TKU211103

Vektor dan Matriks 1

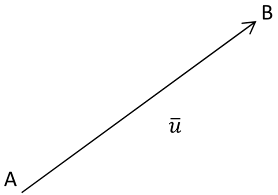
Tim Dosen Kalkulus Variable Jamak

October 18, 2021

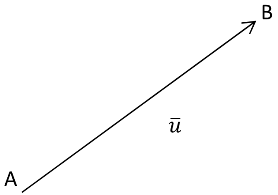
Departemen Matematika FMIPA UGM

1. Pendahuluan

Representasi Geometri Vektor

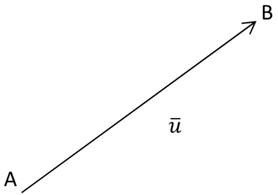


- Secara geometri, vektor adalah **ruas garis berarah** (*a directed line segment*).



- Secara geometri, vektor adalah **ruas garis berarah** (*a directed line segment*).
- Vektor mempunyai dua entitas, yaitu **arah** (*direction*) dan **panjang/besar** (*magnitude*).

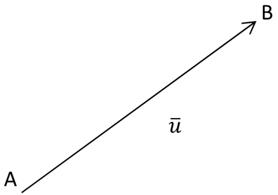
Representasi Geometri Vektor



- Setiap entitas yang mempunyai arah dan panjang dapat direpresentasikan dengan suatu vektor.

- Secara geometri, vektor adalah **ruas garis berarah** (*a directed line segment*).
- Vektor mempunyai dua entitas, yaitu **arah** (*direction*) dan **panjang/besar** (*magnitude*).

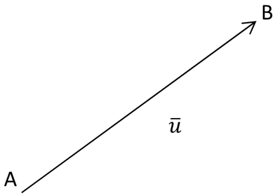
Representasi Geometri Vektor



- Secara geometri, vektor adalah **ruas garis berarah** (*a directed line segment*).
- Vektor mempunyai dua entitas, yaitu **arah** (*direction*) dan **panjang/besar** (*magnitude*).

- Setiap entitas yang mempunyai arah dan panjang dapat direpresentasikan dengan suatu vektor.
- Vektor dinotasikan dengan huruf kecil dengan garis di atasnya seperti $\overline{u}$ atau $\overline{v}$ (atau huruf kecil tebal **u**).

Representasi Geometri Vektor



- Secara geometri, vektor adalah **ruas garis berarah** (*a directed line segment*).
- Vektor mempunyai dua entitas, yaitu **arah** (*direction*) dan **panjang/besar** (*magnitude*).

- Setiap entitas yang mempunyai arah dan panjang dapat direpresentasikan dengan suatu vektor.
- Vektor dinotasikan dengan huruf kecil dengan garis di atasnya seperti $\overline{u}$ atau $\overline{v}$ (atau huruf kecil tebal **u**).
- Vektor juga dapat dinotasikan dengan dua huruf besar yang melambangkan **titik pangkal** dan **titik ujung vektor** dengan tanda anak panah diatasnya, seperti $\overrightarrow{AB}$, dengan A dan B berturut-turut menyatakan pangkal dan ujung vektor.

Representasi Geometri Vektor

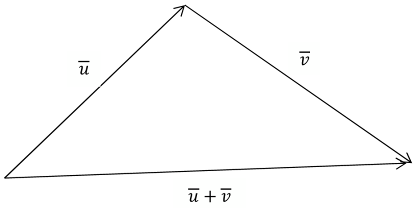
- **Panjang vektor** $\overline{u}$, dinotasikan dengan $\|\overline{u}\|$, demikian pula dengan vektor $\overrightarrow{AB}$, dinotasikan dengan $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.
- **Vektor nol** adalah vektor yang mempunyai panjang 0 dan dinotasikan dengan $\overline{0}$.
- **Vektor satuan** adalah vektor yang panjangnya satu satuan.
- Dua vektor dikatakan **sama**, jika besar dan arah vektor-vektor tersebut sama.

