TKU211103

Vektor dan Matriks 2

Tim Dosen Kalkulus Variable Jamak

21 Oktober 2021

Departemen Matematika FMIPA UGM

1. Cross Product

Jika kita ketahui bahwa hasil dari dot product merupakan skalar, maka dikenalkan suatu operasi cross product yang menghasilkan suatu vektor. Diketahui vektor $\overline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ dan $\overline{v} = (v_1, v_2, v_3)$, cross product dari $\overline{u}$ dan $\overline{v}$ dinotasikan dengan $\overline{u} \times \overline{v}$, didefinisikan dengan

$$\overline{u} \times \overline{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Contoh Operasi Cross Product

1. Diberikan vektor $\overline{u} = (2, 3, 0)$ dan $\overline{v} = (3, -2, 0)$. Tentukan $\overline{u} \times \overline{v}$.

Contoh Operasi Cross Product

1. Diberikan vektor $\overline{u} = (2, 3, 0)$ dan $\overline{v} = (3, -2, 0)$. Tentukan $\overline{u} \times \overline{v}$.
   Penyelesaian:

$$\overline{u} \times \overline{v} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \overline{k} = -13\overline{k}.$$

1. Diberikan vektor $\overline{u} = (2, 3, 0)$ dan $\overline{v} = (3, -2, 0)$. Tentukan $\overline{u} \times \overline{v}$.
   Penyelesaian:

$$\overline{u} \times \overline{v} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \overline{k} = -13\overline{k}.$$

2. Hitung $\overline{i} \times \overline{j}$.

Contoh Operasi Cross Product

1. Diberikan vektor $\overline{u} = (2, 3, 0)$ dan $\overline{v} = (3, -2, 0)$. Tentukan $\overline{u} \times \overline{v}$.
   Penyelesaian:

$$\overline{u} \times \overline{v} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \overline{k} = -13\overline{k}.$$

2. Hitung $\overline{i} \times \overline{j}$.
   Penyelesaian:

$$\overline{u} \times \overline{v} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \overline{k} = \overline{k}.$$

Sifat

Diberikan sebarang vektor $\overline{u}, \overline{v}$ dan θ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ merupakan sudut diantara dua vektor tersebut.

- $\overline{u} \bullet (\overline{u} \times \overline{v}) = 0 = \overline{v} \bullet (\overline{u} \times \overline{v})$, *jadi vektor $\overline{u} \times \overline{v}$ tegak lurus dengan vektor $\overline{u}$ dan $\overline{v}$*
- $\|\overline{u} \times \overline{v}\| = \|\overline{u}\| \|\overline{v}\| \sin \theta$.

Teorema

Dua buah vektor di $\mathbb{R}^3$ sejajar jika dan hanya jika $\overline{u} \times \overline{v} = 0$.

Sifat

Diberikan sebarang vektor $\overline{u}$, $\overline{v}$ dan $\overline{w}$ vektor di $\mathbb{R}^3$ serta skalar k.

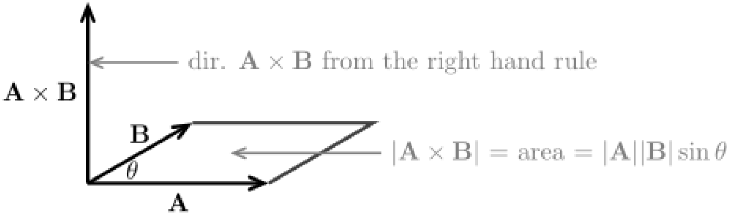
- $\overline{u} \times \overline{v} = -\overline{v} \times \overline{u}$, *sifat antikomutatif*
- $\overline{u} \times (\overline{v} + \overline{w}) = (\overline{u} \times \overline{v}) + (\overline{u} \times \overline{w})$
- $k(\overline{u} \times \overline{v}) = k\overline{u} \times \overline{v} = \overline{u} \times k\overline{v}$
- $\overline{u} \times \overline{0} = \overline{0} \times \overline{u} = \overline{0}$
- $\overline{u} \times \overline{u} = \overline{0}$
- $(\overline{u} \times \overline{v}) \bullet \overline{w} = \overline{u} \bullet (\overline{v} \times \overline{w})$
- $\overline{u} \times (\overline{v} \times \overline{w}) = (\overline{u} \bullet \overline{w})\overline{v} - (\overline{u} \bullet \overline{v})\overline{w}$
- $\overline{i} \times \overline{j} = \overline{k}$, $\overline{k} \times \overline{i} = \overline{j}$, *dan* $\overline{j} \times \overline{k} = \overline{i}$

