TKU211103 Kalkulus Variabel Jamak

Integral Garis

Oleh: Tim Dosen Kalkulus Variabel Jamak

Semester Gasal 2021/2022

Departemen Matematika FMIPA UGM

1. Integral Garis

Pada pembahasan vektor, titik pada kurva di $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^3$ dapat dipandang sebagai vektor posisi

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \qquad (\mathbb{R}^2)$$

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \qquad (\mathbb{R}^3).$$

Perhatikan bahwa penyajian kurva dalam bentuk fungsi parameter. Pada bagian ini kita juga akan gunakan notasi

$$C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b] \qquad\qquad C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b].$$

untuk menyatakan kurva di $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^3$ berturut-turut. Sebuah kurva dapat terbentuk sebagai gabungan dari beberapa kurva dan dituliskan $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup \cdots \cup C_n$ dimana kurva C_{i-1} dan C_i terhubung pada ujungnya.

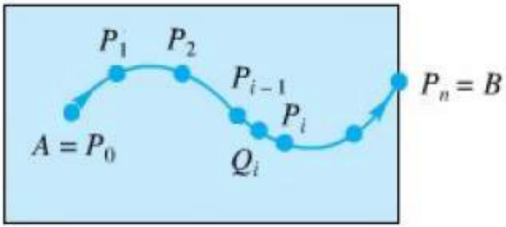
Diberikan kurva C pada $\mathbb{R}^2$ dengan persamaan parameter:

$$C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \qquad t \in [a, b].$$

Partisi pada $[a, b]$ yaitu $\{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ dengan $A = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = B$, menginduksi partisi pada kurva C, yaitu

$$P = \{(x(t_0), y(t_0)), (x(t_1), y(t_1)), \ldots, (x(t_n), y(t_n))\}$$

seperti pada gambar di bawah



Diperhatikan bahwa untuk $i = 1, 2, \ldots, n$,

- $\Delta S_i =$ panjang subkurva C dengan titik ujung P_{i-1} dan P_i
- $Q_i = (x_i^*, y_i^*)$ dipilih sebarang pada subkurva tersebut.

Selanjutnya, dihitung $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta S_i$ dengan $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dan $C \subseteq D$.

Definisi

Integral garis f sepanjang kurva C didefinisikan sebagai

$$\int_C f(x, y)ds = \lim_{maks \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta S_i$$

asalkan limit di ruas kanan ada dan tidak tergantung pemilihan (x_i^*, y_i^*).

Perhatikan bahwa jika $f \equiv 1$ maka integral garis f sepanjang kurva C akan menghasilkan panjang kurva C yaitu

$$\int_C f(x, y) ds = \int_C 1 \, ds.$$

Selain itu, jika kita memandang (x, y) pada kurva C sebagai fungsi parameter maka diperoleh

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \, dt$$

Contoh

Tentukan $\int_C f(x,y)ds$, *dengan kurva* C *merupakan kurva bagian parabola* $y = \frac{x^2}{2}$ *dari* $(0,0)$ *hingga* $(2,2)$ *dan* $f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+4y^2}}{2}$.

Penyelesaian:

Contoh

Tentukan $\int_C f(x,y)ds$*, dengan kurva* C *merupakan kurva bagian parabola* $y = \frac{x^2}{2}$ *dari* $(0,0)$ *hingga* $(2,2)$ *dan* $f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+4y^2}}{2}$.

Penyelesaian: Persamaan parameter kurva C dapat diperoleh dengan mengambil $x = t$, yaitu

$$C : \begin{cases} x = t \\ y = \frac{t^2}{2} \end{cases}, \qquad 0 \leq t \leq 2$$

sehingga diperoleh

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{1+t^2}\, dt$$

dan

$$\int_C \frac{\sqrt{x^2+4y^2}}{2} ds = \int_0^2 \frac{1}{2}\sqrt{t^2+t^4}\sqrt{1+t^2} dt = \frac{1}{2}\int_0^2 t + t^3\, dt = 3.$$

Apabila kurva C merupakan gabungan dari beberapa kurva yaitu

$$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup \cdots \cup C_n$$

maka integral garis fungsi f sepanjang kurva C dapat dinyatakan sebagai

$$\int_C f(x,y)\,ds = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} f(x,y)\,ds.$$

