Matematika Diskret dan Logika

Teori Himpunan

Dr. I Wayan Mustika, ST., M.Eng.

Himpunan

- **Himpunan** adalah kumpulan objek-objek yang berbeda
- Objek-objek dalam himpunan disebut **elemen** atau **anggota himpunan**
- Dua himpunan dikatakan sama (ekivalen) jika memiliki elemen yang sama
- Himpunan bisa dinyatakan dengan:
  - Menulisakan anggota-anggotanya di antara 2 kurung kurawal
    Contoh: {a, e, i, o, u}
  - Menuliskan sifat-sifat yang ada pada semua anggota himpunan
    Contoh { x │ x adalah huruf vokal dalam alfabet}
  - Menggunakan **diagram Venn**

- Kardinalitas (*cardinality*) dari suatu himpunan terhingga (*finite set*) *S* adalah banyaknya elemen berbeda dalam *S*, dan dinotasikan dengan $|S|$
- Suatu himpunan dikatakan *infinite* jika mengandung elemen yang tidak terhingga
- Suatu himpunan yang mengandung semua objek yang dibicarakan disebut himpunan ***universal***, dinotasikan dengan *U*
- Suatu himpunan yang tidak memiliki elemen disebut himpunan kosong (***empty set***), dinotasikan dengan $\varnothing$

Contoh

- Tentukan elemen-elemen dari himpunan berikut
  a. {x|x adalah bilangan riil dimana $x^2 = 1$}.
  b. {x|x adalah bilangan integer dimana $x^2 - 3 = 0$}.

Solusi

Contoh

1. $A = \{1, 2, 3\}$, $|A| = ?$
2. $B = \{3, 3, 3, 3, 3\}$, $|B| = ?$
3. If $C = \varnothing$, $|C| = ?$
4. If $D = \{ \varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing,\{\varnothing\}\} \}$, $|D| = ?$
5. If $E = \{0, 1, 2, 3,\ldots\}$, $|E| = ?$

- Himpunan *S* adalah himpunan bagian (*subset*) dari *T* jika dan hanya jika setiap elemen S juga merupakan elemen dari *T* (dinotasikan dengan $S \subseteq T$)
- Himpunan kuasa (*power set*) dari himpunan *S* adalah himpunan dari semua himpunan bagian dari *S*, dinotasikan dengan *P*(S)
- Perkalian kartesian (*cartesian product*) dari dua himpunan A dan B dinotasikan dengan A × B

Contoh

- Tentukan apakah pernyataan no. 1-3 adalah benar atau salah

1. $2 \subseteq \{1, 2, 3\}$???
2. $\{3\} \subseteq \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$???
3. $\{3\} \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$???
4. $A = \{a, b, c\}$

   $P(A) = ?$
5. $A = \{x,y\}, B = \{1,2,3\}$

   $A \times B = ???$

Operasi-Operasi pada Himpunan

Gabungan (*Union*): $A \cup B = \{x \mid x \in A \cup x \in B\}$

Irisan (*Intersection*): $A \cap B = \{x \mid x \in A \cap x \in B\}$

Selisih (*Difference*): $A - B = \{x \mid x \in A \cap x \notin B\}$

Komplemen (*Complement*) $\bar{A} = \{x \mid x \notin A\}$

- Dua himpunan dikatakan terpisah (*disjoint*) jika irisan keduanya adalah himpunan kosong

Contoh

$S = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

$A = \{a, c, e, g\}$

$B = \{d, e, f, g\}$

1. $A \cup B =$
2. $A \cap B =$
3. $A - B =$
4. $B^c =$

Sifat-sifat Himpunan

- Misalkan *A* dan *B* adalah 2 himpunan
  a. $A \cap B \subseteq A$ dan $A \cap B \subseteq B$
  b. $A \subseteq A \cup B$ dan $B \subseteq A \cup B$

- Misalkan *A* adalah himpunan bagian dari *universal set U*
  a. $\emptyset^c = U$
  b. $U^c = \emptyset$
  c. $(A^c)^c = A$
  d. $A \cup A^c = U$
  e. $A \cap A^c = \emptyset$

