TKU211103 Kalkulus Variabel Jamak

Integral Permukaan /Surface Integral

Oleh: Tim Dosen Kalkulus Variabel Jamak

Semester Gasal 2021/2022

Departemen Matematika FMIPA UGM

Medan Vektor di $3D$

Diketahui D ruang berdimensi 3. Medan vektor pada D didefinisikan sebagai fungsi vektor $\mathbf{F} : \mathbb{R}^{\mathbf{3}} \to \mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ dengan

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{i} + P(x, y, z)\mathbf{k}.$$

Medan vektor $\mathbf{F}$ dikatakan kontinu pada domain D jika M, N, P kontinu pada D. Selanjutnya, medan $\mathbf{F}$ dikatakan terdiferensial kontinu pada D jika

$$M_x, M_y, M_z, N_x, N_y, N_z, P_x, P_y, \text{ dan } P_z$$

ada dan kontinu.

Interpretasi dari Medan Vektor di $3D$

1. Medan gaya (*force field*): gravitasi, elektrostatik dan elektromagnetik.
2. Medan aliran (*fluid field*) dan medan kecepatan (*velocity fields*) timbul dari gerakan fluida di suatu ruang. Gerakan di sini diasumsikan *steady-state* (arah dan besarnya tidak berubah terhadap waktu).

Medan aliran $\mathbf{F} = \delta \mathbf{V}$ (dengan $\delta(x, y, z)$ adalah densitas). Maka

- arah dari $\mathbf{F}$ adalah arah aliran.
- panjang/besar $|\mathbf{F}|$ adalah laju per satuan luas di mana massa diangkut melintasi sepotong kecil bidang tegak lurus terhadap aliran di titik (x, y, z).

Contoh

Tentukan medan gaya elektrostatik tiga dimensi $\mathbf{F}$ *yang timbul dari satu unit muatan positif yang ditempatkan di titik asal. Diasumsikan bahwa* $\mathbf{F}$ *diarahkan secara radial ke luar dari titik asal dan memiliki magnitudo* $\frac{1}{\rho^2}$ *, dengan* ρ *adalah jarak dari titik asal.*

Contoh

Tentukan medan gaya elektrostatik tiga dimensi $\mathbf{F}$ *yang timbul dari satu unit muatan positif yang ditempatkan di titik asal. Diasumsikan bahwa* $\mathbf{F}$ *diarahkan secara radial ke luar dari titik asal dan memiliki magnitudo* $\dfrac{1}{\rho^2}$ *, dengan* ρ *adalah jarak dari titik asal.*

Penyelesaian: Persamaan vektor dengan titik pangkal $(0,0,0)$ dan titik ujung (x,y,z) adalah $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$. Jelas vektor ini memiliki arah radial ke luar dan memiliki magnitudo ρ. Jadi

$$\mathbf{F} = \frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{\rho^3},$$

dengan $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Contoh 2

Contoh

Tentukan gaya tarik gravitasi setengah bola padat (solid half-sphere) bagian atas dengan jari-jari a *dan pusat* $(0, 0, 0)$ *dan massanya* m_0 *di titik* $(0, 0, 0)$. *Asumsikan setengah bola ini memiliki densitas* $\delta = z$.

Contoh 2

Contoh

Tentukan gaya tarik gravitasi setengah bola padat (solid half-sphere) bagian atas dengan jari-jari a *dan pusat* $(0,0,0)$ *dan massanya* m_0 *di titik* $(0,0,0)$. *Asumsikan setengah bola ini memiliki densitas* $\delta = z$.

Penyelesaian: Misalkan gaya tarik grafitasi adalah $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$. Berdasarkan sifat simetri $M = N = 0$. Di titik (x,y,z), volume kecil dV memiliki massa $dm = \delta(x,y,z)dV = zdV$. Pada uji tes massa, massa dm menghailkan gaya $\frac{Gm_0dm}{\rho^2}\frac{(x,y,z)}{\rho}$. Komponen-$z$ dari gaya ini adalah $\frac{zGm_0dm}{\rho^3}$.

