UNIVERSITAS GADJAH MADA

Tutorial Week-7

4 Desember 2021

Outline

- Penjelasan materi
  - Orthogonality and Projection
  - Least-Square Approximation and Orthonormal Bases
- Latihan soal dan pembahasan

UNIVERSITAS GADJAH MADA

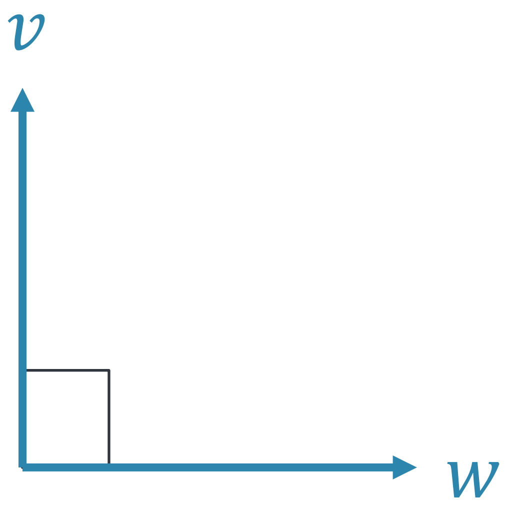
Orthogonality and Projection

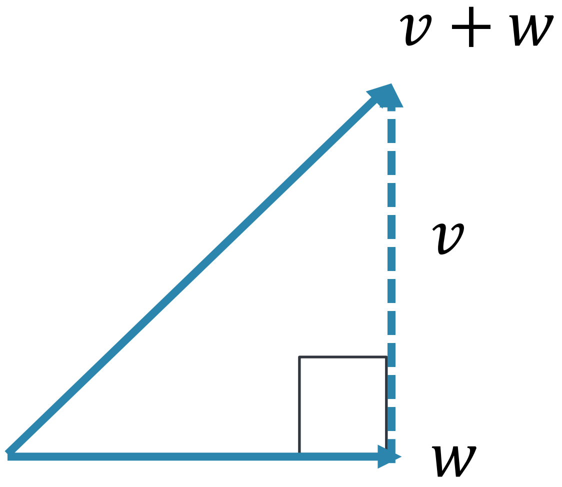
Ketegaklurusan antar Vektor

Orthogonal vectors:

Dua vektor saling orthogonal apabila dot product kedua vektor tersebut bernilai nol.

$$v \cdot w = v^T w = 0$$





Karena $v^T w = w^T v = 0$, maka

$$(v + w)^T (v + w) = v^T v + \cancel{v^T w} + \cancel{w^T v} + w^T w$$

$$||v||^2 + ||w||^2 = ||v + w||^2$$

Orthogonality antar Subspace

Orthogonal Subspace :

- Definisi:

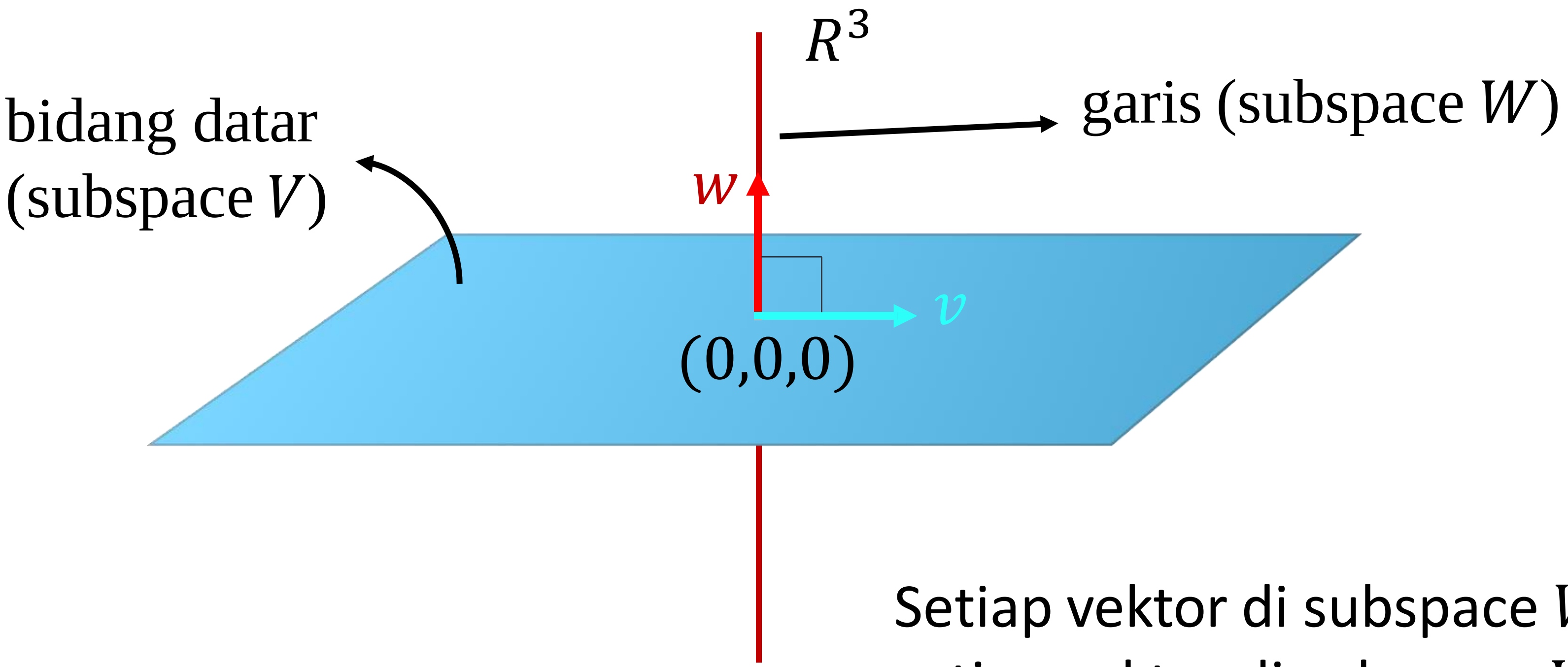
Dua subspace V dan W dari suatu vector space saling orthogonal jika setiap vektor v di subspace V tegak lurus terhadap setiap vektor w di subspace W.

- Orthogonal Subspaces:

$$v^T w = 0$$

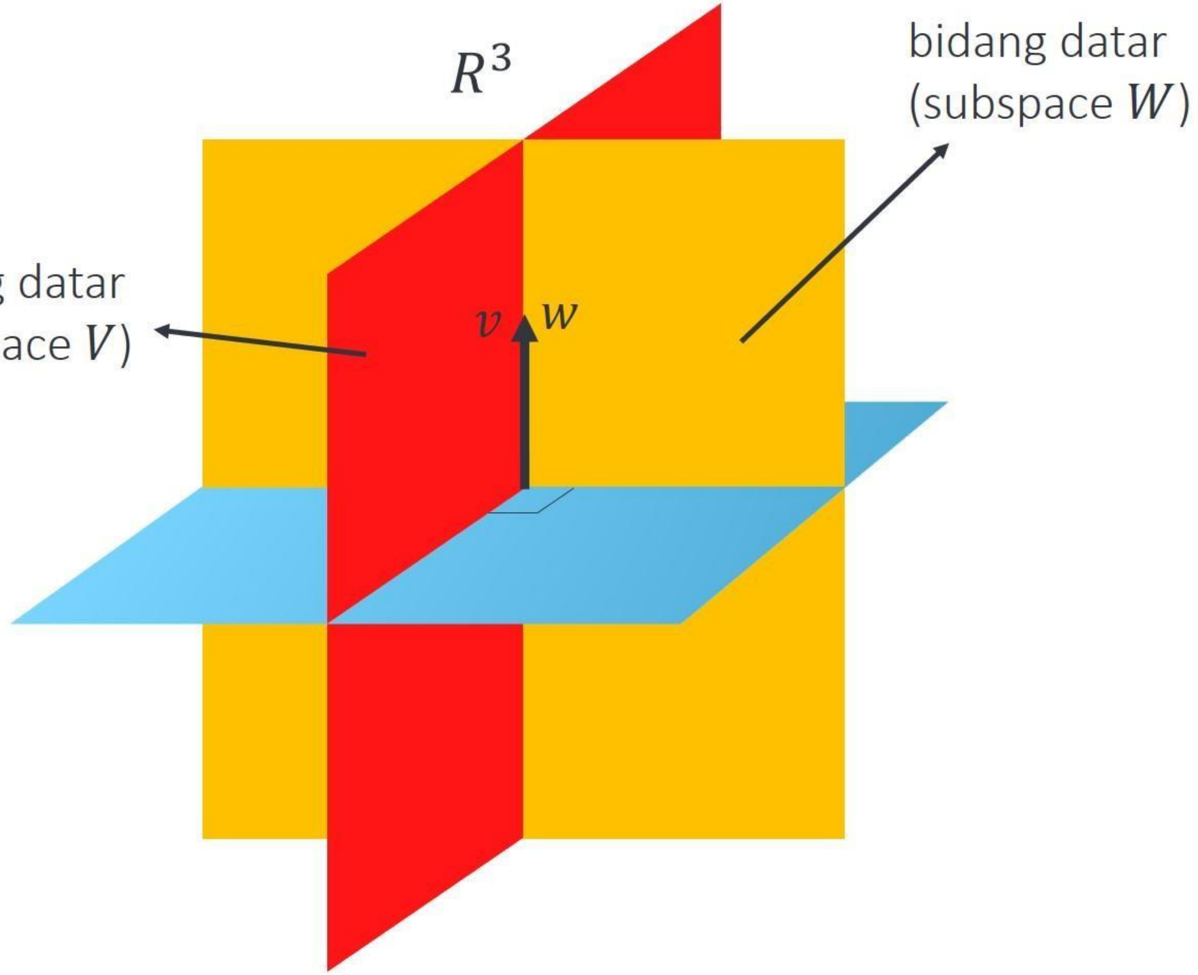
untuk semua vektor v di subspace V dan semua vektor w di subspace W.

