TKU211103 Kalkulus Variabel Jamak

Fungsi Dua dan Tiga Variabel

Oleh: Tim Dosen Kalkulus Variabel Jamak

Semester Gasal 2021/2022 – 28 Oktober 2021

Departemen Matematika FMIPA UGM

1. Definisi dan Grafik

Definisi

Diberikan D himpunan n-tuple bilangan real $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$. **Fungsi bernilai real** f pada D adalah aturan pemasangan bilangan real (unik)

$$w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

dengan setiap elemen D. Himpunan D disebut **domain** fungsi. Himpunan nilai w hasil pemetaan oleh f disebut dengan **range** fungsi. Simbol w adalah **variabel dependen/terikat** dari f, dan f disebut fungsi dengan n **variabel bebas** x_1 sampai x_n. Selain itu, x_j juga disebut **variabel masukan** (*input variables*) dan w disebut **variabel hasil** (*output variable*).

Pada pambahasan selanjutnya akan difokuskan pada fungsi dengan dua atau tiga variabel independen.

Contoh

Berikut beberapa contoh fungsi dua dan tiga variabel.

(a) $f(x,y) = 3$

(b) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2$

(c) $f(x,y) = \sin xy + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(d) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

(e) $f(x,y,z) = x + y + z - 2$

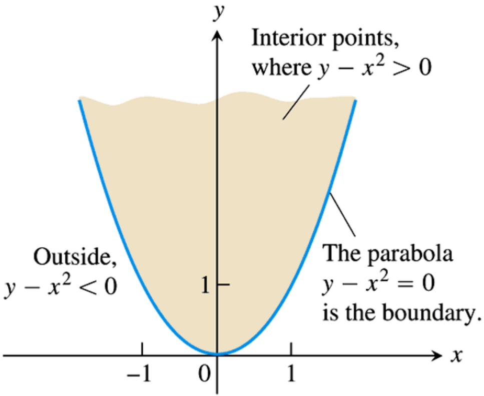
EXAMPLE 2(a) Functions of Two Variables

Function	Domain	Range
$w = \sqrt{y - x^2}$	$y \geq x^2$	$[0, \infty)$
$w = \frac{1}{xy}$	$xy \neq 0$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$w = \sin xy$	Entire plane	$[-1, 1]$

(b) Functions of Three Variables

Function	Domain	Range
$w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	Entire space	$[0, \infty)$
$w = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$	$(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$	$(0, \infty)$
$w = xy \ln z$	Half-space $z > 0$	$(-\infty, \infty)$

Berikut diberikan contoh domain fungsi $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$ yang terdiri dari daerah diarsir serta pembatas parabola $y = x^2$.



Memvisualkan Fungsi Dua Variabel

Fungsi $z = f(x, y) = -y$

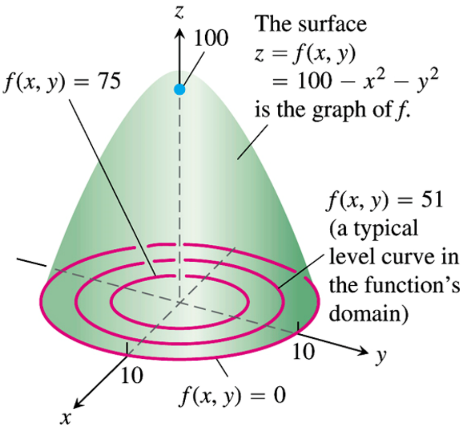
Memvisualkan Fungsi Dua Variabel

Fungsi $z = f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$

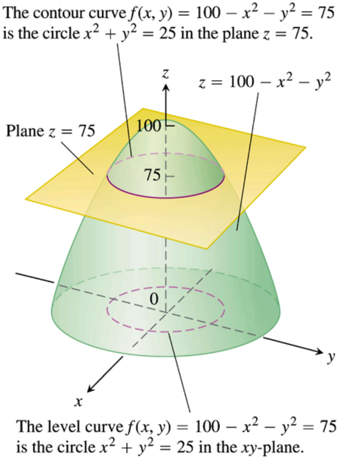
Definisi

Himpunan titik pada bidang dimana fungsi $f(x, y)$ bernilai konstan $f(x, y) = c$ disebut **kurva level** (*level curve*) dari f. Himpunan semua titik $(x, y, f(x, y))$ pada bidang, untuk (x, y) di domain fungsi f, disebut **grafik** (*graph*) dari f. Grafik fungsi f juga disebut **permukaan** (*surface*) $z = f(x, y)$.