Akibatnya, diperoleh

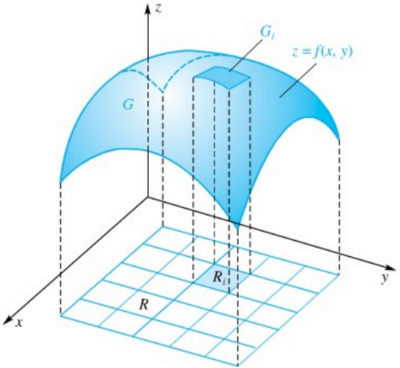
$$
\begin{aligned}
P &= \iiint_D \frac{zGm_0 z dV}{\rho^3} \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a Gm_0 \frac{z^2}{\rho^3} dV \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a Gm_0 \frac{\rho^2 \cos^2\phi}{\rho^3} \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a Gm_0 \rho \cos^2\phi \sin\phi d\rho d\phi d\theta \\
&= Gm_0 \pi \frac{a^2}{3}.
\end{aligned}
$$

Jadi $\mathbf{F} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + Gm_0\pi \frac{a^2}{3}\mathbf{k}$.

Integral Permukaan

Integral permukaan adalah generalisasi dari integral garis. Jika integral garis mengintegrasikan atas kurva, integral permukaan mengintegrasikan atas permukaan dalam ruang $3D$. Integral semacam ini penting untuk mempelajari hal yang berhubungan dengan media kontinu seperti padatan, cairan, gas, serta untuk mempelajari yang berhubungan dengan medan gaya, seperti medan elektromagnetik atau gravitasi.

Misalkan permukaan G adalah grafik dari $z = f(x, y)$, dimana (x, y) mempunyai rentang sebuah persegi panjang R pada bidang xy. Partisi P membagi R menjadi n subpersegi panjang R_i. Hal ini menyebabkan pembagian permukaan G menjadi sebanyak n buah G_i.



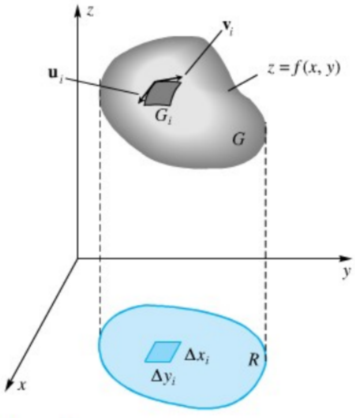
Dipilih sebuah titik, katakan $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ di R_i. Misalkan $(\bar{x}_i, \bar{y}_i, f(\bar{x}_i, \bar{y}_i))$ adalah titik G_i terkait. Intergral permukaan (*surface integral*) dari g pada G didefinisikan

$$\iint_G g(x, y, z)\, dS = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)\, \Delta S_i$$

dengan ΔS_i adalah luas G_i.

Definisi di atas dapat diperluas untuk kasus R adalah himpunan tertutup, dan terbatas umum pada bidang xy dengan cara biasa (yaitu memberikan g nilai 0 di luar R).

Misalkan permukaan G adalah grafik dari $z = f(x, y)$ dimana (x, y) berada di dalam R.



Luas dari sebuah potongan G_i dari sebuah permukaan dibuat hampirannya sebesar $\|\mathbf{u}_i \times \mathbf{v}_j\|$, dimana $\mathbf{u}_i$ dan $\mathbf{v}_j$ merupakan sisi-sisi jajar genjang yang menyinggung permukaan tersebut. Jadi

$$A(G_i) \approx \|\mathbf{u}_i \times \mathbf{v}_j\| \approx \sqrt{(f_x(x_i, y_i))^2 + (f_y(x_i, y_i))^2 + 1}\, \Delta y_i \, \Delta x_i$$

Teorema

Misalkan permukaan G adalah grafik dari $z = f(x, y)$ di mana (x, y) berada di dalam R. Jika f mempunyai turunan parsial orde-pertama kontinu dan $g(x, y, z) = g(x, y, f(x, y))$ kontinu di R, maka

$$\iint_G g(x, y, z)dS = \iint_R g(x, y, f(x, y))\sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1}dydx.$$

Jika $g(x, y, z) = 1$, maka diperoleh rumus untuk luas permukaan.