Ketegaklurusan antar Subspace



Setiap vektor di subspace V tegak lurus dengan setiap vektor di subspace W.
Subspace $\boldsymbol{V}$ dan $\boldsymbol{W}$ saling tegak lurus.

Ketegaklurusan antar Subspace



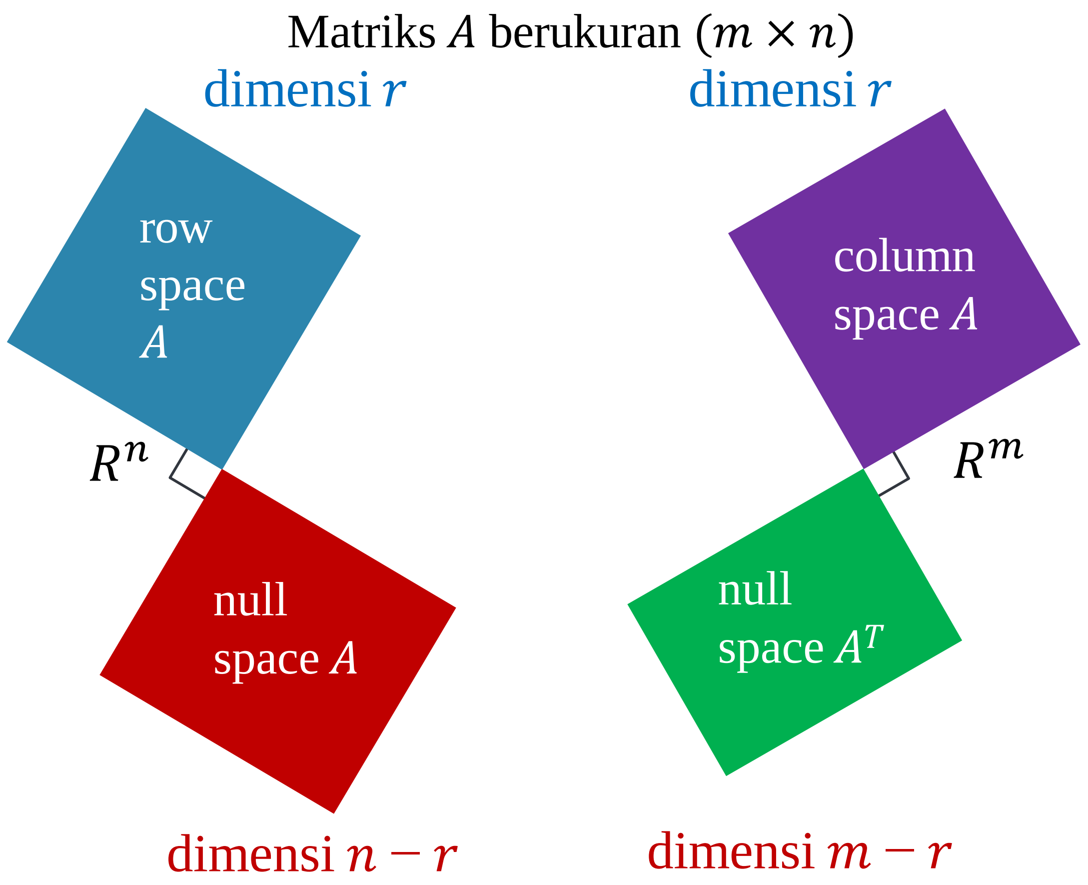
Vektor v dan w
sama – sama terletak
di sumbu z.

Vektor v dan w
tidak saling tegak lurus.
Subspace $\boldsymbol{V}$ dan $\boldsymbol{W}$ tidak saling
tegak lurus.

Ketegaklurusan antar Subspace

Empat fundamental subspaces:

- Row space matriks A: $C(A^T)$
  Semua kombinasi linear baris – baris A yaitu $A^T y$ untuk semua vektor real y.
- Nullspace matriks A: $N(A)$
  Semua x yang memenuhi $Ax = 0$.
- Column space matriks A: $C\ (A)$
  Semua kombinasi linear kolom - kolom A yaitu Ax untuk semua vektor real x.
- Left nullspace matriks A: $N(A^T)$
  Semua y yang memenuhi $(y^T A)^T = A^T y = 0$.



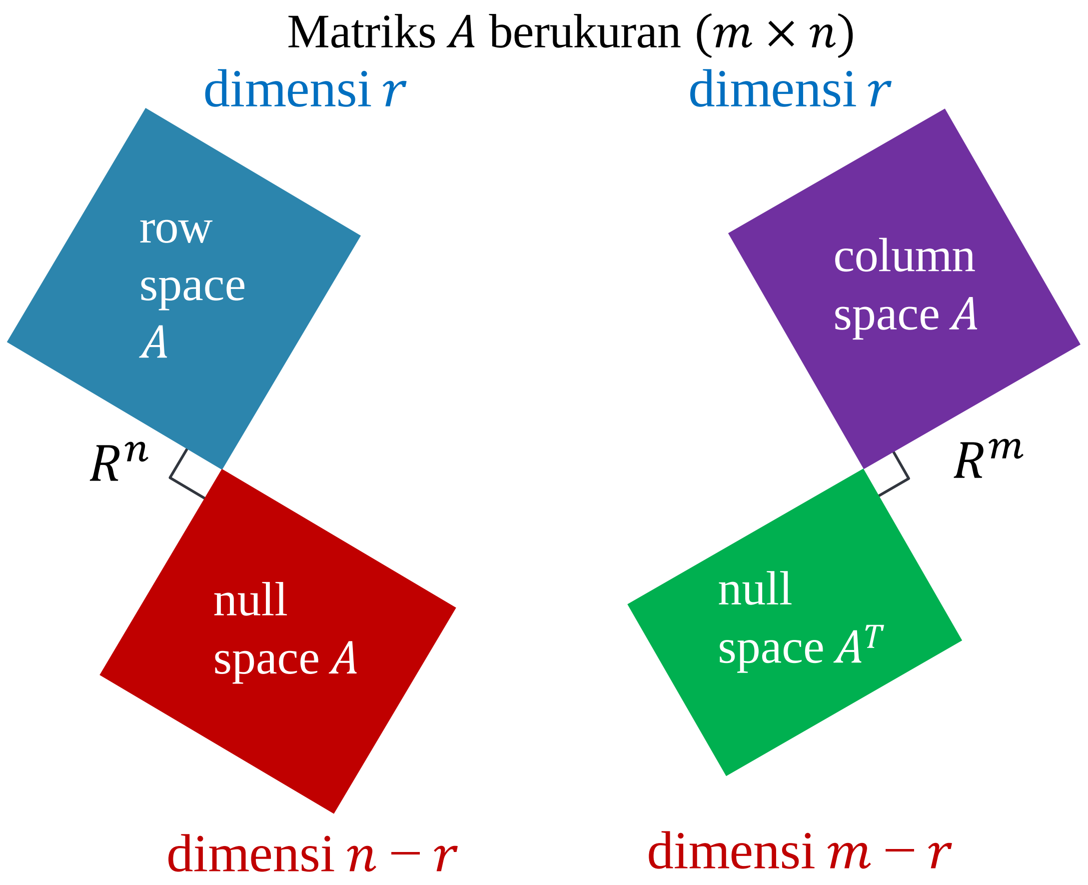
Ketegaklurusan antar Subspace

1. Row space $C(A^T)$ tegak lurus terhadap nullspace $N(A)$.
2. Column space $C(A)$ tegak lurus terhadap left nullspace $N(A^T)$.