Berikut diberikan contoh grafik dan beberapa kurva level fungsi $f(x,y) = 100 - x^2 - y^2$.



Bidang $z = c$ sejajar dengan bidang-xy dan memotong permukaan $z = f(x, y)$ menghasilkan **kurva kontur** (*contour curve*). Berikut diberikan contoh grafik dan kurva kontur fungsi $f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$.



Contoh Kurva Level dan Kurva Kontur

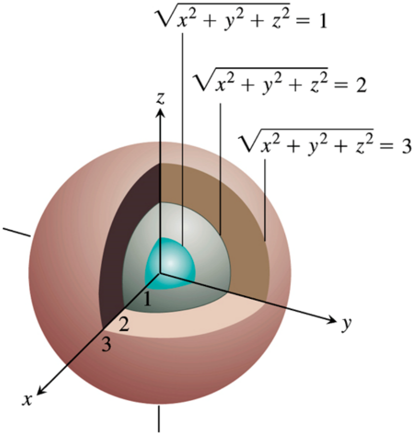
Fungsi $z = f(x, y) = x^2 + y^2$.

Definisi

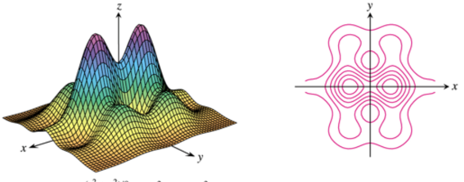
Himpunan titik-titik (x, y, z) pada bidang dimana fungsi dengan tiga variabel independen bernilai konstan $f(x, y, z) = c$ disebut **level permukaan** (*level surface*) dari f.

Level Permukaan

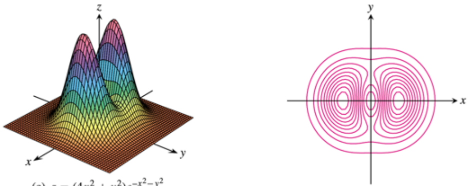
Berikut diberikan contoh level permukaan fungsi $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ berbentuk bola kosentris.



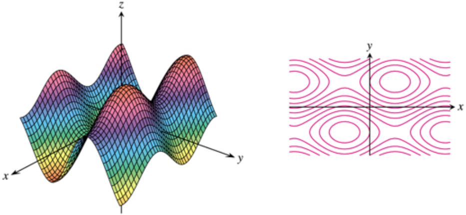
Level Permukaan Fungsi Dua Variabel



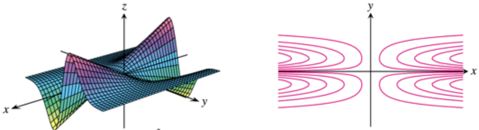
(a) $z = e^{-(x^2+y^2)/8}(\sin x^2 + \cos y^2)$



