TKU211103 Kalkulus Variabel Jamak

Triple integrals /Integral Lipat Tiga

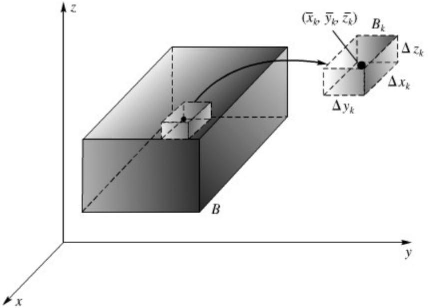
Oleh: Tim Dosen Kalkulus Variabel Jamak

Semester Gasal 2021/2022

Departemen Matematika FMIPA UGM

Integral Lipat Tiga pada Sistem Koordinat Kartesius

Seperti pada integral tunggal dan lipat dua, pendefinisian integral lipat tiga dimulai dengan penjumlahan Riemann. Perhatikan suatu fungsi f tiga variabel yang didefinisikan atas suatu daerah berbentuk balok B dengan sisi-sisi sejajar sumbu-sumbu koordinat.



Diberikan partisi P dari B dengan melewatkan bidang-bidang melalui B sejajar bidang koordinat. Jadi partisi P memotong B menjadi balok-balok bagian $B_1, B_2, \cdots, B_n$. Diperhatikan balok B_k, ambil satu titik $(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$ pada balok B_k dan didefinisikan jumlahan Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)\Delta V_k,$$

dengaan $\Delta V_K = \Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k$.

Definisi

$$\iiint_B f(x,y,z)dV = \lim_{||P||\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)\Delta V_k,$$

asalkan nilai limitnya ada.

Seperti pada integral ganda, menghitung integral ganda secara langsung sulit dilakukan namun integral ganda dapat dinyatakan sebagai integral iterasi. Notasi integral iterasi untuk integral lipat tiga diilustrasikan sebagai berikut:

$$\int_0^1 \int_1^{y-1} \int_{x+y}^1 x^2 + y^2 \, dz dx dy \qquad \dots \ (1)$$

Pengintegralan pada (1) dilakukan dengan urutan terhadap z, x, dan kemudian y.

Seperti pada integral ganda, menghitung integral ganda secara langsung sulit dilakukan namun integral ganda dapat dinyatakan sebagai integral iterasi. Notasi integral iterasi untuk integral lipat tiga diilustrasikan sebagai berikut:

$$\int_0^1 \int_1^{y-1} \int_{x+y}^1 x^2 + y^2 \, dzdxdy \qquad \ldots \ (1)$$

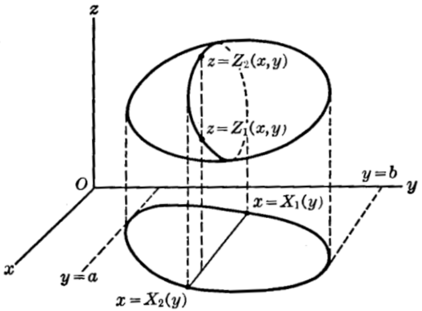
Pengintegralan pada (1) dilakukan dengan urutan terhadap z, x, dan kemudian y.

Permasalahan yang ada adalah bagaimana menetukan batas pengintegralan?

Diberikan fungsi $f(x, y, z)$ yang terdefinisi pada region tertutup dan terbatas $R \subset \mathbb{R}^3$. Misalkan fungsi f terintegral pada R dengan urutan pengintegralan terhadap z, x, dan kemudian y.

Diberikan fungsi $f(x, y, z)$ yang terdefinisi pada region tertutup dan terbatas $R \subset \mathbb{R}^3$. Misalkan fungsi f terintegral pada R dengan urutan pengintegralan terhadap z, x, dan kemudian y.

Batas pengintegralan terhadap y adalah titik perpotongan region R dengan bidang yang sejajar bidang XZ, yaitu $y = c$.



Diambil nilai x terbesar dan terkecil berturut-turut dari hasil perpotongan dengan bidang $X_1(y)$ dan $X_2(y)$. Kemudian batas pengintegralan terhadap z adalah garis yang sejajar sumbu Z pada penampang yang memotong region R. Akibatnya

$$\iiint_R f(x,y,z)dV = \int_a^b \int_{x_1}^{x_2} \int_{z_1}^{z_2} f(x,y,z)\, dzdxdy \qquad \ldots\ (2)$$

Formula (2) merupakan cara menghitung integral lipat tiga dengan integral iterasi pada koordinat kubus.