Cek dengan dot product:

$$1.\ C(A^T) \perp N(A): \underbrace{(A^T y)^T}_{\text{Sembarang komponen row space}} \underbrace{x}_{\text{Sembarang komponen nullspace}} = y^T \underbrace{(Ax)}_{0} = 0.$$

$$2.\ C(A) \perp N(A^T): \underbrace{(Ax)^T}_{\text{Sembarang komponen column space}} \underbrace{y}_{\text{Sembarang komponen left nullspce}} = x^T \underbrace{(A^T y)}_{0} = 0.$$



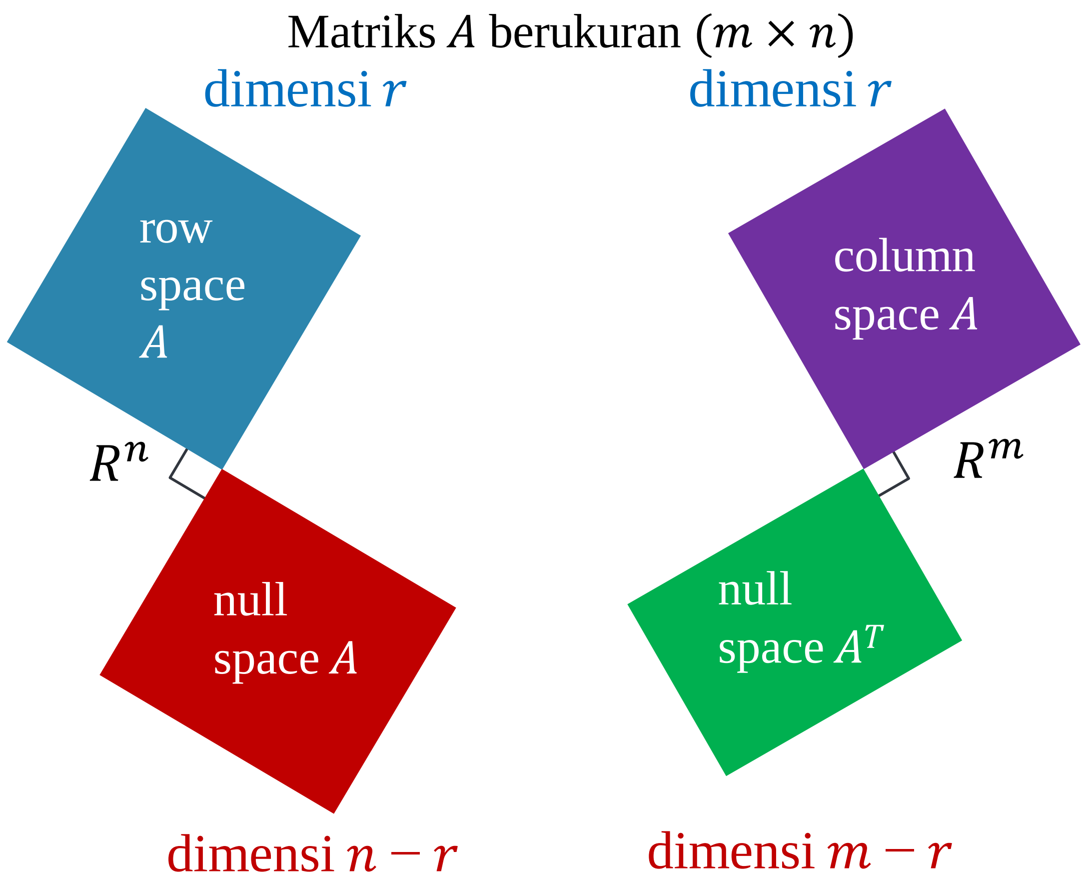
Orthogonal Complements

UNIVERSITAS GADJAH MADA

Definisi: Orthogonal complement dari subspace V, yaitu subspace $V^{\perp}$,memiliki semua vektor yang tegak lurus terhadap subspace V.

Fundamental subspace tidak hanya tegak lurus, tapi juga memiliki dimensi yang pas.

1. Row space $C(A^T)$ adalah orthogonal complement dari nullspace $N(A)$.
2. Column space $C(A)$ adalah orthogonal complement dari left nullspace $N(A^T)$.



Orthogonal Complements

- Setiap vektor x di ruang R^n selalu dapat dipecah menjadi penjumlahan 1 vektor komponen **row space** (x_r) dan 1 vektor komponen **nullspace** (x_n):

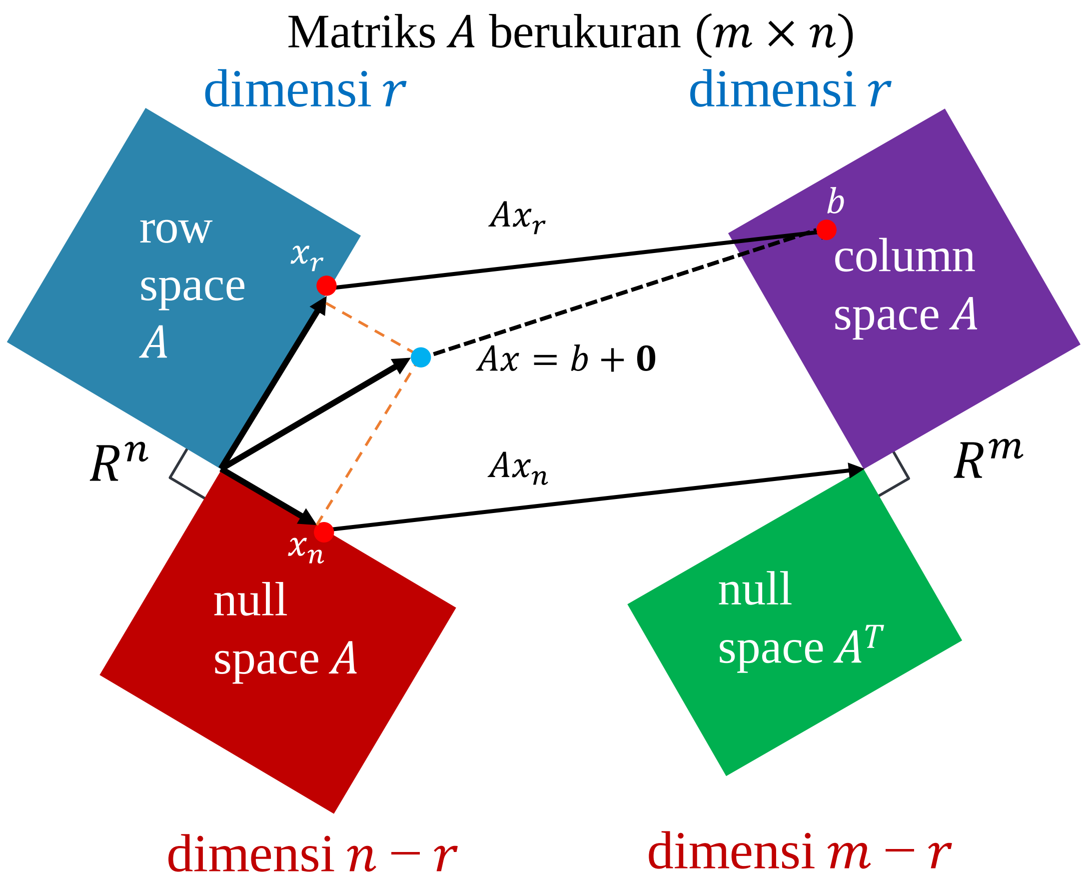
$$x = x_r + x_n.$$

- Persamaan matriks $Ax = b$:

  ✓ $A(x_r + x_n) = b$

  ✓ $Ax_r = b$ dan $Ax_n = 0$

Nilai b hanya dihasilkan oleh vektor x_r yang unik.



