TKU211103

Aplikasi (Kecepatan, percepatan, hukum kedua Kepler)

Tim Dosen Kalkulus Variable Jamak

25 Oktober 2021

Departemen Matematika FMIPA UGM

1. Persamaan Parametrik Kurva

Pendahuluan

Pada pembahasan sebelumnya telah dipelajari persamaan parameter garis. Pada pertemuan ini akan dibahas mengenai persamaan parameter dari sebarang lintasan (trajectories).

- Suatu kurva pada bidang dapat dinyatakan sebagai sepasang persamaan parameter

$$
\begin{aligned}
x &= f(t) \\
y &= g(t) \\
z &= h(t)
\end{aligned}
$$

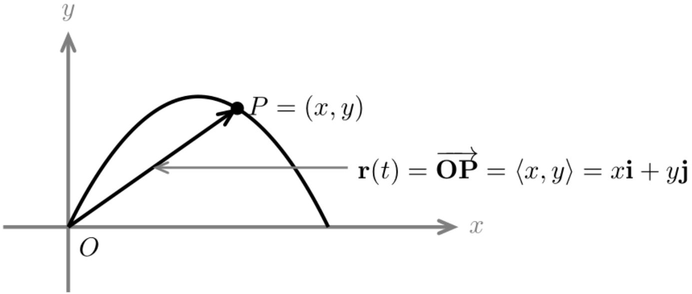
  untuk setiap $t \in I$, dengan f, g, dan h merupakan fungsi kontinu pada interval I.
- Biasanya, interval I tertutup.
- Variable t biasa disebut sebagai parameter.

Contoh: Lintasan roket

Sebuah roket diluncurkan dari titik asal dengan kecepatan awal v_0. Tentukan persamaan lintasan roket.

Sebuah roket diluncurkan dari titik asal dengan kecepatan awal v_0. Tentukan persamaan lintasan roket.

Penyelesaian: Katakkan pada waktu t, posisi roket adalah $P = (x(t), y(t))$.



Contoh: Lintasan roket

Jadi vektor posisi roket dapat dituliskan sebagai

$$\bar{r} = \overrightarrow{OP} = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j},$$

dengan

$$x(t) = v_{(0,x)}t, \qquad y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{(0,y)}t$$

dengan $v_{(0,x)}$ kecepatan awal terhadap sumbu X dan $v_{(0,y)}$ kecepatan awal terhadap sumbu Y.

Contoh: Persamaan parametrik lingkaran

Diberikan persamaan parameter kurva

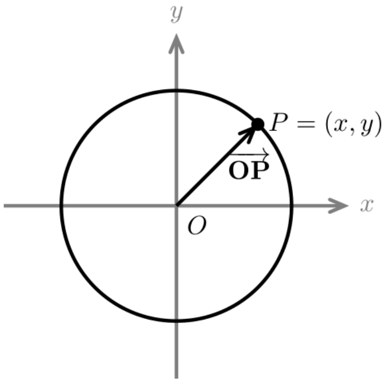
$$x(t) = a\cos t, \qquad y(t) = a\sin t.$$