Teorema

Diberikan vektor $\overline{A}$ dan vektor $\overline{B}$ serta θ sudut yang dibentuk kedua vektor tersebut.

$$\begin{aligned} \|\overline{A} \times \overline{B}\| &= \|\overline{A}\|\|\overline{B}\| \sin\theta \\ &= \textit{luas jajar genjang yang direntangkan oleh } \overline{A} \textit{ dan } \overline{B}. \end{aligned}$$

Vektor $\overline{A} \times \overline{B}$ adlah vektor yang tegak lurus dengan vektor $\overline{A}$ dan vektor $\overline{B}$.

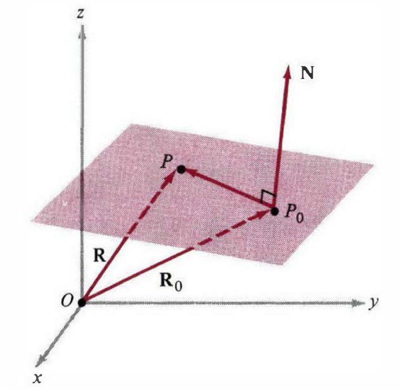


Menggunakan identitas Lagrange, diperoleh

$$\|\overline{A} \times \overline{B}\|^2 = \|\overline{A}\|^2\|\overline{B}\|^2 - (\overline{A} \bullet \overline{B})^2$$

Persamaan Bidang Datar (Plane)

Diperhatikan suatu bidang yang melalui titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dan tegak lurus terhadap vektor $\overline{N} = a\overline{i} + b\overline{j} + c\overline{k}$.



Katakan sebarang titik lain pada bidang tersebut adalah $P(x, y, z)$. Dengan demikian, vektor $\overrightarrow{P_0P}$ tegak lurus dengan vektor $\overline{N}$. Akibatnya, diperoleh

$$\overrightarrow{P_0P} \bullet \overline{N} = 0.$$

Katakan vektor $\overline{R} = \overrightarrow{OP}$ dan vektor $\overline{R_0} = \overrightarrow{OP_0}$. Dengan demikian,

$$\overrightarrow{P_0P} = \overline{R} - \overline{R_0} = (x - x_0)\overline{i} + (y - y_0)\overline{j} + (z - z_0)\overline{k}.$$

Akibatnya, diperoleh

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Persamaan ini merupakan persamaan untuk suatu bidang datar yang melalui titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dan tegak lurus dengan vektor $\overline{N} = a\overline{i} + b\overline{j} + c\overline{k}$.

Diperhatikan bahwa persamaan $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ dapat disederhanakan menjadi

$$ax + by + cz = d,$$

dengan $d = ax_0 + by_0 + cz_0$.

Contoh

Tentukan persamaan bidang yang melalui titik $P_1(3, 2, -1)$, $P_2(1, -1, 3)$ *dan* $P_3(3, -2, 4)$.

Penyelesaian: Diperhatikan bahwa vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ dan $\overrightarrow{P_1P_3}$ terletak pada bidang datar tersebut. Dengan demikian, akan dicari vektor yang tegak lurus dengan dua vektor tersebut. Katakan vektor $\overline{N}$ merupakan vektor tersebut. Dengan demikian,

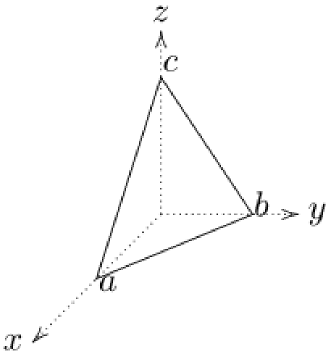
$$\overline{N} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \overline{i} + 10\overline{j} + 8\overline{k}.$$

Karena melalui $P_1(3, 2, -1)$ dan tegak lurus vektor $\overline{N} = \overline{i} + 10\overline{j} + 8\overline{k}$, maka diperoleh persamaan bidang

$$x + 10y + 8z = 15.$$

Contoh

Tentukan persamaan bidang yang memotong sumbu X, Y, dan Z berturut-turut di a, b, c.