Contoh

Hitung $\iint_G (xy + z)dS$, *dimana* G *adalah bagian dari bidang* $2x - y + z = 3$ *di atas segitiga* R *dengan titik-titik sudut* $(0, 0), (1, 0), (1, 1)$.

Contoh

Hitung $\iint_G (xy+z)dS$, *dimana* G *adalah bagian dari bidang* $2x-y+z=3$ *di atas segitiga* R *dengan titik-titik sudut* $(0,0),(1,0),(1,1)$.

Penyelesaian: Dalam kasus ini $z=3-2x+y=f(x,y)$, maka $f_x=-2, f_y=1$, dan $g(x,y,z)=xy+3-2x+y$. Jadi

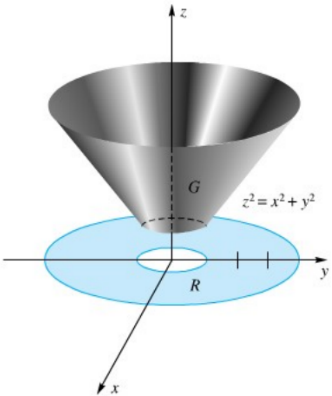
$$\iint_G (xy+z)\,dS = \int_0^1\int_0^x (xy+3+y-2x)\sqrt{(-2)^2+1^2+1}\,dy\,dx$$

$$=\sqrt{6}\int_0^1\left[\frac{xy^2}{2}+3y+\frac{y^2}{2}-2xy\right]_0^x dx$$

$$=\sqrt{6}\int_0^1\left[\frac{x^3}{2}+3x-\frac{3x^2}{2}\right]dx=\frac{9\sqrt{6}}{8}$$

Contoh

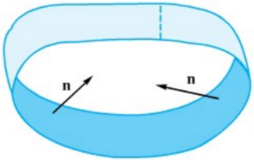
Hitung $\displaystyle\iint_G (xyz)dS$, *dimana* G *adalah bagian dari kerucut* $z = x^2 + y^2$ *di antara bidang* $z = 1$ *dan* $z = 4$. ***(Jawaban = 0)***



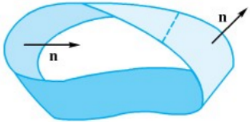
Contoh

Hitung $\iint_G (x^2 + y^2)dS$, *di mana* G *adalah bagian dari paraboloid* $y = 1 - x^2 - z^2$ *yang diproyeksikan ke* $R = \{(x, z) : 0 \leq x^2 + z^2 \leq 1\}$. ***(Jawaban =*** $\frac{(25\sqrt{5} + 1)\pi}{60}$***)***

Kebanyakan permukaan yang muncul dalam praktik mempunyai dua sisi. Ambilah sebuah kertas, sobeklah pada bagian yang diberi tanda garis putus-putus.

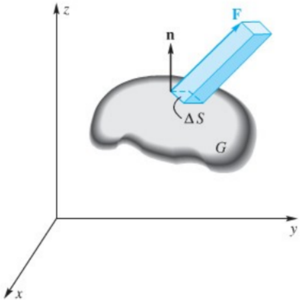


Plintir salah satu ujung pita dan rekatkan kembali. Diperoleh permukaan bersisi satu yang disebut pita M$\ddot{o}$bius.



Untuk pembahasan kali ini akan membahas permukaan bersisi dua, sehingga akan masuk akal ketika membicarakan fluida yang mengalir melalui permukaan tersebut dari satu sisi ke sisi lain seolah-olah permukaan ini layar. Dimisalkan juga permukaan ini licin, yang berarti mempunyai normal satuan **n** yang berubah-ubah secara kontinu. Misalkan G adalah permukaan bersisi dua yang licin, dan diasumsikan G dicelupkan ke dalam fluida dengan medan kecepatan kontinu $\mathbf{F}(x, y, z)$. Jika ΔS adalah luas dari potongan kecil G, maka $\mathbf{F}$ hampir konstan dan volume ΔV dari fluida yang menyebrangi potongan ini pada arah normal satuan **n** adalah

$$\Delta V = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, \Delta S.$$



Diperoleh

$$\text{fluks } \mathbf{F} \text{ yang menyebrangi G} = \iint_G \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS.$$

