Integral Garis & Teorema Green

Click to add text

Tutorial KVJ Pertemuan ke-5

Pokok Pembahasan: Integral Garis

01 Integral Garis

02 Medan Konservatif

Medan Vektor, Medan Gradien, *Work*, Fungsi Potensial

03 Theorema Green

04 Aplikasi & Bentuk Normal Theorema Green

Integral Garis

Di Vektor titik pada kurva di R^2 dan R^3 dapat dipandang sebagai vektor posisi

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \quad \rightarrow \text{ dimensi 2 } (R^2)$$

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad \rightarrow \text{ dimensi 3 } (R^3)$$

Kalau di kurva, penyajiannya dalam bentuk fungsi parameter. Notasi yang digunakan :

$$C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} , \quad t \in [a, b] \qquad C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} , \quad t \in [a, b].$$

Bisa jadi, kurvanya nggak hanya berbentuk 1 kurva, tapi gabungan dari beberapa kurva. Notasinya :

$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup \cdots \cup C_n$ dimana kurva $C_i{-}1$ dan C_i terhubung pada ujungnya.

Integral Garis

Definisi

Integral garis f sepanjang kurva C didefinisikan sebagai

$$\int_C f\left(x,y\right) ds = \lim_{\max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{f}(x_i{*}\ , y_i{*}\ \Delta S_i\ )$$

asalkan limit di ruas kanan ada dan tidak tergantung pemilihan (x_i* , y_i*)

DEFINITION If f is defined on a curve C given parametrically by $\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$, $a \le t \le b$, then the **line integral of f over C** is

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\, \Delta s_k, \qquad (1)$$

provided this limit exists.

→ Thomas Calculus

Partisi

Kurva C pada R^2 dengan persamaan parameter

$$C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad , \qquad t \in [a, b]$$

Partisi pada [*a*, *b*] yaitu $\{t_0, t_1, \ . \ . \ . \ , t_n\}$

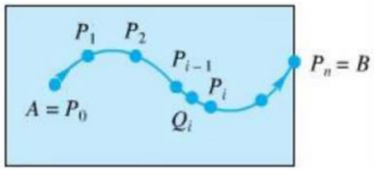
Dengan $A = t_0 < t_1 < \ . \ . \ . < t_n = B$, menginduksi partisi pada kurva C, yaitu

$P = \{(x(t_0), y(t_0)), (x(t_1), y(t_1)), \ . \ . \ . \ , (x(t_n), y(t_n))\}$

Untuk $i = 1, 2, \ldots, n$

ΔS_i = panjang subkurva C dengan titik ujung P_{i-1} dan P_i

Q_i = $(x_i{*} , y_i{*})$ dipilih sebarang pada subkurva tersebut



Selanjutnya, dihitung $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*) \Delta S_i$

Misal kalau di R^3

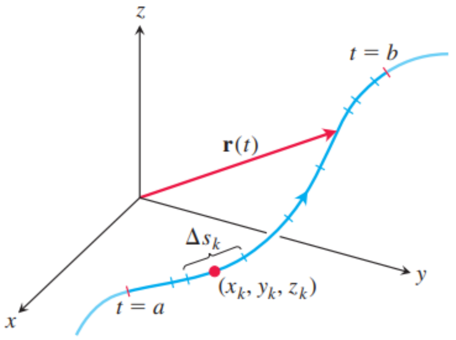


FIGURE 16.1 The curve $\mathbf{r}(t)$ partitioned into small arcs from $t = a$ to $t = b$. The length of a typical subarc is Δs_k.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\, \Delta s_k ,$$

HATI-HATI

Kalo di double int $\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$ terhadap x dan y

Karena disini garis, jadi diintegralkan terhadap s yaitu diferensial busurnya

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

Kalo kita punya kurva c dalam bentuk parameter

$$C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Diferensial Busurnya

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

Untuk diferensial busur yang lain kalau kurvanya tidak dalam bentuk parameter

Bisa di cek diferensial busurnya harus gimana bentuknya

$$ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\;dx$$

Apabila C merupakan gabungan dari beberapa kurva

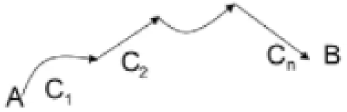
$$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup \cdots \cup C_n$$