Penyelesaian: Koordinat titik potongnya adalah

$$A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c).$$

Penyelesaian: Koordinat titik potongnya adalah

$$A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c).$$

Dengan cara yang sama dengan contoh sebelumnya, persamaan bidangnya adalah

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Contoh Jarak Titik ke Bidang

Contoh

Tentukan jarak titik $P(1, 3, 2)$ *ke bidang* $\alpha : x + 2y = 3$.

Contoh

Tentukan jarak titik $P(1,3,2)$ *ke bidang* $\alpha : x + 2y = 3$.

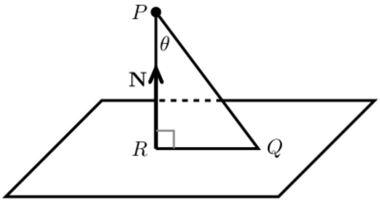
Penyelesaian: Jarak titik P ke bidang α merupakan panjang ruas garis tegak lurus yang menghubungkan titik P ke suatu titik di bidang α.

Contoh

Tentukan jarak titik $P(1,3,2)$ *ke bidang* $\alpha : x + 2y = 3$.

Penyelesaian: Jarak titik P ke bidang α merupakan panjang ruas garis tegak lurus yang menghubungkan titik P ke suatu titik di bidang α.

Perhatikan vektor yang tegak lurus bidang adalah vektor normal bidang α yaitu $\overline{N} = \overline{i} + 2\overline{j} + 0\overline{k}$. Diambil titik $Q(3,0,0)$ di bidang α dan θ sudut yang dibentuk oleh vektor $\overline{N}$ dan vektor $\overrightarrow{QP}$.

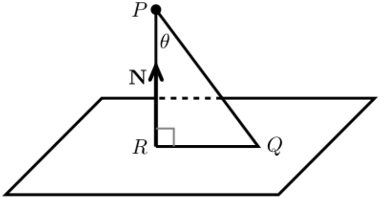


Contoh

Tentukan jarak titik $P(1,3,2)$ *ke bidang* $\alpha : x + 2y = 3$.

Penyelesaian: Jarak titik P ke bidang α merupakan panjang ruas garis tegak lurus yang menghubungkan titik P ke suatu titik di bidang α.

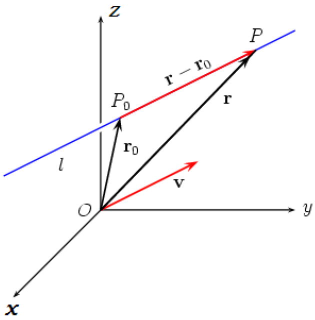
Perhatikan vektor yang tegak lurus bidang adalah vektor normal bidang α yaitu $\overline{N} = \overline{i} + 2\overline{j} + 0\overline{k}$. Diambil titik $Q(3,0,0)$ di bidang α dan θ sudut yang dibentuk oleh vektor $\overline{N}$ dan vektor $\overrightarrow{QP}$.



Akibatnya jarak titik P ke bidang adalah $d = \|\overrightarrow{PR}\| = \|\overrightarrow{QP}\| \cos\theta = \left\| \overrightarrow{QP} \bullet \frac{\overline{N}}{\|\overline{N}\|} \right\| = \frac{4}{\sqrt{5}}$.

Misalkan l merupakan suatu garis di ruang ($\mathbb{R}^3$) yang melalui suatu titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dan sejajar dengan vektor tak nol

$$\overline{v} = a\overline{i} + b\overline{j} + c\overline{k}.$$



Dengan demikian, apabila titik $P(x, y, z)$ terletak pada garis l, maka vektor $\overrightarrow{P_0P}$ sejajar dengen vektor $\overline{v}$.

Dengan kata lain, titik $P(x, y, z)$ terletak pada garis l, jika dan hanya jika terdapat $t \in \mathbb{R}$ sehingga $\overrightarrow{P_0P} = t\overline{v}$.

