Tutorial TVM #6

Sabtu, 27 November 2021

Materi hari ini:

1. Independence
2. Basis
3. Dimension
4. Dimension of four fundamental subspaces

01

INDEPENDENCE

Linear Independent

- Satu kelompok dari vektor $v1, \ldots, vn$ dikatakan Linearly Independent jika dan hanya jika linear kombinasi yang menghasilkan vektor nol (0) adalah semua koefisien nol.
  - $\alpha 1\ v1 + \alpha 2\ v2 + \ldots + \alpha 3\ vn = \mathbf{0}$ (1)
  - $0v1 + 0v2 + \ldots + 0vn = \mathbf{0}$ (2)
  - $\alpha 1 = \alpha 2 = \ldots = \alpha n = 0$ (3)
- Syarat agar kelompok vektor $v1, \ldots, vn$ linier Independent apabila persamaan (2) terpenuhi dan satu satunya cara agar terpenuhi adalah jika semua koefisiennya nol (3).

Contoh :

- Vektor $v1 = [1, 0]T$ dan $v2 = [0, 1]T$ adalah independent karena $\alpha 1v1 + \alpha 2v2 = 0$ terjadi hanya pada saat $x1 = x2 = 0$
- Vektor $v1 = [1, 1]T$ and $v2 = [-1, -1]T$ adalah dependent karena $\alpha 1v1 + \alpha 2v2 = 0$ terjadi pada $x1 = x2 = 0$ dan juga pada $x1 = x2 =$ any constant

Linear Independent

- Selain dari konstantanya, kita bisa melihat v1 dan v2 linearly independent secara geografis. Jika vektor segaris, maka vektor tersebut dependent. Contoh :
    - Vektor v1 = [1, 0]T dan v2 = [0, 1]T tidak segaris, melainkan tegak lurus. Maka vektor tersebut linearly independent.
    - Vektor v1 = [1, 1]T and v2 = [−1, −1]T segaris, Maka vektor tersebut Dependent.
- Cara lain untuk menentukan vektor independent atau tidak adalah dengan merubah x1v1 + x2v2 = 0 menjadi Ax = 0. Sehingga matriks A akan nol apabila matriks x = 0. Contoh :

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad Ax = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Ax = 0 dapat juga kita kenali dengan nullspace, maka kita bisa menganalisa vektor independent atau tidak dari nullspace nya.

Linear Independent

- Dalam nullspace, kolom A dikatakan independent apabila nullspace hanya memiliki zero vektor. Contoh:

  - Suppose a matrix
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$
  - To check if the columns are independent
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Dari rref nya kita bisa mengetahui bahwa kolom ketiga adalah free column dan x3 adalah free variable yang menandakan bahwa nullspace memiliki nonzero vektor.

Linear Independent

Kesimpulan :

- Kolom A $\in R$ m×n adalah independent apabila r = n dan juga ketika terdapat n pivot dan tidak terdapat free variable (Full column rank)
- Untuk kolom A $\in R$ m×n
  - Jika m < n, maka set of matriks akan dependent karena memiliki free column
  - Jika m >= n, maka set of matriks bisa dependent atau independent dan dapat dibuktikan dengan eliminasi.

02

BASIS

Basis

Basis suatu vector space adalah **sekumpulan vektor** yang memenuhi 2 kondisi berikut:

1. **Linearly independent**

   Misalkan terdapat 2 vektor: $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

   Kedua vektor tersebut saling *linearly independent* karena linear kombinasi dari kedua vektor tersebut akan menghasilkan vektor nol hanya jika semua koefisiennya adalah 0.

1. **Span the space** $\longrightarrow$ kombinasi linearnya mengisi space tersebut

   Vektor **v1** dan **v2** span ruang dua dimensi R^2.

   Misalkan terdapat vektor $\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, set vektor **v1**, **v2**, dan **v3** juga span ruang dua dimensi R^2.

Basis Vector Space

Basis suatu vector space **tidak unik.**

Contohnya:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ adalah standard basis untuk R^2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$ juga merupakan basis untuk R^2

Basis Vector Space

Basis dari suatu vector space memiliki **jumlah vektor yang sama**.

Contohnya:

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ merupakan basis-basis dari R^2 di mana tiap basis

terdiri atas 2 vektor.

Jadi, jumlah vektor basis bergantung pada space-nya

Basis Vector Space

Misalkan terdapat matriks:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Kolom-kolom dari matriks tersebut saling independent dan juga span ruang tiga dimensi R^3.

Sehingga, kolom-kolom dari matriks **A** tersebut merupakan basis untuk R^3.

Vektor $v_1, \dots, v_n$ merupakan basis untuk $\mathbb{R}^n$ ketika vektor-vektor tersebut merupakan kolom dari sebuah matriks n x n yang invertible.

Basis Vector Space

Misalkan terdapat matriks:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kolom-kolom tersebut bukan merupakan basis untuk tiga dimensi R^3.

Kolom 1 dan kolom 2 merupakan basis dari column space.

03

DIMENSION

Dimensi

Dimensi sebuah space adalah **jumlah vektor pada setiap basis** vector space.