Maka integral garis fungsi *f* terhadap C :

$$\int_C f(x,y)\,ds = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} f(x,y)\,ds.$$

Sifat-sifat integral garis

1. Jika $C = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_k$ maka



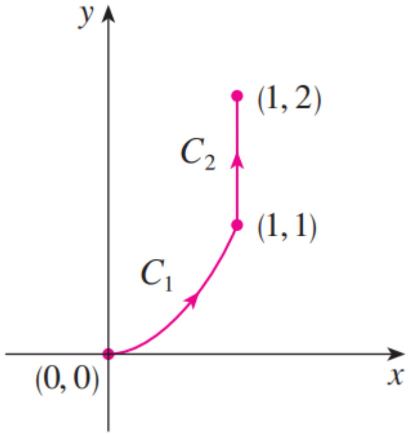
$$\int_C f(x,y)\,dS = \int_{C_1} f(x,y)\,dS + \int_{C_2} f(x,y)\,dS + \ldots + \int_{C_n} f(x,y)\,dS$$

2. Jika $-C$ adalah kurva yang berlawanan arah dengan C,maka

$$\int_{-C} f(x,y)\,dS = -\int_C f(x,y)\,dS$$

Contoh Soal 1 Integral Garis

Tentukan $\int_C 2x\,ds$ dimana C terdiri dari C_1 busur parabola $y = x^2$ dari (0,0) ke (0,1) diikuti segmen garis vertikal C_2 dari (1,1) ke (1,2)



Bentuk parameter C_1

$x = x \qquad y = x^2$

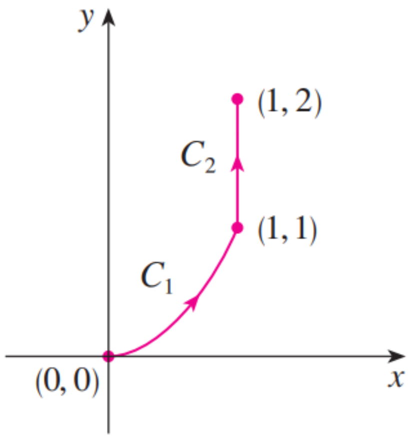
$0 \le x \le 1$

Click to add text

$$\int_{C_1} 2x\,ds = \int_0^1 2x\sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_0^1 2x\sqrt{1 + 4x^2}\,dx$$

$$= \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{2}{3}(1 + 4x^2)^{3/2}\Big]_0^1 = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6}$$

Contoh Soal 1 Integral Garis



Bentuk parameter C_2

$x = 1$ $\quad$ $y = y$

$1 \le y \le 2$

$$\int_{C_2} 2x\,ds = \int_1^2 2(1)\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dy}\right)^2}\,dy = \int_1^2 2\,dy = 2$$

Maka

$$\int_C 2x\,ds = \int_{C_1} 2x\,ds + \int_{C_2} 2x\,ds = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6} + 2$$

Contoh Soal 2 Integral Garis

Tentukan $\int_C xyz\, ds$ dengan kurva

$$C : \begin{cases} x = 2\sin t \\ y = t \\ z = -2\cos t \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi$$

Ingat $ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$

Jawab

$$C : x = 2\sin t, \quad y = t, \quad z = -2\cos t, \quad 0 \le t \le \pi$$

Therefore,

$$\frac{dx}{dt} = 2\cos t, \quad \frac{dy}{dt} = 1, \quad \frac{dz}{dt} = 2\sin t$$