Contoh

Hitunglah $\int_C xy^2\, ds$, *dengan kurva* $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ *dimana*

- C_1 : *penggal garis* $x = y$ *dari* $(0,0)$ *ke* $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$
- C_2 : *busur lingkaran* $x^2 + y^2 = 4$ *dari* $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ *ke* $(0,2)$ *dan*
- C_3 : *penggal garis dari* $(0,2)$ *ke* $(0,0)$

Penyelesaian:

Contoh

Hitunglah $\int_C xy^2\, ds$, *dengan kurva* $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ *dimana*

- C_1 : *penggal garis* $x = y$ *dari* $(0,0)$ *ke* $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$
- C_2 : *busur lingkaran* $x^2 + y^2 = 4$ *dari* $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ *ke* $(0,2)$ *dan*
- C_3 : *penggal garis dari* $(0,2)$ *ke* $(0,0)$

Penyelesaian: Persamaan parameter kurva C_1, C_2, dan C_3 adalah

$$C_1 : \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}, \qquad 0 \le t \le \sqrt{2}, \qquad C_2 : \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}, \qquad \frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{2},$$

$$C_3 : \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 - t \end{cases}, \qquad 0 \le t \le 2.$$

Penyelesaian Lanjutan:

(i) Pada C_1, diperoleh $ds = \sqrt{1+1}dt = \sqrt{2}\,dt$ sehingga

$$\int_{C_1} xy^2\,ds = \int_0^{\sqrt{2}} t \cdot t^2\sqrt{2}\,dt = \sqrt{2}\int_0^{\sqrt{2}} t^3\,dt = \sqrt{2}.$$

(ii) Pada C_2, diperoleh $ds = \sqrt{(-2\sin t)^2 + (-2\cos t)^2}dt = 2\,dt$ sehingga

$$\int_{C_1} xy^2\,ds = \int_{\pi/4}^{\pi/2} 2\cos t(2\sin t)^2 \cdot 2\,dt = \frac{16}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{2}.$$

(iii) Pada C_3, karena $xy^2 = 0$ maka $\int_{C_3} xy^2\,ds = 0$.

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa $\displaystyle\int_C xy^2\,ds = \sqrt{2} + \frac{16}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{2} + 0 = \frac{16}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}.$

Jika C merupakan kurva pada $\mathbb{R}^3$ maka integral garis f sepanjang C diberikan oleh

$$\int_C f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt.$$

Latihan

Tentukan $\int_C xyz\,ds$, *dengan kurva* C : $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ z = t \end{cases}$, $0 \le t \le \pi$.

2. Medan Vektor, Medan Gradien

Pada bagian ini diberikan definisi **medan vektor** dan **medan gradien**.

Definisi (Medan Vektor)

Fungsi $\mathbf{F} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *disebut dengan* ***medan vektor****.*

Sebagai contoh, fungsi $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dengan

$$\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2, x + y)$$

merupakan medan vektor.

Definisi (Medan Gradien)

Diberikan fungsi skalar $\mathbf{F} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*. Himpunan gradien*

$$\nabla \mathbf{F} = (\mathbf{F}_{x_1}, \mathbf{F}_{x_2}, \ldots, \mathbf{F}_{x_n})$$

disebut ***medan gradien****. Selanjutnya, fungsi* f *disebut* ***fungsi potensial*** *untuk medan gradien tersebut.*

Pedahuluan

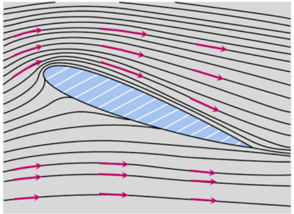


FIGURE 16.7 Velocity vectors of a flow around an airfoil in a wind tunnel. The streamlines were made visible by kerosene smoke.

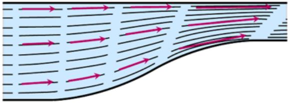


FIGURE 16.8 Streamlines in a contracting channel. The water speeds up as the channel narrows and the velocity vectors increase in length.

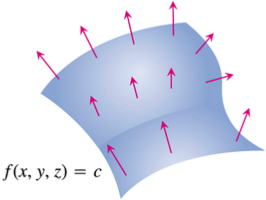


FIGURE 16.11 The field of gradient vectors ∇f on a surface $f(x, y, z) = c$.