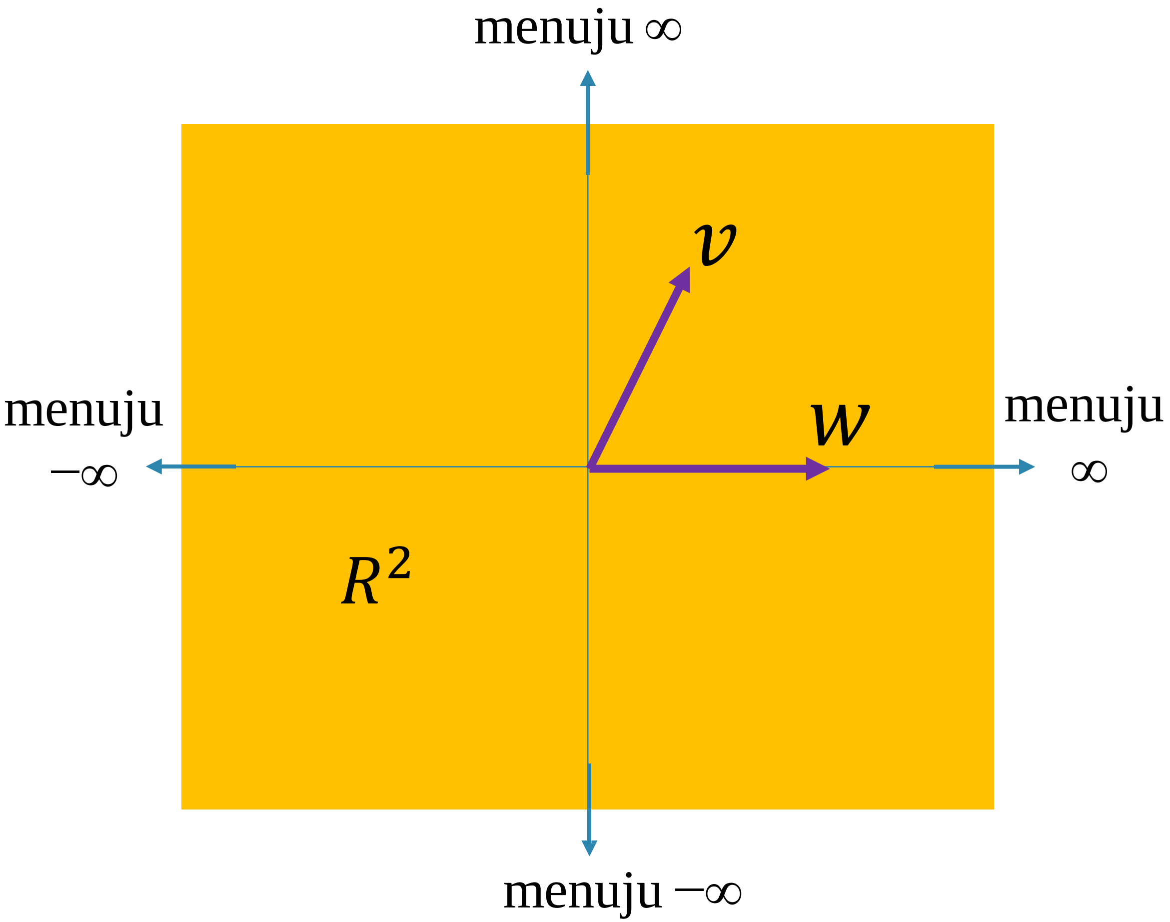
Subspace sebagai Kombinasi Basis

Apa itu basis?

Sekumpulan vektor dengan 2 properti (sifat):

1. **Linearly independent**.
2. They **span a space** (semua kombinasi linear vektor mengisi suatu ruang).

- Sekumpulan p vektor basis akan *span* ruang (*space*) berdimensi p.
- Sekumpulan n vektor basis di R^n akan *span* ruang R^n.



Vektor v dan w *span* ruang R^2 (semua bidang kuning).
Semua kombinasi linear vektor v dan w
mengisi seluruh ruang R^2.

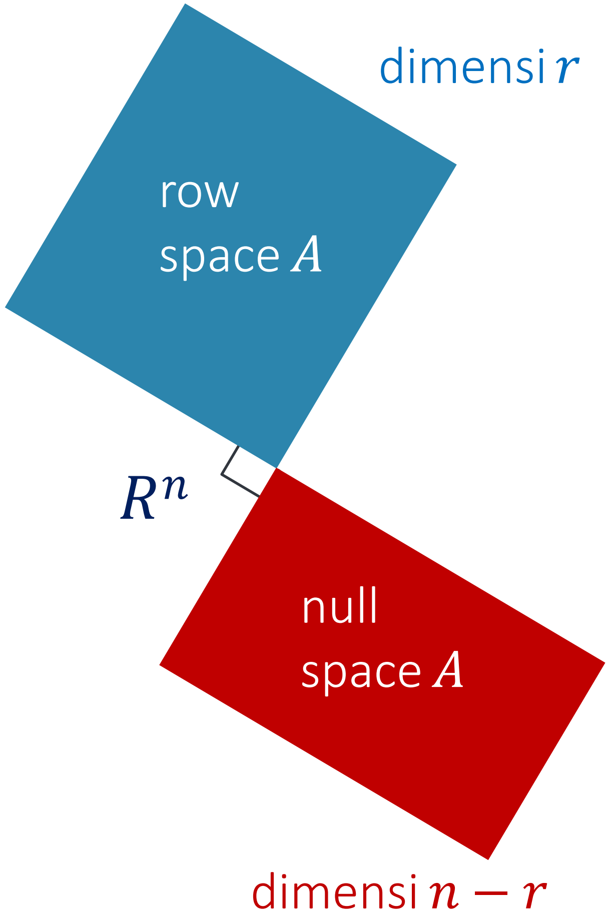
Subspace sebagai Kombinasi Basis

Basis Row Space dan Nullspace

- Vektor-vektor basis row space berjumlah r.
- Vektor-vektor basis nullspace berjumlah $n - r$.
- Vektor-vektor basis row space dan null space berjumlah $r + (n - r) = n$.

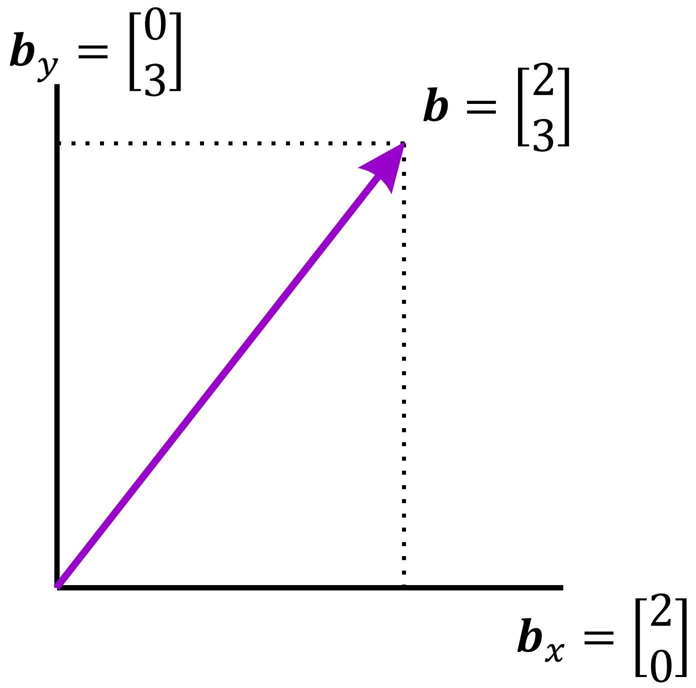
Vektor-vektor basis row space dan nullspace *span* R^n.

Implikasi: Setiap vektor di ruang R^n selalu dapat disusun dari 1 vektor komponen row space dan 1 vektor komponen nullspace.



Projection of a Vector

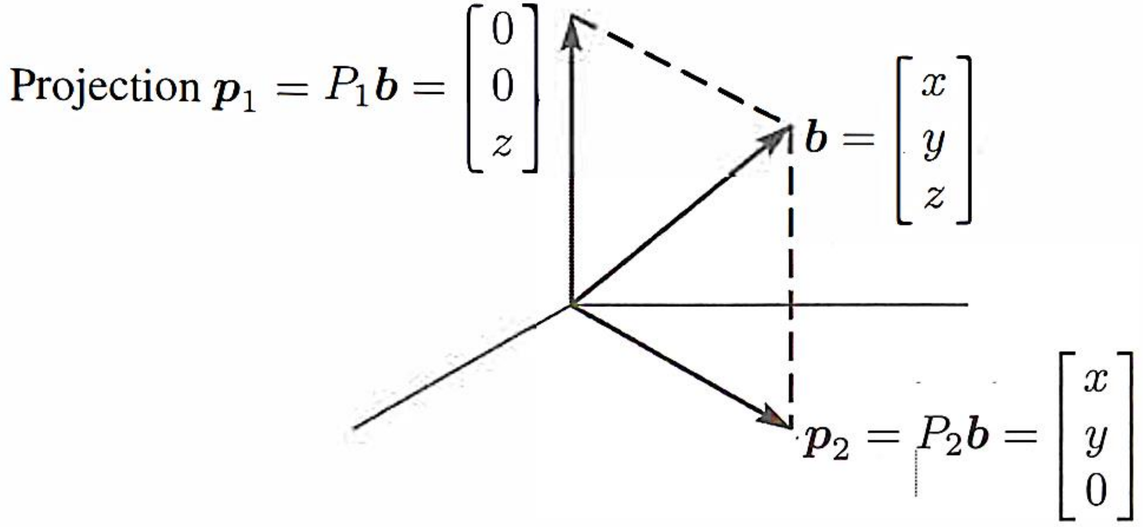
Misalkan kita punya vektor $\boldsymbol{b}$ yang berada pada R^2 yang dapat kita tulis sebagai $\boldsymbol{b} = (2,3)^T$. Kita ingin memecah vektor $\boldsymbol{b}$ ke sumbu x dan sumbu y. Sehingga dapat kita tulis sebagai $\boldsymbol{b}_x = (2,0)^T$ dan $\boldsymbol{b}_y = (0,3)^T$.