Hence

$$ds = \sqrt{(2\cos t)^2 + (1)^2 + (2\sin t)^2}\ dt$$

$$ds = \sqrt{4\cos^2 t + 1 + 4\sin^2 t}\ dt$$

$$ds = \sqrt{4+1}\ dt$$

$$ds = \sqrt{5}\ dt$$

$$\int_C xyz ds = \int_0^{\pi} (2\sin t)(t)(-2\cos t)\left(\sqrt{5}\, dt\right)$$

$$= -2\sqrt{5}\int_0^{\pi} t(2\sin t\cos t)\, dt$$

Remember that $2\sin t\cos t = \sin 2t$

$$= -2\sqrt{5}\int_0^{\pi} t\sin 2t\, dt$$

$$= -2\sqrt{5}\left[\int t\sin 2t\, dt\right]_0^{\pi}$$

$$= -2\sqrt{5}\left[t\int \sin 2t\, dt - \int\left[\frac{dt}{dt}\int \sin 2t\, dt\right]\, dt\right]_0^{\pi}$$

$$= -2\sqrt{5}\left[-\frac{t\cos 2t}{2} + \int \frac{\cos 2t}{2}\, dt\right]_0^{\pi}$$

$$= -2\sqrt{5}\left[-\frac{t\cos 2t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi}$$

$$= -2\sqrt{5}\left[-\frac{\pi\cos 2\pi}{2} + \frac{\sin 2\pi}{4}\right] + 2\sqrt{5}\left[-\frac{(0)\cos(0)}{2} + \frac{\sin(0)}{4}\right]$$

$$= -2\sqrt{5}\times\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi\sqrt{5}$$

Medan Vektor

- Fungsi atas satu perubah

  $f \; : \; R \rightarrow R$

  $x \rightarrow f(x) \quad = y$

- Fungsi atas dua perubah atau dua variabel

  $f \; : \; R^2 \rightarrow R$

  $(x,y) \rightarrow f(x,y) \quad = z$

- Sebaliknya kalau dari x jadi 2 variabel, kita punya *fungsi bernilai vektor*

  $f \; : \; R \rightarrow R^2$

  $x \rightarrow f(x) = (f(x_1), f(x_2))$

- Medan Vektor

  $f \; : \; R^2 \rightarrow R^2$

  $f(x,y) = (x^2 + y^2), (x + y)$

Fungsi $\mathbf{F} : D \subseteq R^n \rightarrow R^n$ disebut **medan vektor**

Work (Kerja)

Kerja (*Work*) yang dilakukan oleh

gaya **F** = *M***i** + *N***j** + *P***k**

Sepanjang kurva mulus **r***(t)*

dari t = a sampai t = b adalah

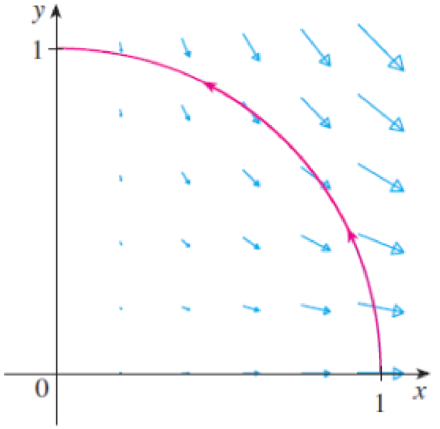
$$W = \int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F} \bullet \mathbf{T}\, ds$$

TABLE 16.2 Six different ways to write the work integral

$\mathbf{W} = \int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$	The definition
$= \int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$	Compact differential form
$= \int_a^b \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\, dt$	Expanded to include dt; emphasizes the parameter t and velocity vector $d\mathbf{r}/dt$
$= \int_a^b \left(M \frac{dg}{dt} + N \frac{dh}{dt} + P \frac{dk}{dt}\right) dt$	Emphasizes the component functions
$= \int_a^b \left(M \frac{dx}{dt} + N \frac{dy}{dt} + P \frac{dz}{dt}\right) dt$	Abbreviates the components of **r**
$= \int_a^b M\, dx + N\, dy + P\, dz$	dt's canceled; the most common form