(c) $z = (4x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$



(b) $z = \sin x + 2\sin y$



(d) $z = xye^{-y^2}$

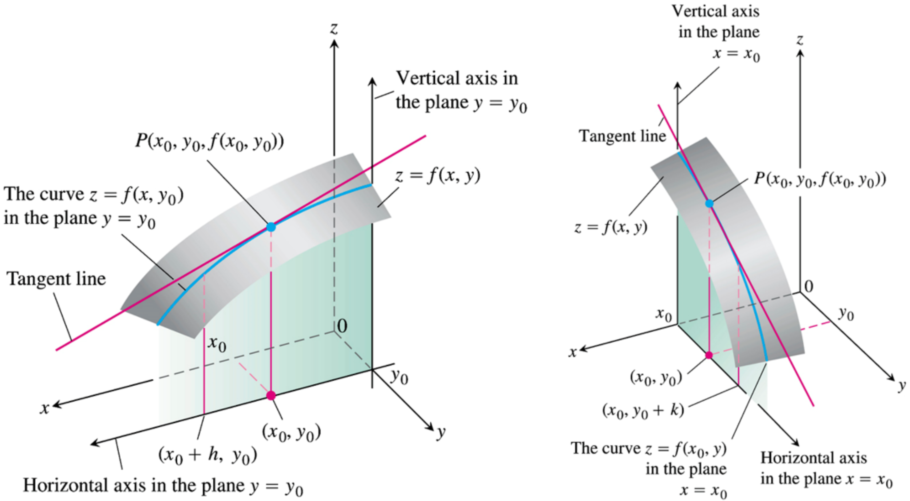
2. Derivatif Parsial

Diberikan $z = f(x, y)$ fungsi dua variabel. Grafik fungsi tersebut membentuk permukaan di bidang-xyz. Kita tetapkan nilai $y = y_0$ dan biarkan x bebas. Kita dapatkan fungsi satu variabel

$$z = f(x, y_0).$$

Grafik fungsi ini berada pada bidang vertikal $y = y_0$ dengan gradien garis singgung di titik P dengan $x = x_0$ diberikan oleh derivatif

$$\left.\frac{d}{dx} f(x, y_0)\right|_{x_0}, \quad \text{atau} \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)}.$$


z
Vertical axis in
the plane $y = y_0$
$P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$
$z = f(x, y)$
The curve $z = f(x, y_0)$
in the plane $y = y_0$
Tangent line
0
x_0
y_0
x
y
(x_0, y_0)
$(x_0 + h,\ y_0)$
Horizontal axis in the plane $y = y_0$
Vertical axis
in the plane
$x = x_0$
z
Tangent line
$P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$
$z = f(x, y)$
0
x_0
y_0
x
y
(x_0, y_0)
$(x_0, y_0 + k)$
The curve $z = f(x_0, y)$
in the plane
$x = x_0$
Horizontal axis
in the plane $x = x_0$

Definisi

- Derivatif parsial fungsi $f(x,y)$ terhadap x di titik (x_0, y_0) adalah

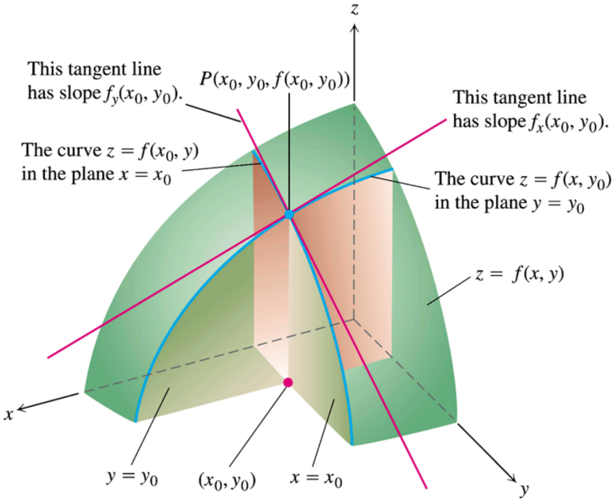
$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

  asalkan limitnya ada.

- Derivatif parsial fungsi $f(x,y)$ terhadap y di titik (x_0, y_0) adalah

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h},$$

  asalkan limitnya ada.



This tangent line has slope $f_y(x_0, y_0)$.
$P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$
z
This tangent line has slope $f_x(x_0, y_0)$.
The curve $z = f(x_0, y)$ in the plane $x = x_0$
The curve $z = f(x, y_0)$ in the plane $y = y_0$
$z = f(x, y)$
x
y
$y = y_0$
(x_0, y_0)
$x = x_0$

Contoh

Tentukan nilai $\frac{\partial f}{\partial x}$ dan $\frac{\partial f}{\partial y}$ di titik $(4, -5)$ jika $f(x, y) = x^2 + 3xy + y - 1$.