Contoh

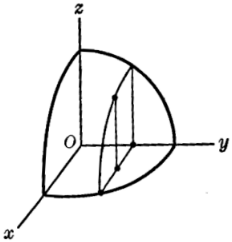
Tentukan pusat massa dari seperdelapan bola solid.

Contoh 1

Contoh

Tentukan pusat massa dari seperdelapan bola solid.

Penyelesaian: Diberikan persamaan permukaan bola $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Diperhatikan seperdelapan bagian bola solid pada kuadran I.



Katakan pusat massa di titik $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Karena $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z}$ (kenapa?), maka tinggal dicari koordinat $\bar{x}$.

Karena seperdelapan bagian bola solid pada kuadran I beririsan dangan bidang xy, xz dan yz positif, maka

$$z_1 = 0, \quad z_2 = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{a^2 - y^2}.$$

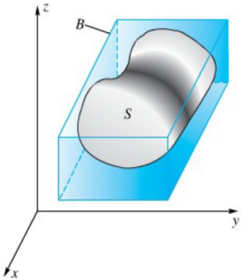
Dengan memperhatikan $V\bar{x} = V_{\bar{x}}$, kita diperoleh

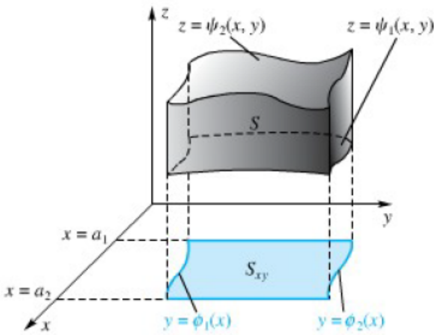
$$\begin{aligned}
V_{\bar{x}} &= \iiint_R x dV \\
\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{6}a^3\bar{x} &= \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} x\, dz dx dy \\
\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{6}a^3\bar{x} &= \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} x\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dx dy \\
\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{6}a^3\bar{x} &= \frac{1}{3}\int_0^a (a^2 - y^2)^{3/2}\, dy = \frac{a^4\pi}{16}.
\end{aligned}$$

Diperoleh $\bar{x} = \dfrac{3}{8}a$.

Diberikan himpunan S yang tertutup dan terbatas pada ruang berdimensi 3 dan dilingkupi balok B. Jika $f(x,y,z)$ didefinisikan pada S dan f bernilai 0 di luar S, maka dapat didefinisikan

$$\iiint_S f(x,y,z)dV = \iiint_B f(x,y,z)dV$$




z
$z = \psi_2(x, y)$
$z = \psi_1(x, y)$
S
y
$x = a_1$
$x = a_2$
S_{xy}
x
$y = \phi_1(x)$
$y = \phi_2(x)$

Daerah Umum

Misalkan S adalah sebuah himpunan sederhana-z (garis-garis tegak yang memotong S di dalam sebuah ruas garis tunggal) dan S_{xy} adalah proyeksi pada bidang xy (perhatikan gambar di bawah), maka

$$\iiint_S f(x, y, z)dV = \iint_{S_{xy}} \left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)dz \right) dA$$

Misalkan S adalah sebuah himpunan sederhana-z (garis-garis tegak yang memotong S di dalam sebuah ruas garis tunggal) dan S_{xy} adalah proyeksi pada bidang xy (perhatikan gambar di bawah), maka

$$\iiint_S f(x,y,z)dV = \iint_{S_{xy}} \left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dA$$

Jika S_{xy} adalah sebuah himpunan sederhana-y, maka integral menjadi

$$\iiint_S f(x,y,z)dV = \int_{a_1}^{a_2} \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dzdydx$$

Contoh

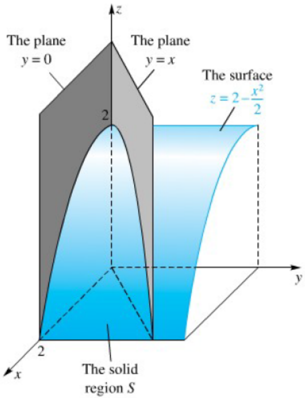
Hitung $\displaystyle\int_5^{-2}\int_0^{3x}\int_y^{x+2} 4\,dz\,dy\,dx.$