Contoh Soal 3

Carilah kerja yang dilakukan medan gaya **F**(x,y) = x^2 **i** – *xy* **j** pada partikel bergerak sepanjang seperempat lingkaran r(t) = cos t **i** + sin t **j** , 0 ≤ t ≤ π/2



Kerja yang dilakukan adalah negatif karena medan menghambat gerakan sepanjang kurva

Click to add text

Jawab :

x= cos t dan y = sin t

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \cos^2 t\,\mathbf{i} - \cos t \sin t\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}'(t) = -\sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$$

Kerja yang dilakukan :

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi/2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_0^{\pi/2} (-2\cos^2 t \sin t)\, dt$$

$$= 2\frac{\cos^3 t}{3}\Bigg]_0^{\pi/2} = -\frac{2}{3}$$

Contoh Soal 4

EXAMPLE 5 Find the work done by the force field $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ in moving an object along the curve C parametrized by $\mathbf{r}(t) = \cos(\pi t)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \sin(\pi t)\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$.

Solution We begin by writing $\mathbf{F}$ along C as a function of t,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \cos(\pi t)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \sin(\pi t)\mathbf{k}.$$

Next we compute $d\mathbf{r}/dt$,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\pi \sin(\pi t)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + \pi \cos(\pi t)\mathbf{k}.$$

We then calculate the dot product,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\pi \sin(\pi t)\cos(\pi t) + 2t^3 + \pi \sin(\pi t)\cos(\pi t) = 2t^3.$$

The work done is the line integral

$$\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\, dt = \int_0^1 2t^3\, dt = \frac{t^4}{2}\bigg]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

02

Medan Konservatif

Medan Konservatif

THEOREM 2—Conservative Fields are Gradient Fields Let $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ be a vector field whose components are continuous throughout an open connected region D in space. Then $\mathbf{F}$ is conservative if and only if $\mathbf{F}$ is a gradient field ∇f for a differentiable function f.

Component Test for Conservative Fields

Let $\mathbf{F} = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$ be a field on an open simply connected domain whose component functions have continuous first partial derivatives. Then, $\mathbf{F}$ is conservative if and only if

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}, \qquad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}, \qquad \text{and} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}. \tag{2}$$

Contoh Soal 5

Konservatif atau Tidak?

1. **F** = (2x - 3) **i** - z **j** + (cos z) **k**

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\cos z) = 0, \qquad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(-z) = -1.$$

karena tidak sama, maka tidak konservatif

2. F(x,y) = $(2xe^{xy} + x^2ye^{xy})$ **i** + $(x^3e^{xy}+2y)$ **j**

$$P = 2x\mathrm{e}^{xy} + x^2y\mathrm{e}^{xy} \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = 2x^2\mathrm{e}^{xy} + x^2\mathrm{e}^{xy} + x^3y\mathrm{e}^{xy} = 3x^2\mathrm{e}^{xy} + x^3y\mathrm{e}^{xy}$$

$$Q = x^3\mathrm{e}^{xy} + 2y \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2\mathrm{e}^{xy} + x^3y\mathrm{e}^{xy}$$

karena sama, maka konservatif

Bebas Lintasan

DEFINITIONS Let $\mathbf{F}$ be a vector field defined on an open region D in space, and suppose that for any two points A and B in D the line integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ along a path C from A to B in D is the same over all paths from A to B. Then the integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ is **path independent in D** and the field $\mathbf{F}$ is **conservative on D**.

