UNIVERSITAS GADJAH MADA

Matematika Diskret dan Logika (TKIE162101)

Himpunan & Relasi

Slide dipersiapkan oleh A.G. Persada

Himpunan (*Set*)

Himpunan

- **Himpunan** → kumpulan obyek-obyek yang berbeda.
- Obyek di dalam himpunan : elemen atau anggota
- Dua himpunan dikatakan sama/ekuivalen jika memiliki elemen-elemen yang sama. Contoh :
  - {0,2,4,6} = {4,2,6,0}
- Himpunan dapat dinyatakan dengan :
  - Menuliskan anggota di antara dua (2) kurung kurawal. Contoh {a, i, u, e, o}
  - Menuliskan sifat yang ada pada seluruh anggota himpunan. Contoh : {x|x adalah huruf vocal dalam alfabet}
  - Menggunakan diagram Venn

Himpunan

- Contoh representasi Himpunan dengan Diagram Venn

*) https://www.amsi.org.au/teacher_modules/H1/H1g2.png

Sifat Dasar Himpunan

- Himpunan bersifat *unordered.*
  - Tidak ada perbedaan yang didasarkan pada urutan elemen di dalam himpunan
  - Contoh : Semisal terdapat 3 elemen a,b, dan c, maka :
    {a, b, c} = {a, c, b} = {b, a, c} = {b, c, a} = {c, a, b} = {c, b, a}.
- Seluruh elemen dalam himpunan adalah berbeda. Sebuah elemen yang berjumlah lebih dari satu tidak ada bedanya dengan satu elemen saja.
  - Misalkan, jika terdapat 3 elemen, a,b, dan c, dan a = b, maka :
    {a, b, c} = {a, c} = {b, c} = {a, a, b, a, b, c, c, c, c}.

Himpunan

- **Kardinalitas** (*cardinality*) dari suatu himpunan terhingga (*finite set*) **S** => banyaknya elemen berbeda dalam **S**, dan dinotasikan dengan |**S**|
  - !!! Jangan rancu dengan **absolute value** karena S di sini himpunan.
- Suatu himpunan dikatakan *infinite* jika mengandung elemen yang tidak terhingga.
- Suatu himpunan yang mengandung semua objek yang dibicarakan disebut himpunan **universal**, dinotasikan dengan **U**.
- Suatu himpunan yang tidak memiliki elemen disebut himpunan kosong (*empty set*), dinotasikan dengan ∅.

Contoh Himpunan

1. $A = \{1, 2, 3\}$, $|A| = ?$
2. $B = \{3, 3, 3, 3, 3\}$, $|B| = ?$
3. If $C = \varnothing$, $|C| = ?$
4. If $D = \{ \varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing,\{\varnothing\}\} \}$, $|D| = ?$
5. If $E = \{0, 1, 2, 3,\ldots\}$, $|E| = ?$

Himpunan Bilangan

- Natural numbers $\mathbb{N}$
- Integer numbers $\mathbb{Z}$
- Real numbers $\mathbb{R}$
- Rational numbers $\mathbb{Q}$

Istilah terkait Himpunan

- Himpunan **S** adalah **himpunan bagian** (subset) dari **T** **jika dan hanya** jika setiap elemen **S** juga merupakan elemen dari T (Notasi: S $\subseteq$ T)
- **Himpunan kuasa** (*power set*) dari himpunan **S** adalah himpunan dari semua himpunan bagian dari S, dinotasikan dengan **P(S)**.
- Jika A= {x, y} maka P(A)=
- **Perkalian Kartesian** (*Cartesian product*) dari dua himpunan A dan B dinotasikan dengan A × B

Cartesian Product

- Diketahui himpunan **A** dan **B** => Kedua himpunan tersebut bisa kita kalikan **A × B** → **Cartesian Product**
- Perlu paham konsep pasangan berurutan (*ordered pair*)

Definisi Pasangan Berurutan: Ordered pair adalah sebuah *list* (x, y) dari 2 buah entitas x and y, yang dituliskan di dalam tanda kurung dan dipisahkan oleh tanda koma.
Contoh: (1,3) adalah sebuah ordered pair dari 1 dan 3, demikian pula (3,1). Kedua ordered pair ini tidak sama karena meski keduanya mengandung entitas yang sama di dalamnya, urutannya berbeda. Kita tuliskan $(1,3) \neq (3,1)$.