Penyelesaian: Untuk mencari $\frac{\partial f}{\partial x}$, kita anggap y bernilai konstan dan turunkan fungsi terhadap x:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 3xy + y - 1) = 2x + 3y + 0 - 0 = 2x + 3y.$$

Nilai $\frac{\partial f}{\partial x}$ di $(4, -5)$ adalah $2(4) + 3(-5) = -7$.

Untuk mencari $\frac{\partial f}{\partial y}$, kita anggap x bernilai konstan dan turunkan fungsi terhadap y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 3xy + y - 1) = 0 + 3x + 1 - 0 = 3x + 1.$$

Nilai $\frac{\partial f}{\partial y}$ di $(4, -5)$ adalah $3(4) + 1 = 13$.

Menghitung Derivatif Parsial

Contoh

Tentukan nilai $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ jika $f(x, y) = y \sin xy$.

Penyelesaian: Kita anggap x bernilai konstan dan f sebagai perkalian y dan $\sin xy$:

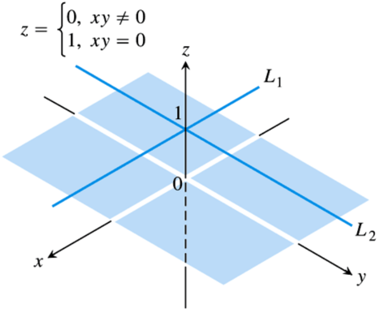
$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(y \sin xy) = y \frac{\partial}{\partial y} \sin xy + (\sin xy) \frac{\partial}{\partial y}(y) \\ &= (y \cos xy) \frac{\partial}{\partial y}(xy) + \sin xy = xy \cos xy + \sin xy.\end{aligned}$$

Contoh

Jika x, y dan z adalah variabel independen dan $f(x, y, z) = x\sin(y + 3z)$, tentukan $\dfrac{\partial f}{\partial z}$.

Penyelesaian: Kita anggap x dan y bernilai konstan dan turunkan fungsi terhadap z:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}[x\sin(y+3z)] = x\frac{\partial}{\partial z}\sin(y+3z) \\ &= x\cos(y+3z)\frac{\partial}{\partial z}(y+3z) = 3x\cos(y+3z). \end{aligned}$$



Grafik fungsi $f(x, y) = \begin{cases} 0, & xy \neq 0 \\ 1, & xy = 0 \end{cases}$ terdiri dari garis L_1 dan L_2 dan empat kuadran terbuka pada bidang-xy. Fungsi tersebut mempunyai derivatif parsial di titik asal $(0, 0)$ tetapi tidak kontinu.

Contoh

Jika $f(x,y) = x\cos y + ye^x$, tentukan $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Penyelesaian: Perhatikan bahwa $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \cos y + ye^x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -x\sin y + e^x$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = ye^x \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -\sin y + e^x \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -x\cos y \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -\sin y + e^x.
\end{aligned}
$$

Sifat Derivatif Parsial

Teorema

Jika $f(x, y)$ *dan partial derivatif* f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} *terdefinisi pada sebuah daerah terbuka yang memuat titik* (a, b) *dan kontinu pada* (a, b), *maka*

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b).$$

Teorema

Misalkan derivatif parsial $f(x, y)$ *terdefinisi di suatu region* R *yang memuat* (x_0, y_0) *dan* f_x *serta* f_y *kontinu di titik* (x_0, y_0), *maka perubahan*

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

dari nilai f *yang dihasilkan oleh pergerakan dari titik* (x_0, y_0) *ke titik* $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ *di* R *memenuhi persamaan*

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

dengan sifat $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$ *saat kedua* $\Delta x, \Delta y \to 0$.

Definisi

Fungsi $z = f(x, y)$ *disebut* ***terdiferensial*** *di titik* (x_0, y_0) *jika* $f_x(x_0, y_0)$ *dan* $f_y(x_0, y_0)$ *ada dan* Δz *memenuhi persamaan*

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

dengan sifat $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$ *saat kedua* $\Delta x, \Delta y \to 0$*. Kita sebut* f ***terdiferensial*** *jika* f *terdiferensial pada setiap titik di domainnya.*

Akibat

Jika derivatif parsial f_x *dan* f_y *dari* $f(x, y)$ *kontinu pada region terbuka* R*, maka* f *terdiferensial di setiap titik di* R*.*

Pertanyaan umum di kalkulus adalah menentukan titik dimana fungsi tersebut mencapai nilai maksimum dan minimum lokal.