Medan Vektor

13 Definition Let $\mathbf{F}$ be a continuous vector field defined on a smooth curve C given by a vector function $\mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$. Then the **line integral of F along C** is

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

James Stewart Multivariable Calculus

Contoh Soal 6

Hitunglah $\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ dengan

F(x, y, z) = (x + z, x - y, 2y - z) dan C merupakan lintasan berupa penggal garis dari P (2, -1, 3) ke Q (3, 0, 4)

$\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ → Kerja

$$F(x,y,z) = (x+z,\ x-y,\ 2y-z)$$

$$C \begin{cases} x = 2+t \\ y = -1+t \\ z = 3+t \end{cases},\quad 0 \le t \le 1$$

$$F(x(t), y(t), z(t)) = (5+2t, 3, -5+t)$$

$$\int_C F \cdot dr = \int_0^1 F\ x(t), y(t), z(t) \cdot \frac{dr}{dt}\, dt$$

$$= \int_0^1 (5+2t, 3, -5+t) \cdot (1,1,1)\, dt$$

$$r(t) = (2+t, -1+t, 3+t)$$

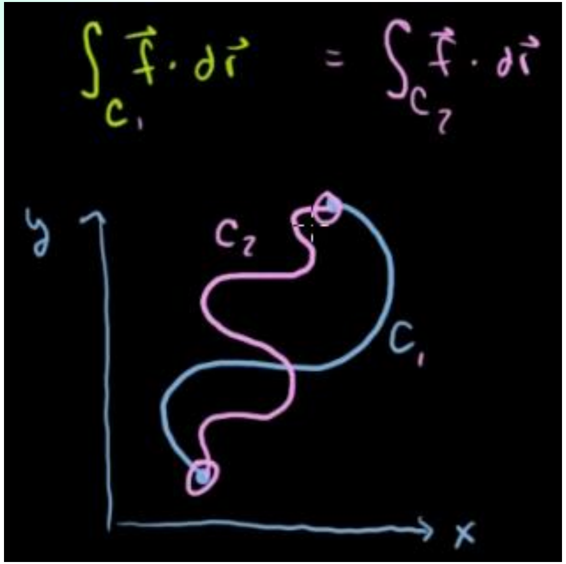
$$\frac{dr}{dt} = (1,1,1)$$

$$= \int_0^1 5+2t+3-5+t\ dt = \frac{3}{2}t^2 + 3t \Big|_0^1 = \frac{9}{2}$$

Medan Gradien & Fungsi Potensial

Untuk medan vektor tertentu, jumlah kerja yang diperlukan untuk memindahkan partikel dari satu titik ke titik lain hanya bergantung pada posisi awal dan akhir, bukan pada jalur yang ditempuh.

Contoh : medan gravitasi dan medan listrik



Anggaplah ada suatu vektor medan **F** yang didefinisikan pada daerah terbuka **D** dalam ruang

Maka integral garis dari titik **A** ke **B** melalui lintasan **C1** dapat dituliskan sebagai $\int_{C1} \mathbf{F \cdot dr}$

di sisi lain sepanjang jalur **C2** dari **A** ke **B** di bidang **D** adalah sama dengan integral garis dari titik **A** ke **B** melalui lintasan **C1,** sehingga

$\int_{C1} \mathbf{F \cdot dr} = \int_{C2} \mathbf{F \cdot dr}$

dan hal tersebut berlaku untuk semua jalur dari **A** ke **B**. Maka

<u>Jalur independent di D</u> dan <u>medan F adalah konserfatif pada D</u>

Criterion for gradient fields

Gradien suatu fungsi disebut medan gradien, Medan gradien (kontinu) selalu merupakan medan vektor yang konservatif.

Let $\mathbf{F} = M(x,y)\,\mathbf{i} + N(x,y)\,\mathbf{j}$ be a two-dimensional vector field,

Ada tiga cara yang setara untuk mengatakan bahwa F konservatif

$$(1) \qquad \mathbf{F} = \nabla f \;\Leftrightarrow\; \int_P^Q \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \text{ is path-independent } \Leftrightarrow\; \oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0 \text{ for any closed } C$$

$$(2) \qquad \mathbf{F} = \nabla f \text{ for some } f(x,y) \quad\Rightarrow\quad M_y = N_x\;.$$

$$(3) \qquad \operatorname{curl} \mathbf{F} = N_x - M_y\;.$$

Then (2) becomes

$$(2') \qquad \mathbf{F} = \nabla f \quad\Rightarrow\quad \operatorname{curl} \mathbf{F} = 0\;.$$

Finding the potential function.