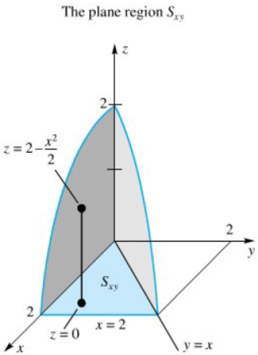
Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{5}\int_0^{3x}\int_y^{x+2} 4\,dz\,dy\,dx &= \int_{-2}^{5}\int_0^{3x}\left(\int_y^{x+2} 4\,dz\right)dy\,dx\\ &= \int_{-2}^{5}\int_0^{3x} [4z]_y^{x+2}\,dy\,dx\\ &= \int_{-2}^{5}\int_0^{3x} (4x-4y+8)\,dy\,dx\\ &= \int_{-2}^{5} [4xy-2y^2+8y]_0^{3x}\,dx\\ &= \int_{-2}^{5} (-6x^2+24x)\,dx = -14\end{aligned}$$

Contoh

Hitung integral lipat tiga untuk $f(x, y, z) = 2xyz$ *dalam daerah solid* S *yang dibatasi oleh tabung* $z = 2 - \frac{1}{2}x^2$ *dan bidang* $z = 0,\ y = x$, *dan* $y = 0$.





Penyelesaian:

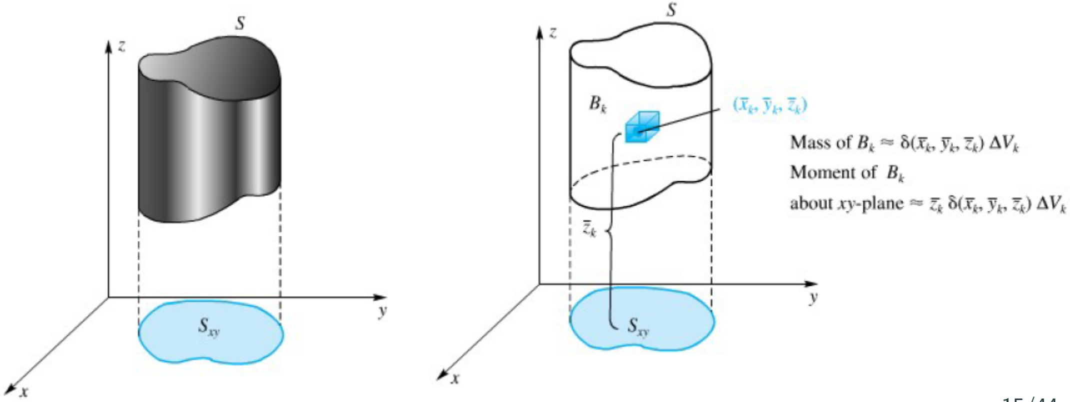
$$\iiint_S 2xyz\, dV = \int_0^2 \int_0^x \int_0^{2-x^2/2} 2xyz\, dz\, dy\, dx$$

$$= \int_0^2 \int_0^x [xyz^2]_0^{2-x^2/2}\, dy\, dx$$

$$= \int_0^2 \int_0^x \left(4xy - 2x^3y + \frac{1}{4}x^5y\right) dy\, dx$$

$$= \int_0^2 \left(2x^3 - x^5 + \frac{1}{8}x^7\right) dx = \frac{4}{3}$$

Konsep massa dan pusat massa dapat digeneralisasi dengan mudah ke benda padat (solid).



$$m = \iiint_S \delta(x, y, z)\, dV$$

$$M_{xy} = \iiint_S z\delta(x, y, z)\, dV$$

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}$$

There are similar formulas for M_{yz}, M_{xz}, $\bar{x}$, and $\bar{y}$.

Contoh

Tentukan massa dan pusat massa benda padat S pada Contoh 3, asumsikan bahwa kerapatanya sebanding dengan jarak dari alas bidang-xy.