Jika $\overline{R_0} = \overrightarrow{OP_0}$ dan $\overline{R} = \overrightarrow{OP}$ maka $\overrightarrow{P_0P} = \overline{R} - \overline{R_0}$. Akibatnya,

$$\begin{aligned} \overline{R} &= \overline{R_0} + t\overline{v} \\ \Leftrightarrow x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k} &= x_0\overline{i} + y_0\overline{j} + z_0\overline{k} + t(a\overline{i} + b\overline{j} + c\overline{k}). \end{aligned}$$

Akibatnya, diperoleh persamaan parameter untuk garis l yang melalui titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dan searah vektor $\overline{V} = a\overline{i} + b\overline{j} + c\overline{k}$, yaitu

$$\begin{cases} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct. \end{cases}$$

Lebih lanjut, dengan menyelesaikan persamaan parameter tersebut diperoleh persamaan kartesiusnya yaitu

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Contoh

Tentukan persamaan parameter dan persamaan kartesius dari garis yang melalui titik $P_0(3, -2, 1)$ *dan* $P_1(5, 1, 0)$*. Tentukan titik yang dilalui garis tersebut di bidang xy, xz dan yz.*

Penyelesaian: Diperhatikan bahwa garis tersebut melalui P_0 dan P_1. Dengan demikian, garis tersebut searah dengan vektor $\overrightarrow{P_0P_1} = (5-3, 1+2, 0-1) = (2, 3, -1)$. Jadi, garis yang melalui $P_0(3, -2, 1)$ dan searah vektor $2\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}$ adalah

$$\begin{cases} x &= 3 + 2t \\ y &= -2 + 3t \\ z &= 1 - t. \end{cases}$$

atau

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{-1}.$$

Contoh

Tentukan jarak titik $P(1, 3, 2)$ *ke garis yang melalui titik* $Q(1, 0, 0)$ *dan* $S(1, 2, 0)$.

Contoh

Tentukan jarak titik $P(1,3,2)$ *ke garis yang melalui titik* $Q(1,0,0)$ *dan* $S(1,2,0)$.

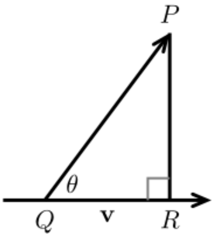
Penyelesaian: Diambil l adalah garis yang memuat titik Q dan S.

Contoh

Tentukan jarak titik $P(1, 3, 2)$ *ke garis yang melalui titik* $Q(1, 0, 0)$ *dan* $S(1, 2, 0)$.

Penyelesaian: Diambil l adalah garis yang memuat titik Q dan S.

Jarak titik P ke garis l merupakan panjang ruas garis tegak lurus yang menghubungkan titik P ke suatu titik di garis l (namakan R). Vektor $\overline{v} = (1 - 1)\overline{i} + (2 - 0)\overline{j} + (0 - 0)\overline{k} = 2\overline{j}$ merupakan vektor sejajar garis l.



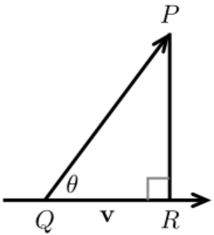
Contoh Jarak Titik ke Garis

Contoh

Tentukan jarak titik $P(1,3,2)$ *ke garis yang melalui titik* $Q(1,0,0)$ *dan* $S(1,2,0)$.

Penyelesaian: Diambil l adalah garis yang memuat titik Q dan S.

Jarak titik P ke garis l merupakan panjang ruas garis tegak lurus yang menghubungkan titik P ke suatu titik di garis l (namakan R). Vektor $\overline{v} = (1-1)\overline{i} + (2-0)\overline{j} + (0-0)\overline{k} = 2\overline{j}$ merupakan vektor sejajar garis l.



Jarak titik P ke garis l adalah

$$d = \|\overrightarrow{PR}\| = \|\overrightarrow{QP}\| \sin\theta = \left\| \overrightarrow{QP} \times \frac{\overline{v}}{\|\overline{v}\|} \right\| = 2.$$

Contoh

Tentukan jarak antara bidang $x + 2y - z = 4$ *dan* $x + 2y - z = 3$.

Contoh

Tentukan jarak antara bidang $x + 2y - z = 4$ dan $x + 2y - z = 3$.

Penyelesaian: Kedua bidang memiliki vektor normal yang sama, yaitu $\overline{N} = \overline{i} + 2\overline{j} - \overline{k}$. Jadi bidang saling sejajar. Akibatnya jarak kedua bidang sama dengan jarak titik di bidang pertama dan titik di bidang kedua.

Contoh

Tentukan jarak antara bidang $x + 2y - z = 4$ *dan* $x + 2y - z = 3$*.*

Penyelesaian: Kedua bidang memiliki vektor normal yang sama, yaitu $\overline{N} = \overline{i} + 2\overline{j} - \overline{k}$. Jadi bidang saling sejajar. Akibatnya jarak kedua bidang sama dengan jarak titik di bidang pertama dan titik di bidang kedua.