Contoh 6

Contoh

Tentukan fluks ke arah atas $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$ *yang menyebrangi bagian dari permukaan bola* G *yang dibentuk oleh*

$$z = f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2},\ 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4.$$

Contoh

Tentukan fluks ke arah atas $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$ *yang menyebrangi bagian dari permukaan bola* G *yang dibentuk oleh*

$$z = f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2},\ 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4.$$

Penyelesaian: Perhatikan bahwa medan $\mathbf{F}$ adalah arus rotasi yang mengalir pada arah sumbu z positif. Persamaan permukaan ini dapat ditulis sebagai

$$H(x, y, z) = z - \sqrt{9 - x^2 - y^2} = z - f(x, y) = 0.$$

Jadi

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla H}{|\nabla H|} = \frac{(x/z)\mathbf{i} + (y/z)\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{(x/z)^2 + (y/z)^2 + 1}}$$

adalah vektor satuan terhadap permukaan tersebut yang mengarah ke atas.

Contoh 6

Karena $x^2+y^2+z^2=9$, maka

$$\mathbf{n}=\frac{x}{3}\mathbf{i}+\frac{y}{3}\mathbf{j}+\frac{z}{3}\mathbf{k}.$$

Fluks $\mathbf{F}$ yang menyebrangi G dapat dinyatakan dengan

$$\begin{aligned}\text{flux} &= \iint_G \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS \\ &= \iint_G (-y\,\mathbf{i}+x\,\mathbf{j}+9\,\mathbf{k})\cdot\left(\frac{x}{3}\,\mathbf{i}+\frac{y}{3}\,\mathbf{j}+\frac{z}{3}\,\mathbf{k}\right)dS \\ &= \iint_G 3z\,dS\end{aligned}$$

Karena R adalah lingkaran dengan jari-jari 2 dan $\sqrt{(f_x)^2+(f_y)^2+1}=\dfrac{3}{z}$, diperoleh

$$\text{fluks} = \iint_G 3z\ dS = \iint_R 3z\frac{3}{z}\ dA = 36\pi.$$

Teorema

Diberikan permukaan G adalah mulus bersisi dua yang dibentuk oleh $z = f(x, y)$ di mana (x, y) berada di dalam R, dan $\mathbf{n}$ adalah normal satuan ke arah atas pada G. Jika f mempunyai turunan parsial orde-pertama kontinu dan $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ adalah medan vektor kontinu, maka fluks $\mathbf{F}$ menyebrangi G dapat dinyatakan dengan

$$\text{fluks } = \iint_G \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_G (-Mf_x - Nf_y + P)\, dx\, dy.$$

Contoh

Hitunglah fluks medan vektor $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ *yang menyebrangi bagian* G *dari paraboloid* $z = 1 - x^2 - y^2$ *yang terletak di atas bidang* xy*, meletakkan* $\mathbf{n}$ *menjadi normal ke arah atas.*

Penyelesaian:

$$f(x, y) = 1 - x^2 - y^2, \qquad f_x = -2x, \qquad f_y = -2y$$

$$\begin{aligned} -Mf_x - Nf_y + P &= 2x^2 + 2y^2 + z \\ &= 2x^2 + 2y^2 + 1 - x^2 - y^2 = 1 + x^2 + y^2 \end{aligned}$$

$$\iint_G \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_R (1 + x^2 + y^2)\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + r^2) r\, dr\, d\theta = \frac{3}{2}\pi$$

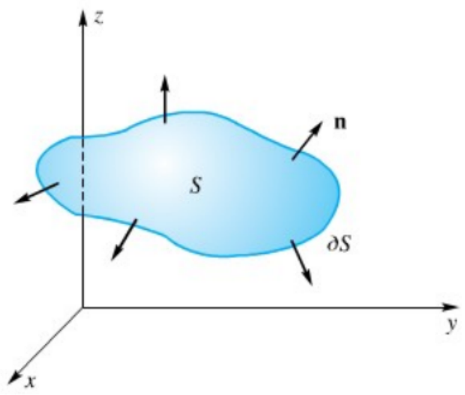
Teorema Divergensi Gauss

Diketahui S adalah benda padat terbatas dan tertutup di dalam ruang berdimensi tiga dan ∂S adalah batas S. Teorema Green dapat ditulis

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S \text{div } \mathbf{F} \, dA,$$

dengan div $\mathbf{F}(M, N, P) = M_x, N_y, P_z$.
Rumus di atas menyatakan bahwa fluks $\mathbf{F}$ menyeberangi batas ∂S dari daerah bidang S yang terbatas dan tertutup adalah sama dengan integral lipat dua dari div $\mathbf{F}$ pada daerah tersebut.