Penyelesaian: Berdasarkan hipotesis, $\delta(x, y, z) = kz$, dengan k konstan.

$$m = \iiint_S kz\, dV = \int_0^2 \int_0^x \int_0^{2-x^2/2} kz\, dz\, dy\, dx$$

$$= k \int_0^2 \int_0^x \frac{1}{2}\left(2 - \frac{x^2}{2}\right)^2 dy\, dx = k \int_0^2 \int_0^x \left(2 - x^2 + \frac{1}{8}x^4\right) dy\, dx$$

$$= k \int_0^2 \left(2x - x^3 + \frac{1}{8}x^5\right) dx = k\left[x^2 - \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{48}\right]_0^2 = \frac{4}{3}k$$

$$M_{xy} = \iiint_S kz^2\,dV = \int_0^2 \int_0^x \int_0^{2-x^2/2} kz^2\,dz\,dy\,dx$$

$$= \frac{k}{3}\int_0^2 \int_0^x \left(2 - \frac{x^2}{2}\right)^3 dy\,dx$$

$$= \frac{k}{3}\int_0^2 \int_0^x \left(8 - 6x^2 + \frac{3}{2}x^4 - \frac{1}{8}x^6\right) dy\,dx$$

$$= \frac{k}{3}\int_0^2 \left(8x - 6x^3 + \frac{3}{2}x^5 - \frac{1}{8}x^7\right) dx$$

$$= \frac{k}{3}\left[4x^2 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{1}{4}x^6 - \frac{1}{64}x^8\right]_0^2 = \frac{4}{3}k$$

$$M_{xz} = \iiint_S kyz\,dV = \int_0^2 \int_0^x \int_0^{2-x^2/2} kyz\,dz\,dy\,dx$$

$$= k\int_0^2 \int_0^x \frac{1}{2}y\left(2 - \frac{x^2}{2}\right)^2 dy\,dx = k\int_0^2 \frac{1}{4}x^2\left(2 - \frac{x^2}{2}\right)^2 dx$$

$$= k\int_0^2 \left(x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{16}x^6\right) dx = \frac{64}{105}k$$

$$M_{yz} = \iiint_S kxz\,dV = \int_0^2 \int_0^x \int_0^{2-x^2/2} kxz\,dz\,dy\,dx = \frac{128}{105}k$$

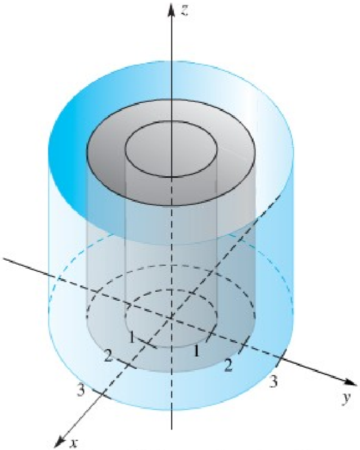
Contoh 4

$$\overline{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{4k/3}{4k/3} = 1$$

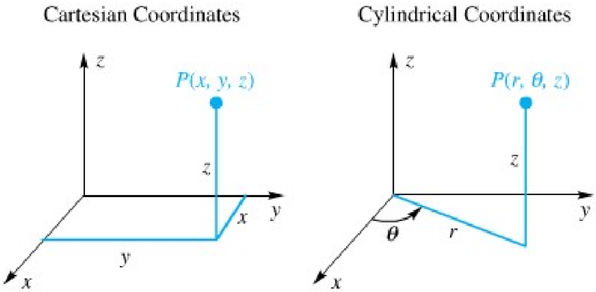
$$\overline{y} = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{64k/105}{4k/3} = \frac{16}{35}$$

$$x = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{128k/105}{4k/3} = \frac{32}{35}$$

Integral Lipat Tiga pada Sistem Koordinat Silinder dan Bola



Sistem Koordinat Silinder



Pada sistem koordinat silinder, digunakan koordinat polar r dan θ untuk menggantikan koordinat kartesius x dan y di bidang. Lebih lanjut, koordinat z sama seperti koordinat z pada koordinat kartesius.

Cylindrical to Cartesian

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$z = z$$

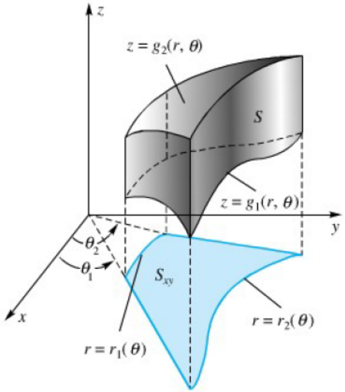
Cartesian to Cylindrical

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\tan\theta = y/x$$
$$z = z$$

Contoh Soal

1. Tentukan koordinat kartesius jika diketahui koordinat silindernya $\left(4, \frac{2\pi}{3}, 5\right)$.
2. Tentukan koordinat silinder jika diketahui koordinat kartesiusnya $(-5, -5, 2)$.
3. Tentukan koordinat silinder dari paraboloida $x^2 + y^2 = 4 - z$ dan silinder $x^2 + y^2 = 2x$.
4. Tentukan koordinat kartesius dan sebutkan jenis kurva permukaan dari $r^2 + 4z^2 = 16$ dan $r^2 \cos 2\theta = z$.