Perkalian Skalar Vektor

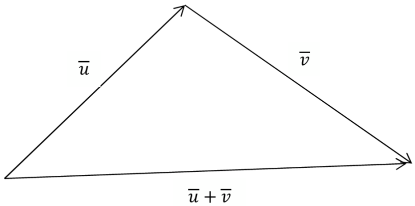
- Jika $\overline{u} \neq \overline{0}$ dan $k \in \mathbb{R}$, dengan $k \neq 0$, maka $k\overline{u}$ adalah vektor dengan panjang $|k|$ kali panjang vektor $\overline{u}$ dan
  - (i) searah dengan vektor $\overline{u}$, jika $k > 0$
  - (ii) berlawanan arah dengan vektor $\overline{u}$, jika $k < 0$

- Jika $k = 0$ atau $\overline{u} = \overline{0}$ maka $k\overline{u} = \overline{0}$.

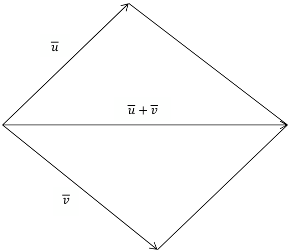
Jumlahan vektor $\overline{u}$ dan $\overline{v}$, ditulis dengan $\overline{u}+\overline{v}$, adalah vektor yang berpangkal di pangkal vektor $\overline{u}$ dan berujung di ujung vektor $\overline{v}$, jika titik ujung $\overline{u}$ diletakan pada pangkal vektor $\overline{v}$.



Jumlahan vektor $\overline{u}$ dan $\overline{v}$, ditulis dengan $\overline{u}+\overline{v}$, adalah vektor yang berpangkal di pangkal vektor $\overline{u}$ dan berujung di ujung vektor $\overline{v}$, jika titik ujung $\overline{u}$ diletakan pada pangkal vektor $\overline{v}$.



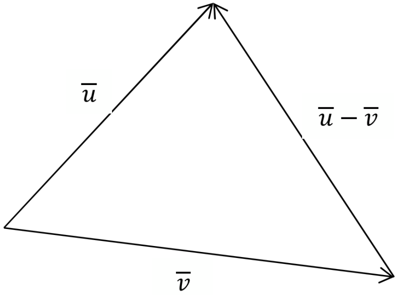
Sebagai alternatif, vektor $\overline{u}$ dan $\overline{v}$ dipandang mempunyai titik pangkal yang sama, kemudian dibentuk jajaran genjang. Jumlahan $\overline{u}+\overline{v}$ adalah diagonal jajar genjang tersebut.



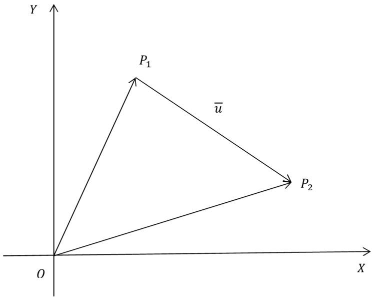
Vektor yang besarnya sama dengan vektor $\overline{u}$ tetapi arahnya berlawanan dinamakan dengan **negatif vektor** $\overline{u}$, dan dinotasikan dengan $-\overline{u}$.

Selisih dua vektor $\overline{u}$ dan $\overline{v}$, dinotasikan dengan $\overline{u} - \overline{v}$, didefinisikan sebagai

$$\overline{u} - \overline{v} = \overline{u} + (-\overline{v}).$$



Representasi Aljabar Vektor



- Di dalam sistem koordinat kartesius, suatu vektor di bidang dapat dinyatakan sebagai pasangan terurut dua bilangan real.