Kita juga dapat menuliskan $\boldsymbol{b}_x$ dan $\boldsymbol{b}_y$ dengan menggunakan matriks proyeksi P_x dan P_y.

$$\boldsymbol{b}_x = P_x \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{b}_y = P_y \boldsymbol{b}$$

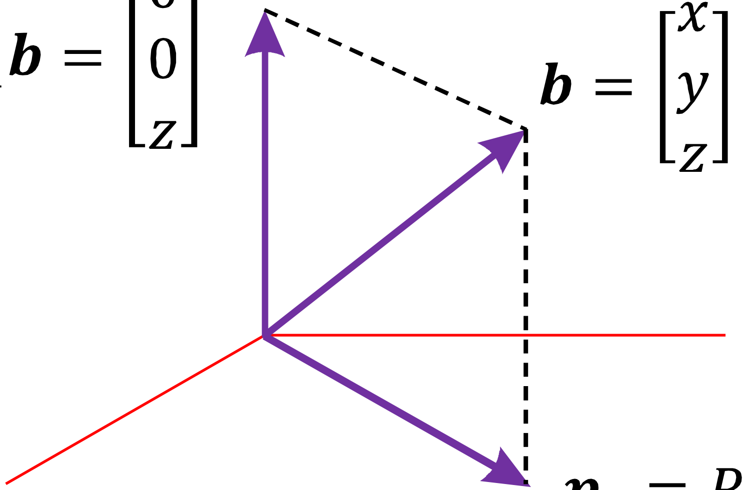
Projection of a Vector



- Matriks P_1 dan P_2 disebut juga sebagai matriks proyeksi. Matriks tersebut memproyeksikan vektor b ke p_1 dan p_2.
- Gambar di atas memperlihatkan kita contoh proyeksi vektor b yang berada pada ruang R^3 ke bidang xy dan sumbu z.

Projection of a Vector

$$\boldsymbol{p}_1 = P_1\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix}$$



$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{p}_2 = P_2\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Question: Apa yang terjadi jika vektor $\boldsymbol{p}_1$ dan $\boldsymbol{p}_2$ diproyeksikan sekali lagi?

Projection of a Vector

Question: Apa yang terjadi jika vektor $\boldsymbol{p}_1$ dan $\boldsymbol{p}_2$ diproyeksikan sekali lagi?

Kita Tahu bahwa :

$$\boldsymbol{p}_1 = P_1\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{p}_2 = P_2\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \qquad P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

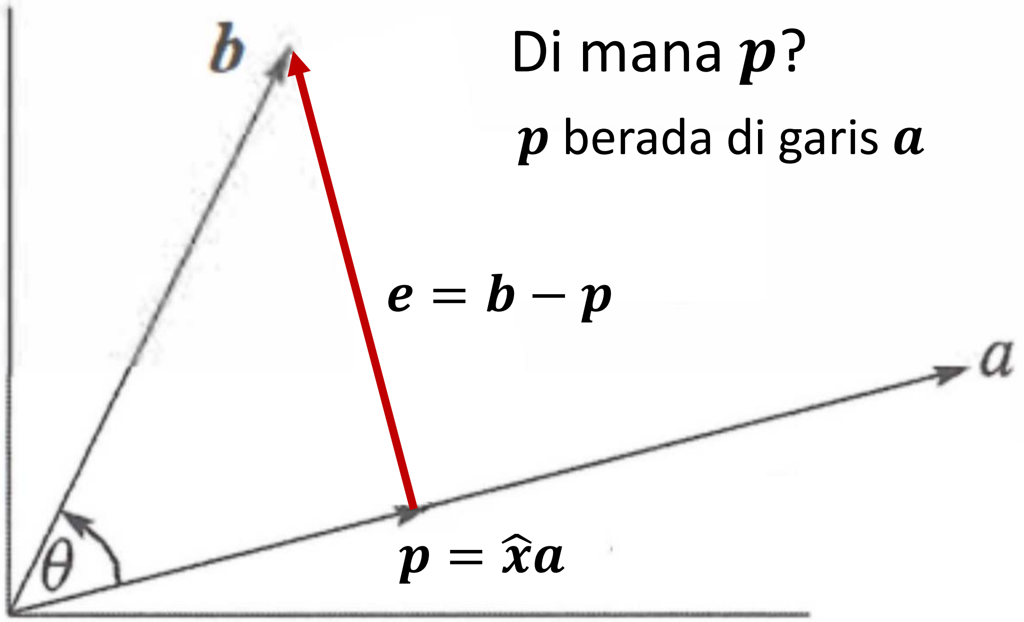
$$\boldsymbol{p}_1' = P_1\boldsymbol{p}_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{b} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{p}_2' = P_2\boldsymbol{p}_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{b} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{b}$$

Sehingga berapa kalipun P dikalikan dengan dirinya sendiri hasilnya tetap P

$$P^n = P$$

Proyeksi Vektor ke Garis



Di mana $\boldsymbol{p}$?

$\boldsymbol{p}$ berada di garis $\boldsymbol{a}$

Berapa nilai $\hat{\boldsymbol{x}}$? →

Error $\boldsymbol{e}$ minimum ketika $\boldsymbol{e} \perp \boldsymbol{a}$:

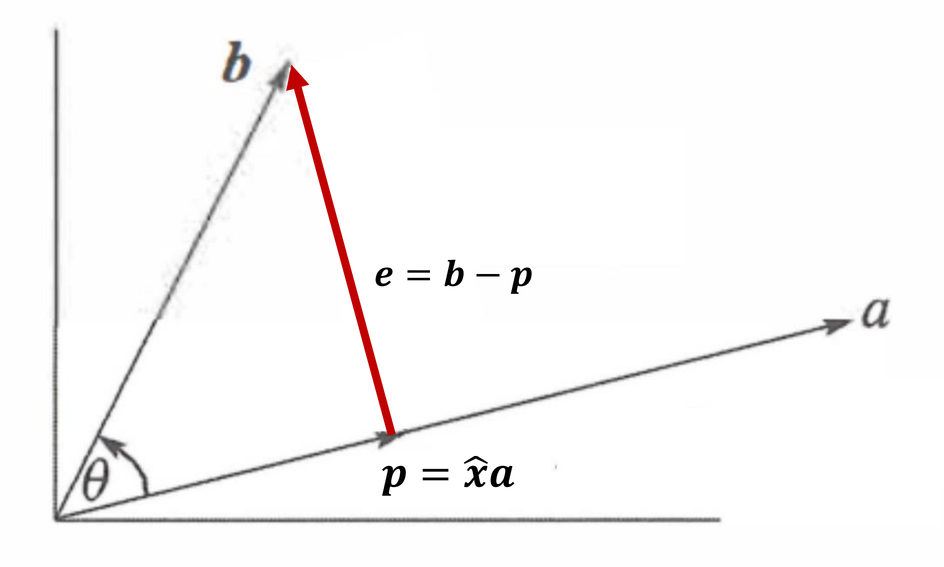
$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{e} &= 0 \\ \boldsymbol{a}^T(\boldsymbol{b} - \hat{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{a}) &= 0 \\ \boldsymbol{a}^T b - \boldsymbol{a}^T\hat{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{a} &= 0 \\ \hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}) &= \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b} \\ \hat{\boldsymbol{x}} &= \frac{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}} \end{aligned}$$

Q : Bagaimana memproyeksikan sembarang vektor $\boldsymbol{b}$ ke vektor $\boldsymbol{a}$?

$$\boldsymbol{p} = \hat{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a}\frac{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}} \quad \text{.... Pers. (1)}$$

Proyeksi Vektor ke Garis



Q : Bagaimana memproyeksikan sembarang vektor $\boldsymbol{b}$ ke vektor $\boldsymbol{a}$?

A : Menggunakan matriks $P \rightarrow \boldsymbol{p} = P\boldsymbol{b}$ … Pers. (2)

Kita tahu :

$$\boldsymbol{p} = \hat{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a}\frac{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}} \text{ …. Pers. (1)}$$

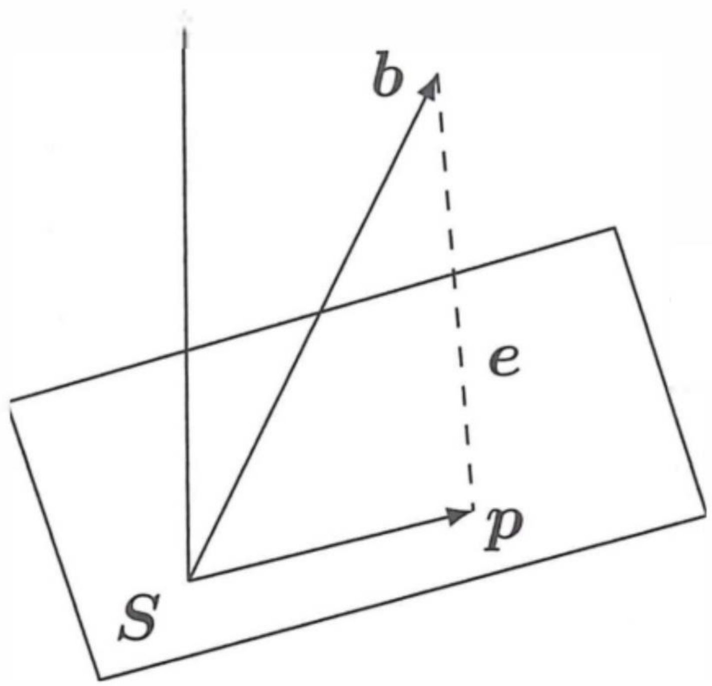
Pers. (2) dapat diperoleh dengan menggeser sedikit pers.(1) menjadi :

$$\boldsymbol{p} = \frac{\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{a}^T}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} \rightarrow P\boldsymbol{b}$$

Sehingga diperoleh $P = \dfrac{\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{a}^T}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}}$

Proyeksi Vektor ke Bidang

UNIVERSITAS GADJAH MADA



Q : Bagaimana cara memproyeksikan vector b ke bidang S???