Contoh: Persamaan parametrik lingkaran

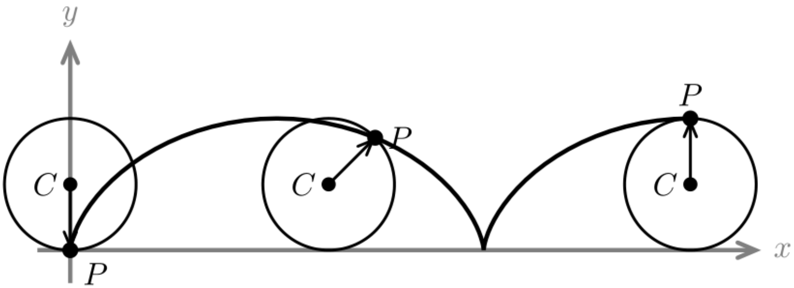
Diberikan persamaan parameter kurva

$$x(t) = a\cos t, \qquad y(t) = a\sin t.$$

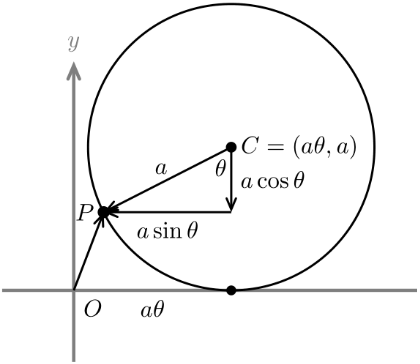
Mudah dicek bahwa persamaan parameter di atas adalah persamaan kurva lingkaran dengan pusat di $O(0,0)$ dan jari-jari a karena $x^2 + y^2 = a^2$.



Garis lengkung yang dihasilkan oleh sebuah titik pada sebuah lingkaran, bila lingkaran tersebut menggelinding pada sebuah sumbu X.



Pada gambar di atas, jari-jari lingkaran yang menggelinding adalah a dan titik $P(x, y)$ sebagai titik penulusur.



Pada posisi di samping, CP membentuk sudut θ dengan garis vertikal. Vektor posisi titik P adalah

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP}$$

dengan $\overrightarrow{OC} = (a\theta, a)$ dan $\overrightarrow{CP} = (-a\sin\theta, -a\cos\theta)$. Diperoleh

$$\begin{aligned} x(\theta) &= a\theta - a\sin\theta \\ y(\theta) &= a - a\cos\theta. \end{aligned}$$

Sifat Persamaan Parameter

Suatu kurva dapat dinyatakan dalam lebih dari satu persamaan parameter.

Suatu kurva dapat dinyatakan dalam lebih dari satu persamaan parameter.

Berikut adalah beberapa persamaan parameter yang menyatakan suatu setengah lingkaran.

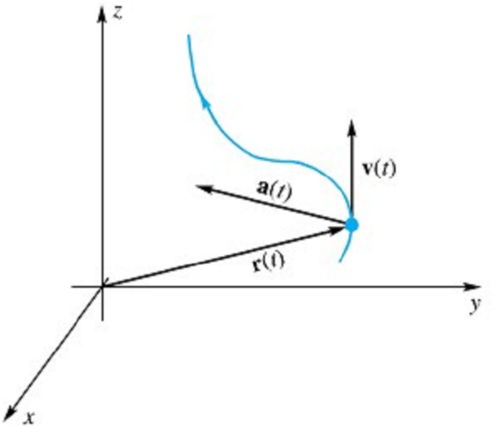
- $x = \sqrt{1 - t^2}, \;\; y = t, \quad \text{untuk} \quad -1 \leq t \leq 1$
- $x = \cos t, \;\; y = \sin t, \quad \text{untuk} \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
- $x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}, \;\; y = \dfrac{2t}{1 + t^2}, \quad \text{untuk} \quad -1 \leq t \leq 1$

2. Gerak Sepanjang Kurva

Untuk t yang semakin bertambah $\overline{r}(t)$ akan bergerak menyusuri kurva yang menyatakan jalur pergerakan titik P. Gerakan ini disebut dengan **curvilinear motion**.

Analogi dengan gerak lurus, kita bisa definisikan kecepatan (velocity) $\overline{v}(t)$ dan percepatan (acceleration) $\overline{a}(t)$ dari pergerakan titik P sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\overline{v}(t) = \overline{r}'(t) &= f'(t)\overline{i} + g'(t)\overline{j} + h'(t)\overline{k} \\ \overline{a}(t) = \overline{r}''(t) &= f''(t)\overline{i} + g''(t)\overline{j} + h''(t)\overline{k}\end{aligned}$$


z
v(t)
a(t)
r(t)
y
x

Contoh Persamaan Parameter Lintasan

Contoh

Diketahui sebuah sebuah roda yang berputar 3 kali per detik. Tentukan persamaan parameter lintasan dan hitung kecepatannya.