Misalkan S adalah sebuah benda padat sederhana dan misalkan proyeksi S_{xy}-nya pada bidang xy adalah sederhana (perhatikan gambar)



Jika f kontinu pada S, maka

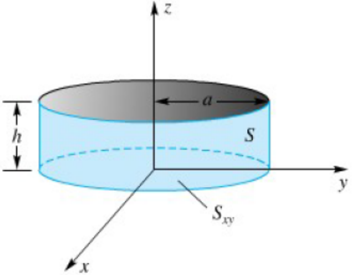
$$\iiint_S f(x, y, z)\, dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} \int_{g_1(r,\theta)}^{g_2(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r \, dz\, dr\, d\theta$$

Contoh

Tentukan massa dan pusat massa dari silinder padat S dengan asumsi bahwa kerapatanya sebanding dengan jarak dari alas.

Penyelesaian:

Dengan S yang diarahkan seperti pada gambar, maka kerapatannya adalah $\delta(x, y, z) = kz$, dengan k konstan.



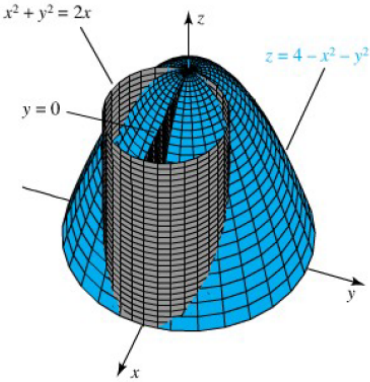
Contoh 5

$$
\begin{aligned}
m &= \iiint_S \delta(x, y, z)\, dV = k \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^h zr\, dz\, dr\, d\theta \\
&= k \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{1}{2} h^2 r\, dr\, d\theta = \frac{1}{2} k h^2 \int_0^{2\pi} \int_0^a r\, dr\, d\theta \\
&= \frac{1}{2} k h^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} a^2\, d\theta = \frac{1}{2} k h^2 \pi a^2 \\
M_{xy} &= \iiint_S z\delta(x, y, z)\, dV = k \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^h z^2 r\, dz\, dr\, d\theta \\
&= k \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{1}{3} h^3 r\, dr\, d\theta = \frac{1}{3} k h^3 \int_0^{2\pi} \int_0^a r\, dr\, d\theta \\
&= \frac{1}{3} k h^3 \pi a^2 \\
\bar{z} &= \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\frac{1}{3} k h^3 \pi a^2}{\frac{1}{2} k h^2 \pi a^2} = \frac{2}{3} h
\end{aligned}
$$

Berdasarkan sifat simetri $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

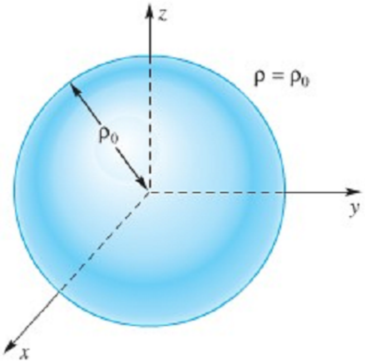
Contoh

Tentukan volume benda padat S *yang dibatasi di bagian atas oleh paraboloida* $z = 4 - x^2 - y^2$, *di bagian bawah oleh* $z = 0$, *dan di samping oleh* $y = 0$ *dan silinder* $x^2 + y^2 = 2x$.