A : ke suatu titik terdekat yang tegak lurus, in this case, titik yang dituju oleh vector **p** adalah titik yang dimaksud

Bidang S (2 dimension) merupakan kombinasi vektor $\boldsymbol{a_1}$ dan $\boldsymbol{a_2}$ sehingga $\boldsymbol{p}$ merupakan kombinasi vektor $\boldsymbol{a_1}$ dan $\boldsymbol{a_2}$

$$\boldsymbol{p} = \widehat{x_1}\boldsymbol{a_1} + \widehat{x_2}\boldsymbol{a_2} = [\boldsymbol{a_1} \quad \boldsymbol{a_2}]\begin{bmatrix}\widehat{x_1}\\ \widehat{x_2}\end{bmatrix} = A\widehat{\boldsymbol{x}}$$

$\boldsymbol{e} \perp bidang\ S \rightarrow$

$$A^T\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0}$$
$$A^T(b - A\widehat{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{0}$$
$$A^T\boldsymbol{b} - A^TA\widehat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}$$
$$A^TA\widehat{\boldsymbol{x}} = A^T\boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{p}$$
$$= \boldsymbol{b} - A\widehat{\boldsymbol{x}}$$

$$\boxed{\widehat{\boldsymbol{x}} = (A^TA)^{-1}A^T\boldsymbol{b} \ldots \text{Pers. (1)}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{p} = A\widehat{\boldsymbol{x}} = A(A^TA)^{-1}A^T\boldsymbol{b} \ldots \text{Pers. (2)}}$$

Proyeksi Vektor ke Bidang

$$\hat{\boldsymbol{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \boldsymbol{b} \text{ ... Pers. (1)}$$

$$\boldsymbol{p} = A\hat{\boldsymbol{x}} = \underbrace{A(A^T A)^{-1} A^T}_{P} \boldsymbol{b} \text{...Pers. (2)}$$

$$\boldsymbol{p} = P \quad \boldsymbol{b}$$

Sehingga Matriks proyeksi $P = A(A^T A)^{-1} A^T$

Sifat-sifat matriks P:

- Simetris $P^T = P$
- $rank(P) = n$
- $P^2 = P$

Ingat !!

$$P \neq I$$

$$P = A(A^T A)^{-1} A^T$$

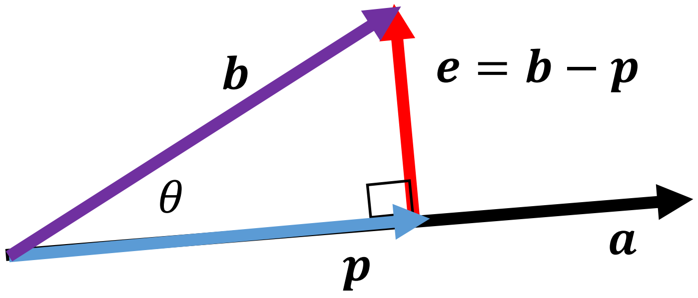
$$P = AA^{-1}(A^T)^{-1} A^T \neq \mathrm{I}$$

Karena A bukan square matrix.

Tetapi hasilnya, yaitu P, adalah square matrix

Summary untuk Proyeksi

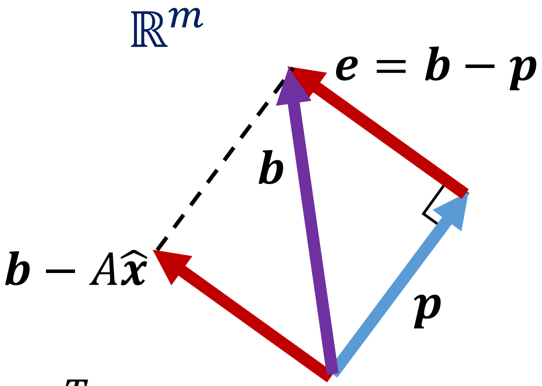
Proyeksi ke Garis



1. Konstanta $\widehat{\boldsymbol{x}} = \dfrac{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}}$
2. Vektor $\boldsymbol{p} = \widehat{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\dfrac{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}}$
3. Matriks proyeksi $P = \dfrac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}}$
4. Panjang vektor $\|\boldsymbol{p}\| = \|\boldsymbol{b}\| \cos\theta$

(Pakai Pythagoras)

Proyeksi ke Subspace



column space A

dimensi r

nullspace A^T

dimensi $m - r$

1. Vektor $\widehat{\boldsymbol{x}} = (A^TA)^{-1}A^T\boldsymbol{b}$
2. Vektor $\boldsymbol{p} = A\widehat{\boldsymbol{x}} = A(A^TA)^{-1}A^T\boldsymbol{b}$
3. Matriks proyeksi $P = A(A^TA)^{-1}A^T$

Least-Square Approximation and Orthonormal Bases

Least-Square Approximation

Idea : mengaproksimasi solusi apabila Ax=b gapunya solusi

Karena solusi $x = (x_1, x_2)$ tidak ada, maka yang akan dicari adalah $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ dengan bantuan konsep proyeksi.

Sehingga error vector yang awalnya $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{p}$ menjadi $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A\hat{x}}$
Tujuan yang ingin dicapai masih sama, yaitu e sekecil mungkin.

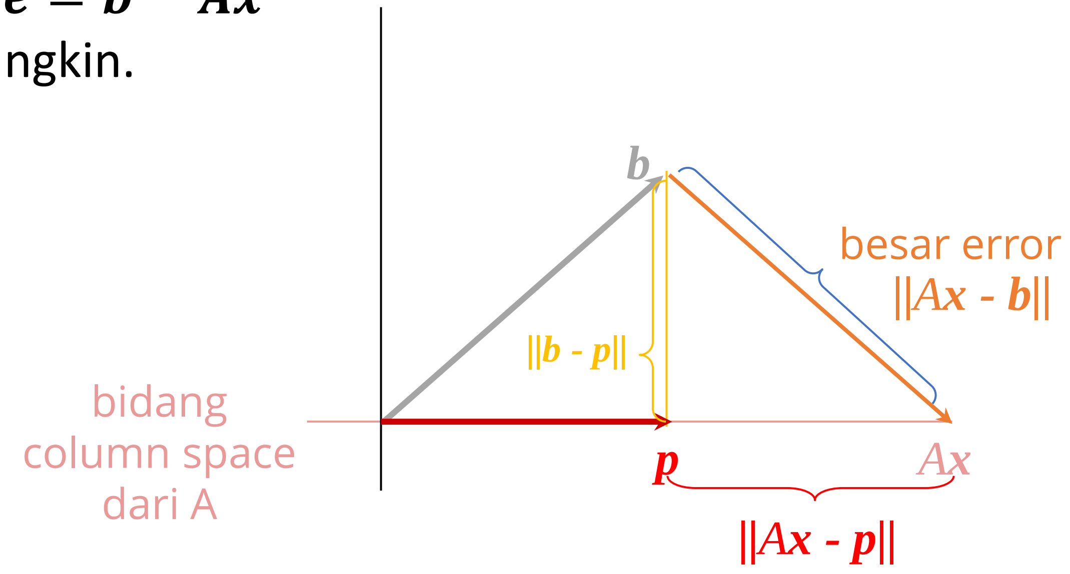
Dari konsep proyeksi, kita tahu rumus mencari $\hat{x}$ adalah

$$\boldsymbol{\hat{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \boldsymbol{b}$$