Contoh Persamaan Parameter Lintasan

Contoh

Diketahui sebuah sebuah roda yang berputar 3 kali per detik. Tentukan persamaan parameter lintasan dan hitung kecepatannya.

Penyelesaian: Lintasan yang dihasilkan dari roda yang berputar berupa cycloida. Karena 3 putaran/detik = 6π radian/detik. Diperoleh

$$\theta = 6\pi t.$$

Jadi

$$\begin{aligned} x(t) &= 6\pi t - \sin(6\pi t) \\ y(t) &= 1 - \cos(6\pi t). \end{aligned}$$

Contoh

Diketahui sebuah sebuah roda yang berputar 3 kali per detik. Tentukan persamaan parameter lintasan dan hitung kecepatannya.

Penyelesaian: Lintasan yang dihasilkan dari roda yang berputar berupa cycloida. Karena 3 putaran/detik = 6π radian/detik. Diperoleh

$$\theta = 6\pi t.$$

Jadi

$$\begin{aligned} x(t) &= 6\pi t - \sin(6\pi t) \\ y(t) &= 1 - \cos(6\pi t). \end{aligned}$$

Akibatnya, kecepatan roda di atas adalah

$$v(t) = (6\pi - 6\pi\cos(6\pi t), 6\pi\sin(6\pi t)).$$

Jika $\bar{r}(t)$ menyatakan vektor posisi suatu benda, maka panjang kurva yang dilalui benda tersebut dari $t = a$ hingga $t = b$ adalah

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\, dt = \int_a^b \|\bar{r}'(t)\|\, dt$$

Diperoleh panjang lintasan total dari $t = a$ ke sebarang t dinyatakan dengan

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{[f'(u)]^2 + [g'(u)]^2 + [h'(u)]^2}\, du = \int_a^t \|\bar{r}'(u)\|\, du.$$

Dengan demikian, berdasarkan Teorema Fundamental Kalkulus diperoleh perubahan panjang lintasan terhadap waktu dinyatakan dengan

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{[f'(u)]^2 + [g'(u)]^2 + [h'(u)]^2} = \|\bar{r}'(u)\|.$$

Kelajuan

Perubahan panjang lintasan terhadap waktu ini kita kenal dengan sebutan **kelajuan dari objek**, yaitu

$$\text{speed} = \frac{ds}{dt} = \|\overline{r}'(t)\| = \|\overline{v}(t)\|$$

Kelajuan Vs Kecepatan

- Diperhatikan bahwa kelajuan merupakan besaran skalar, sedangkan kecepatan adalah vektor.
- Kelajuan menyatakan seberapa cepat suatu obyek menempuh suatu jarak, sedangkan kecepatan menyatakan seberapa cepat suatu obyek berubah posisi.
- Dengan demikian, kelajuan adalah perubahan jarak terhadap waktu, sedangkan kecepatan adalah perubahan posisi terhadap waktu.

Diberikan suatu persamaan

$$\overline{r}(t) = f(t)\overline{i} + g(t)\overline{j} + h(t)\overline{k},$$

yang menyatakan posisi suatu benda pada saat t.

Diasumsikan bahwa $\overline{r}'(t)$ kontinu dan tidak pernah bernilai $\overline{0}$. Dibandingkan harus bekerja dengan menggunakan vektor singgung kurva, dipilih vektor singgung unitnya, yaitu,

$$\overline{T}(t) = \frac{\overline{r}'(t)}{\|\overline{r}'(t)\|} = \frac{\overline{v}(t)}{\|\overline{v}(t)\|}.$$

Contoh

Diberikan persamaan cycloida $x(\theta) = a\theta - a\sin\theta$, $y(\theta) = a - a\cos\theta$. *Tentukan kecepatan, kelajuan, vektor singgung unit, dan panjang busur dari satu lengkungan.*

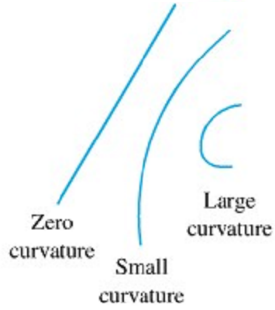
Contoh

Diberikan persamaan cycloida $x(\theta) = a\theta - a\sin\theta$, $y(\theta) = a - a\cos\theta$. Tentukan kecepatan, kelajuan, vektor singgung unit, dan panjang busur dari satu lengkungan.