Misalkan diberikan medan vektor $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ yang merepresentasikan gaya pada suatu region di bidang dan

$$\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}, \qquad a \leq t \leq b$$

adalah kurva mulus pada region tersebut. Selanjutnya, integral $\mathbf{F} \bullet \mathbf{T}$ sepanjang kurva disebut sebagai kerja yang dilakukan $\mathbf{F}$ pada kurva dari a sampai b.

Definisi

Kerja *(Work) yang dilakukan oleh gaya* $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ *sepanjang kurva mulus* $\mathbf{r}(t)$ *dari* $t = a$ *sampai* $t = b$ *adalah*

$$W = \int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F} \bullet \mathbf{T}\, ds.$$

TABLE 16.2 Six different ways to write the work integral

$W = \int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$	The definition
$= \int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$	Compact differential form
$= \int_a^b \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\, dt$	Expanded to include dt; emphasizes the parameter t and velocity vector $d\mathbf{r}/dt$
$= \int_a^b \left(M\frac{dg}{dt} + N\frac{dh}{dt} + P\frac{dk}{dt} \right) dt$	Emphasizes the component functions
$= \int_a^b \left(M\frac{dx}{dt} + N\frac{dy}{dt} + P\frac{dz}{dt} \right) dt$	Abbreviates the components of $\mathbf{r}$
$= \int_a^b M\, dx + N\, dy + P\, dz$	dt's canceled; the most common form

Contoh

Hitunglah kerja yang dilakukan $\mathbf{F} = (y - x^2)\mathbf{i} + (z - y^2)\mathbf{j} + (x - z^2)\mathbf{k}$ *sepanjang kurva* $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k},\ 0 \leq t \leq 1$, *dari* $(0,0,0)$ *sampai* $(1,1,1)$.

Penyelesaian: Pertama dihitung **F** pada kurva

$$\mathbf{F} = (y - x^2)\mathbf{i} + (z - y^2)\mathbf{j} + (x - z^2)\mathbf{k} = (t^2 - t^2)\mathbf{i} + (t^3 - t^4)\mathbf{j} + (t - t^6)\mathbf{k}.$$

Kemudian diperoleh

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}.$$

Akibatnya diperoleh

$$\mathbf{F} \bullet \mathbf{r}' = \left[(t^3 - t^4)\mathbf{j} + (t - t^6)\mathbf{k}\right] \bullet \left(\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}\right) = 2t^4 - 2t^5 + 3t^3 - 3t^8.$$

$$\text{Work} = \int_0^1 2t^4 - 2t^5 + 3t^3 - 3t^8\, dt = \frac{29}{60}.$$

Diperhatikan kembali medan vektor dan fungsi potensial. Khusus untuk $n = 2$, diberikan fungsi $\phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dan $\nabla\phi = (\phi_x, \phi_y)$ dengan

$$\nabla\phi(x, y) = (\phi_x(x, y), \phi_y(x, y)).$$

Diperhatikan bahwa, untuk sebarang konstanta k,

$$\nabla(\phi + k) = (\phi_x, \phi_y) = \nabla\phi. \qquad (\star)$$

Jika ϕ diberikan, maka $\mathbf{F} = \nabla\phi$ dapat ditentukan dengan derivatif parsial.

Contoh

Diberikan fungsi $\phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dengan

$$\phi(x, y) = \sin xy,$$

untuk setiap $(x, y) \in D$. Diperhatikan bahwa

$$\phi_x(x, y) = y \cos(xy) \qquad \text{dan} \qquad \phi_y(x, y) = x \cos(xy).$$

Dengan demikian, medan gradien dari ϕ adalah

$$\nabla\phi(x, y) = (\phi_x(x, y), \phi_y(x, y)) = (y \cos(xy), x \cos(xy)).$$

Sebaliknya, jika diberikan medan vektor $\mathbf{F}$, apakah dapat ditentukan fungsi ϕ, sehingga $\mathbf{F} = \nabla\phi$?

Untuk keperluan tersebut, diberikan pengertian medan vektor konservatif sebagai berikut.

