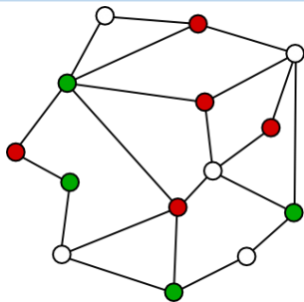


## Modul 9

# Teori Graf

**Sri Suning Kusumawardani**



Departemen Teknik Elektro dan Teknologi Informasi  
Fakultas Teknik – Universitas Gadjah Mada

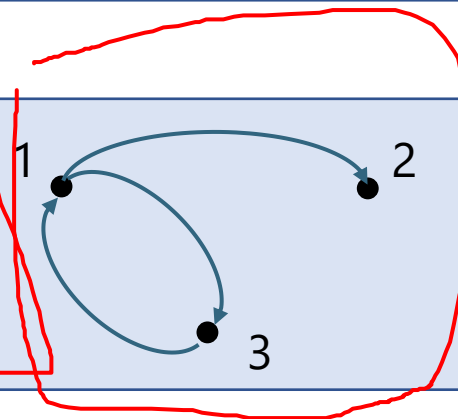
# Graf Berarah dan Tak Berarah

- **Graf Berarah** (*directed graph* atau *digraph*)  $G$  terdiri atas himpunan:
  - titik-titik (*vertices*)  $V_G$  dan
  - garis-garis (*edges*)  $E_G$ 
    - yang masing-masing garis  $e \in E_G$  terhubung dengan suatu pasangan titik **terurut**

Misal:

$$V_G = \{1, 2, 3\}$$

$$E_G = \{(1, 2), (1, 3), (3, 1)\}$$



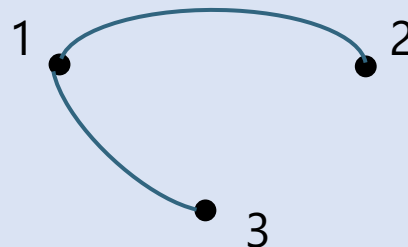
# Graf Berarah dan Tak Berarah

- **Graf Tak Berarah** (*undirected graph*)  $G$  terdiri atas himpunan:
- titik-titik (*vertices*)  $V_G$  dan
- garis-garis (*edges*)  $E_G$ 
  - yang masing-masing garis  $e \in E_G$  terhubung dengan suatu pasangan titik **tak terurut** yang disebut titik ujung (*endpoints*)

Misal:

