KUNCI JAWABAN TUTOR KVJ
LATIHAN SOAL PERTEMUAN 2

1. a.) Diketahui : jari - jari (a) : 10.

Persamaan Parametrik $= (a\theta - a\sin\theta \,;\, a - a\cos\theta)$

$= (10\theta - 10\sin\theta \,,\, 10 - 10\cos\theta)$.

b.) Vektor Kecepatan

$$\frac{d\bar{r}}{d\theta} = \frac{d(10\theta - 10\sin\theta, 10 - 10\cos\theta)}{d\theta}$$

$$= (10 - 10\cos\theta \,,\, 10\sin\theta)$$

$$= \left(20\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right), 20\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$ Identitas Trigonometri.

c.) Speed.

$$\frac{ds}{d\theta} = \left\|\frac{d\bar{r}}{d\theta}\right\| = \sqrt{\left(20\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^2 + \left(20\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{400\sin^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2} + 400\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \sqrt{\sin^2\frac{\theta}{2}\left[400\sin^2\frac{\theta}{2} + 400\cos^2\frac{\theta}{2}\right]}$$

$$= \sqrt{\sin^2\frac{\theta}{2}(400)}$$

$$= 20\sin\left|\frac{\theta}{2}\right|.$$

d.) Vektor singgung unit.

$$\bar{T} = \frac{\bar{v}(\theta)}{\|\bar{v}(\theta)\|} = \frac{\left(20\sin^2\frac{\theta}{2}, 20\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)}{20\sin\left|\frac{\theta}{2}\right|}$$

$$= \left(\pm\sin\frac{\theta}{2}, \pm\cos\frac{\theta}{2}\right).$$

e.) Panjang Busur

$$s = \int_0^{2\pi}\frac{ds}{d\theta}\,d\theta = \int_0^{2\pi} 20\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta.$$

$$= -40\cos\frac{\theta}{2}\Big|_0^{2\pi}.$$

$$= (40) - (-40)$$

$$= 80.$$

f.) Curvature.

$$\kappa = \frac{\| \bar{T}'(\theta) \|}{\| \bar{r}'(\theta) \|}$$

$$= \frac{1}{20 \sin \frac{\theta}{2}}.$$

$$\bar{T}'(\theta) : \cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2}.$$

$$\| \bar{T}'(\theta) \| = \sqrt{\left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^2 + \left(-\sin \frac{\theta}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$= 1.$$

g.) Percepatan

* $$\bar{N}(\theta) = \frac{\bar{T}'(\theta)}{\| \bar{T}'(\theta) \|}$$

$$= \frac{\cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2}}{1}$$

$$= \left(\cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2}\right).$$

* $$a_T = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$= -5 \sin \frac{\theta}{2}$$

* $$T(\theta) = \left(\sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}\right)$$

* $$a_N = \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 \cdot \kappa.$$

$$= \left(20 \sin \frac{\theta}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{20 \sin \frac{\theta}{2}}.$$

$$= 20 \sin \frac{\theta}{2}.$$

$$\therefore \bar{a}(\theta) = a_T \cdot \bar{T}(\theta) + a_N \cdot \bar{N}(\theta).$$

$$= -5 \sin \frac{\theta}{2} \left(\overset{\sin}{\cancel{\cos}} \frac{\theta}{2}, \overset{\cos}{\cancel{\sin}} \frac{\theta}{2} \right) + 20 \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2} \right)$$

$$= \left(-5 \sin^2 \frac{\theta}{2}, -5 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}\right) + \left(20 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}, -20 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right).$$

$$= \left(-5 \sin^2 \frac{\theta}{2} + 20 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}, -5 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} - 20 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right).$$

Jawaban Latihan Soal

• Hitung nilai $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, dan $\frac{\partial f}{\partial z}$ di titik $(-3,2,0)$ jika fungsi $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 5xy + z$.

Jawaban :

•> $\frac{\partial F}{\partial x}$, kita turunkan fungsi terhadap x dan menganggap y, z sebagai konstanta.

$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial(x^2+y^2+5xy+z)}{\partial x} = 2x + 5y$

- Subtitusikan $(-3,2,0)$ ke $2x+5y$.
- Maka nilai $\frac{\partial f}{\partial x}$ di $(-3,2,0)$ adalah $2 \cdot -3 + 5 \cdot 2 = -6 + 10$
$= -4$

•> $\frac{\partial F}{\partial y}$, kita turunkan fungsi terhadap y dan menganggap x, z sebagai konstanta.