- Pemakaian: Untuk menggambarkan titik koordinat pada bidang datar pada sistem koordinat Kartesian.
- Ordered Pair of Letters: (m, n), Ordered Pairs of Sets: ({2,3}, {4,7}), Ordered Pair of Ordered Pairs ((2,4),(3,1),(7,2)).

Cartesian Product

Definisi Perkalian Kartesian: Cartesian product dari himpunan A dan B adalah juga sebuah himpunan yang dituliskan sebagai $A \times B$ dan didefinisikan sebagai $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$.

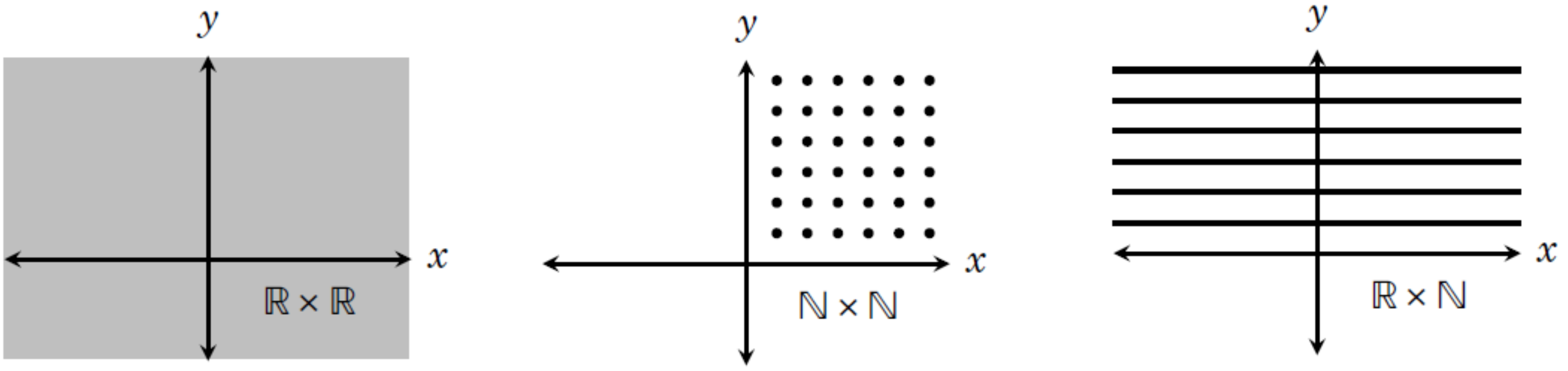
- Jika B= {a, b, c, d} dan C={ 5, 7, 9} maka $B \times C$= ?

  $B \times C$= {(a,5), (a,7), (a,9), (b,5), (b,7), (b,9), (c,5), (c,7), (c,9), (d,5), (d,7), (d,9)}
- **Cartesian Product** pada <u>umumnya</u> **tidak bersifat komutatif** dan **tidak bersifat asosiatif.**

  $A \times B \neq B \times A$

  $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$
- Cartesian Product bersifat komutatif jika A=B atau jika A= $\emptyset$ atau B=$\emptyset$.
- Cartesian Product bersifat asosiatif jika salah satu dari A, B, C di atas adalah himpunan kosong.

Ilustrasi *Cartesian Product*



Latihan Soal

- Tentukan apakah pernyataan 1-3 berikut adalah benar atau salah?

1. $2 \subseteq \{1, 2, 3\}$???
2. $\{3\} \subseteq \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$???
3. $\{3\} \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$???

- Selesaikan :

1. $A = \{a, b, c\}$; $P(A)$ = ?
2. $A = \{x, y\}$, $B = \{1, 2, 3\}$; $A \times B$ = ???

Operasi pada Himpunan

- Gabungan (*Union*) $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
- Irisan (*Intersection*) $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
- Selisih (*Difference*) $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
- Komplemen (*Complement*) $\bar{A} = \{x \mid x \notin A\}$

- Dua himpunan dikatakan **terpisah (*disjoint*)** jika irisan keduanya adalah **himpunan kosong**

- Gambar Diagram Venn-nya!