$$V_G = \{1, 2, 3\}$$

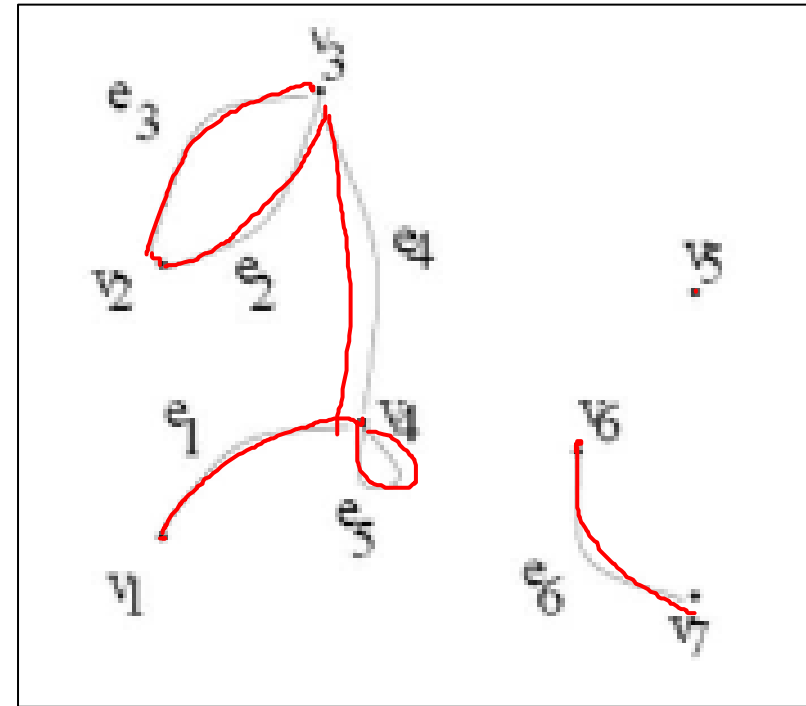
$$E_G = \{(1, 2), (1, 3)\}$$



- Graf dinotasikan dengan  $G = (V_G, E_G)$ . [  $V_G, E_G$  ]
- Dua titik dikatakan **berhubungan** (*adjacent*)
  - jika ada garis (*edge*) yang menghubungkan kedua titik tersebut.
- Dua garis dikatakan **garis paralel** (*parallel*)
  - jika dua garis berbeda tersebut menghubungkan titik yang sama
- Suatu garis dikatakan *loop*
  - jika garis tersebut hanya berhubungan dengan satu titik ujung
- Beberapa titik disebut **titik terasing** (*isolated vertex*)
  - jika titik-titik tersebut tidak memiliki garis yang berhubungan dengannya

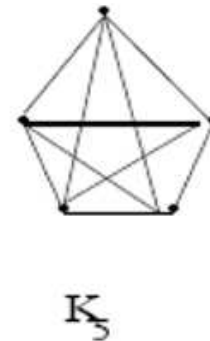
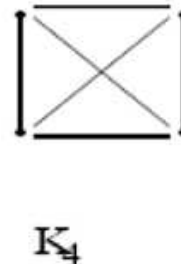
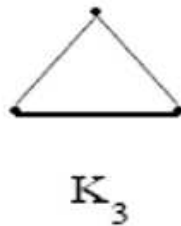
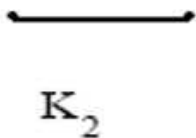
## Contoh Soal

1. Tulislah himpunan  $E(G)$  dan  $V(G)$
2. Carilah titik terasing
3. Carilah loop
4. Carilah garis paralel
5. Carilah titik-titik yang berhubungan dengan  $v_3$
6. Carilah semua garis yang berhubungan dengan  $v_4$



# Graf Sederhana dan Lengkap

- **Graf sederhana (*simple graph*)**
  - Graf yang **tidak memiliki** loop maupun garis paralel
- **Graf lengkap (*complete graph*)** dengan  $n$  titik
  - Dinotasikan dengan  $K_n$
  - Graf sederhana dengan  $n$  titik, yang setiap pasangan titik berbeda dihubungkan dengan suatu garis

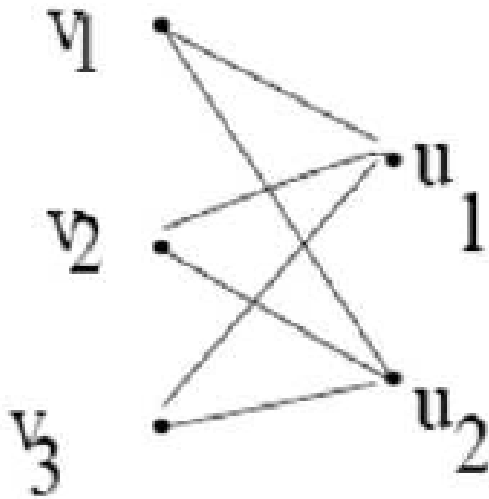


# Graf Bipartite dan Bipartite Lengkap

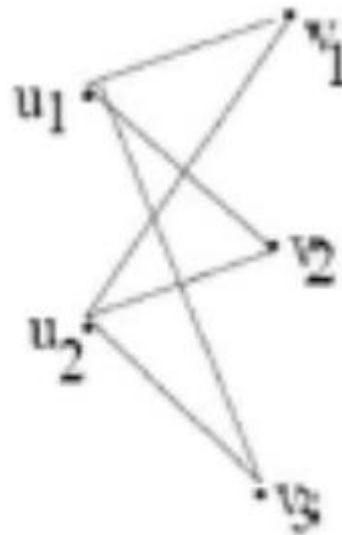
- Suatu graf  $G$  disebut **Graf Bipartite**, apabila:
  - $V(G)$  merupakan gabungan dari himpunan tak kosong  $V_1$  dan  $V_2$
  - Setiap garis dalam  $G$  menghubungkan suatu titik dalam  $V_1$  dengan titik dalam  $V_2$
- Selain kedua syarat di atas, graf  $G$  disebut **Graf Bipartite Lengkap** apabila:
  - Setiap titik dalam  $V_1$  berhubungan dengan setiap titik dalam  $V_2$
  - Kemudian, graf ini dinotasikan dengan  $K_{m,n}$ 
    - $V_1$  terdiri dari  $m$  titik dan  $V_2$  terdiri dari  $n$  titik