Ekivalen	Nama
$A \cap B = B \cap A$	Hukum Komutatif
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	Hukum Asosiatif
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Hukum Distributif
$A \cap S = A$	Irisan dengan S
$A \cup S = S$	Gabungan dengan S
$(A^c)^c = A$	Komplemen ganda
$A \cup A = A$; $A \cap A = A$	Hukum Idempoten
$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$; $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$	Hukum De Morgan

- Jika A dan B adalah himpunan bagian dari U
  a. $A \cup U = U$
  b. $A \cup A = A$
  c. $A \cup \varnothing = A$
  d. $A \cup B = B \cup A$
  e. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

- Jika A dan B adalah himpunan bagian dari U
  a. $A \cap U = A$
  b. $A \cap A = A$
  c. $A \cap \varnothing = \varnothing$
  d. $A \cap B = B \cap A$
  e. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

- Jika A, B, dan C adalah himpunan bagian dari U

  a. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

  b. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

De Morgan's Laws

- *Misalkan A dan B adalah* himpunan bagian *of U*

  a. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

  b. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Aljabar Boolean

- Aljabar Boolean didefinisikan sebagai suatu himpunan dengan operasi “$\wedge$”, ” $\vee$ ” dan “~” (atau ‘) serta elemen 0 dan 1 yang memenuhi sifat-sifat berikut:
  - Hukum Komutatif
  - Hukum Asosiatif
  - Hukum Distributif
  - Hukum Identitas
  - Hukum Negasi (Komplemen)

- Hukum Identitas
  - $x \vee 0 = x$
  - $x \wedge 1 = x$
- Hukum Negasi (Komplemen)
  - $x \vee x' = 1$
  - $x \wedge x' = 0$
- Kadang-kadang simbol “$\vee$” dituliskan sebagai “+” dan “$\wedge$” ditulis sebagai “*” atau tidak ditulis sama sekali.

Hukum-hukum lainnya dalam Aljabar Boolean

- Hukum idempoten
  - $x \vee x = x$
  - $x \wedge x = x$
- Hukum ikatan
  - $x \vee 1 = 1$
  - $X \wedge 0 = 0$
- Hukum absorpsi
  - $x \wedge y \vee x = x$
  - $x \vee y \wedge x = x$
- Hukum De Morgan
  - $(x \vee y)' = x' \wedge y'$
  - $(x \wedge y)' = x' \vee y'$

Fungsi Boolean

- Misal B = {B, $\vee$, $\wedge$, ~, 0, 1} adalah alajabar Boolean
- Suatu fungsi Boolean n variabel adalah fungsi f: $B^n \to B$
- Fungsi Boolean disebut sederhana jika B = {0,1}. Jadi, f: $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$
- Masukkannya adalah $\{0,1\}^n$ dan keluaran fungsi adalah {0,1}
- Operasi Not, And, Or dalam logika dapat dipandang sebagai fungsi Boolean dari $\{0,1\}^2 \to \{0,1\}$

Contoh

- Nyatakan penghubung XOR (eksklusif Or) dalam fungsi $\{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$.
- Penghubung XOR (symbol $\oplus$) mirip dengan penghubung “atau” ($\vee$). Akan tetapi jika kedua kalimat penyusunnya benar atau keduanya salah, maka hasilnya salah.

- Tabel kebenaran dari XOR

p	q	$p \vee q$	$p \oplus q$
T	T	T	F
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	F

Kuis

1. Misalkan $A = \{b, c, d, f, g\}$ dan $B = \{a, b, c\}$. Tentukan:

   a. $A \cup B$ c. $A - B$

   b. $A \cap B$ d. $B - A$

2. Misalkan A = {1, 2} dan B = {2, 3}. Tentukanlah:

   a. $P(A \cap B)$ c. $P(A \cup B)$

   b. $P(A)$ d. $P(A \times B)$

3. Misalkan A dan B adalah 2 himpunan. Buktikan bahwa

   $(A - B) \cap (A \cap B) = \varnothing$