Latihan Soal

- Misalkan terdapat sebuah Himpunan semesta U, dengan definisi
  U = {a, b, c, d, e, f, g}. Ter
  A = {a, c, e, g}
  B = {d, e, f, g}

1. $A \cup B =$
2. $A \cap B =$
3. $A - B =$
4. $B^c =$

Sifat Himpunan

- Misalkan A dan B adalah 2 himpunan
  a. $A \cap B \subseteq A$ dan $A \cap B \subseteq B$
  b. $A \subseteq A \cup B$ dan $B \subseteq A \cup B$

- Misalkan A adalah himpunan bagian dari *universal set* U
  a. $\varnothing^c = U$
  b. $U^c = \varnothing$
  c. $(A^c)^c = A$
  d. $A \cup A^c = U$
  e. $A \cap A^c = \varnothing$

Sifat Himpunan

Ekivalen	Nama
$A \cap B = B \cap A$	Hukum Komutatif
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	Hukum Asosiatif
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Hukum Distributif
$A \cap U = A$	Irisan dengan Semesta U
$A \cup U = U$	Gabungan dengan Semesta U
$(A^c)^c = A$	Komplemen ganda
$A \cup A = A$; $A \cap A = A$	Hukum Idempoten
$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$; $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$	Hukum De Morgan

Sifat Operasi Himpunan

- Jika A dan B adalah himpunan bagian dari semesta himpunan U

  $a.\ A \cup U = U$

  $b.\ A \cup A = A$

  $c.\ A \cup \varnothing = A$

  $d.\ A \cup B = B \cup A$

  $e.\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- Jika A dan B adalah himpunan bagian dari semesta himpunan U

  $a.\ A \cap U = A$

  $b.\ A \cap A = A$

  $c.\ A \cap \varnothing = \varnothing$

  $d.\ A \cap B = B \cap A$

  $e.\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Sifat Operasi Himpunan

- Jika A, B, dan C adalah himpunan bagian dari semesta U

  a. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

  b. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

De Morgan's Laws

- Misalkan A dan B adalah himpunan bagian dari semesta U

  a. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

  b. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Latihan

1. Misalkan $A = \{b, c, d, f, g\}$ dan $B = \{a, b, c\}$. Tentukan:
   a. $A \cup B$ c. $A - B$
   b. $A \cap B$ d. $B - A$
2. Misalkan A = {1, 2} dan B = {2, 3}. Tentukanlah:
   a. $P(A \cap B)$ c. $P(A \cup B)$
   b. $P(A)$ d. $P(A \times B)$
3. Misalkan A dan B adalah 2 himpunan. Buktikan bahwa
   $(A - B) \cap (A \cap B) = \varnothing$

Relasi

Relasi

- $5 < 10$
- $6 = 30/5$
- $5 \mid 80$
- $6 \in \mathbb{Z}$
- $X \subseteq Y$
- $\pi \approx 3.14$
- $0 \geq -1$
- $\sqrt[2]{2} \notin \mathbb{Z}$
- $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{N}$

Relasi

- Relasi suatu set A adalah subset $R \subseteq A \times A$.
- Secara umum, $(x,y) \in R$ dapat dituliskan dengan xRy

Relasi

- Suatu pasangan terurut (*ordered pair*) (a, b) adalah suatu daftar dari objek-objek **a** dan **b** dengan **a** muncul lebih awal daripada **b**.
- Jika **A dan B** adalah himpunan, A x B dinotasikan sebagai himpunan dari pasangan terurut (a, b) dimana a $\in$ A dan b $\in$ B. Jadi A x B disebut **perkalian Cartesian** dari **A dan B**.

Relasi

- Suatu **relasi biner** (*binary relation*) R dari suatu himpunan A ke himpunan B adalah suatu himpunan bagian dari A x B.
- Jika $(a, b) \in R$ ditulis a**R**b dan dikatakan bahwa a **relasi** b.
- Jika a **tidak terhubung** dengan b ditulis $a \not R b$. Jika A = B dapat disebut R adalah suatu relasi biner pada A.
- $\text{Dom}(R) = \{a \in A \mid (a, b) \in R$ untuk beberapa $b \in B\}$
- disebut domain dari R. Himpunan
- $\text{Range}(R) = \{b \in B \mid (a, b) \in R$ untuk beberapa $a \in A\}$
- disebut range dari R.

