TKU211103 Kalkulus Variabel Jamak

Teorema Green

Oleh: Tim Dosen Kalkulus Variabel Jamak

Semester Gasal 2021/2022

Departemen Matematika FMIPA UGM

1. Teorema Green

Diperhatikan bahwa untuk $\mathbf{F} = (M, N, P)$ dan $\mathbf{r} = (x, y, z)$, diperoleh

$$\mathbf{F} \bullet \mathbf{r} = M\ dx + M\ dy + P\ dz.$$

Jika M, N, P mempunyai derivatif parsial di dalam daerah terhubung sederhana, maka $\mathbf{F}$ merupakan medan gradien jika dan hanya jika

$$curl \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

atau dengan kata lain

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial z}, \quad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Latihan (Coba Kerjakan)

Selidiki manakah medan vektor $\mathbf{F}$ *yang konservatif pada* $\mathbb{R}^3$.

(1) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + z, x - y, 2y - z)$.

(2) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + z, y - z, x - y)$.

Hitunglah $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \bullet \mathbf{r}$, *dengan*

(3) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + z, x - y, 2y - z)$ *dan* C *merupakan lintasan berupa penggal garis dari* $P(2, -1, 3)$ *ke* $Q(3, 0, 4)$.

(4) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + z, y - z, x - y)$ *dan* C *merupakan lintasan berupa gabungan penggal garis dari* $A(0, 0, 0)$ *ke* $B(1, 1, 0)$ *dilanjutkan ke* $D(1, 2, 0)$, *dan terakhir ke* $E(1, 2, 3)$.

Definisi

- *Kurva tertutup sederhana adalah kurva yang setiap titiknya dijalani tepat satu kali, kecuali titik awal yang sekaligus menjadi titik akhir.*
- *Daerah (region) D dikatakan terhubung sederhana (simply connected), jika setiap kurva tertutup sederhana C di dalam D merupakan batas daerah D_C, dengan $D_C \subseteq D$. Selanjutnya, daerah terhubung yang tidak terhubung sederhana disebut daerah multiply connected.*
- *Arah positif dimaksudkan arah berlawanan dengan jarum jam.*

Perhatikan contoh berikut. Integral garis

$$\int_C \left(e^{-x^2} + xy^2\right) dx + \left(x^3 + \sqrt{1+y^3}\right) dy$$

dengan C merupakan segitiga dengan titik-titik sudut $(0,0)$, $(2,0)$ dan $(2,2)$.

$$\mathbf{F}(x,y) = (M(x,y), N(x,y))$$

dengan

$$M(x,y) = e^{-x^2} + xy^2 \qquad \text{dan} \qquad N(x,y) = x^3 + \sqrt{1+y^3}$$

Dapat ditunjukkan bahwa **F** bukan medan vektor konservatif. Adakah cara lain menghitung integral diatas?

Teorema (Teorema Green)

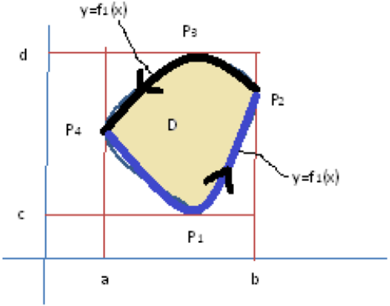
Jika D merupakan daerah terhubung sederhana yang dibatasi kurva smooth tertutup C dengan arah positif dan fungsi dua variabel M dan N mempunyai derivarif parsial yang kontinu pada daerah terbuka yang memuat D, maka

$$\int_C M(x,y)dx + N(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \right) dA.$$

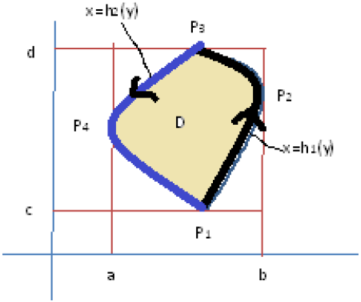
Teorema Green mengatakan bahwa perhitungan integral garis sepanjang kurva tertutup sederhana dapat dipandang sebagai integral ganda pada daerah yang dibatasi kurva tersebut.

Bukti.

Pertama diperhatikan bahwa daerah D dapat dinyatakan dalam Tipe I maupun Tipe II.