Penyelesaian:

- $\overline{v}(\theta) = \dfrac{d\overline{r}}{d\theta} = (a - a\cos\theta, a\sin\theta) = \left(2a\sin^2\dfrac{\theta}{2}, 2a\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}\right).$
- speed $= \left\|\dfrac{d\overline{r}}{d\theta}\right\| = \dfrac{ds}{d\theta} = 2a\left|\sin\dfrac{\theta}{2}\right|.$
- $\overline{T} = \dfrac{\overline{v}(\theta)}{\|\overline{v}(\theta)\|} = \dfrac{\left(2a\sin^2\dfrac{\theta}{2}, 2a\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}\right)}{2a\left|\sin\dfrac{\theta}{2}\right|} = \left(\pm\sin\dfrac{\theta}{2}, \pm\cos\dfrac{\theta}{2}\right).$
- Panjang busur $s = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{ds}{d\theta}d\theta = \int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{\theta}{2}d\theta = 8a.$

Curvature (Kelengkungan)



Selanjutnya, akan dikenalkan suatu besaran yang menyatakan kelengkungan suatu kurva. Besaran tersebut biasa dikenal dengan sebutan **curvature (kelengkungan)**.

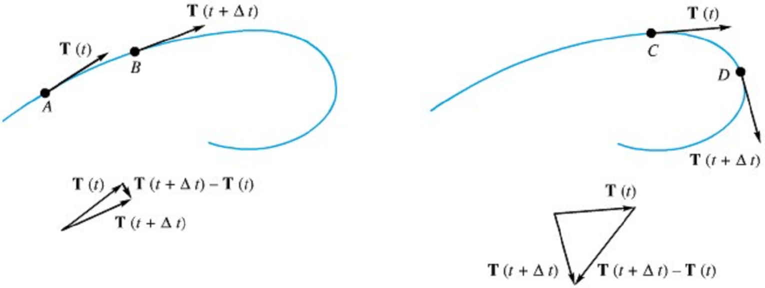
Diberikan suatu persamaan

$$\overline{r}(t) = f(t)\overline{i} + g(t)\overline{j} + h(t)\overline{k},$$

yang menyatakan vektor posisi suatu benda pada saat t.

Diasumsikan bahwa $\overline{r}'(t)$ kontinu dan tidak pernah bernilai $\overline{0}$. Nilai curvature ini menyatakan seberapa cepat perubahan vektor singgung kurva berubah.

Diperhatikan gambar berikut. Suatu benda bergerak dari titik A ke titik B selama $\triangle t$.



Curvature (Kelengkungan)

Curvature, dinotasikan dengan κ (dibaca: kappa), adalah suatu besaran yang mengukur perubahan vektor singgung unit dibandingkan dengan panjang kurva. Dengan demikian,

$$
\begin{aligned}
\kappa &= \left\| \frac{d\overline{T}}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\overline{T}}{dt}\frac{dt}{ds} \right\| = \left| \frac{1}{ds/dt} \right| \left\| \frac{d\overline{T}}{dt} \right\| \\
&= \frac{1}{\|\overline{v}(t)\|} \|\overline{T}'(t)\| \\
&= \frac{\|\overline{T}'(t)\|}{\|\overline{r}'(t)\|}.
\end{aligned}
$$

Curvature dari sebuah garis adalah $\kappa = 0$

Diberikan persamaan benda yang bergerak sepanjang garis pada saat t dinyatakan dengan persamaan parameter berikut.