Contoh

UNIVERSITAS GADJAH MADA

- Misalkan A = {2,3,4} dan B = {3,4,5,6,7}. Didefinikan bahwa relasi R dengan aRb jika dan hanya jika a membagi b. Tentukan R, Dom(R), dan Range(R) ?
- Misalkan A = {1,2,3,4}. Didefinisikan relasi R dengan aRb jika dan hanya jika a ≤ b. Tentukan R, Dom(R), dan Range(R) ?

Representasi Relasi dalam Graf dan Matriks

- Suatu cara yang informatif untuk menggambarkan suatu relasi pada himpunan adalah dengan menggambar **digraph**
- Untuk menggambar suatu digraph pada himpunan A:
  - Gambarkan titik atau verteks yang merepresentasikan elemen dari A.
  - Jika (a, b) ∈ R, gambar anak panah (disebut *directed edge*) dari a ke b.
  - Jika (a, a) ∈ R maka *directed edge* berupa loop.

Representasi Relasi dalam Graf dan Matriks

- Misalkan R adalah relasi biner dari himpunan berhingga V = $\{v_1, v_2, \ldots v_m\}$ ke himpunan berhingga W = $\{w_1, w_2, \ldots w_n\}$. Maka R dapat dinyatakan dalam matriks Boolean A berorde $m \times n$ dengan elemen:

$$A(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{jika } (v_i, w_j) \in R \\ 0, & \text{jika } (v_i, w_j) \notin R \end{cases}$$

Contoh

- Misalkan A = {1, 2, 3, 4},
- R = {(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,4),(4,1)}
- Buatlah digraph dari R?
- Nyatakan R dalam bentuk matriks

Jenis Relasi

- **Refleksif**
- **Simetris**
- **Transitif**
- Irrefleksif
- Asimetris
- Antisimetris

Jenis Relasi - Refleksif

$$(\forall x \in A)\ xRx$$

Jenis Relasi - Simetris

$$(\forall x,y \in A)\ xRy \rightarrow yRx$$

Jenis Relasi - Transitif

$$(\forall x,y,z \in A)\ (xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz$$

Jenis Relasi - Irrefleksif

$$(\forall x \in A)\ x \not R x$$

Jenis Relasi - Asimetris

$$(\forall x,y \in A)\ xRy \rightarrow y \not{R} x$$

Jenis Relasi - Antisimetris

$$(\forall x \in A)\ (xRy \wedge yRx) \rightarrow x=y$$

Contoh Relasi

Relation on Z	$<$	$\leq$	$=$	$\mid$	$\nmid$	$\neq$
Refleksif						
Symmetric						
Transitive						

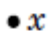
Contoh Relasi

UNIVERSITAS GADJAH MADA

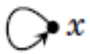
- A = {b,c,d,e}
- R adalah relasi pada A :
  - R = {(b,b), (b,c), (c,b), (c,c), (d,d), (b,d), (d,b), (c,d),(d,c)}
- Apakah R refleksif, simetris, dan transitif?
  - Tidak refeksif :
    - eRe tidak tersedia
  - Simetris :
    - Terpenuhi semua
  - Transitif :
    - (bRc and cRd) → bRd
    - (bRe and eRc) → bRc

Summary Relasi

A relation is **reflexive** if for each point x ...



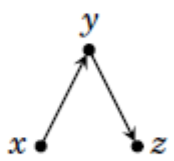
...there is a loop at x:



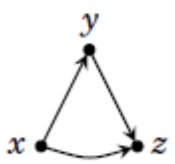
A relation is **symmetric** if whenever there is an arrow from x to y ...

...there is also an arrow from y back to x:

A relation is **transitive** if whenever there are arrows from x to y and y to z ...



...there is also an arrow from x to z:



(If $x = z$, this means that if there are arrows from x to y and from y to x ...

...there is also a loop from x back to x.)

Relasi Ekuivalensi

- Relasi ekuivalensi didefinisikan sebagai relasi yang refreksif, simetris dan transitif.
- Untuk melihat apakah suatu relasi merupakan relasi ekuivalensi, maka perlu dibuktikan tiga jenis relasi diatas terpenuhi.