Daerah Terhubung Sederhana

Definisi

- *Daerah D dikatakan terhubung tunggal/sederhana (**simply connected**), jika untuk setiap kurva tertutup sederhana C di dalam D, setiap titik di dalam daerah yang dibatasi C berada di D.*
- *Daerah D dikatakan terhubung tak sederhana (**multiply connected**), jika D tidak terhubung sederhana.*

simply connected   multiply connected   multiply connected

Definisi (Medan Konservatif)

Medan vektor $\mathbf{F}$ *dikatakan konservatif, jika terdapat fungsi terdiferensial* ϕ*, dengan sifat* $\mathbf{F} = \nabla\phi$*. Selanjutnya,* ϕ *disebut **fungsi potensial** untuk* $\mathbf{F} = \nabla\phi$*.*

Catatan : Medan vektor konservatif sering dikenal sebagai medan gradien.

Diberikan medan vektor konservatif $\mathbf{F} = (M, N)$. Berarti terdapat fungsi terdiferensial ϕ, dengan $\mathbf{F} = \nabla\phi$. Diperoleh

$$M = \phi_x \quad \text{dan} \quad N = \phi_y \quad \Rightarrow \quad M_y = \phi_{xy} \quad \text{dan} \quad N_x = \phi_{yx}$$

Jadi, $M_y = N_x$.

Teorema

Diberikan medan vektor $\mathbf{F} = (M, N)$ pada daerah terhubung sederhana dengan M, N fungsi terdiferensial. Medan vektor $\mathbf{F} = (M, N)$ konservatif jika dan hanya jika

$$M_y = N_x.$$

Medan vektor $\mathbf{F} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dengan

$$\mathbf{F}(x, y) = (M(x, y), N(x, y)) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j},$$

konservatif jika dan hanya jika $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$.

Perluasan di dimensi 3

Diperhatikan bahwa untuk $\mathbf{F} = (M, N, P)$ dan $\mathbf{r} = (x, y, z)$, diperoleh

$$\mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = M\ dx + N\ dy + P\ dz.$$

Diketahui $\mathbf{F} = (M, N, P)$, dengan M, N, dan P mempunyai derivatif parsial di dalam daerah terhubung sederhana. Medan $\mathbf{F} = (M, N, P)$ merupakan medan gradien (medan vektor konservatif) jika dan hanya jika *curl* $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Dengan demikian, $\mathbf{F}$ merupakan medan gradien (medan vektor konservatif) jika dan hanya jika

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial z}, \quad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Latihan

Selidiki mana saja medan vektor yang konservatif.

1. $\mathbf{F}(x, y) = (2xy, x^2 + 5)$.
2. $\mathbf{F}(x, y) = (2x \sin y, x^2 \cos y + y^2)$.
3. $\mathbf{F}(x, y) = (x + y, x + y)$.
4. $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 + y^2)$.
5. $\mathbf{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$.

Contoh

Tentukan fungsi potensial untuk medan vektor konservatif

$$\mathbf{F}(x, y) = (1 + 2xy)\mathbf{i} + (x^2 - 2)\mathbf{j}.$$

Penyelesaian: Diperhatikan bahwa

$$M(x, y) = 1 + 2xy = \phi_x(x, y). \qquad (1)$$

Pengintegralan (1) terhadap x memberikan

$$x + x^2y + c(y) = \phi(x, y). \qquad (2)$$

(Catatan : konstanta integrasi merupakan fungsi dalam y yang dianggap konstan).

Lanjutan Penyelesaian:

Selanjutnya, dengan mengambil derivatif parsaial (2) terhadap y, diperoleh

$$x^2 + c'(y) = \phi_y(x, y) = N(x, y) = x^2 - 2$$

yang ekuivalen dengan

$$c'(y) = -2. \qquad (3)$$

Pengintegralan (3) terhadap y memberikan

$$c(y) = -2y + K.$$

Dengan memperhatikan ($\star$), fungsi potensial ϕ dapat diambil sebagai berikut:

$$\phi(x, y) = x + x^2 y - 2y.$$

Latihan

1. *Diberikan medan gradien (medan vektor konservatif)* $\mathbf{F}(x, y) = (2x, 2y)$. *Tentukan fungsi potensial* ϕ *untuk* $\mathbf{F}$.
2. *Tunjukkan bahwa* $\mathbf{F}(x, y) = (e^y - 2xy, xe^y - x^2 + 2y)$ *merupakan medan gradien pada* $\mathbb{R}^2$ *dan tentukan fungsi potensial untuk* $\mathbf{F}$.
3. *Tunjukkan bahwa medan gaya* $\mathbf{F}(x, y) = (e^y - 2xy, xe^y - x^2 + 2y)$ *konservatif pada* $\mathbb{R}^2$.

