\frac{s^2}{2}\right)+\left(2+\frac{3s}{\sqrt{2}}+\frac{s^2}{2}\right)-3}{s}\\
&= \lim_{s\to 0}\frac{\frac{5s}{\sqrt{2}}+s^2}{s}=\lim_{s\to 0}\left(\frac{5}{\sqrt{2}}+s\right)=\frac{5}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Laju perubahan $f(x,y)=x^2+xy$ di $P_0(1,2)$ searah vektor $\mathbf{u}(1/\sqrt{2})\mathbf{i}+(1/\sqrt{2})\mathbf{j}$ adalah $5/\sqrt{2}$.



Kemiringan kurva C di P_0 adalah $\lim_{Q \to P}$ kemiringan (QP), yaitu derivatif berarah

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\mathbf{u},P_0} = (D_{\mathbf{u}}f)_{P_0}.$$

Vektor Gradien

Definisi

Vektor gradien *fungsi* $f(x, y)$ *di titik* $P_0(x_0, y_0)$ *adalah vektor*

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$$

yang diperoleh dengan menghitung derivatif parsial fungsi f *di* P_0.

Teorema

Jika $f(x, y)$ *terdiferensial pada suatu region terbuka yang memuat* $P_0(x_0, y_0)$, *maka*

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\mathbf{u}, P_0} = (\nabla f)_{P_0} \bullet \mathbf{u},$$

yaitu dot produk dari gradien f *di* P_0 *dan vektor* $\mathbf{u}$.

Contoh

Tentukan derivatif fungsi $f(x,y) = xe^y + \cos(xy)$ *di titik* $(2,0)$ *dengan arah searah vektor* $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$.

Penyelesaian: Arah vektor $\mathbf{v}$ adalah vektor satuan yang diperoleh dengan membagi $\mathbf{v}$ dengan panjangnya:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\mathbf{v}}{5} = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}.$$

Derivatif parsial f kontinu dimana-mana dan di titik $(2,0)$ diberikan oleh

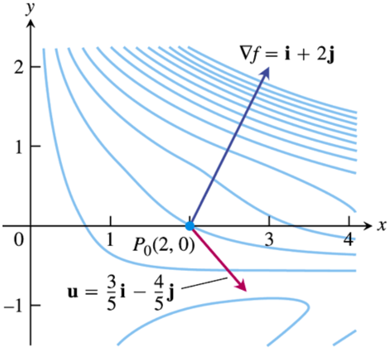
$$\begin{aligned} f_x(2,0) &= (e^y - y\sin(xy))_{(2,0)} = e^0 - 0 = 1 \\ f_y(2,0) &= (xe^y - x\sin(xy))_{(2,0)} = 2e^0 - 2\cdot 0 = 2. \end{aligned}$$

Diperoleh gradien f di $(2,0)$ adalah

$$\nabla f|_{(2,0)} = f_x(2,0)\mathbf{i} + f_y(2,0)\mathbf{j} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}.$$

Penyelesaian Lanjutan: Dengan demikian, derivatif fungsi f di $(0,2)$ searah vektor $\mathbf{v}$ adalah

$$(D_{\mathbf{u}}f)|_{(2,0)} = \nabla f|_{(2,0)} \bullet \mathbf{u} = (\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \bullet \left(\frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}\right) = \frac{3}{5} - \frac{8}{5} = -1.$$



Sifat Derivatif Berarah

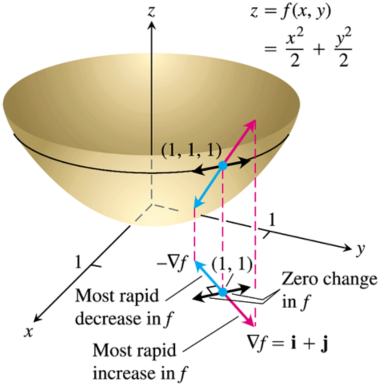
Sifat

- *Derivatif berarah* $D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \bullet \mathbf{u} = \|\nabla f\| \cos\theta$, *dengan* θ *adalah sudut yang dibentuk vektor gradien* f *dan vektor* $\mathbf{u}$.
- *Fungsi* f *meningkat paling tajam saat* $\cos\theta = 1$ *atau saat* $\mathbf{u}$ *adalah arah vektor* ∇f. *Derivatif dengan arah ini diberikan oleh*

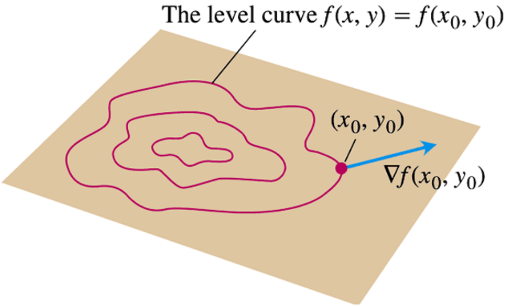
$$D_{\mathbf{u}}f = \|\nabla f\| \cos(0) = \|\nabla f\|.$$

- *Dengan argumen serupa,* f *menurun paling tajam dengan arah* $-\nabla f$. *Derivatif dengan arah ini diberikan oleh* $D_{\mathbf{u}}f = \|\nabla f\| \cos(\pi) = -\|\nabla f\|$.
- *Setiap arah* $\mathbf{u}$ *yang tegak lurus dengan gradien* $\nabla f \neq 0$ *adalah arah dengan perubahan nol pada* f *karena* θ *bernilai* $\frac{\pi}{2}$ *dan*

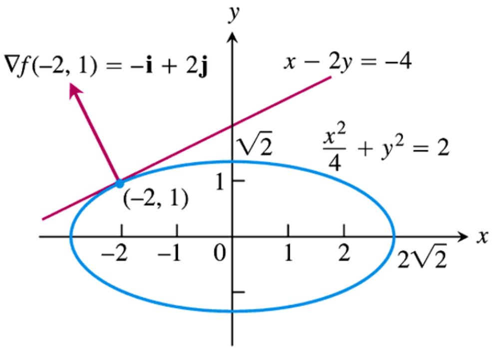
$$D_{\mathbf{u}}f = \|\nabla f\| \cos(\pi/2) = \|\nabla f\|.0 = 0.$$



Arah dimana $f(x, y)$ meningkat paling cepat di titik $(1, 1)$ adalah arah dari $\nabla f|_{(1,1)} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$. Hal ini bersesuaian dengan arah perubahan paling curam di titik $(1, 1, 1)$.



Gradient fungsi dua variabel pada suatu titik selalu tegak lurus dengan fungsi kurva level yang melalui titik tersebut.



Kita dapat mencari garis singgung dari kurva ellips $\frac{x^2}{4} + y^2 = 2$ dengan memandang kurva ellips tersebut sebagai kurva level dari fungsi dua variabel $f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$.

Berikut ini diberikan aturan aljabar gradien.

Sifat

1. $\nabla(kf) = k\nabla f, \quad k \in \mathbb{R}.$
2. $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$
3. $\nabla(f-g) = \nabla f - \nabla g$
4. $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$
5. $\nabla\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$

Thank You