Tipe I



Tipe II

Lanjutan Bukti.

Tipe II untuk D memberikan

$$D = \{(x, y) : c \leq y \leq d,\ x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\}.$$

Diperoleh

$$\iint_D \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\, dA = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\, dxdy$$

Selanjutnya,

$$\iint_D \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\, dA = \int_c^d [N(x_2(y), y) - N(x_1(y), y)]\, dy.$$

Kurva $C = C_1 \cup C_2$, dengan

$$-C_1 : \begin{cases} x = x_1(y) \\ y = y, \end{cases} \qquad c \leq y \leq d$$

dan

$$C_2 : \begin{cases} x = x_2(y) \\ y = y, \end{cases} \qquad c \leq y \leq d.$$

Lanjutan Bukti.

Diperhatikan bahwa

$$\int_{C_1} N(x,y)dy = -\int_{-C_1} N(x,y)dy = -\int_c^d N(x_1(y),y)\,dy.$$

Dengan demikian,

$$\begin{aligned}
\int_C N(x,y)dy &= \int_{C_1} N(x,y)dy + \int_{C_2} N(x,y)dy \\
&= -\int_c^d N(x_1(y),y)dy + \int_c^d N(x_2(y),y)dy \\
\int_C N(x,y)dy &= \int_c^d [N(x_2(y),y) - N(x_1(y),y)]\,dy.
\end{aligned}$$

Jadi dapat disimpulkan,

$$\int_C N(x,y)dy = \iint_D \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\,dA$$

Lanjutan Bukti.

Selanjutnya Tipe I untuk D memberikan

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b,\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}.$$

Diperoleh

$$\iint_D \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\, dA = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\, dydx$$

Selanjutnya,

$$\iint_D \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\, dA = \int_a^b [M(x, y_2(x)) - M(x, y_1(x))]\, dx.$$

Kurva $C = C_3 \cup C_4$, dengan

$$C_3 : \begin{cases} x = x \\ y = y_1(x), \end{cases} \qquad a \leq x \leq b$$

dan

$$-C_4 : \begin{cases} x = x \\ y = y_2(x), \end{cases} \qquad a \leq x \leq b.$$

Lanjutan Bukti.

Diperhatikan bahwa

$$\int_{C_4} M(x,y)dx = -\int_{-C_4} M(x,y)dx = -\int_a^b M(x,y_2(x))\,dx.$$

Dengan demikian,

$$\begin{aligned}\int_C M(x,y)dx &= \int_{C_3} M(x,y)dx + \int_{C_4} M(x,y)dx\\ &= \int_a^b M(x,y_1(x))dx - \int_a^b M(x,y_2(x))dx\\ \int_C M(x,y)dx &= -\int_a^b [M(x,y_2(x)) - M(x,y_1(x))]\,dx.\end{aligned}$$

Jadi dapat disimpulkan,

$$\int_C M(x,y)dx = -\iint_D \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\,dA.$$

Lanjutan Bukti.

Dengan demikian, diperoleh

$$\int_C M(x,y)dx + N(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \right) dA.$$

Selanjutnya, integral garis atas kurva tertutup C seringkali juga dilambangkan dengan $\oint_C$. Dengan demikian, hasil diatas ekuivalen dengan

$$\oint_C M(x,y)dx + N(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \right) dA.$$

Contoh

(1) *Luas daerah D (daerah yang dibatasi kurva C) dapat ditentukan dengan menghitung*

$$-\frac{1}{2}\int_C (y\ dx - x\ dy).$$

(2) *Buktikan bahwa luas area* $D = -\displaystyle\int_C y\ dx.$

(3) *Tentukan luas ellips* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$ *Diambil* $x = a\cos\theta$ *dan* $y = b\sin\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi.$

Jika daerah D yang dibatasi kurva tertutup C bukan merupakan daerah terhubung sederhana, maka D dapat dibagi menjadi beberapa daerah sederhana dengan selalu memperhatikan bahwa **daerah selalu berada di sebelah kiri arah kurva** $C_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ yang merupakan penyusun C.

Catatan: Teorema Green tetap berlaku pada daerah multiply-connected.