## Contoh Soal

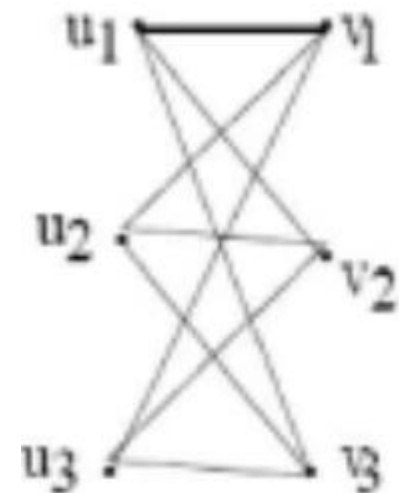
Tentukan apakah graf di bawah ini merupakan graf bipartite atau bukan. Anda dapat mengecek apakah terdapat suatu himpunan  $V_1$  dan  $V_2$  di dalam  $V(G)$  yang memenuhi syarat graf bipartite.



[1]



[2]

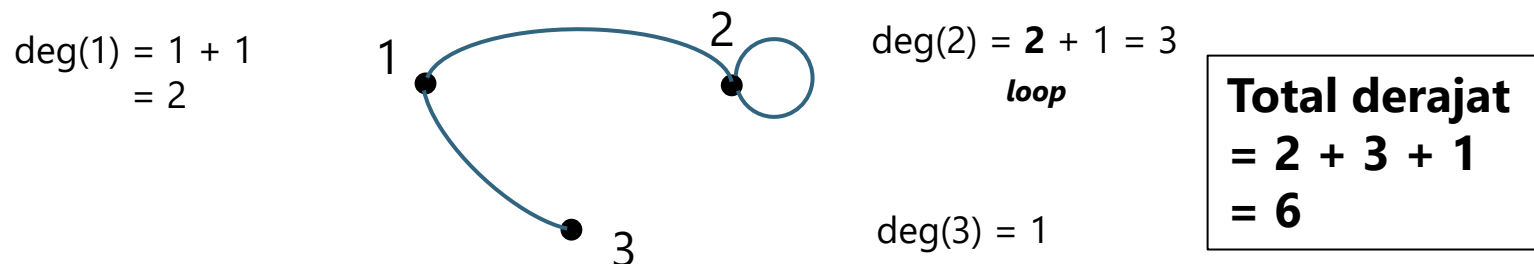


[3]



## Derajat (*Degree*)

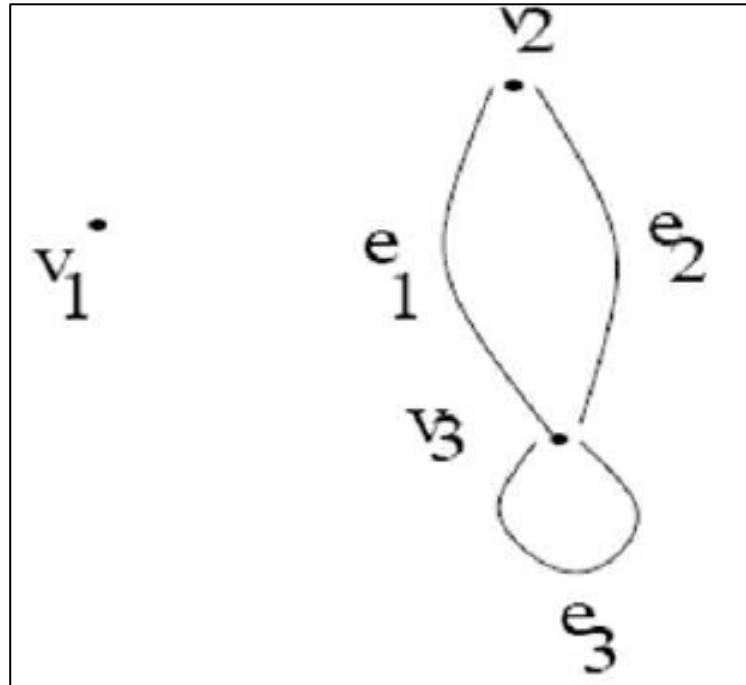
- **Derajat (*degree*)** dari titik  $v$  pada graf tak berarah
  - dinotasikan dengan  **$\deg(v)$**
  - yakni merupakan banyaknya garis yang terhubung pada titik tersebut
  - Garis berupa loop pada suatu titik memiliki derajat 2