Misalnya:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

yang merupakan basis R^2, jumlah vektornya ada 2 sehingga dimensinya adalah 2.

Dimensi Vector Space

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Basis dari C(A) adalah kolom 1 dan kolom 2 matriks A. Karena jumlah vektor pada basis untuk *column space* tersebut adalah 2 dan berada dalam tiga dimensi, maka dimensi *column space* tersebut adalah 2 atau *two-dimensional subspace* di dalam R^3.

Dimensi

Contoh #2:

Pada suatu vector space M, di mana berisi semua matriks 2x2. Salah satu contoh basisnya adalah:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sehingga dimensi dari M atau dim(M) adalah 4.

04

DIMENSION OF FOUR FUNDAMENTAL SUBSPACES

Definition of Four Fundamental Subspaces

- KIta memiliki matriks $A \in R^{m \times n}$ dengan rank r
- Terdapat empat subspaces pada matriks A, yaitu
  - The Column Space adalah C(A) adalah subspaces dari R^m. ini memenuhi terhadap semua linear kombinasi kolom A i.e. Ax untuk seluruh x.
  - The nullspace adalah N(A) adalah subspaces dari R^n. ini memenuhi terhadap semua solusi x untuk $Ax = 0$.
  - The Row Space adalah $C(A^T)$ adalah subspaces dari R^n. ini memenuhi terhadap semua linear kombinasi baris dari A^T, i.e. $x^T . A$ atau $A^T . x$
  - The nullspace adalah $N(A^T)$ atau bisa disebut left nullspace adalah subspaces dari R^m. ini memenuhi semua solusi x untuk $A^T . x = 0$ atau $x^T . A = 0^T$

The Four Subspaces for R

- Consider a Matrix R with m = 3, n = 5, r =2

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Pivot rows : row 1 and 2
- Pivot column : column 1 and 4
- Rank : 2 (two pivots)

A. The Row Space of R

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Row space dari R memiliki dimensi 2 yang sama seperti ranknya yaitu 2
- Row space dari R adalah semua kombinasi linear dari ketiga row matriks R, tetapi row ketiga tidak mengubah apapun karena hanya berisi nol semua.
- Row 1 dan 2 adalah basis
- Pivot rows 1 dan 2 adalah independent
- Secara general untuk rank r matriks, r pivot akan menjadi basis dari row space tersebut
- Maka, row space dari R adalah two dimensional subspace in R^5

B. The Column Space for R

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Column space dari R memiliki **dimensi 2** dan sama dengan rank r nya
- Jumlah rank memberitahu kita dimensi rowspace dan dimesi columnspace
- Pivot coloumn berada pada kolom 1 dan 4 dan menjadi basis dari column space R
- Matriks R independent

C. The Nullspace of R

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Nullspace adalah segala solusi yang memenuhi Rx = 0
- Kita memiliki 3 buah free column n-r = 3 (free column) dan 3 free variable x2, x3, x5
- Untuk menyelesaikan nullspace kita akan menset free variable nya dengan 1 untuk mendapatkan spesial solution dari Rx = 0 sehingga akan ada 3 kemungkinan yaitu [1,0,0], [0,1,0], [0,0,1]
- Pada contoh kita didapatkan spesial solution:

$$s_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad s_3 = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad s_5 = \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- $Rx = 0$ (nullspace) dari matriks diatas adalah $x = c_2s_2 + c_3s_3 + c_5s_5$
- Dimensi dari nullspace adalah 3 karena pada contoh memiliki 3 vektor yang membentuk nullspace
- Dimensi dapat didapatkan juga dengan $n - r = 5 - 2 = 3$. Dimensi dari nullspace juga didapatkan dengan jumlah dari special solution dan juga free variable.

D. Nullspace of R^T or the left nullspace of R

- Nullspace dari R^T adalah seluruh solusi yang memungkinkan dari R^Tx = 0 atau x^T.R = 0^T

- From the example

$$x^T R = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- KIta harus mencari linear kombinasi dari row x^T yang menghasilkan row 0
- Solusinya sangat jelas yaitu x1 = 0, x2 = 0, x3 = is free
- Maka nullspace dari R^T adalah x = [0, 0, x3] = x3[0, 0, 1] untuk sembarang x3
- Sehingga ini merupakan linear kombinasi dari 1 vektor saja yang membuat dimensinya 1 dan berbasis 1.
- Dimensi adalah m - r = 3 - 2 = 1

Four Subspaces of R

Conclusion :

1. In R^n the row space and nullspace have dimension r and n – r;
2. In R^m the column space and left nullspace have dimension r and m – r.

