TKU211103 Kalkulus Variabel Jamak

Teorema Stokes /Stokes Theorem

Oleh: Tim Dosen Kalkulus Variabel Jamak

Semester Gasal 2021/2022

Departemen Matematika FMIPA UGM

Teorema Green menyatakan bahwa

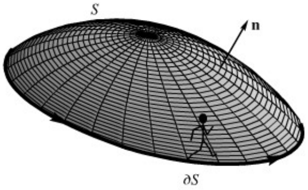
$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \bullet \mathbf{T} = \iint_{S} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA.$$

Teorema ini berlaku untuk semua bidang S yang dibatasi oleh kurva tertutup sederhana ∂S. Pada bagian ini akan dipelajari generalisai Teorema Green untuk kasus S adalah permukaan berbentuk kurva di dalam ruang berdimensi tiga.

Batas Permukaan S

Untuk menetapkan batas-batas pada permukaan S perlu diasumsikan

1. Permukaan S merupakan permukaan bersisi dua dengan normal satuan $\mathbf{n}$ berubah-ubah secara kontinu.
2. Batas ∂S adalah kurva tertutup sederhana, mulus sepotong-sepotong, yang berorientasi konsisten dengan $\mathbf{n}$. Hal ini berarti jika kita berdiri di dekat tepi permukaan dengan kepala kita pada arah $\mathbf{n}$ dan mata melihat ke arah kurva, maka permukaan tersebut berada di sebelah kiri kita.



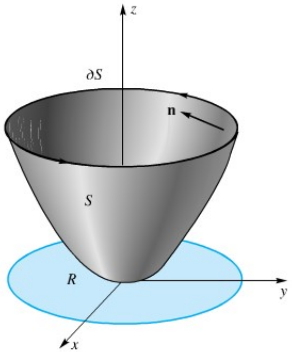
Teorema

Diketahui S *bidang yang dibatasi oleh kurva tertutup sederhana* ∂S, $\mathbf{n}$ *adalah normal satuan dan* $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ *adalah medan vektor dengan* M, N, P *mempunyai turunan-turunan parsial orde-pertama kontinu di* S *dan batasnya addalah* ∂S. *Jika* $\mathbf{T}$ *adalah vektor singgung satuan terhadap* ∂S, *maka*

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \bullet \mathbf{T} = \iint_{S} (\textit{curl } \mathbf{F}) \bullet \mathbf{n} \, dS.$$

Contoh (1)

Buktikan Teorema Stokes untuk $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$ *jika* S *adalah paraboloid* $z = x^2 + y^2$ *dengan lingkaran* $x^2 + y^2 = 1,\ z = 1$ *sebagai batasnya.*



Contoh 1 (Penyelesaian)

Batas ∂S dapat diperoleh dari persamaan-persamaan parametrik $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = 1$, maka $dz = 0$ dan

$$\begin{aligned}\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \oint_{\partial S} y\, dx - x\, dy &= \int_0^{2\pi} [\sin t(-\sin t)\, dt - \cos t \cos t\, dt] \\ &= -\int_0^{2\pi} [\sin^2 t + \cos^2 t]\, dt = -2\pi\end{aligned}$$

Karena

$$\operatorname{curl} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & yz \end{bmatrix} = z\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - 2\mathbf{k}.$$

Contoh 1 (Penyelesaian(Lanjutan))

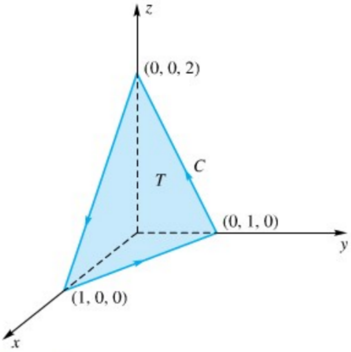
Diperoleh

$$
\begin{aligned}
\iint_S (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS &= \iint_R [-z(2x) - 0(2y) - 2]\, dx\, dy \\
&= -2 \iint_R [xz + 1]\, dx\, dy \\
&= -2 \iint_R [x(x^2 + y^2) + 1]\, dx\, dy \\
&= -2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 [r^3 \cos\theta + 1] r\, dr\, d\theta \\
&= -2 \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{5}\cos\theta + \frac{1}{2}\right] d\theta = -2\pi
\end{aligned}
$$

Contoh 2

Contoh

Diketahui $\mathbf{F} = 2z\mathbf{i} + (8x - 3y)\mathbf{j} + (3x + y)\mathbf{k}$ *dan* C *adalah kurva segitiga dengan titik-titik sudut* $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,2)$. *Tentukan* $\oint \mathbf{F} \bullet \mathbf{T}\, ds$. *[*$\mathbf{Jawaban : 4}$*]*



Thank You