- Diketahui vektor $\overline{u}$ mempunyai pangkal di pusat koordinat $O(0,0)$ dan berujung di titik (u_1, u_2). Dengan demikian, vektor $\overline{u}$ dapat dinyatakan dengan $\overline{u} = (u_1, u_2)$.
- Vektor-vektor di bidang seringkali berada pada posisi dimana titik pangkal tidak berada di titik pusat koordinat. Misalkan vektor $\overline{u}$ mempunyai titik pangkal di $P_1(x_1, y_1)$ dan titik ujung di $P_2(x_2, y_2)$. Dengan demikian,

$$\overline{u} = \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Sifat (Vektor)

Jika $\overline{u} = (u_1, u_2)$ *dan* $\overline{v} = (v_1, v_2)$ *vektor-vektor di* $\mathbb{R}^2$ *dan* $k \in \mathbb{R}$, *maka*

1. $\|\overline{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$
2. $\overline{u} = \overline{v}$ *jika dan hanya jika* $u_1 = v_1$ *dan* $u_2 = v_2$
3. $k\overline{u} = (ku_1, ku_2)$
4. $\overline{u} + \overline{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$
5. $\overline{i} = (1, 0)$ *dan* $\overline{j} = (0, 1)$ *merupakan vektor-vektor satuan standar.*

Sifat (Vektor)

Untuk setiap vektor $\overline{u}$, $\overline{v}$ dan $\overline{w}$, dan sebarang skalar a dan b berlaku

1. $\overline{u} + \overline{v} = \overline{v} + \overline{u}$
2. $\overline{u} + \overline{0} = \overline{0} + \overline{u} = \overline{u}$
3. $(\overline{u} + \overline{v}) + \overline{w} = \overline{u} + (\overline{v} + \overline{w})$
4. $\overline{u} + (-\overline{u}) = \overline{0}$
5. $a(b\overline{u}) = (ab)\overline{u}$
6. $a(\overline{u} + \overline{v}) = a\overline{u} + a\overline{v}$
7. $(a + b)\overline{u} = a\overline{u} + b\overline{u}$
8. $1\overline{u} = \overline{u}$
9. $\|a\overline{u}\| = |a|\|\overline{u}\|$

Karena $\overline{i} = (1, 0, 0), \overline{j} = (0, 1, 0)$, dan $\overline{k} = (0, 0, 1)$ merupakan vektor-vektor satuan standar, maka untuk setiap vektor $\overline{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ dapat dinyatakan dengan

$$\overline{u} = u_1\overline{i} + u_2\overline{j} + u_3\overline{k}.$$

2. Dot Product

Definisi Dot Product

Diberikan $\overline{u}$ dan $\overline{v}$ vektor-vektor di $\mathbb{R}^3$ dan θ adalah sudut diantara kedua vektor tersebut. Dot Product $\overline{u}$ dan $\overline{v}$, dinotasikan dengan $\overline{u} \bullet \overline{v}$, didefinisikan dengan

$$\overline{u} \bullet \overline{v} = \|\overline{u}\|\|\overline{v}\| \cos\theta.$$

Jika $\overline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ dan $\overline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektor-vektor di $\mathbb{R}^3$. Dengan demikian,

$$
\begin{aligned}
\|\overline{u} - \overline{v}\|^2 &= (u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2 \\
&= u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \\
&\quad -2u_1v_1 - 2u_2v_2 - 2u_3v_3,
\end{aligned}
$$

dan

$$
\begin{aligned}
\|\overline{u}\|^2 + \|\overline{v}\|^2 - 2\|\overline{u}\|\|\overline{v}\|\cos\theta &= u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \\
&\quad -2\|\overline{u}\|\|\overline{v}\|\cos\theta.
\end{aligned}
$$

Berdasarkan aturan cosinus diperoleh

$$\begin{aligned} \|\overline{u}-\overline{v}\|^2 &= \|\overline{u}\|^2+\|\overline{v}\|^2-2\|\overline{u}\|\|\overline{v}\|\cos\theta \\ \Leftrightarrow -2u_1v_1-2u_2v_2-2u_3v_3 &= -2\|\overline{u}\|\|\overline{v}\|\cos\theta \\ \Leftrightarrow \|\overline{u}\|\|\overline{v}\|\cos\theta &= u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3 \end{aligned}$$

Jadi, diperoleh

$$\begin{aligned} \overline{u}\bullet\overline{v} &= \|\overline{u}\|\|\overline{v}\|\cos\theta \\ &= u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3. \end{aligned}$$