Diambil titik $P(4, 0, 0)$ di bidang pertama dan titik $Q(3, 0, 0)$ di bidang kedua. Jarak antar bidang adalah

$$d = \left\| \overrightarrow{QP} \bullet \frac{\overline{N}}{\|\overline{N}\|} \right\| = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

2. Sistem Persamaan Linear

Sistem persamaan linear memiliki bentuk umum sebagai berikut:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \tag{1}$$

dengan a_{ij}, b_k bilangan real untuk setiap $i, k = 1, 2, \ldots, m$ dan $j = 1, 2, \ldots, n$.

Sistem tersebut terdiri dari m buah persamaan linear atas n variabel.

Definisi

n-tuple $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ disebut solusi/penyelesaian Sistem (1) jika $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ merupakan solusi/penyelesaian setiap persamaan linear pada Sistem (1).

Solusi Sistem Persamaan Linear (SPL)

Terdapat tiga kemungkinan solusi Sistem (1):

- **Tidak ada** solusi.
- Terdapat **tepat satu** solusi
- Terdapat **tak berhingga** banyaknya solusi.

Apabila banyak variabel lebih besar dari banyaknya persamaan, yakni $n > m$, maka dapat dipastikan terdapat tak berhingga banyaknya solusi atau tidak ada solusi. Solusi dapat dinyatakan dalam setidaknya $m - n$ parameter.

Contoh

Diberikan sistem persamaan sebagai berikut:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 6 \\ x_2 + x_3 & = & 2 \end{cases}$$

Sistem tersebut memiliki tak berhingga banyaknya solusi. Solusi dapat dinyatakan dalam bentuk parameter sebagai berikut:

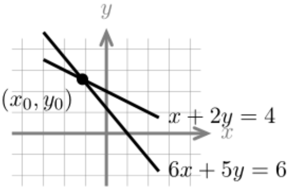
$$x_3 = t, \quad x_2 = 2 - t, \quad x_1 = 6 - 2(2 - t) - 3t = 4 - t$$

Representasi Geometri dari SPL atas 2 variabel

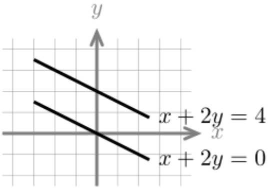
Secara geometri setiap persamaan pada sistem persamaan linear merepresentasikan sebuah garis. Akibatnya, secara geometri solusi sistem ada 3 yaitu

1. Dua garis berpotongan di satu titik. Hal ini berarti sistem mempunyai 1 solusi.
2. Dua garis saling sejajar (tetapi tidak sama). Hal ini berarti sistem tidak ada solusi.
3. Dua garis adalah sama. Hal ini berarti sistem mempunyai tak berhingga banyak solusi.

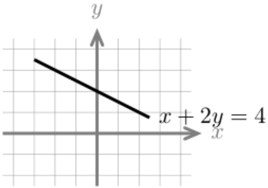
Contoh



$$6x + 5y = 6$$
$$x + 2y = 4$$
(intersecting lines: 1 solution)



$$x + 2y = 4$$
$$x + 2y = 0$$
(parallel lines: no solutions)

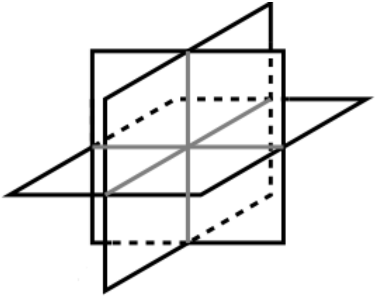


$$x + 2y = 4$$
$$x + 2y = 4$$
(the same line: ∞ solutions)

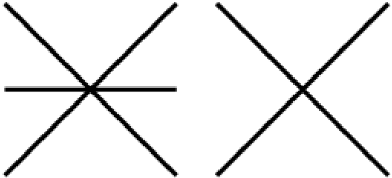
Representasi Geometri dari SPL atas 3 variabel

Secara geometri setiap persamaan pada sistem merepresentasikan sebuah bidang. Akibatnya, secara geometri solusi sistem ada 4 yaitu

1. Bidang-bidang berpotongan di satu titik. Hal ini berarti sistem mempunyai 1 solusi.



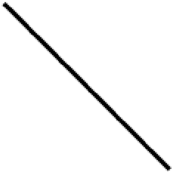
2. Bidang-bidang beririsan di satu garis. Hal ini berarti sistem mempunyai tak berhingga banyak solusi.
   (a.) Jika bidang ketiga memuat garis yang merupakan perpotongan bidang pertama dan bidang kedua.
   (b.) Jika bidang pertama dan bidang kedua sama serta bidang ketiga beririsan dengan bidang pertama dan kedua di sebuah garis.