Contoh

1. Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan
   $R = \{(1,2), (2,2), (3,4), (4,1)\}$.
   a. Buatlah digraph dan representasi relasinya dalam bentuk matriks
   b. Tunjukkan apakah himpunan A disebut relasi ekivalen?
2. Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan
   $R = \{(a,b) \in A \times A \mid a < b\}$.
   a. Buatlah digraph dan representasi relasinya dalam bentuk matriks
   b. Tunjukkan apakah himpunan A disebut relasi ekivalen?

Kelas Ekuivalensi

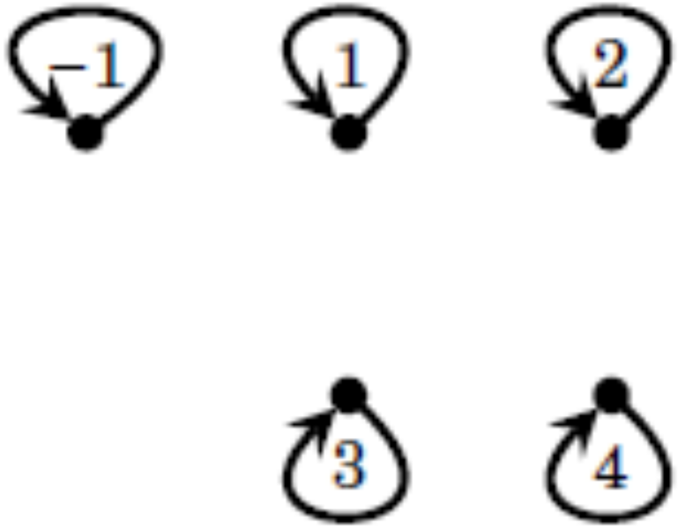
- Misalkan R adalah relasi ekuivalensi dari A. Diberikan sebarang elemen $a \in A$, kelas ekuivalensi a adalah subset $\{x \in A : xRa\}$ dari A, yang mengandung seluruh elemen dari A yang berelasi dengan a.
- Set ini disimbolkan dengan [a]

Contoh

- Misalkan terdapat set A = {-1, 1, 2, 3, 4}, dan ada empat relasi ekuivalensi R1, R2, R3 dan R4 pada set A, dengan arti :
  - R1 : is equal to
  - R2 : has same parity as
  - R3 : has same sign as
  - R4 : has same parity and sign as