" Jika F adalah medan vektor yang didefinisikan pada D dan **F=∇f** "

Theorem 1: Fundamental Theorem of Line Integrals

Let C be a smooth curve joining the point A to point B in the plane ore in space and parametrized by $\mathbf{r}(t)$. Let f be a differentiable function with a continuous gradient vector $\mathbf{F} = \bigtriangledown f$ on a domain D containing C. Then $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A)$.

Theorem 2: Conservative Fields are Gradient Fields

Let $\mathbf{F} = M\hat{\mathbf{i}} + N\hat{\mathbf{j}} + P\hat{\mathbf{k}}$ be a vector field whose components are continuous throughout an open connected region D in space. Then **F** is conservative if and only it **F** is a gradient field $\bigtriangledown f$ for a differentiable function f.

Theorem 3: Looper Property of Conservative Fields

The following statements are equivalent:

- $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ around every loop (closed curve C) in D.
- The field **F** is *conservative* on D.

03

Theorema Green

Pernyataan Teorema Green

Misalkan R adalah suatu daerah berbatas tertutup pada bidang xy, yang batasnya C terdiri dari banyak kurva halus tak terhingga.

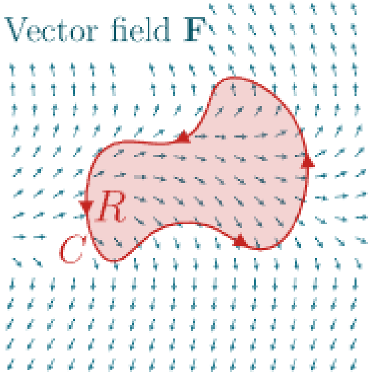
Misalkan P (x,y) dan Q (x, y) adalah fungsi kontinu yang memiliki turunan parsial kontinu

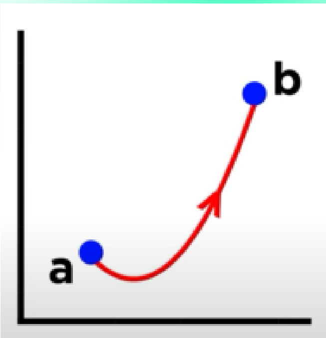
$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}$$

pada wilayah R dan di perbatasan C, Teorema Green menyatakan

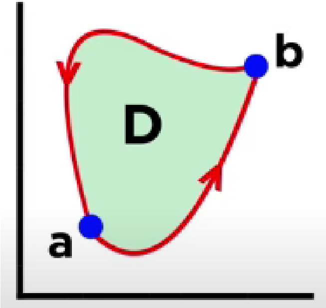
$$\iint_R \text{2d-curl}\,\mathbf{F}\,dA = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$





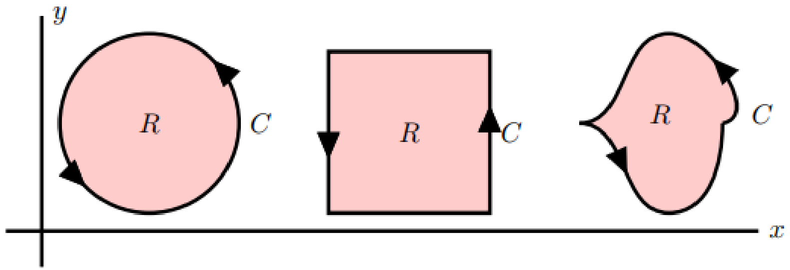
$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C P\,dx + Q\,dy$$