Case (2a) Case (2b)

Representasi Geometri dari SPL atas 3 variabel

3. Bidang-bidang beririsan di satu bidang (semua bidang adalah sama). Hal ini berarti sistem mempunyai tak berhingga banyak solusi.

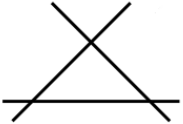


Representasi Geometri dari SPL atas 3 variabel

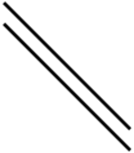
4. Bidang-bidang tidak saling berpotongan. Hal ini berarti sistem tidak ada solusi.
   (a.) Semua bidang sejajar tetapi berbeda.
   (b.) Bidang pertama dan kedua sejajar serta bidang ketiga memotong bidang pertama dan kedua.
   (c.) Semua bidang berbeda dan tidak sejajar, akan tetapi semua garis dari perpotongan dua bidang saling sejajar.
   (d.) Bidang pertama sama dengan bidang kedua serta sejajar dengan bidang ketiga.

Case (4a)

Case (4b)



Case (4c)



Case (4d)

Persamaan Matriks

Sistem persamaan linear (1) dapat dinyatakan ke dalam bentuk persamaan matriks berikut:

$$\boxed{\mathbf{Ax} = \mathbf{b}}$$

dengan

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \text{ dan } \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Sistem persamaan linear (1) dapat dinyatakan ke dalam bentuk persamaan matriks berikut:

$$\boxed{\mathbf{Ax} = \mathbf{b}}$$

dengan

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \text{ dan } \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Definisi

Sistem persamaan linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ disebut homogen jika $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ dan disebut tak homogen jika $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$.

Teorema

Diberikan matriks A berukuran $n \times n$.

1. Jika $|A| \neq 0$, maka SPL $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mempunyai solusi tunggal dan solusinya $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.
2. Jika $|A| \neq 0$, maka SPL $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ mempunyai solusi trivial, yaitu $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
3. Jika $|A| = 0$, maka SPL $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ mempunyai solusi non-trivial.
4. Jika $|A| = 0$, maka SPL $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ umumnya tidak mempunyai solusi.

Di (4), sistem disebut konsisten jika sistem mempunyai solusi dan disebut tidak konsisten jika sistem tidak memiliki solusi.

Inverse Matriks

Salah satu cara untuk menyelesaikan sistem persamaan linear yang berbentuk **Ax=b** adalah dengan invers matriks.

Berikut langkah-langkah untuk menghitung invers matriks: Diberikan matriks $A_{n\times n}$.

1. Hitung matriks minor $M_{n\times n}$ dari matriks $A_{n\times n}$.
2. Ubah matriks minor $M_{n\times n}$ menjadi matriks kofaktor $C_{n\times n}$.
3. Ubah matrik kofaktor $C_{n\times n}$ menjadi matriks adjoin Adj(A) dengan cara mentranspose matriks kofaktor $C_{n\times n}$.
4. Bagi matriks adjoin Adj(A) dengan $|A|$.

Contoh

Tentukan invers matriks dari

(a.) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

(b.) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Penyelesaian (a.)

Untuk menentukan matriks invers, dicari dulu matriks minor, matriks kofaktor dan matriks adjoin dari A.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jadi matriks inversnya adalah

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{|A|}.\mathrm{Adj}(A) = \frac{1}{(1 \times 2) + (0 \times -3)} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Penyelesaian (b.)

Berikut matriks minor, matriks kofaktor, dan matriks adjoin dari B:

$$M = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 7 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow C = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 7 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Adj}(B) = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & 3 \\ 7 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

Jadi matriks inverse

$$\begin{aligned} B^{-1} &= \frac{1}{|B|}.\text{Adj}(B) \\ &= \frac{1}{(1 \times -5) + (2 \times -3) + (2 \times 7)} \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & 3 \\ 7 & -1 & -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & 3 \\ 7 & -1 & -5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$