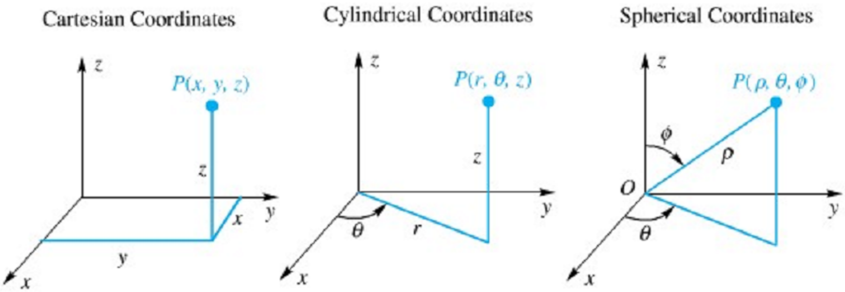


Persamaan paraboloida adalah $z = 4 - r^2$ dan silinder adalah $r = 2\cos\theta$. Diperoleh

$$
\begin{aligned}
V &= \iiint_S 1\, dV = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} \int_0^{4-r^2} r\, dz\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} r(4 - r^2)\, dr\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \left[2r^2 - \frac{1}{4} r^4 \right]_0^{2\cos\theta} d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} (8\cos^2\theta - 4\cos^4\theta)\, d\theta \\
&= 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - 4 \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{4}
\end{aligned}
$$



Sistem Koordinat Bola



Pada SK Bola, ρ menyatakan panjang $\overline{OP}$ atau jarak titik P dengan titik pangkal $O(0,0,0)$, sudut θ menyatakan sudut antara proyeksi P di bidang xy dengan sumbu x, dan sudut ϕ menyatakan sudut antara segmen garis $\overline{OP}$ dan sumbu z positif.

Spherical to Cartesian

$$x = \rho \sin\phi \cos\theta$$

$$y = \rho \sin\phi \sin\theta$$

$$z = \rho \cos\phi$$

Cartesian to Spherical

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\tan\theta = y/x$$

$$\cos\phi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Contoh

1. *Tentukan koordinat kartesius dari titik* P *dengan koordinat bola* $(8, \pi/3, 2\pi/3)$.
2. *Deskripsikan grafik* $\rho = 2\cos\phi$.
3. *Tentukan persamaan paraboloida* $z = x^2 + y^2$ *di sistem koordinat bola.*

Latihan Soal

Latihan

1. *Gambarkan grafik pada SK silindris maupun SK bola berikut.*
    a. $r = 5$
    b. $\phi = \pi/6$
    c. $\rho = 5$
    d. $r = 2\sin 2\theta$
    e. $\rho = 3\cos\phi$
    f. $\rho = \sec\phi$
    g. $r^2 + z^2 = 9$
    h. $r^2\cos^2\theta + z^2 = 4$

Latihan

2. *Make the required change in the given equation*

$x^2 + y^2 = 9$ to cylindrical coordinates	$\rho = 2\cos\phi$ to cylindrical coordinates
$x^2 - y^2 = 25$ to cylindrical coordinates	$x + y = 4$ to cylindrical coordinates
$x^2 + y^2 + 4z^2 = 10$ to cylindrical coordinates	$x + y + z = 1$ to spherical coordinates
$x^2 + y^2 + 4z^2 = 10$ to spherical coordinates	$x^2 + y^2 = 9$ to spherical coordinates
$2x^2 + 2y^2 - 4z^2 = 0$ to spherical coordinates	$r = 2\sin\theta$ to Cartesian coordinates
$x^2 - y^2 - z^2 = 1$ to spherical coordinates	$r^2\cos 2\theta = z$ to Cartesian coordinates
$r^2 + 2z^2 = 4$ to spherical coordinates	$\rho\sin\phi = 1$ to Cartesian coordinates

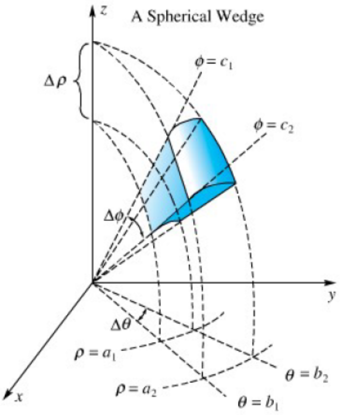
Latihan

3. *Tunjukkan jika diketahui titik* $P(\rho_1, \theta_1, \phi_1)$ *dan* $Q(\rho_2, \theta_2, \phi_2)$*, maka jarak antara dua titik tersebut adalah*

$$d = \left[(\rho_1 - \rho_2)^2 + 2\rho_1\rho_2(1 - \cos(\theta_1 - \theta_2)\sin\phi_1 \sin\phi_2 - \cos\phi_1 \cos\phi_2)\right]^{\frac{1}{2}}$$

Integral Lipat Tiga pada Koordinat Bola

Elemen volume di dalam koordinat bola (disebut baji bola (*spherical wedge*)) adalah



$$\Delta V = \overline{\rho}^2 \sin \overline{(}\phi) \Delta\rho \Delta\theta \Delta\phi$$

di mana $(\overline{\rho}, \overline{(}\theta), \overline{(}\phi))$ adalah titik yang dipilih secara tepat di dalam baji.