Teorema (Bebas Lintasan)

Diberikan medan gradien kontinu $\mathbf{F}$ *pada daerah terbuka* $D \subseteq \mathbb{R}^2$ *dengan fungsi potensialnya* ϕ. *Jika* $A(x_1, y_1)$ *dan* $B(x_2, y_2)$ *sebarang dua titik anggota* D *dan* C *sebarang kurva mulus sepotong-sepotong dari* A *ke* B *berada di* D, *maka*

$$\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_C \nabla\phi \bullet d\mathbf{r} = \phi(x_2, y_2) - \phi(x_1, y_1).$$

Penyelesaian: Diperhatikan bahwa untuk C kurva smoooth/mulus sepotong-sepotong, berarti C merupakan gabungan sebanyak berhingga kurva-kurva smooth dan integral garis sepanjang C merupakan jumlahan integral garis sepanjang kurva-kurva penyusun C tersebut.

Dengan demikian, tanpa mengurangi arti, bukti diberikan untuk C smooth. Katakan $\mathbf{F}(x, y) = (M(x, y), N(x, y))$. Menurut yang diketahui, ϕ merupakan fungsi potensial $\mathbf{F}$, berarti $\mathbf{F} = \nabla\phi = (\phi_x, \phi_y)$. Jadi

$$\phi_x(x, y) = M(x, y) \qquad \text{dan} \qquad \phi_y(x, y) = N(x, y).$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} &= \int_C M(x, y)\; dx + N(x, y)\; dy \\
&= \int_C \phi_x(x, y)\; dx + \phi_y(x, y)\; dy.
\end{aligned}$$

Lanjutan Penyelesaian:

Katakan $C : \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)),\ a \leq t \leq b$, dengan

$$\mathbf{r}(a) = (x(a), y(a)) = (x_1, y_1) \quad \text{dan} \quad \mathbf{r}(b) = (x(b), y(b)) = (x_2, y_2).$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned}
&\int_C \phi_x(x,y)\ dx + \phi_y(x,y)\ dy \\
&\qquad = \int_a^b \phi_x(x(t), y(t))x'(t)\ dt + \phi_y(x(t), y(t))y'(t)\ dt \\
&\qquad = \int_a^b \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{dx}{dt}dt + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{dy}{dt}dt = \int_a^b \left[\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right] dt \\
&\qquad = \int_a^b \frac{d}{dt}(\phi(x(t), y(t)))\ dt \\
&\qquad = \phi(x(b), y(b)) - \phi(x(a), y(a)) = \phi(x_2, y_2) - \phi(x_1, y_1).
\end{aligned}$$

Catatan : Teorema (Bebas Lintasan) menyatakan bahwa jika $\mathbf{F}$ medan gradien kontinu dengan fungsi potensial ϕ, maka nilai integral garis sepanjang kurva mulus sepotong-sepotong C bebas lintasan, hanya bergantung titik asal dan titik akhir lintasan.

Akibat

Jika $\mathbf{F}$ *medan gradien kontinu di dalam daerah* $D \subseteq \mathbb{R}^2$ *yang memuat kurva tertutup kontinu sepotong-sepotong* C*, maka*

$$\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = 0.$$

Dalam kasus C tertutup, $\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ dapat dituliskan $\oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$.

Contoh

Tunjukkan bahwa medan gaya $\mathbf{F}(x, y) = (2x - 3y, 3y^2 - 3x)$ *konservatif pada* $\mathbb{R}^2$*.*
Selanjutnya, hitunglah kerja yang dilakukan $\mathbf{F}$ *yang bekerja pada suatu partikel bergerak dari* $(2, 1)$ *ke* $(5, -3)$*.*

Thank You