Akibat

Diketahui C_1 dan C_2 merupakan dua kurva tertutup sederhana kontinu sepotong-sepotong dan D merupakan daerah tertutup anular dibatasi C_1 dan C_2. Jika fungsi dua variabel M dan N terdiferensial kontinu pada daerah terbuka yang memuat D dan memenuhi

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}$$

pada D, maka

$$\int_{C_1} M(x,y)dx + N(x,y)dy = \int_{C_2} M(x,y)dx + N(x,y)dy.$$

Bukti.

Dibentuk kurva $C = C_1 \cup -C_2$ yang membatasi daerah D. Menurut Teorema Green,

$$\int_C M(x,y)dx + N(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y}\right) dA = 0.$$

Akibatnya,

$$\int_C M(x,y)dx + N(x,y)dy = \int_{C_1} M(x,y)dx + N(x,y)dy + \int_{-C_2} M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

atau

$$\int_{C_1} M(x,y)dx + N(x,y)dy + \int_{-C_2} M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

ekuivalen dengan mengatakan

$$\int_{C_1} M(x,y)dx + N(x,y)dy - \int_{C_2} M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.$$

Dengan demikian,

$$\int_{C_1} M(x,y)dx + N(x,y)dy = \int_{C_2} M(x,y)dx + N(x,y)dy.$$

Contoh

(1) *Hitunglah integral garis*

$$\int_C \left(e^{-x^2} + xy^2\right) dx + \left(x^3 + \sqrt{1+y^3}\right) dy,$$

dengan C merupakan segitiga dengan titik-titik sudut $(0,0)$, $(2,0)$, *dan* $(2,2)$. *(Jawaban : 8 (silakan dicek))*

(2) *Hitunglah integral garis*

$$\int_C (3-x)\; dx + (y-x)\; dy,$$

dengan C merupakan gabungan lingkaran satuan pusat $O(0,0)$ *dengan arah negatif dan lingkaran berjari-jari 2 pusat* $O(0,0)$ *dengan arah positif. (Jawaban :* -3π*)*

Contoh

(3) *Hitunglah* $\displaystyle\int_C \frac{-y\ dx + x\ dy}{x^2 + y^2}$, *jika*

(i) C: *lingkaran pusat* $(2,0)$ *dengan jari-jari 1.*

(ii) C: *bujursangkar dengan titik-titik sudut* $(1,0)$, $(5,0)$, $(5,1)$, *dan* $(0,1)$.

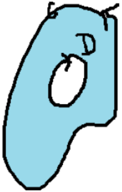
(iii) C: *kurva tertutup terbatas tidak melingkupi* $O(0,0)$.

(iv) C: *lingkaran pusat* $O(0,0)$ *dengan jari-jari 1. (jawaban:* 2π*).*

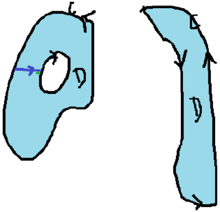
(v) C: *bujursangkar dengan titik-titik sudut* $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$, *dan* $(1,-1)$.

Multiply Connected

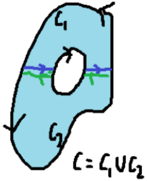
Untuk daerah D multiply connected, gunakan cross section untuk mengubahnya menjadi simply connected.



Gambar: Tidak sederhana



Gambar: Cross section



Gambar: Tidak sederhana ke sederhana

Latihan

(1) *Hitunglah* $\int_C \mathbf{F} \bullet \mathbf{r}$, *dengan* $\mathbf{F}(x, y) = (\sin x, \cos y)$ *dan* $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, *dengan* C_1 *merupakan penggal garis dari titik* $(0, 0)$ *ke* $(1, 0)$, C_2 *merupakan busur bagian lingkaran satuan di kuadran I dari* $(1, 0)$ *ke* $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, *dan* C_3 *merupakan penggal garis dari* $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ *ke* $(0, 0)$.

(2) *Hitunglah* $\int_C (y^3\, dx - x^3\, dy)$, *dengan* C *merupakan bujursangkar* $|x| + |y| = 1$.