Sifat

Jika $\overline{u}$, $\overline{v}$ dan $\overline{w}$ merupakan vektor di $\mathbb{R}^3$ dan c adalah skalar, maka

1. $\overline{u} \bullet \overline{v} = \overline{v} \bullet \overline{u}$
2. $\overline{u} \bullet (\overline{v} + \overline{w}) = \overline{u} \bullet \overline{v} + \overline{u} \bullet \overline{w}$
3. $c(\overline{u} \bullet \overline{v}) = (c\overline{u}) \bullet \overline{v}$
4. $\overline{0} \bullet \overline{u} = 0$
5. $\overline{u} \bullet \overline{u} = \|\overline{u}\|^2$

Definisi

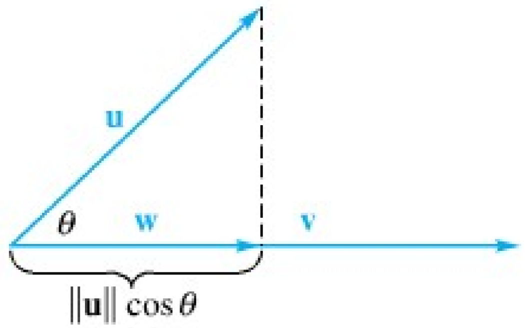
Dua buah vektor $\overline{u}$ *dan* $\overline{v}$ *dikatakan saling tegak lurus, jika* $\overline{u} \bullet \overline{v} = 0$.

Definisi

Vektor-vektor tidak nol yang saling tegak lurus disebut sebagai vektor-vektor ortogonal.

Diketahui dua buah vektor $\overline{u}$, $\overline{v}$ dan θ adalah sudut diantara dua vektor tersebut. Diasumsikan bahwa $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Diperhatikan gambar berikut.



Katakan $\overline{w}$ adalah vektor dengan arah yang sama dengan $\overline{v}$. Diperhatikan bahwa vektor $\overline{w} = c\overline{v}$ untuk suatu $c \geq 0$ skalar. Di lain pihak panjang $\overline{w}$ adalah $\|\overline{u}\| \cos\theta$. Akibatnya,

$$\|\overline{u}\| \cos\theta = \|\overline{w}\| = \|c\overline{v}\| = c\|\overline{v}\|.$$

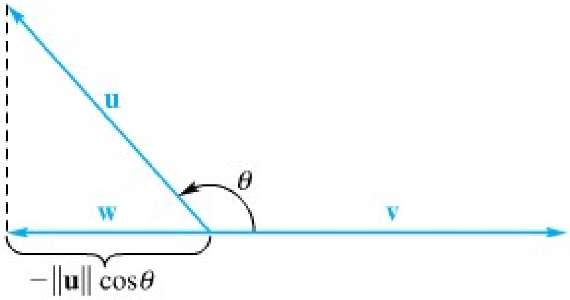
Jadi,

$$c = \frac{\|\overline{u}\|}{\|\overline{v}\|} \cos\theta = \frac{\overline{u} \bullet \overline{v}}{\|\overline{v}\|\|\overline{v}\|} = \frac{\overline{u} \bullet \overline{v}}{\|\overline{v}\|^2}.$$

Dengan demikian,

$$\overline{w} = \left(\frac{\overline{u} \bullet \overline{v}}{\|\overline{v}\|^2} \right) \overline{v}.$$

Untuk $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$, didefinisikan $\overline{w}$ vektor yang dibentuk dari perpanjangan vektor $\overline{v}$ tetapi dengan arah berlawanan sebagai berikut.



Diperhatikan bahwa untuk kedua kasus tersebut diperoleh vektor $\bar{w}$ dapat dinyatakan sebagai

$$\overline{w} = \left(\frac{\overline{u} \bullet \overline{v}}{\|\overline{v}\|^2} \right) \overline{v}.$$

Vektor $\overline{w}$ ini disebut sebagai proyeksi vektor $\overline{u}$ pada $\overline{v}$, dinotasikan dengan $\mathrm{pr}_{\overline{v}}(\overline{u})$, dengan

$$\mathrm{pr}_{\overline{v}}(\overline{u}) = \left(\frac{\overline{u} \bullet \overline{v}}{\|\overline{v}\|^2} \right) \overline{v}.$$

Proyeksi Skalar

Lebih lanjut, proyeksi skalar $\overline{u}$ pada $\overline{v}$ didefinisikan dengan $\|\overline{u}\| \cos \theta$.