The Four Subspaces for A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Subspace dimensi A sama seperti Subspace dimensi R

The Row Space of A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

- Row space A adalah semua linear kombinasi dari row A
- Untuk mengubah A menjadi R kita perlu mengoprasikan row menggunakan gauss elemination row sehingga rowspace A dan R tidak berubah. EA = R

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 1 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

The Row Space of A

- Proses eleminasi mengubah rows tetapi tidak mengubah row spaces
- Kita lihat kembali pada proses row operation EA = R. Semua Row dari R merupakan linear kombinasi dari A sehingga row space A dan row space R adalah sama

Column Space of A

- Column space memiliki dimensi r dan column rank sama dengan row rank
- Column yang dependent atau independent di A akan sama juga di R, namun C(A) tidak sama dengan C(R)
- r pivot column dari A adalah basis pada column space C(A)
- r pivot column dari R adalah basis pada column space C(R)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 1 & 9 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nullspace of A

- A memiliki nullspace yang sama dengan R, dan memiliki dimensi yang sama juga yaitu n-r dan memiliki basis yang sama juga
- Spesial solution adalah basis dari nullspace
- Terdapat n-r free variable yang membuat dimensi nullspace adalah n-r
- (dimension of column space) + (dimension of nullspace) = r + (n − r)=dimension of R^n

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = Rx = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nullspace of A^T

- Left Nullspace dari A (nullspace dari A^T) memiliki m-r dimensi
- Jika EA = R, maka row ketiga menjadi solusi dari left nullspace karena membuat XA = 0 dan menjadikan row 3 adalah basis dari left nullspace A

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 1 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

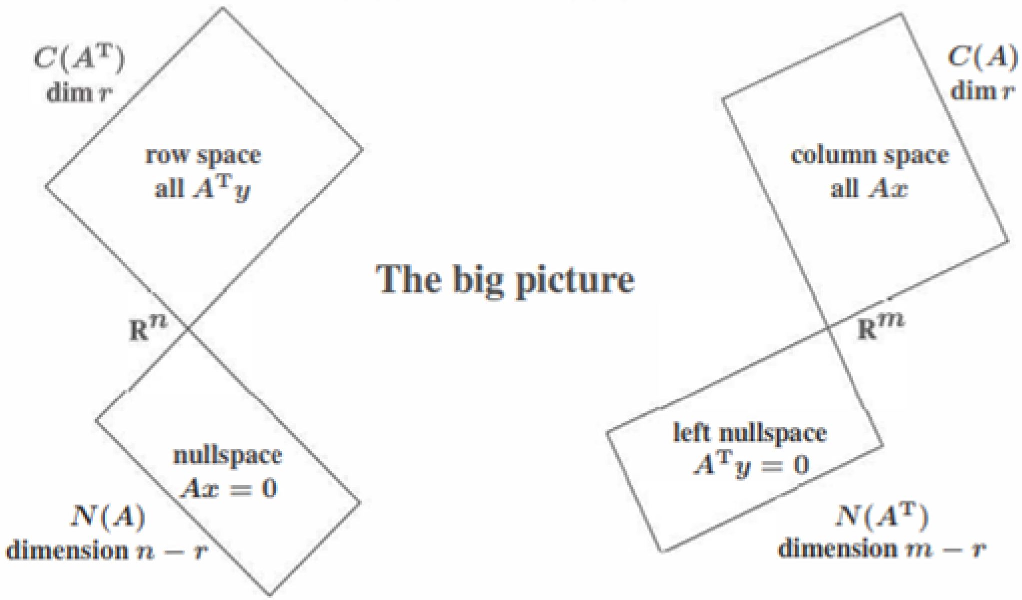
- Nullspace A^T tidak sama dengan nullspace R^T
- (dimension of row space) + (dimension of left nullspace) = r + (m − r) dimension of R^m

SUMMARY

- The r pivot rows of R are a basis for the row spaces of R and A (same space). Karena row space A dan R itu sama.
- The r pivot columns of A are a basis for its column space C(A) and The r pivot columns of R are a basis for its column space C(R) tapi C(A) dan C(R) tidak sama karena operasi yang dilakukan adalah terhadap rows, bukan column.
- Then n − r special solutions are a basis for the nullspaces of A and R(same space).
- If EA = R, the last m − r rows of E are a basis for the left nullspace of A
- The column space and row space both have dimension r
- The nullspaces of A and A T have dimensions n − r and m − r

Summary

The dimensions of the Four Fundamental Subspaces (for R and for A)



courtesy of Gilbert Strang

LATIHAN SOAL

Yuk kita ke kelas paralel!

Quiz(is)'s time

1. Masuk ke quizziz.com
2. Isikan kode yang tertampil di layar
3. Tulis **NIU_Nama** untuk masuk sebagai peserta
4. Kalian bisa mulai Kerjakan setelah ada aba-aba dari tutor

*Nb : Pastikan koneksi internet temen-temen lancar yaa atau boleh minta interupsi apabila ada masalah yg kamu alami

Jangan lupa presensi

https://forms.gle/16KSkBhEjtwUrDyD9

PR Tutor TVM 6

Cari basis untuk masing-masing Column space [C(A)], Row space [$C(A^T)$], Null space [N(A)], dan Left Nullspace [$N(A^T)$] atau yang biasa disebut “Four fundamental subspaces” untuk matriks berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

Buktikan bahwa $N(A) \perp C(A^T)$ dan $N(A^T) \perp C(A)$!

(Gambar, penjelasan secara matematis, atau keduanya)