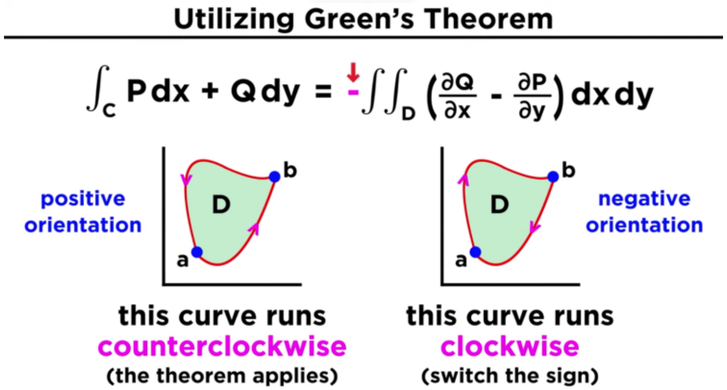


$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$$

Yang Perlu Diingat Dalam Teorema Green

1. C adalah kurva tertutup sederhana (sederhana berarti tidak pernah berpotongan)
2. R merupakan bagian dalam C.
3. C harus berorientasi positif, yaitu saat mengelilingi kurva, interior harus berada di sebelah kiri kurva.
4. C harus *piecewise smooth*, berarti kurva mulus dengan kemungkinan jumlah sudut yang terbatas.





Contoh Soal 7

Hitunglah $\oint_C -x^2y\,dx + xy^2\,dy,$ di mana C adalah lingkaran dengan jari-jari 2 yang berpusat di titik asal.

Jika F = <M, N> dan C adalah kurva positif tertu

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R N_x - M_y\,dA.$$

diketahui bahwa

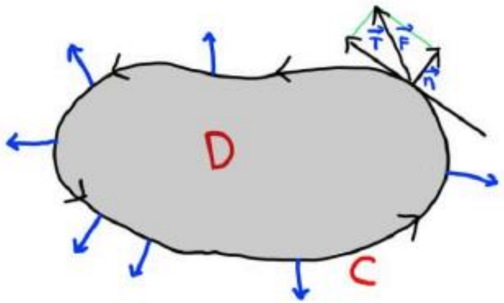
$$M = -x^2y \qquad N = xy^2$$

$$\begin{aligned}
\oint_C -x^2y\,dx + xy^2\,dy &= \iint_R y^2 - (-x^2)\,dA \\
&= \iint_R x^2 + y^2\,dA \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2 \quad dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{8}{3}d\theta \\
&= \frac{16\pi}{3}.
\end{aligned}$$

04

Aplikasi Theorema Green

Aplikasi Teorema Green pada mekanika Fluida



Gambar: Fluks dan Sirkulasi

Sirkulasi (rotasi medan vektor)→ banyaknya aliran per unit waktu aliran mengikuti vektor singgung mengelilingi C

Fluks → banyaknya aliran per unit waktu aliran keluar dari D tegak lurus C

Sirkulasi

$$\int_C \mathbf{F} \bullet \mathbf{T}\, ds = \iint_D \underbrace{\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)}_{\text{Curl F}} dA.$$

Fluks

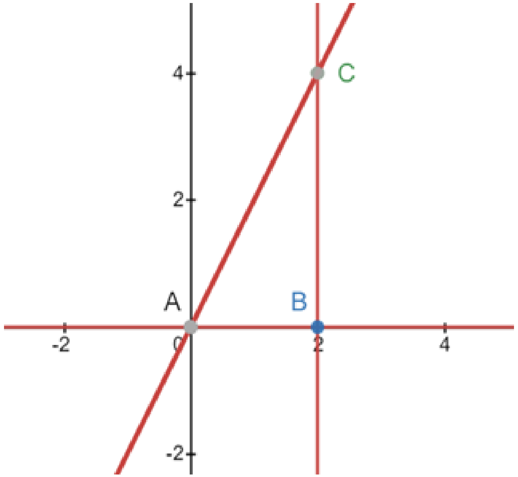
$$\int_C \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, ds = \iint_D \underbrace{\left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right)}_{\text{div F}} dA.$$

Note
dA tergantung dari bentuk kurva

- dydx
- dxdy
- rdrdθ

Contoh Soal 8

Diberikan medan kecepatan aliran fluida di dalam dimensi dua **F**(x, y) = (−2xy, x^2) dan daerah D dibatasi kurva sederhana C berupa segitiga dengan titik-titik sudut (0, 0), (2, 0), (2, 4) dengan arah positif. Hitunglah sirkulasi **F** sekeliling C dan fluks **F** meninggalkan D melalui C.