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct. \end{cases}$$

Tentukan besar curvaturenya.

Curvature dari sebuah garis adalah $\kappa = 0$

Dengan demikian,

$$\begin{aligned}
\overline{r}(t) &= (x_0 + at)\overline{i} + (y_0 + bt)\overline{j} + (z_0 + ct)\overline{k} \\
\overline{r}'(t) &= a\overline{i} + b\overline{j} + c\overline{k} \\
\overline{T}(t) &= \frac{a\overline{i} + b\overline{j} + c\overline{k}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\
\overline{T}'(t) &= 0
\end{aligned}$$

Jadi,

$$\kappa = \frac{\|\overline{T}'(t)\|}{\|\overline{r}'(t)\|} = \frac{0}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0.$$

Contoh Lainnya

Contoh

Tentukan nilai curvature dari $\bar{r}(t) = a\cos t\,\bar{i} + a\sin t\,\bar{j} + ct\bar{k}$.

Component of Acceleration

Untuk pergerakan sepanjang kurva dengan vektor posisi $\bar{r}(t)$, vektor singgung unit dinyatakan dengan $\overline{T}(t) = \frac{\bar{r}'(t)}{\|\bar{r}'(t)\|}$. Diperhatikan bahwa $\overline{T}(t) \bullet \overline{T}(t) = 1$, dan

$$\frac{d(\overline{T}(t) \bullet \overline{T}(t))}{dt} = \overline{T}(t) \bullet \overline{T}'(t) + \overline{T}'(t) \bullet \overline{T}(t) = 0.$$

Dengan kata lain, $\overline{T}(t)$ tegak lurus dengan $\overline{T}'(t)$. Vektor

$$\overline{N}(t) = \frac{\overline{T}'(t)}{\|\overline{T}'(t)\|}$$

biasa dikenal dengan sebutan **vektor normal satuan** (*unit normal vector*).

Component of Acceleration

Sebagai gambaran awam, jika kita mengendarai mobil pada jalan yang berkelok, saat mobil berakselerasi akan terasa dorongan ke arah berlawanan. Sebagai contoh, jika kita menambah kecepatan maka akan ada dorongan ke belakang, atau jika kita berbelok ke kiri maka akan ada dorongan ke kanan.

Diperhatikan bahwa percepatan $\overline{a}$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier vektor singgung kurva dan vektor normal satuan berikut ini.

$$\overline{a} = a_T \overline{T}(t) + a_N \overline{N}(t).$$

Vektor $\overline{T}(t)$ dikenal dengan **komponen akselerasi tangensial** dan vektor $\overline{N}(t)$ dikenal dengan **komponen akselerasi normal**. Selanjutnya, akan dicari nilai a_T dan a_N.

Diperhatikan bahwa

$$\overline{T}(t) = \frac{\overline{v}(t)}{\|\overline{v}(t)\|} = \frac{\overline{v}(t)}{ds/dt}.$$

Akibatnya, $\overline{v}(t) = \frac{ds}{dt}\overline{T}(t)$ dan $\overline{v}'(t) = \frac{ds}{dt}\overline{T}'(t) + \frac{d^2s}{dt^2}\overline{T}(t)$. Karena $\overline{a}(t) = \overline{v}'(t)$, $\overline{T}'(t) = \|\overline{T}'(t)\|\overline{N}(t)$ dan $\|\overline{T}'(t)\| = \kappa\frac{ds}{dt}$, maka diperoleh

$$\overline{a}(t) = \frac{d^2s}{dt^2}\overline{T}(t) + \frac{ds}{dt}\|\overline{T}'(t)\|\overline{N}(t) = \frac{d^2s}{dt^2}\overline{T}(t) + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \kappa\overline{N}(t).$$