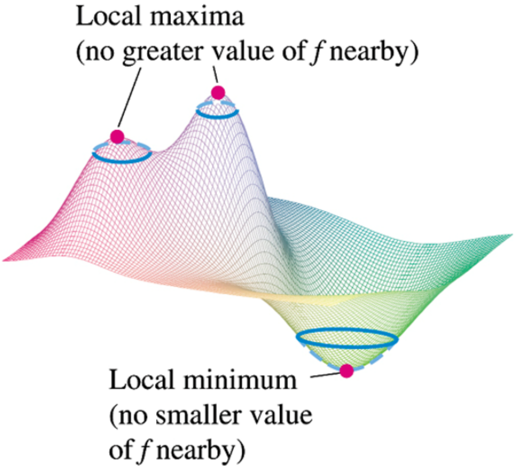
Definisi

Diberikan fungsi $f(x, y)$ yang terdefinisi pada region R yang memuat titik (a, b). Selanjutnya,

(a) *$f(a, b)$ adalah nilai **maksimum lokal** f jika $f(a, b) \geq f(x, y)$ untuk setiap titik (x, y) pada suatu cakram terbuka yang berpusat di (a, b).*

(b) *$f(a, b)$ adalah nilai **minimum lokal** f jika $f(a, b) \leq f(x, y)$ untuk setiap titik (x, y) pada suatu cakram terbuka yang berpusat di (a, b).*

Maksimum dan Minimum Lokal

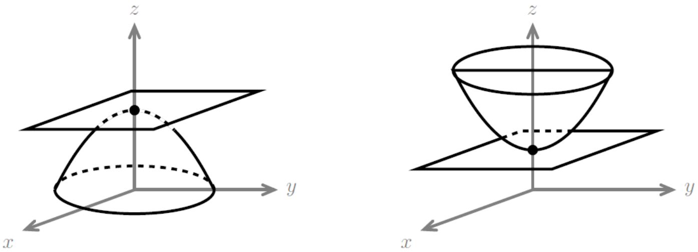


Seperti pada kalkulus satu variabel, kita mencari nilai maksimum dan minimum di titik (x_0, y_0) dimana turunan pertamanya bernilai 0. Dengan cara yang serupa, kita definisikan **titik kritis** sebagai titik (x_0, y_0) dengan

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

atau $f_x(x_0, y_0)$ dan $f_y(x_0, y_0)$ kedua tidak ada. Jadi suatu fungsi dapat mempunyai lebih dari satu titik kritis atau tidak memilikinya sama sekali. Kita selanjutnya menyelidiki kapan titik tersebut membuat fungsi mencapat minimum atau maksimul lokal.

Hal yang perlu diverifikasi adalah apakah titik maksimum dan minimum terjadi di titik kritis tersebut. Gambar berikut mencitrakan bahwa maksimum dan minimum terjadi saat bidang singgungnya sejajar bidang-xy.



Karena bidang sejajar bidang-xy mempunyai bentuk $z =$konstan dan persamaan bidang singgung di (x_0, y_0, z_0) adalah

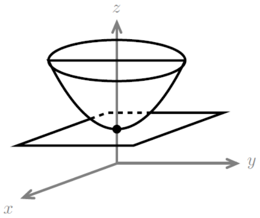
$$z = z_0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

maka bidang tersbut akan sejajar bidang-xy saat $f_x = 0$ dan $f_y = 0$.

Contoh

Tentukan titik kritis $z = x^2 + y^2 + 5$.

Penyelesaian: Perhatikan bahwa $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x$ dan $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y$. Jelas bahwa titik dimana kedua derivatif parsial bernilai 0 adalah di titik $(0, 0)$.
Akibatnya, hanya terdapat satu titik kritis di $(0, 0)$.



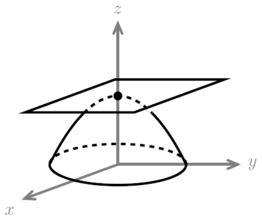
Dari gambar di atas dapat dilihat bahwa z bernilai minimum di titik $(0, 0)$.