Contoh Soal

$$F(x,y) = (\overset{M}{-2xy}, \overset{N}{x^2})$$

Sirkulasi

$$\int_C F.T\,ds = \iint_D \left(\frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy}\right) dA$$

$$N_x = 2x$$

$$M_y = -2x$$

$$\int_C F.T\,ds = \iint_D 2x - (-2x)\ dA$$

$$= \int_0^2\int_0^{2x} 2x + 2x\ dy\,dx$$

$$= \int_0^2\int_0^{2x} 4x\ dy\,dx$$

$$= \int_0^2 4xy\Big|_0^{2x} dx$$

$$= \int_0^2 8x^2\ dx$$

$$= \frac{8}{3}x^3\Big|_0^2$$

$$= \frac{64}{3}$$

Fluks

$$\int_C F.n\,ds = \iint_D \left(\frac{dM}{dx} + \frac{dN}{dy}\right) dA$$

$$M_x = -2y$$

$$N_y = 0$$

$$\int_C F.n\,ds = \iint_D -2y + 0\ dA$$

$$= \int_0^2\int_0^{2x} -2y\ dy\,dx$$

$$= \int_0^2 -y^2\Big|_0^{2x} dx$$

$$= \int_0^2 -4x^2\ dx$$

$$= -\frac{4}{3}x^3\Big|_0^2$$

$$= \frac{-32}{3}$$

Bentuk Normal Teorema Green

Fluks yang keluar dari area R sama dengan integral ganda dari divergensi F pada area R (Normal form)

Sirkulasi sepanjang kurva C sama dengan integral ganda dari curl F pada area C (tangential form)

Tangential form

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \operatorname{curl} \mathbf{F} \, dA$$

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$$

work by $\mathbf{F}$ around C

Normal form

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,ds = \iint_R \operatorname{div} \mathbf{F} \, dA$$

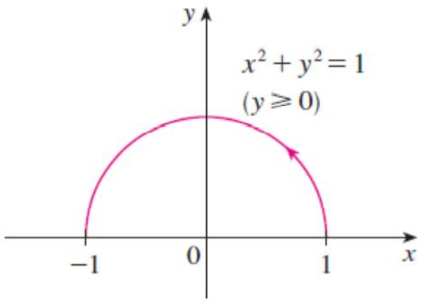
$$\oint_C M\,dy - N\,dx = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dA$$

flux of $\mathbf{F}$ across C

source rate for R

Latihan Soal Integral Garis

1. Hitung $\int_C (2 + x^2 y)\, ds$ dimana C adalah separuh lingkaran bagian atas dari lingkaran



2. Hitung $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ dimana $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + xy\mathbf{j} - y^2\mathbf{k}$

pada kurva C $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \sqrt{t}\,\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$

Latihan Soal Theorema Green

1. Evaluate $\int x^4 dx\ C + xy\ dy$, where C is the triangular curve consisting of the line segments from (0, 0) to (1, 0), from (1, 0) to (0, 1), and from (0, 1) to (0, 0).

Latihan Soal Aplikasi Teorema Green

1. Diberikan medan kecepatan aliran fluida di dalam dimensi dua **F**$(x, y) = (-3y, 3x)$ dan daerah D dibatasi kurva sederhana C berupa **lingkaran** dengan arah positif. Hitunglah **sirkulasi F** sekeliling C dan **fluks F** meninggalkan D melalui C.

Pengerjaan Latihan Soal

- Dikerjakan seperti latihan soal biasa
- Dikumpulkan di form pengumpulan tugas https://tinyurl.com/PengumpulanTugasKVJ
- (diisi pertemuan 5)
- Waktunya 45 menit + toleransi pengumpulan 15 menit
- Format nama file NIU_Nama