(3) *Hitunglah* $\int_C \frac{x}{x^2 + y^2} dx + \frac{y}{x^2 + y^2} dy$, *dengan*

  (i) $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, *dengan* C_1 *merupakan penggal garis dari* $(0, -1)$ *ke* $(1, 0)$, C_2 *merupakan penggal garis dari* $(1, 0)$ *ke* $(3, 0)$, *dan* C_3 *merupakan penggal garis dari* $(3, 0)$ *ke* $(3, 4)$.

  (ii) C *merupakan lingkaran dengan pusat* $O(0, 0)$ *dan jari-jari 1.*

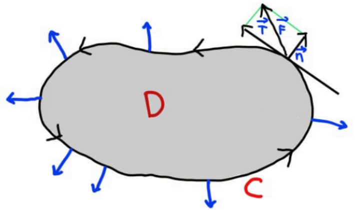
Pada bagian ini, medan vektor $\mathbf{F} = (M, N)$ menyatakan medan kecepatan fluida dan D merupakan region yang dibatasi kurva C seperti di dalam Teorema Green. Diasumsikan bahwa aliran fluida dalam keadaan steady, artinya $\mathbf{F}$ tidak berubah terhadap waktu.

Di setiap titik P pada C, diperhatikan

(i) komponen $\mathbf{F} \bullet \mathbf{T}$ dari $\mathbf{F}$ dalam arah vektor satuan $\mathbf{T}$ dan

(ii) komponen $\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}$ dari $\mathbf{F}$ dalam arah vektor normal satuan ke luar $\mathbf{n}$

seperti gambar berikut.



Gambar: Fluks dan Sirkulasi

Perhatikan bahwa

(i) $\int_C \mathbf{F} \bullet \mathbf{T}\, ds$ menyatakan **sirkulasi F** mengelilingi C, yaitu banyaknya aliran per unit waktu aliran mengikuti vektor singgung mengelilingi C.

(ii) $\int_C \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, ds$ menyatakan **fluks** (*flux*) **F** melalui C, yaitu banyaknya aliran per unit waktu aliran keluar dari D tegak lurus C.

Sirkulasi dan fluks tersebut dapat dihitung menggunakan integral garis. Namun, karena syarat Teorema Green dipenuhi, maka Teorema Green dapat digunakan untuk menghitungnya.
Diperhatikan bahwa:

$$\mathbf{F} \bullet \mathbf{T}\, ds = \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = M(x, y)dx + N(x, y)dy,$$

sehingga dengan Teorema Green diperoleh

$$\int_C \mathbf{F} \bullet \mathbf{T}\, ds = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA.$$

Aplikasi Teorema Green pada Mekanika Fluida

Untuk memperoleh representasi fluks, diperhatikan bahwa vektor normal

$$\mathbf{n} = \left(\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds}\right).$$

Dengan demikian,

$$\mathbf{F} \bullet \mathbf{n} ds = (M, N) \bullet \left(\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds}\right) ds = -N(x, y)dx + M(x, y)dy.$$

Dengan Teorema Green, fluks **F** melalui C sebesar:

$$\int_C \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, ds = \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dA.$$

Diperhatikan bahwa:

$$\text{rot } \mathbf{F} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

dan

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y},$$

sehingga

$$\int_C \mathbf{F} \bullet \mathbf{T}\, ds = \iint_D \text{rot } \mathbf{F}\, dA$$

dan

$$\int_C \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, ds = \iint_D \text{div } \mathbf{F}\, dA.$$

Contoh

(1) *Diberikan medan kecepatan aliran fluida di dalam dimensi dua* $\mathbf{F}(x, y) = (-2xy, x^2)$ *dan daerah* D *dibatasi kurva sederhana* C *berupa segitiga dengan titik-titik sudut* $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 4)$ *dengan arah positif. Hitunglah sirkulasi* $\mathbf{F}$ *sekeliling* C *dan fluks* $\mathbf{F}$ *meninggalkan* D *melalui* C.

Jawaban: *sirkulasi sebesar* $\frac{64}{3}$ *dan fluks sebesar* $-\frac{32}{3}$.

Latihan

(1) *Hitunglah sirkulasi medan kecepatan aliran fluida di dalam dimensi dua*

$$\mathbf{F}(x, y) = (3x^2y, x^3 + 4x)$$

sekeliling C, *dengan* C *berupa ellips* $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ *dengan arah positif.*

Thank You