- Jika $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, proyeksi skalar sama dengan panjang proyeksi vektor $\text{pr}_{\overline{v}}(\overline{u})$.
- Jika $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$, proyeksi skalar sama dengan negatif panjang proyeksi vektor $\text{pr}_{\overline{v}}(\overline{u})$.

3. Matriks

Matriks adalah sekumpulan bilangan yang disusun berdasarkan baris dan kolom, serta ditempatkan di dalam tanda kurung.

Matriks adalah sekumpulan bilangan yang disusun berdasarkan baris dan kolom, serta ditempatkan di dalam tanda kurung.

Ukuran dari matriks menunjukkan banyaknya baris dan banyaknya kolom. Matriks dengak n baris dan m kolom disebut matrik $n \times m$.

Matriks adalah sekumpulan bilangan yang disusun berdasarkan baris dan kolom, serta ditempatkan di dalam tanda kurung.

Ukuran dari matriks menunjukkan banyaknya baris dan banyaknya kolom. Matriks dengak n baris dan m kolom disebut matrik $n \times m$.

Bilangan di baris ke i dan kolom ke j dari matriks A disebut **entri** ke (i, j) dan dilambangkan a_{ij}.

Jenis-Jenis Matriks

- **Matriks persegi**
  Matriks $A_{n\times m}$ adalah matriks persegi jika $n = m$.
- **Matriks kolom**
  Matriks $A_{n\times m}$ adalah matriks kolom jika $m = 1$.
- **Matriks baris**
  Matriks $A_{n\times m}$ adalah matriks baris jika $n = 1$.
- **Matriks diagonal**
  Matriks $A_{n\times m}$ adalah matriks diagonal jika $n = m$ dan $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$.
- **Matriks segitiga**
  Matriks $A_{n\times m}$ adalah matriks segitiga jika $a_{ij} = 0$ jika $i > j$ (atau $a_{ij} = 0$ jika $i < j$).
- **Matriks simetri**
  Matriks $A_{n\times m}$ adalah matriks simetri jika $A = A^T$.
- **Matriks indempoten**
  Matriks persegi $A_{n\times n}$ adalah matriks indempoten jika $A \cdot A = A$.

1. Perkalian dengan skalar

$$c\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{n1} & ca_{n2} & \cdots & ca_{nm} \end{bmatrix}.$$

1. Perkalian dengan skalar

$$c\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{n1} & ca_{n2} & \cdots & ca_{nm} \end{bmatrix}.$$

2. Penjumlahan

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1m}+b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nm}+b_{nm} \end{bmatrix}$$

3. Perkalian

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{ml} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nl} \end{bmatrix}$$

dengan $c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$.

3. Perkalian

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{ml} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nl} \end{bmatrix}$$

dengan $c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$.

4. Transpose. Transpose dari matrik A disimbolkan dengan A^T.

Jika $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$, maka $A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$.

Sifat

Diberikan matriks A, B, C dengan ukuran tertentu sehingga operasi di bawah ini berlaku.

1. $(A + B) + C = A + (B + C)$ *dan* $(AB)C = A(BC)$.
2. $A + B = B + A$.
3. $A(B + C) = AB + AC$ *dan* $(A + B)C = AC + BC$.
4. *Secara umum* $AB \neq BA$, *akan tetapi* $IA = AI$ *dengan* I *matriks identitas.*

Sifat

Diberikan matriks A, B dengan ukuran tertentu sehingga operasi di bawah ini berlaku.

1. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$.
2. $(A^T)^T = A$.
3. $(cA)^T = cA^T, \qquad c \in \mathbb{R}$.
4. $(AB)^T = B^T A^T$.

Berikut langkah-langkah untuk menentukan determinan matriks. Diberikan matriks $A_{n\times n}$.