Contoh

- Hasil R1 = {}

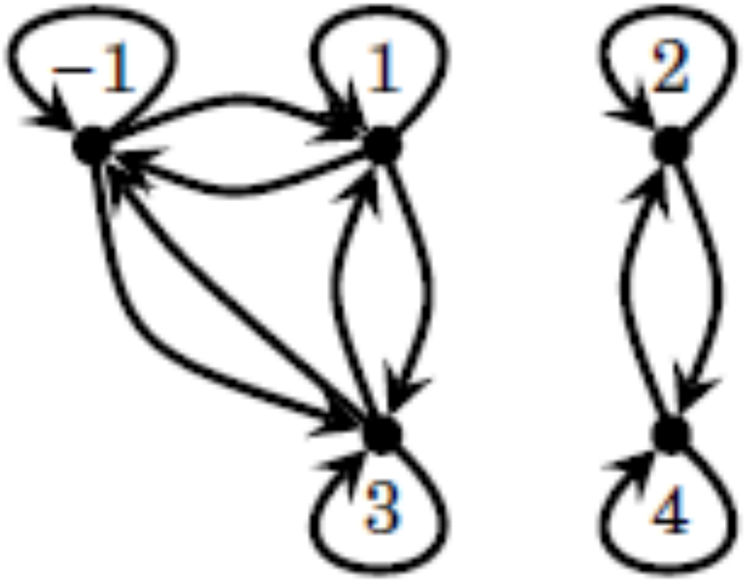


$\{-1\}, \{1\}, \{2\},$

$\{3\}, \{4\}$

Contoh

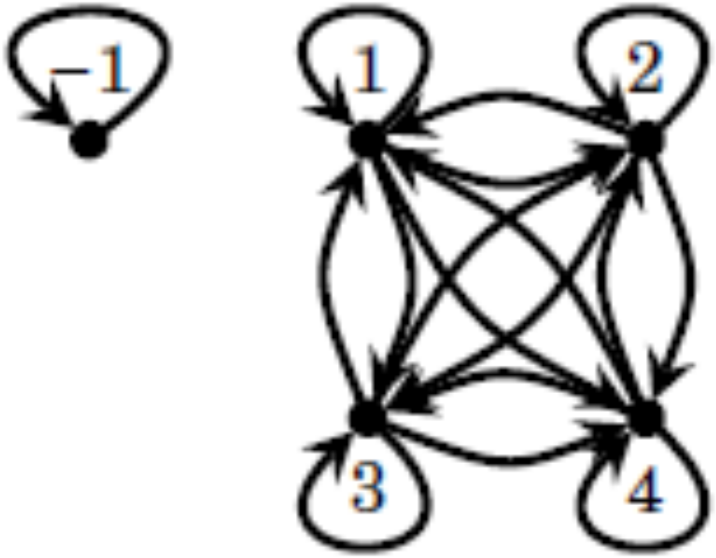
- Hasil R2 =



$$\{-1, 1, 3\}, \quad \{2, 4\}$$

Contoh

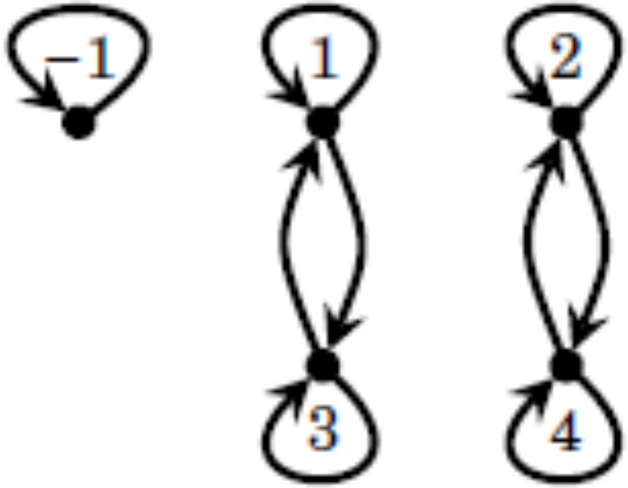
- Hasil R3



$$\{-1\},\ \ \{1,2,3,4\}$$

Contoh

- Hasil R4 =



$$\{-1\}, \quad \{1,3\}, \quad \{2,4\}$$

Relasi Partial Order

- Berbagi macam relasi merupakan relasi ekuivalensi :
  - $x = y$
  - $u \leftrightarrow v$
  - “has same parity as”
- Bagaimana dengan relasi berikut ?
  - $x \leq y$
  - $x \subseteq y$
- Relasi ini merupakan relasi **partial order.**

Relasi Partial Order

- Suatu relasi R pada set A disebut suatu partial order jika dan hanya jika R adalah
  - Refleksif,
  - **Antisimetris**, dan
  - Transitif.
- Relasi partial order sering juga disebut sebagai **Poset (Partial Order Set)**

Hasse Diagram

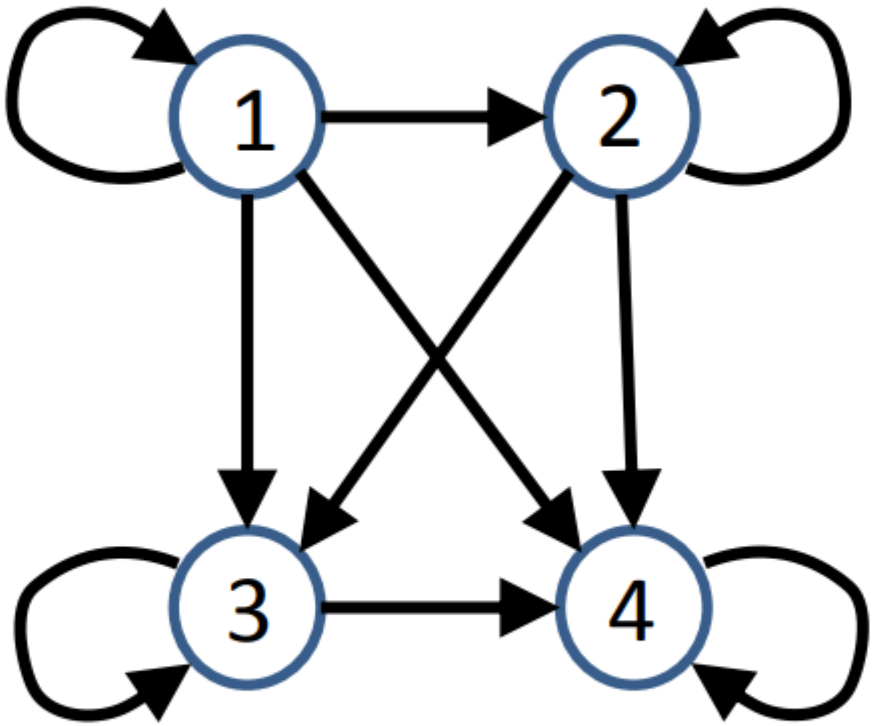
- Representasi grafis untuk menunjukkan partial order
- Properti :
  - Hapus semua self-loop
  - Hapus semua edge yang ada bila edge tersebut menunjukkan sifat transitif
  - Arahkan semua egde dengan mengarah dari bawah ke atas
  - Hapus arah (anak panah) pada representasinya.