Diketahui S adalah benda padat terbatas dan tertutup di dalam ruang berdimensi tiga yang sepenuhnya ditutupi oleh permukaan ∂S yang mulus sepotong-sepotong.



Teorema Gauss (Teorema Divergensi)

Diketahui $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{i} + P\mathbf{k}$ medan vektor dengan M, N, P mempunyai turunan-turunan parsial orde-pertama yang kontinu pada benda padat S dengan batas ∂S. Jika $\mathbf{n}$ normal satuan luar yang tegak lurus ∂S, maka

$$\iint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_S \text{div } \mathbf{F}\, dV.$$

Dengan kata lain, fluks $\mathbf{F}$ yang menyebrangi batas dari daerah tertutup di dalam ruang berdimensi tiga adalah integral lipat tiga dari divergensinya pada daerah tersebut.

Contoh

Diketahui $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ *dan* $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$. *Tentukan fluks* $\mathbf{F}$ *yang menyebrangi batas dari daerah* S.

Contoh

Diketahui $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ *dan* $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$*. Tentukan fluks* $\mathbf{F}$ *yang menyebrangi batas dari daerah* S*.*

Penyelesaian:

(a.) **Cara 1:** Pada ∂S, $\mathbf{n} = \dfrac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{a}$ sehingga $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = a$. Jadi

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = a \iint_{\partial S} dS = 4a^3\pi.$$

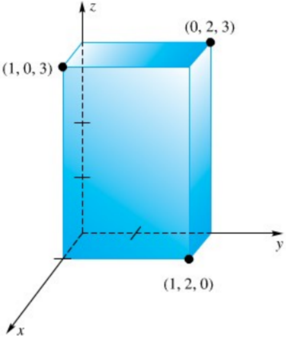
(b.) **Cara 2:** Karena div $\mathbf{F} = 3$, maka

$$\iiint_S \text{div } \mathbf{F}\, dV = 3 \iiint_S dV = 4a^3\pi.$$

Contoh

Hitung fluks $\mathbf{F} = x^2y\mathbf{i} + 2xz\mathbf{j} + yz^3\mathbf{k}$ *yang menyeberangi permukaan persegi panjang padat* S *yang ditentukan oleh*

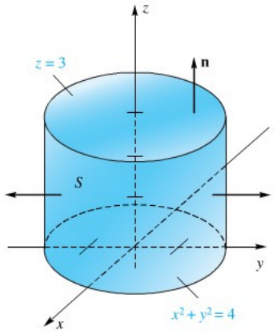
$$0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 2, \quad 0 \le z \le 3.$$



(Jawaban: 60)

Contoh

Diketahui S *adalah silinder padat yang dibatasi oleh* $x^2 + y^2 = 4, z = 0$ *dan* $z = 3$. *Jika* $\mathbf{F} = (x^3 + \tan yz)\mathbf{i} + (y^3 - e^{xy})\mathbf{j} + (3z + x^3)\mathbf{k}$, *tentukan fluks* $\mathbf{F}$ *menyebrangi* ∂S.



(Jawaban: 108π)

Sejauh ini, benda padat S diasumsikan tidak mempunyai lubang di bagian dalamnya dan batas ∂S terdiri dari satu permukaan yang terhubung. Kenyataanya, Teorema Gauss berlaku untuk sebuag benda padat dengan lubang-lubang asalkan ada $\mathbf{n}$ untuk menjauh dari bagian dalam benda padat tersebut.