LSA meminimalisir sum of square error dimana

$$SSE = \boldsymbol{e}_1^2 + \boldsymbol{e}_2^2 + \boldsymbol{e}_3^2 + \cdots + \boldsymbol{e}_n^2 = \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{e} = \|\boldsymbol{e}\|^2$$

$$\text{Sehingga } \|\boldsymbol{e}\|^2 = \|b - A\hat{x}\|^2$$



Aplikasi dari Least-Square Approximation

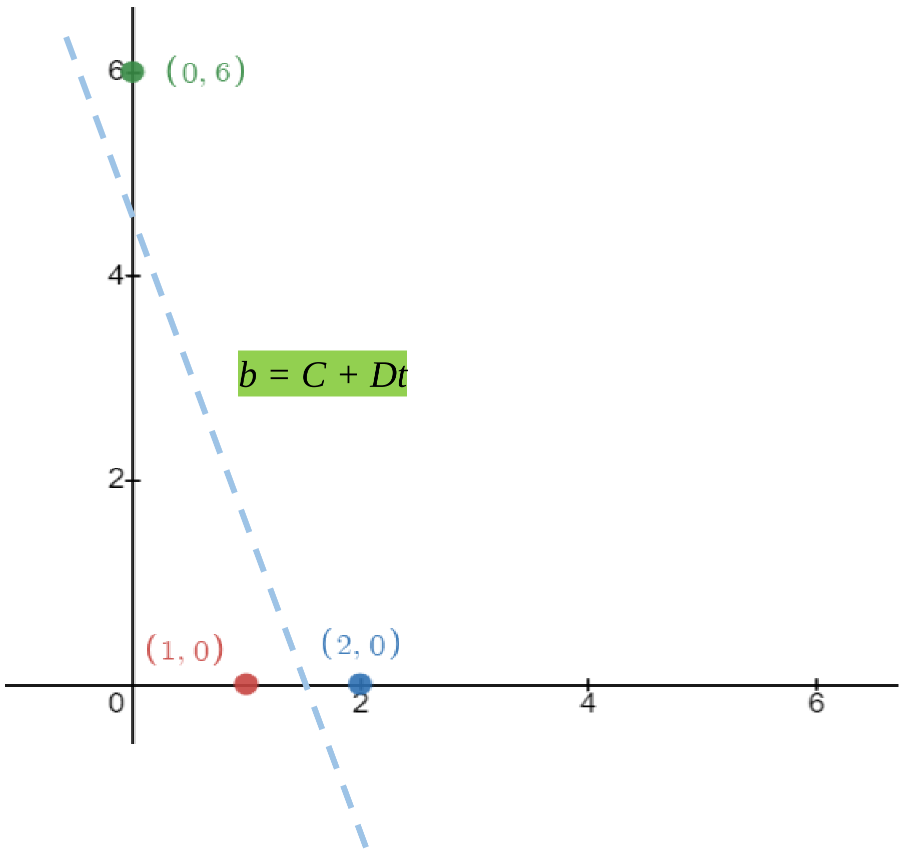
Contoh : mencari best fit line (a.k.a Linear Regression)

Misalkan ada 3 titik yang terletak pada (0,6), (1,0), dan (2,0).

- Tidak ada garis lurus yang bisa mengakomodasi ketiga titik
- Setiap titik memberikan informasi tertentu terkait tren dan tidak bisa di-*discard* begitu saja

Cari sebuah garis $b = C + Dt$ **yang paling mendekati** semua titik tersebut !.

(C dan D adalah konstanta)



Aplikasi dari Least-Square Approximation

Didapatkan persamaan sbb :

$$C + D \cdot 0 = 6$$

$$C + D \cdot 1 = 0$$

$$C + D \cdot 2 = 0$$

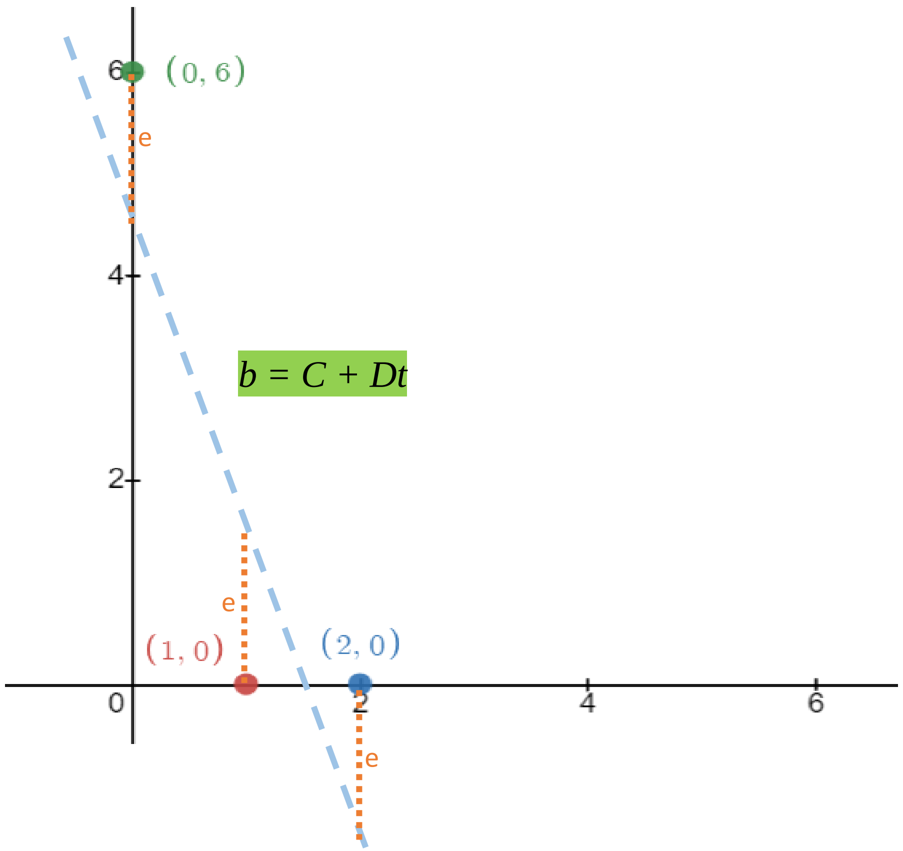
Persamaan bisa diubah dalam bentuk matriks menjadi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Selesaikan dengan menggunakan

$$A^T A\hat{x} = A^T b$$

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$$



Aplikasi dari Least-Square Approximation

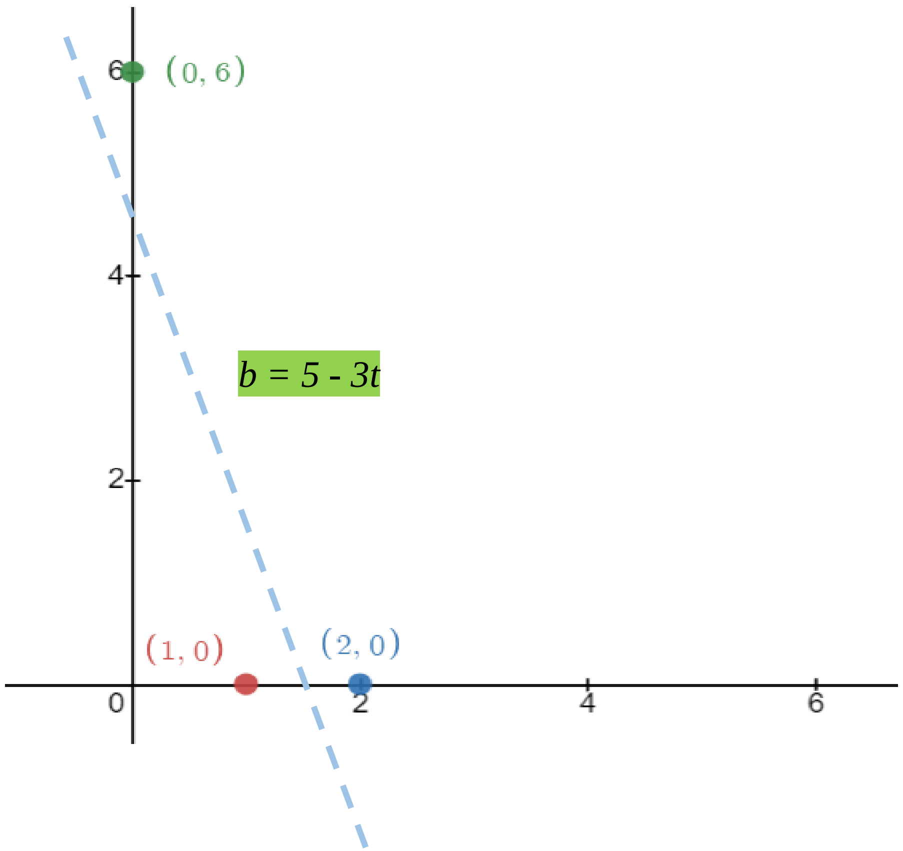
Diketahui : $\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$, kemudian masukkan matriks A dan b

$$\hat{x} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5/6 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}}_{(A^T A)^{-1}}\underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}}_{A^T b}$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Sehingga didapatkan bahwa garisnya adalah b=5-3t



Orthogonal Matrices

- Orthonormal basis $q_1, \ldots, q_n$
- Orthonormal matrix Q
- Gram-Schimidt $A \rightarrow Q$

Sebelumnya kita sudah mempelajari orthogonal vector, orthogonal subscape seperti nullspace dan rowspace, dan sekarang kita mempelajari orthogonal basis dan orthogonal matrix.