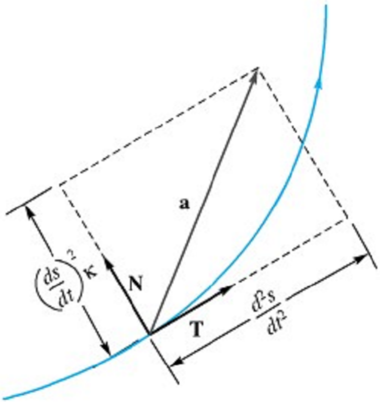
Karena

$$\overline{a}(t) = \frac{d^2s}{dt^2}\overline{T}(t) + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \kappa\overline{N}(t),$$

maka diperoleh

$$a_T = \frac{d^2s}{dt^2} \qquad \text{dan} \qquad a_N = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \kappa.$$

Component of Acceleration



Diperhatikan bahwa $\overline{a} = a_T\overline{T} + a_N\overline{N}$. Dengan demikian,

$$\overline{T} \bullet \overline{a} = a_T\overline{T} \bullet \overline{T} + a_N\overline{T} \bullet \overline{N} = a_T.$$

Jadi,

$$a_T = \overline{T} \bullet \overline{a} = \frac{\overline{r}' \bullet \overline{r}''}{\|\overline{r}'\|}.$$

Lebih lanjut,

$$\overline{T} \times \overline{a} = a_T\overline{T} \times \overline{T} + a_N\overline{T} \times \overline{N} = a_N(\overline{T} \times \overline{N}).$$

Karena

$$\|\overline{T} \times \overline{a}\| = |a_N|\|\overline{T} \times \overline{N}\| = a_N\|\overline{T}\|\|\overline{N}\| \sin\frac{\pi}{2} = a_N.$$

Jadi,

$$a_N = \|\overline{T} \times \overline{a}\| = \frac{\|\overline{r}' \times \overline{r}"\|}{\|\overline{r}'\|}.$$

Dengan demikian, diperoleh nilai curvature

$$\kappa = \frac{a_N}{(ds/dt)^2} = \frac{\|\bar{r}' \times \bar{r}''\|}{\|\bar{r}'\|^3}.$$

Binormal di titik P

Diberikan suatu kurva dengan vektor posisinya adalah $\overline{r}$, dan mempunyai vektor singgung unit $\overline{T}$ di titik P. Diperhatikan bahwa terdapat tak hingga banyak vektor yang tegak lurus dengan $\overline{T}$. Tetapi, telah dipilih vektor $\overline{N} = \frac{\overline{T}'}{\|\overline{T}'\|}$ yang dikenal sebagai vektor normal satuan. Lebih lanjut, vektor

$$\overline{B} = \overline{T} \times \overline{N},$$

merupakan suatu vektor unit yang tegak lurus dengan vektor $\overline{T}$ dan vektor $\overline{N}$. Vektor ini biasa dikenal dengan sebutan **vektor binormal**.

Tentukan $\overline{T}$, $\overline{N}$, $\overline{B}$, komponen akselerasi tangensial dan komponen akselerasi normal dari

1. $\overline{r}(t) = t^2\overline{i} + (2t - 1)\overline{j} + \frac{1}{3}t^3\overline{k}$ pada saat $t = 1$
2. $\overline{r}(t) = 4\cos t\overline{i} + 4\sin t\overline{j} + t\overline{k}$ pada saat $t = \frac{\pi}{4}$
3. $\overline{r}(t) = e^t\overline{i} + e^t\overline{j} + e^t\overline{k}$ pada saat $t = \ln 2$

3. Hukum Kedua Kepler

Hukum Kepler

Dengan mempelajari data astronom Denmark Tycho Brahe tentang pergerakan planet, Kepler merumuskan tiga hukum empiris, yaitu

- Hukum 1: Orbit planet berupa ellips dengan salah satu fokusnya adalah matahari.
- Hukum 2: Setiap planet bergerak sedemikian sehingga suatu garis khayal yang ditarik dari matahari ke planet tersebut mencakup daerah dengan luas yang sama dalam waktu yang sama.
- Hukum 3: Perioda kuadrat suatu planet berbanding lurus dengan pangkat tiga jarak rata-ratanya dari Matahari.