Contoh

- Terdapat POSET dengan A = {1, 2, 3, 4} dengan relasi <=.
- Bagaimana representasi digraph nya ?
- Gambarkan Hasse Diagramnya!

Contoh

- Representasi Digraph



Contoh

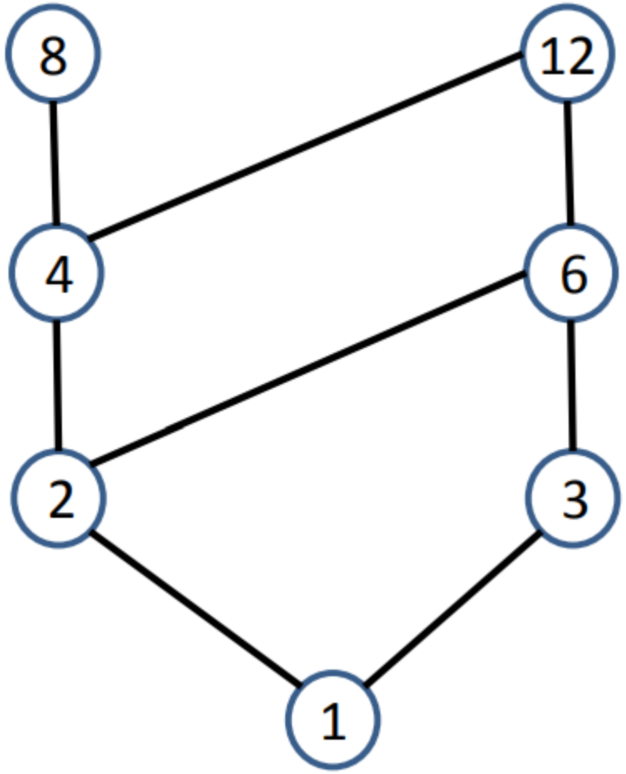
- Representasi Hasse Diagram

Hasse Diagram

- A = {1,2,3,4,6,8,12}
- R merupakan relasi ke set A, dengan relasi “habis membagi”
- Tentukan :
  - Anggota dari R
  - Apakah relasi tersebut merupakan relasi ekuivalensi?
  - Gambarkan Hasse Diagramnya!

Hasse Diagram

- Gambar graf berarah dari relasi “habis membagi”



Totally Order Relation

- Terdapat *A* yang merupakan suatu **Poset**, maka:
  - Ada kemungkinan elemen a dan b $\in$ A berelasi (dapat dibandingkan/comparable).
  - Jika **setiap** pasangan elemen dari *A comparable* maka relasi *R disebut* relasi total order (**totally ordered relation**)

EXAMPLE 6 The poset $(\mathbf{Z}, \leq)$ is totally ordered, because $a \leq b$ or $b \leq a$ whenever a and b are integers. ◀

EXAMPLE 7 The poset $(\mathbf{Z}^+, \mid)$ is not totally ordered because it contains elements that are incomparable, such as 5 and 7. ◀

Today's Keywords

- Enam (6) jenis relasi
- Ekuivalensi Relasi
- Kelas Ekuivalensi
- Partially Ordered Set
- Totally Order Relation
- Hasse Diagram