Pada umumnya, ketika kita menjumpai kata Q disebut sebagai orthogonal matrix artinya Q berbentuk square matrix. Orthonormal vectors ditulis sebagai,

$$\boxed{q_i^T q_j = \begin{cases} 0 \; if \; i \neq j \\ 1 \; if \; i = j \end{cases}}$$

Orthogonal Matrices

Kita bisa menuliskan orthonormal matriks Q sebagai,

$$Q = [\boldsymbol{q}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{q}_n]$$

Sesuai dengan persamaan sebelumnya, $\boxed{Q^T Q = I}$

$$\boxed{Q^T Q = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_1^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{q}_n^T \end{bmatrix} [\boldsymbol{q}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{q}_n] = I}$$

Apabila Q is square then $Q^T Q = I$ tells us that $Q^T = Q^{-1}$.

Orthogonal Matrices

Example 1:

Permutation $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Apabila $Q^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Apabila kita lakukan $Q^T Q = Q^{-1} Q = I$.

Example 2:

Apabila kita punya $Q = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, maka $Q^T = Q^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

Dimana jika lakukan operasi $Q^T Q = Q^{-1} Q = I$.

Example 3:

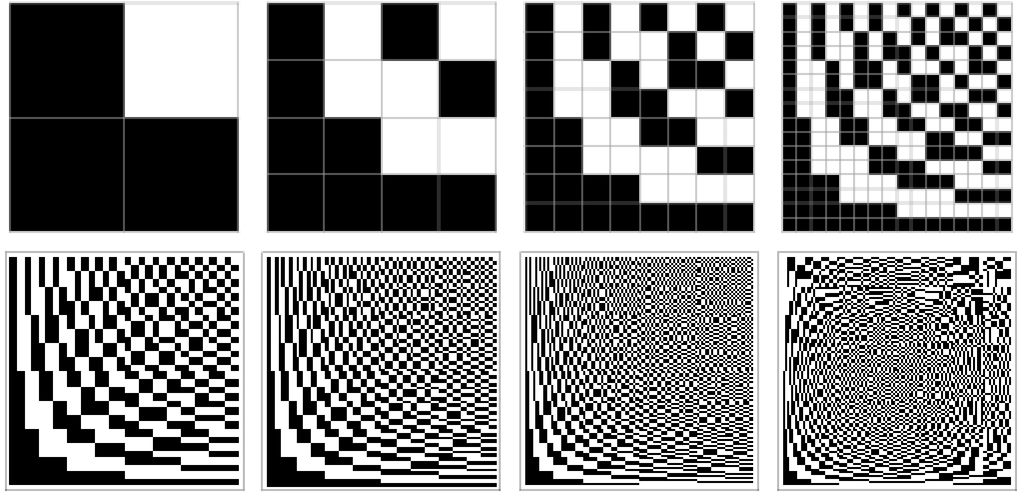
Kita punya $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. *Apakah matriks Q sudah termasuk matriks orthogonal?*

Jawabannya belum. Kita harus mengalikan Q dengan $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$ agar orthogonal.

Orthogonal Matrices

Example 4:

Jika kita punya matriks $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Berapa nilai c agar masing-masing menjadi unit vector? Jawabannya $c = 1/2$. Matriks Q ini merupakan salah satu contoh orthogonal matrix yang disebut juga sebagai **Hadamart Matrix**.



Source: https://mathworld.wolfram.com/HadamardMatrix.html

Orthogonal Matrices

Question: Apa yang bagus ketika kita memiliki orthogonal matrix?

Q has orthonormal columns

Project into its column space

$$P = Q(Q^TQ)^{-1}Q^T = QQ^T$$

Apa yang terjadi pada projection matrix ketika Q adalah square matrix? P adalah identity matrix.

Sebelumnya untuk mencari proyeksi kita punya persamaan $A^TA\hat{\boldsymbol{x}} = A^T\boldsymbol{b}$. Akan tetapi sekarang kita ganti A menjadi Q, sehingga kita punya $Q^TQ\hat{\boldsymbol{x}} = Q^T\boldsymbol{b}$ menjadi $\hat{\boldsymbol{x}} = Q^Tb$. Artinya, $\hat{x}_i = \boldsymbol{q}_i^T\boldsymbol{b}$.

UNIVERSITAS GADJAH MADA

Soal dan Pembahasan
(Silahkan masuk di kelas paralel)

Silahkan **membuat resume soal dan pembahasan** saat di kelas kecil sebagai tugas yang disubmit untuk **bukti presensi Tutorial TVM Week-7**.

Soal 1

Given a linear equation $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a. Is there a solution for the equation? Explain and give a reason!

b. Find $\widehat{\boldsymbol{b}} \in C(\boldsymbol{A})$ (column space of $\boldsymbol{A}$), that minimize $\left\|\boldsymbol{b} - \widehat{\boldsymbol{b}}\right\|$.

c. Let's asume that $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{b} - \widehat{\boldsymbol{b}}$. Explain the relation between $\boldsymbol{\xi}$ and $C(\boldsymbol{A})$!

Soal 1

Given a linear equation $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a. Is there a solution for the equation? Explain and give a reason!

Jawab:

Jika kita lakukan eliminasi terhadap matriks $\boldsymbol{A}$ dan vektor $\boldsymbol{b}$,

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Jika ada solusi seharusnya saat baris ke-3 matriks $\boldsymbol{A}$ bernilai nol, maka baris ke-3 vektor $\boldsymbol{b}$ juga bernilai nol. Akan tetapi pada baris ke-3 vektor $\boldsymbol{b}$ bernilai -3. Sehingga tidak ada solusi $\boldsymbol{x}$ untuk persamaan linear di atas.

Soal 1

Given a linear equation $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b. Find $\hat{\boldsymbol{b}} \in C(\boldsymbol{A})$ (column space of $\boldsymbol{A}$), that minimize $\|\boldsymbol{b} - \hat{\boldsymbol{b}}\|$.

Jawab:

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}}$$

Bagian ini sama dengan $\hat{x}$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 14 \end{pmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 14 & -8 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\boldsymbol{b}} = \mathrm{A}(A^T A)^{-1} A^T b = A \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 14 & -8 \\ -8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 1{,}6 \\ 4{,}0 \end{pmatrix}$$

Soal 1

Given a linear equation $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

c. Let’s asume that $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{b} - \widehat{\boldsymbol{b}}$. Explain the relation between $\boldsymbol{\xi}$ and $C(\boldsymbol{A})$!

Jawab:

Jika kita perhatikan,

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 1{,}6 \\ 4{,}0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}2 \\ -0{,}6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Merupakan left-nullspace matriks $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{\xi} = N(A^T)$. Sehingga $\boldsymbol{\xi} \perp C(\boldsymbol{A})$.

Soal 2 (Orthogonality – Orthonormal)

(a) Show $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ is a basis for $\mathbb{R}^3$.

How to : gunakan rref untuk mengecek apakah semua vector tersebut merupakan basis atau tidak

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{rref} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Since the rref of this matrix is the identity matrix, we conclude that the original set of vectors is a basis for $\mathbb{R}^3$.

Soal 2 (Orthogonality – Orthonormal)

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(b) Explain why this is not an orthonormal basis for $\mathbb{R}^3$.

This is not an orthonormal basis because (1) the vectors are not pairwise orthogonal (the second and third are not orthogonal), and (2) the vectors do not all have magnitude 1.

$v_1.v_2 = 0 \rightarrow orthogonal$

$v_1.v_3 = 0 \rightarrow orthogonal$

$v_2.v_3 = 1 \rightarrow tidak\ orthogonal$

$\|v_1\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

$\|v_2\| = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$

$\|v_3\| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$

Soal 2 (Orthogonality – Orthonormal)

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(c) Using the Gram-Schmidt process, transform this basis into an orthonormal basis for $\mathbb{R}^3$.

$$\overrightarrow{w_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{w_2} &= \overrightarrow{v_2} - \frac{\overrightarrow{w_1} \cdot \overrightarrow{v_2}}{\overrightarrow{w_1} \cdot \overrightarrow{w_1}} \overline{u} \\ &= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{0}{3} \overline{u} \\ &= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{w_3} &= \overrightarrow{v_3} - \frac{\overrightarrow{w_1} \cdot \overrightarrow{v_3}}{\overrightarrow{w_1} \cdot \overrightarrow{w_1}} \overrightarrow{w_1} - \frac{\overrightarrow{w_2} \cdot \overrightarrow{v_3}}{\overrightarrow{w_2} \cdot \overrightarrow{w_2}} \overrightarrow{w_2} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

An orthogonal basis is

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \right\}$$

Normalizing, we find the orthonormal basis

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{6}}} \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \right\}$$

Orthonormal bases = orthogonal bases/magnitude

Link Presensi

https://forms.gle/MXXvhEP3PfqUWu698

Terima kasih banyak atas partisipasinya di kelas Tutorial TVM. Semoga teman-teman sukses menjalani UAS dan mendapatkan nilai terbaik + tidak ngulang TVM !

Terima kasih