1. Hitung matriks minor $M_{n\times n}$ dari matriks $A_{n\times n}$.
2. Ubah matriks minor $M_{n\times n}$ menjadi matriks kofaktor $C_{n\times n}$.
3. Determinan matriks $|A| = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + \cdots + a_{1n}c_{1n}$.

Contoh

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. *Hitunglah determinan A.*

Contoh

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. *Hitunglah determinan A.*

Penyelesaian:

1. Entri m_{ij} dari matriks minor $M_{3\times 3}$ diperoleh dengan mencoret baris ke i kolom ke j dan menghitung determinant dari nilai yang sisa. Jadi

$$M_{3\times 3} = \begin{bmatrix} (0\times 1)-(1\times -2) & (2\times 1)-(0\times -2) & (2\times 1)-(0\times 0) \\ (0\times 1)-(1\times 2) & (3\times 1)-(0\times 2) & (3\times 1)-(0\times 0) \\ (0\times -2)-(0\times 2) & (3\times -2)-(2\times 2) & (3\times 0)-(0\times 2) \end{bmatrix}$$

Contoh (lanjutan)

Jadi matriks minornya adalah

$$M_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 3 \\ 0 & -10 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.Entri c_{ij} dari matriks kofaktor $C_{3\times 3}$ sama dengan $(-1)^{i+j} m_{ij}$. Diperoleh

$$C_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \\ 0 & 10 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jadi $|A| = (3 \times 2) + (0 \times -2) + (2 \times 2) = 10$.

Sifat

Diketahui A matriks berukuran $n \times n$ dan $|A|$ determinant dari A, maka berlaku sifat-sifat berikut:

1. *Jika matriks $B = A^T$, maka $|B| = |A|$.*
2. *Jika matiks B adalah matriks yang dihasilkan dari menukar dua baris atau dua kolom dari matiks A, maka $|B| = -1|A|$.*
3. *Jika satu baris atau satu kolom di matriks A adalah 0, maka $|A| = 0$.*
4. *Jika matriks A memiliki dua baris atau dua kolom yang sama, maka $|A| = 0$.*
5. *Jika matriks B adalah matriks yang dihasilkan dari mengkalikan salah satu baris atau kolom dari matriks A dengan konstanta c, maka $|B| = c|A|$.*
6. *Jika matriks B adalah matriks yang dihasilkan dari menambahkan suatu baris atau kolom dari perkalian baris atau kolom lain dengan suatu konstanta, maka $|B| = |A|$.*

Contoh

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

Contoh

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ .Maka determinant A adalah -1

Contoh

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ .Maka determinant A adalah -1

1. $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, maka $|B| = 3 - 2 = 1 = -|A|$.

Contoh

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ .Maka determinant A adalah -1

1. $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, maka $|B| = 3 - 2 = 1 = -|A|$.
2. $C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, maka $|C| = 4 - 6 = -2 = 2|A|$.

Contoh

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ .Maka determinant A adalah -1

1. $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, maka $|B| = 3 - 2 = 1 = -|A|$.
2. $C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, maka $|C| = 4 - 6 = -2 = 2|A|$.
3. $D = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, maka $|D| = 8 - 9 = -1 = |A|$.

Contoh

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ .Maka determinant A adalah -1

1. $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, maka $|B| = 3 - 2 = 1 = -|A|$.
2. $C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, maka $|C| = 4 - 6 = -2 = 2|A|$.
3. $D = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, maka $|D| = 8 - 9 = -1 = |A|$.
4. $E = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, maka $|E| = 2 - 3 = -1 = |A|$.

Contoh

1. Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Tentukan $|A|$.

Contoh

1. Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Tentukan $|A|$.

   Penyelesaian: Diperhatikan $|A| = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13}$. Karena $a_{1i} = 0$ untuk setiap $i = 1, 2, 3$, maka $|A| = 0$.

Contoh

1. Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Tentukan $|A|$.

   Penyelesaian: Diperhatikan $|A| = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13}$. Karena $a_{1i} = 0$ untuk setiap $i = 1, 2, 3$, maka $|A| = 0$.

2. Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tentukan $|A|$.

1. Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Tentukan $|A|$.

   Penyelesaian: Diperhatikan $|A| = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13}$. Karena $a_{1i} = 0$ untuk setiap $i = 1, 2, 3$, maka $|A| = 0$.

2. Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tentukan $|A|$.

   Penyelesaian: Diperhatikan $|A| = |A^T| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Contoh

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. *Tentukan* $|A|$.

Contoh

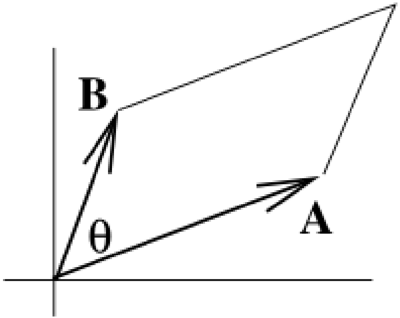
Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. *Tentukan* $|A|$.

Penyelesaian: Diperhatikan $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

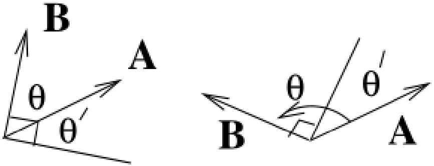
Interpretasi Determinan

Diberikan vektor $\mathbf{A} = (a_1, a_2)$ dan $\mathbf{B} = (b_1, b_2)$ di $\mathbb{R}^2$ dan sudut yang dibentuk oleh vektor **A** dan **B** adalah θ dengan $0 < \theta < \pi$. Diperoleh

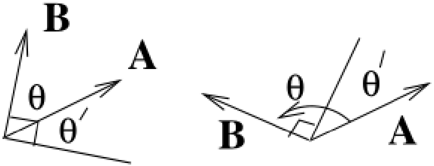
$$\pm \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \text{ luas jajar genjang.}$$



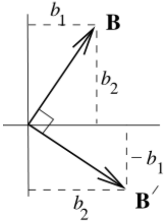
Diambil $\theta' = \frac{\pi}{2} - \theta$ $\left(\theta' = \theta - \frac{\pi}{2} \text{ jika } \theta > \frac{\pi}{2}\right)$,
maka $\sin\theta = \cos\theta'$.



Diambil $\theta' = \frac{\pi}{2} - \theta \left(\theta' = \theta - \frac{\pi}{2} \text{ jika } \theta > \frac{\pi}{2}\right)$, maka $\sin\theta = \cos\theta'$.

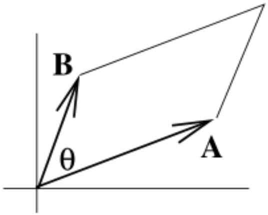


Didefinisikan vektor $\mathbf{B}'$ sebagai hasil rotasi vektor $\mathbf{B}$ sebesar $\frac{\pi}{2}$ berlawanan arah dengan jarum jam.



Maka $\mathbf{B}' = (b_2, -b_1)$ dan $\|\mathbf{B}'\| = \|\mathbf{B}\|$.

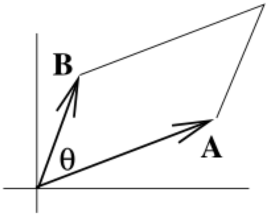
Interpretasi Determinan (Bukti)



Diperoleh

$$\begin{aligned}
\text{luas jajar genjang} \quad &= \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\| \sin\theta \\
&= \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\| \cos\theta' \\
&= \mathbf{A} \bullet \mathbf{B} \\
&= a_1 b_2 - a_2 b_1 \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Interpretasi Determinan (Bukti)



Diperoleh

$$
\begin{aligned}
\text{luas jajar genjang} &= \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\| \sin\theta \\
&= \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\| \cos\theta' \\
&= \mathbf{A} \bullet \mathbf{B} \\
&= a_1 b_2 - a_2 b_1 \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

Jika posisi vektor **A** dan **B** dibalik, maka lusa jajaran genjang sama tapi tanda determinan dikalikan dengan -1.