Contoh

Tentukan titik kritis $z = 1 - x^2 - y^2$.

Penyelesaian: Perhatikan bahwa $\frac{\partial z}{\partial x} = -2x$ dan $\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$. Jelas bahwa titik dimana kedua derivatif parsial bernilai 0 adalah di titik $(0, 0)$.

Akibatnya, hanya terdapat satu titik kritis di $(0, 0)$.

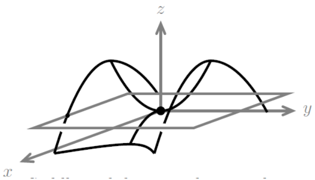


Dari gambar di atas dapat dilihat bahwa z bernilai maksimum di titik $(0, 0)$.

Contoh

Tentukan titik kritis $z = -x^2 + y^2$.

Penyelesaian: Perhatikan bahwa $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -2x$ dan $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y$. Jelas bahwa titik dimana kedua derivatif parsial bernilai 0 adalah di titik $(0,0)$.
Akibatnya, hanya terdapat satu titik kritis di $(0,0)$.



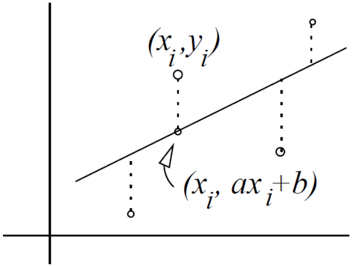
Dari gambar di atas dapat dilihat bahwa titik tersebut buka maksimum atau minimum.

Misalkan kita mempunyai sebanyak n data hasil ekperimen yang ditentukan oleh titik-titik dimana kita ingin membuat kurva melalui titik-titik tesebut. Kurva yang ingin kita buat "tidak harus melalui titik-titik tersebut" (karena pengaruh error pada eksperimen) dan diusahakan mulus. Salah satu bentuk kurva yang dicari adalah garis.

Misalkan kita mempunyai data titik-titik

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ \ldots, (x_n, y_n)$$

dan kita ingin mencari garis $y = ax + b$ "yang terbaik" melewati titik-titik tersebut.



Pemilihan nilai a dan b terbaik diperoleh dengan cara meminimalkan jumlahan D dengan

$$D = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2.$$

Cara mencari garis tersebut disebut sebagai **metode least squares** dan garis yang dihasilkan disebut **garis least squares** atau **garis regresi**.

Untuk menentukan nilai a dan b yang meminimumkan D, kita perhatikan bahwa:

$$\frac{\partial D}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - ax_i - b)(-x_i) = 0$$

$$\frac{\partial D}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - ax_i - b)(-1) = 0$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \left(\sum x_i^2\right) a + \left(\sum x_i\right) b &= \sum x_i y_i \\ \left(\sum x_i\right) a + nb &= \sum y_i . \end{aligned} \qquad (1)$$

Persamaan (1) biasanya dibagi dengan n sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \bar{s}a + \bar{x}b &= \frac{1}{n}\sum x_i y_i \\ \bar{x}a + b &= \bar{y}, \end{aligned} \tag{2}$$

dengan $\bar{x}$ dan $\bar{y}$ adalah rata-rata x_i dan y_i, dan $\bar{s} = \sum x_i^2/n$ adalah rata-rata kuadrat.

Contoh

Gunakan metode least square untuk mendapatkan garis least square dari data berikut:

$$(0,0), \quad (1,2), \quad (2,1), \quad (3,4).$$

Penyelesaian: Perhatikan bahwa $\overline{x} = 3/2$, $\overline{y} = 7/4$ dan $\overline{s} = 7/2$. Menggunakan persamaan (2) diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{7}{2}a + \frac{3}{2}b &= 4 \\ \frac{3}{2}a + b &= \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

Dengan menyelesaikan sistem persamaan di atas diperoleh $a = \frac{11}{10}$ dan $b = \frac{1}{10}$ sehingga garis least squre yang diinginkan adalah $10y = 11x + 1$.

Thank You