$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial(x^2+y^2+5xy+z)}{\partial y} = 2y + 5x$

- Subtitusikan $(-3,2,0)$ ke $2y+5x$, maka $\frac{\partial F}{\partial y}$ di $(-3,2,0) = 2 \cdot 2 + 5 \cdot -3$
$= 4 - 15$
$= -11$

•> $\frac{\partial F}{\partial z}$, kita turunkan fungsi terhadap z dan menganggap x, y sebagai konstanta

$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial(x^2+y^2+5xy+z)}{\partial z} = 1$

•> $\frac{\partial F}{\partial z}$ bernilai 1 di setiap titik, maka kita tidak perlu melakukan subtitusi.

No
Date

•> Tentukan Partial Derivatife $f(x,y,z) = x \sin(5y+10z)\cos(2x+12z)$ terhadap z. (hint : gunakan sifat product derivatif)

•> $\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial(x\sin(5y+10z)\cos(2x+12z))}{\partial z}$

•> Kita anggap x, y konstan maka :

$\frac{\partial F}{\partial z} = x\frac{\partial(\sin(5y+10z)\cos(2x+12z))}{\partial z}$

•> Terapkan Product Rule : $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f g'$

$f = \sin(5y+10z)$ $\qquad g = \cos(2x+12z)$

$f' = 10\cos(5y+10z)$ $\qquad g' = -12\sin(2x+12z)$

$\frac{\partial F}{\partial z} = x(10\cos(5y+10z)\cos(2x+12z) - 12\sin(2x+12z)\sin(5y+10z))$ //

JOYKO® 36 Lines, 6 mm

Carilah dan tentukan jenis titik kritis pada

$$f(x, y) = 7x - 8y + 2xy - x^2 + y^3$$

Langkah 1
Carilah turunan parsial pertama dan kedua terhadap x dan y (fx, fxx, fy, fyy), serta turunan parsial pertama terhadap xy (fxy). Maka akan didapatkan nilai-nilai sebagai berikut:

$$f_x = 7 + 2y - 2x \qquad f_y = -8 + 2x + 3y^2$$
$$f_{xx} = -2 \qquad f_{xy} = 2 \qquad f_{yy} = 6y$$

Langkah 2
Menentukan titik kritis dengan membuat turunan pertama terhadap x (fx) dan turunan pertama terhadap y (fy) bernilai nol, seperti di bawah

$$f_x = 0: \ 7 + 2y - 2x = 0$$
$$f_y = 0: -8 + 2x + 3y^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 4 - \frac{3}{2}y^2$$

Substitusikan nilai x pada persamaan pertama untuk mendapatkan nilai y

$$0 = 7 + 2y - 2\left(4 - \frac{3}{2}y^2\right) = 3y^2 + 2y - 1 = (3y - 1)(y + 1) \quad \rightarrow \quad y = -1, \ y = \frac{1}{3}$$

Substitusikan nilai y ke dalam persamaan x untuk mendapatkan titik-titik sebagai berikut.

$$y = -1 : x = 4 - \tfrac{3}{2}(-1)^2 = \tfrac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad \left(\tfrac{5}{2}, -1\right)$$

$$y = \tfrac{1}{3} : x = 4 - \tfrac{3}{2}\left(\tfrac{1}{3}\right)^2 = \tfrac{23}{6} \quad \Rightarrow \quad \left(\tfrac{23}{6}, \tfrac{1}{3}\right)$$

Langkah 3

Tentukan nilai D dengan memasukkan nilai-nilai turunan yang telah didapat pada langkah 1.

$$D(x,y) = f_{x\,x} f_{y\,y} - \left[f_{x\,y}\right]^2 = [-2]\,[6y] - [2]^2 = -12y - 4$$

Langkah 4

Tentukan jenis titik kritis dengan memasukkan nilai x dan y pada D

$$\left(\frac{5}{2}, -1\right) \quad : \quad D\left(\frac{5}{2}, -1\right) = 8 > 0 \qquad f_{x\,x}\left(\frac{5}{2}, -1\right) = -2 < 0 \qquad \text{Relative Maximum}$$

$$\left(\frac{23}{6}, \frac{1}{3}\right) \quad : \quad D\left(\frac{23}{6}, \frac{1}{3}\right) = -8 < 0 \qquad \text{Saddle Point}$$