- **Derajat total (*total degree*)** dari  $G$  adalah jumlah derajat semua titik dalam  $G$

## Contoh Soal

Tentukan derajat masing-masing titik dalam graf berikut kemudian tentukan derajat totalnya.



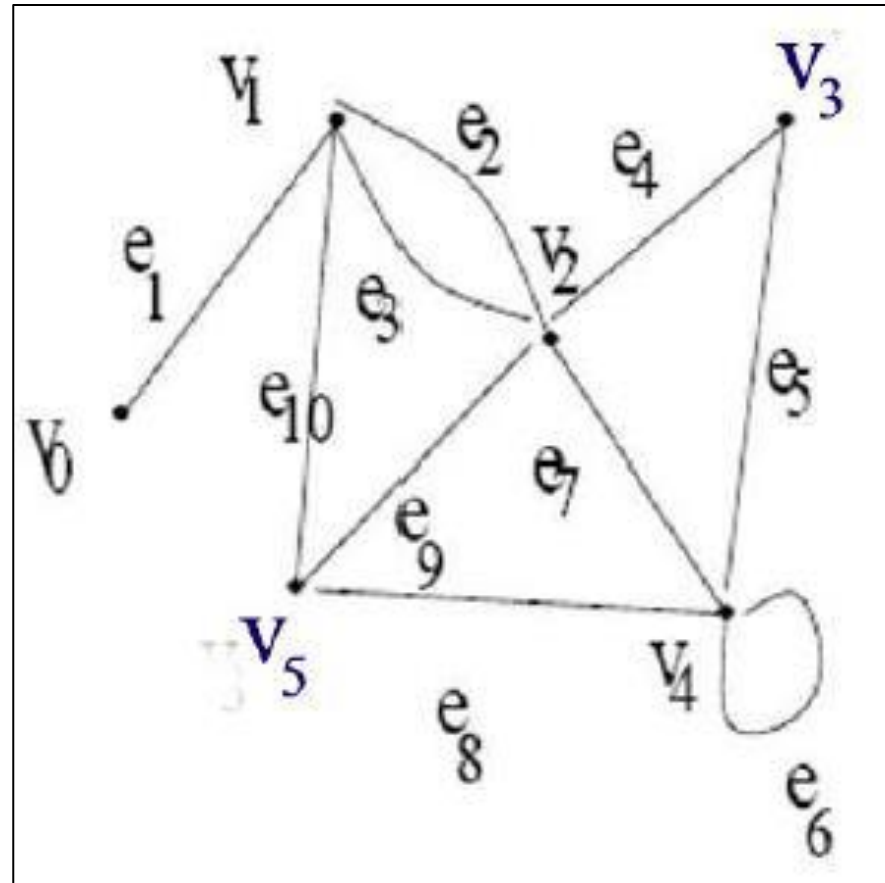
## Path dan Circuit

- Dalam graf tak berarah  $G$ , runtutan  $P$  dalam bentuk  $v_0e_1v_1e_2 \dots v_{n-1}e_nv_n$  disebut **path** dengan panjang  $n$ 
  - Disebut *path* yang menghubungkan  $v_0$  ke  $v_n$
- Jika  $P$  adalah path yang memenuhi  $v_0 = v_n$ , maka disebut dengan **sirkuit** (**circuit** atau **cycle**)
- Sebuah path atau sirkuit dikatakan **seederhana** apabila semua titik (*vertex*)-nya berbeda
- Suatu graf yang tidak memiliki sirkuit disebut **asiklis** (**acyclic**)