Pembentukan partisi dari sebuah benda padat S dengan menggunakan kisi bola,membentuk jumlah yang tepat, dan mengambil suatu limit yang akan menghasilkan integral berulang di mana $dz\ dy\ dx$ digantikan oleh $\rho^2 \sin\phi d\rho d\phi$.

$$\iiint_S f(x,y,z)\,dV = \iiint_{\substack{\text{appropriate}\\ \text{limits}}} f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$$

Contoh 7

Contoh

Tentukan massa bola padat S jika kerapatan δ-nya sebanding dengan jaraknya ke pusat.

Contoh

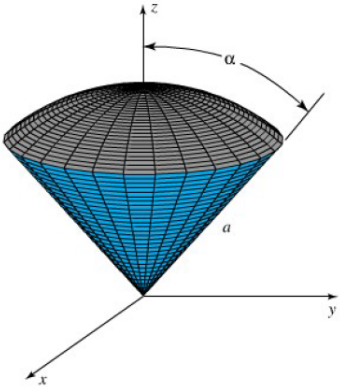
Tentukan massa bola padat S jika kerapatan δ-nya sebanding dengan jaraknya ke pusat.

Penyelesaian: Pusatkan bola tersebut di titik asal dan misal jari-jarinya a.
Kerapatan $\delta = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = k\rho$.

$$\begin{aligned} m &= \iiint_S \delta\, dV = k \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{a} \rho\rho^2 \sin\phi \, d\rho\, d\theta\, d\phi \\ &= k\frac{a^4}{4} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin\phi\, d\theta\, d\phi = \frac{1}{2} k\pi a^4 \int_0^{\pi} \sin\phi\, d\phi \\ &= k\pi a^4 \end{aligned}$$

Contoh

Tentukan volume dan pusat massa dari benda padat homogen yang dibatasi di atas oleh bola $\rho = a$ *dan di bawah oleh kerucut* $\phi = \alpha$.



Contoh 8

Volume V adalah

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\alpha}\int_0^{2\pi}\int_0^{a} \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi \\ &= \int_0^{\alpha}\int_0^{2\pi} \left(\frac{a^3}{3}\right) \sin\phi \, d\theta \, d\phi \\ &= \frac{2\pi a^3}{3} \int_0^{\alpha} \sin\phi \, d\phi = \frac{2\pi a^3}{3}(1 - \cos\alpha) \end{aligned}$$

sehingga massa m dari benda padat tersebut adalah

$$m = kV = \frac{2\pi a^3 k}{3}(1 - \cos\alpha),$$

dengan k konstan.

Dari sifat simetri, pusat massa berada di sumbu z ($\bar{x} = \bar{y} = 0$).

$$
\begin{aligned}
M_{xy} &= \iiint\limits_S kz\, dV = \int_0^{\alpha} \int_0^{2\pi} \int_0^{a} k(\rho \cos \phi)\rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi \\
&= \int_0^{\alpha} \int_0^{2\pi} \int_0^{a} k\rho^3 \sin \phi \cos \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi \\
&= \int_0^{\alpha} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} ka^4 \sin \phi \cos \phi \, d\theta \, d\phi \\
&= \int_0^{\alpha} \frac{1}{2} \pi k a^4 \sin \phi \cos \phi \, d\phi = \frac{1}{4} \pi a^4 k \sin^2 \alpha
\end{aligned}
$$

Diperoleh

$$
\begin{aligned}
\bar{z} &= \frac{\frac{1}{4}\pi a^4 k \sin^2 \alpha}{\frac{2}{3}\pi a^3 k(1 - \cos \alpha)} = \frac{3a \sin^2 \alpha}{8(1 - \cos \alpha)} \\
&= \frac{3}{8} a(1 + \cos \alpha)
\end{aligned}
$$

Thank You