Hukum Kepler

Dari hukum-hukum Kepler, Newton menyimpulkan bahwa gaya yang menjaga planet-planet pada orbitnya memiliki besar $\frac{1}{d^2}$ dengan d adalah jarak ke matahari, dan dengan arah menuju pusat.

Pada bagian ini akan dipelajari bahwa hukum kedua Kepler equivalen dengan gaya yang bekerja ke pusat.

Sulit untuk menunjukkan bahwa jika orbit berbentuk ellips menyebabkan besarnya gaya adalah K/d^2 dan sebaliknya juga berlaku.

Diketahui $\overline{r}(t), \overline{s}(t)$ adalah dua vektor yang diferensiabel. Maka

1. $$\frac{d(\overline{r} \bullet \overline{s})}{dt} = \frac{d\overline{r}}{dt} \bullet \overline{s} + \overline{r} \bullet \frac{d\overline{s}}{dt}.$$

2. $$\frac{d(\overline{r} \times \overline{s})}{dt} = \frac{d\overline{r}}{dt} \times \overline{s} + \overline{r} \times \frac{d\overline{s}}{dt}.$$

Jika perubahan t adalah $\triangle t$, hal ini menyebabkan perubahan $\overline{r}$ dan $\overline{s}$, yaitu berturut-turut adalah $\triangle\overline{r}$ dan $\triangle\overline{s}$. Akibatnya perubahan dari $\overline{r} \bullet \overline{s}$ adalah

$$\triangle(\overline{r} \bullet \overline{s}) = (\overline{r} + \triangle\overline{r}) \bullet (\overline{s} + \triangle\overline{s}) - \overline{r} \bullet \overline{s}.$$

Jika perubahan t adalah $\triangle t$, hal ini menyebabkan perubahan $\overline{r}$ dan $\overline{s}$, yaitu berturut-turut adalah $\triangle\overline{r}$ dan $\triangle\overline{s}$. Akibatnya perubahan dari $\overline{r}\bullet\overline{s}$ adalah

$$\triangle(\overline{r}\bullet\overline{s}) = (\overline{r}+\triangle\overline{r})\bullet(\overline{s}+\triangle\overline{s}) - \overline{r}\bullet\overline{s}.$$

Ruas kanan dijabarkan dan kemudian kedua ruas dibagi dengan $\triangle t$, diperoleh

$$\frac{\triangle(\overline{r}\bullet\overline{s})}{\triangle t} = \frac{\triangle\overline{r}}{\triangle t}\bullet\overline{s} + \overline{r}\bullet\frac{\triangle\overline{s}}{\triangle t} + \frac{\triangle\overline{r}}{\triangle t}\bullet\triangle s.$$

Bukti. (1)

Jika perubahan t adalah $\triangle t$, hal ini menyebabkan perubahan $\overline{r}$ dan $\overline{s}$, yaitu berturut-turut adalah $\triangle\overline{r}$ dan $\triangle\overline{s}$. Akibatnya perubahan dari $\overline{r} \bullet \overline{s}$ adalah

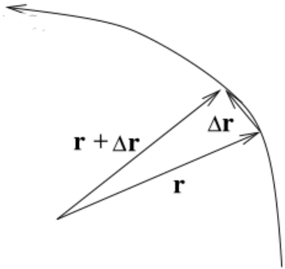
$$\triangle(\overline{r} \bullet \overline{s}) = (\overline{r} + \triangle\overline{r}) \bullet (\overline{s} + \triangle\overline{s}) - \overline{r} \bullet \overline{s}.$$

Ruas kanan dijabarkan dan kemudian kedua ruas dibagi dengan $\triangle t$, diperoleh

$$\frac{\triangle(\overline{r} \bullet \overline{s})}{\triangle t} = \frac{\triangle\overline{r}}{\triangle t} \bullet \overline{s} + \overline{r} \bullet \frac{\triangle\overline{s}}{\triangle t} + \frac{\triangle\overline{r}}{\triangle t} \bullet \triangle s.$$