## Contoh Soal

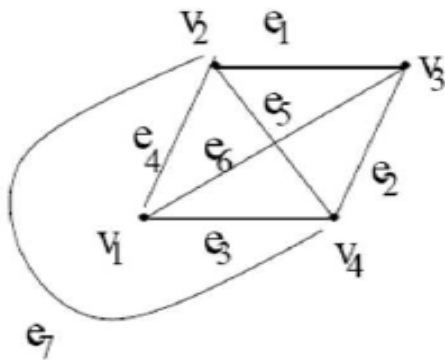
Tentukan apakah runtunan berikut adalah path, path sederhana, sirkuit, atau sirkuit sederhana?

- 1)  $v_0 e_1 v_1 e_{10} v_5 e_9 v_2 e_2 v_1$
- 2)  $v_3 e_5 v_4 e_8 v_5 e_{10} v_1 e_3 v_2$
- 3)  $v_1 e_2 v_2 e_3 v_1$
- 4)  $v_5 e_9 v_2 e_4 v_3 e_5 v_4 e_6 v_4 e_8 v_5$



# Path dan Circuit Euler

- Suatu path sederhana yang terdiri dari semua garis pada graf  $G$  disebut **path Euler**
  - Dengan kata lain: semua garis telah dilewati
- Jika path tersebut juga merupakan sirkuit, maka disebut **sirkuit Euler**
  - Jika semua titik pada graf memiliki derajat genap, maka graf tersebut adalah **sirkuit Euler**



Apakah graf di samping merupakan sirkuit Euler? Mengapa?

# Path dan Circuit Hamilton

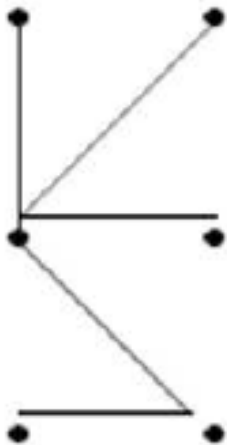
- Suatu path disebut **path Hamilton** jika
  - Setiap titik dalam graf dikunjungi tepat satu kali
- Suatu sirkuit disebut **sirkuit Hamilton** jika
  - Setiap titik dikunjungi tepat satu kali kecuali titik awal dan titik akhir yang sama
    - Titik tersebut dikunjungi tepat dua kali, yakni sebagai titik awal dan titik akhir

## Pohon (*Tree*)

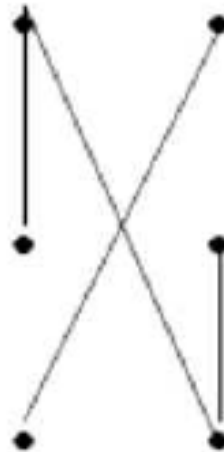
- Suatu graf tak berarah disebut **pohon** (***tree***) jika dan hanya jika
  - Graf  $G$  tidak memuat sirkuit yang terhubung
  - Sehingga tidak memiliki garis paralel dan loop
- Graf  $G$  disebut hutan (**forest**) jika dan hanya  $G$  tidak memuat sirkuit
- Teorema:  
Suatu pohon dengan  $n$  titik memiliki tepat  $n-1$  garis

## Contoh Soal

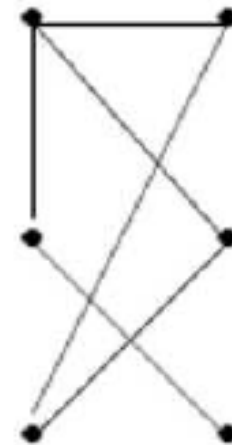
Graf manakah yang disebut pohon?



[1]



[2]



[3]



# KUIS

1. Tanpa menggambar graf-nya, tentukan apakah graf yang memiliki matriks hubung berikut ini merupakan graf yang:

- terhubung?
- memiliki loop?
- memiliki titik terasing?

Tentukan juga derajat tiap titiknya.

a)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

c)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

d)  $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Gambarkan graf yang memiliki matriks hubung dalam soal nomor 1.