Contoh S adalah cangkang padat diantara dua bola konsentris yang berpusat di titik asal. Teorema Gauss akan berlaku asalkan kita mengenali bahwa ∂S sekarang terdiri dari dua permukaan (permukaan luar di mana $\mathbf{n}$ menjauh dari titik asal dan permukaan dalam di mana $\mathbf{n}$ mengarah dari titik asal).

Contoh

Diketahui S *benda padat yang ditentukan oleh* $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ *dan* $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + (2y + z)\mathbf{j} + (z + x^2)\mathbf{k}$. *Hitung* $\displaystyle\iint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$.

Contoh 11

Contoh

Diketahui S *benda padat yang ditentukan oleh* $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ *dan* $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + (2y+z)\mathbf{j} + (z + x^2)\mathbf{k}$. *Hitung* $\displaystyle\iint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$.

Penyelesaian:

$$\iint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_S \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV$$

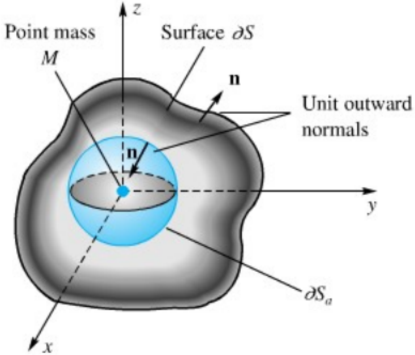
$$= \iiint_S (1 + 2 + 1)\, dV$$

$$= 4\left[\frac{4}{3}\pi(2^3) - \frac{4}{3}\pi(1^3)\right] = \frac{112\pi}{3}$$

Contoh 12

Contoh

Diketahui S adalah benda padat yang mengandung titik massa M di titik asal pada bagian dalamnya dan dengan medan $\mathbf{F} = -cM\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$ yang terkait. Tunjukkan fluks $\mathbf{F}$ menyeberangi ∂S adalah $-4Mc\pi$, terlepas bentuk S-nya.



Contoh 12

Penyelesaian: Karena $\mathbf{F}$ tidak kontinu di titik asal, maka Teorema Gauss tidak dapat diterapkan secara langsung.

Dibayangkan bola padat kecil S yang berpusat di $(0,0,0)$ dengan jari-jari a dipindahkan dari S, meninggalkan benda padat W dengan batas luar ∂S dan batas dalam ∂S_a. Akibatnya Teorema Gauss dapat diterapkan untuk W dan diperoleh

$$\iint_{\partial S} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\; dS + \iint_{\partial S_a} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\; dS = \iint_{\partial W} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = \iiint_{W} div\ \mathbf{F}\; dV.$$

Karena div $\mathbf{F} = 0$, maka

$$\iint_{\partial S} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\; dS = -\iint_{\partial S_a} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\; dS.$$

Contoh 12

Pada permukaan ∂S_a, $\mathbf{n} = \dfrac{-\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$ dengan $|\mathbf{r}| = a$. Akibatnya

$$
\begin{aligned}
-\iint\limits_{\partial S_a} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS &= -\iint\limits_{\partial S_a} \left(-cM \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}\right) \cdot \left(-\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}\right) dS \\
&= -cM \iint\limits_{\partial S_a} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{a^4}\, dS \\
&= -cM \iint\limits_{\partial S_a} \frac{1}{a^2}\, dS \\
&= \frac{-cM}{a^2} (4\pi a^2) = -4\pi c M
\end{aligned}
$$

Hasil di Contoh 12 dapat diperumum untuk kasus benda padat S yang mengandung k titik massa $M_1, M_2, \cdots, M_k$ di dalamnya. Hasilnya dikenal dengan **Hukum Gauss**, yang menyatakan fluks $\mathbf{F}$ menyeberangi ∂S sebagai

$$\iint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = -4c\pi(M_1 + M_2 + \cdots + M_k).$$

Selanjutnya, Hukum Gauss dapat diperluas untuk benda B dengan massa yang terdistribusi secara kontinu dan mempunyai ukuran M dengan membaginya menjadi potongan-potongan kecil dan menghampirinya dengan titik-titik massa tersebut. Diperoleh

$$\iint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = -4\pi cM,$$

untuk sebarang daerah S yang mengandung B.

Thank You