Selanjutnya, untuk $\triangle t \to 0$, maka $\triangle s \to 0$. Akibatnya, diperoleh

$$\frac{d(\overline{r} \bullet \overline{s})}{dt} = \frac{d\overline{r}}{dt} \bullet \overline{s} + \overline{r} \bullet \frac{d\overline{s}}{dt}.$$



Dari gambar terlihat jika waktu berubah dari t ke $t + \triangle t$, maka perubahan luas daerah A adalah

$$\triangle A \approx \text{ luas daerah segitiga } = \frac{1}{2}\|\bar{r} \times \triangle \bar{r}\|.$$

Hukum kedua Kepler dan Gaya ke Pusat

Karena luas segitiga adalah setengah dari luas jajar genjang yang dibentuk oleh vektor $\overline{r}$ dan vektor $\triangle\overline{r}$, maka

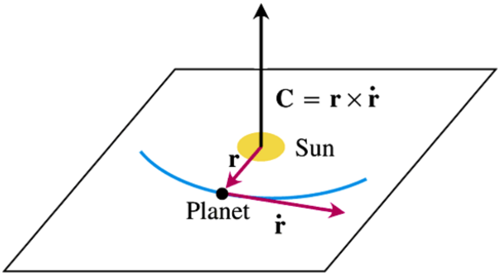
$$2\frac{\triangle A}{\triangle t} \approx \left\| \overline{r} \times \frac{\triangle\overline{r}}{\triangle t} \right\|.$$

Untuk $\triangle t \to 0$, diperoleh

$$2\frac{dA}{dt} = \left\| \overline{r} \times \frac{d\overline{r}}{dt} \right\| = \|\overline{r} \times \overline{v}\|.$$

karena luas daerah yang di lewati (*swept out*) selalu konstan, maka $\|\overline{r} \times \overline{v}\|$ konstan.

Menurut Hukum pertama Kepler, orbit planet berupa ellips (bidang), berarti $\overline{r}$ dan $\overline{v}$ terletak pada bidang yang sama. Akibatnya, arah vektor $\overline{r} \times \overline{v}$ konstan.

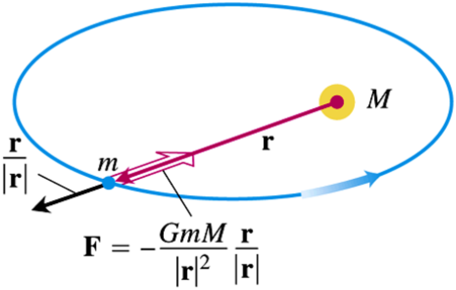


Hukum kedua Kepler dan Gaya ke Pusat

Dari sini dapat disimpulkan bahwa

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt}(\overline{r} \times \overline{v}) = \overline{0} \\
\Leftrightarrow \quad & \left(\frac{d}{dt}\overline{r} \times \overline{v}\right) + \left(\overline{r} \times \frac{d}{dt}\overline{v}\right) = \overline{0} \\
\Leftrightarrow \quad & (\overline{v} \times \overline{v}) + (\overline{r} \times \overline{a}) = \overline{0} \\
\Leftrightarrow \quad & \overline{r} \times \overline{a} = \overline{0}.
\end{aligned}$$

Hal ini menunjukkan bahwa vektor percepatan $\overline{a}$ sejajar dengan vektor $\overline{r}$ tetapi memiliki arah berlawanan (karena planet-planet mengelilingi matahari, tidak melesat hingga tak terhingga).



Arah vektor $\overline{a}$ adalah menuju pusat (matahari). Karena $\overline{F} = m\overline{a}$, maka arah gaya juga masuk menuju pusat (matahari). Sebaliknya, jika suatu objek bergerak dengan gaya menuju pusat, maka hukum kedua Kepler berlaku.