UNIVERSITAS GADJAH MADA

FAKULTAS TEKNIK

Departemen Teknik Elektro dan Teknologi Informasi

Program Studi SITETI

Soal Ujian Akhir Semester Genap2015/2016

Aljabar Linear

Bersifat Terbuka terbatas (contekan HVS A4 1 lembar bolak balik), tidak boleh menggunakan kalkulator,

untuk dikerjakan selama 120 Menit, kerjakan secara urut

1. **Beginner level (0-50 points)**

From the following vectors:

$$v_1 = (1,2,-1), v_2 = (4,8,-4), v_3 = (-1,-4,-2), v_4 = (4,9,-4), v_5 = (-1,1,1)$$

A matrix A, B and C are defined as

$$A = [v_1 v_2 v_3], B = [v_3 v_4 v_5], C = [v_1 v_2 v_3 v_4 v_5]$$

a. By inspection observe how many linear independent column vectors in C?
b. Find the pair of perpendicular vectors!
c. What is the column space of A?
d. What is the null space of A?
e. If $b = (5,8,-4)$, is Ax=b solvable? Why?

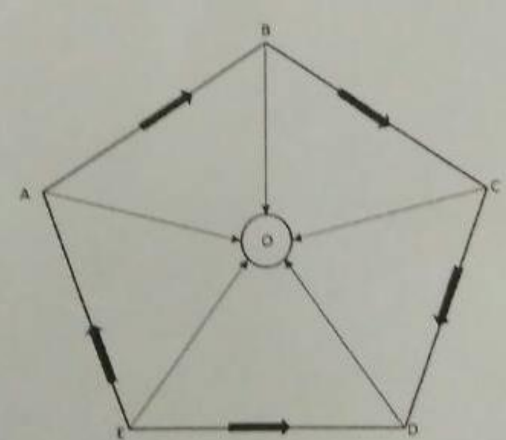
2. **Intermediate level (50-90 points)**

a. Using row operation convert C into reduced echelon form R! (safe the elimination matrix E for point 2 b)
b. If EC=R, what is E^{-1}?
c. For b=(-2,5,2), find all solution for Cx=b!
d. Find $D = \begin{bmatrix} v_1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot v_5^T$! What is the rank of matrix D?
e. Is $E = v_1 v_1^T$ symmetric?
f. Obtain $D = LDL^T$ if it is symmetric, otherwise obtain D=LU!
g. Is the solution of $av_1 + bv_2 + cv_5 = v_3$ form a subspace?
h. Is the solution of $av_1 + bv_2 + cv_5 = 0$ form a subspace?

3. **Expert level (90-100 points)**

After hundreds of years scientists deciphered a code from a series of signal from outer space that said "current in = current our at every node." The mistery below can be solved as long as we can obtain:

a. The equation $\Phi x = 0$, x is the currents from node i to j (for example x_{AB} is signal from node A to B)
b. The special solution of the nullspace of Φ!



1. $A = [v_1 \ v_2 \ v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -4 \\ -1 & -4 & -2 \end{bmatrix}$

$B = [v_3 \ v_4 \ v_5] = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -1 \\ -4 & 9 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

$C = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \ v_5] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -4 & 9 & 1 \\ -1 & -4 & -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

a) linear independent matriks C

col 1, 3, 4, 5 independent

col 2 dependent (col 2 = 4. col 1)

b) vektor perpendicular = saat dikalikan (dot product) hasilnya 0

$v_1 \cdot v_5^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot [-1 \ 1 \ 1] = -1 + 2 - 1 = 0$

$v_2 \cdot v_5^T = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix} [-1 \ 1 \ 1] = -4 + 8 - 4 = 0$

c) Column space A → linear kombinasi dari independent column matriks A

$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -4 \\ -1 & -4 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow C(A) = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$

independent

d) Null space A → solusi dari persamaan $Ax = 0$
(jumlah tergantung pada jumlah kolom dependent)

$[A|0] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & 8 & -4 & 0 \\ -1 & -4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ $R_2 - 2R_1$, $R_3 + R_1$

$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ $2R_3 - 3R_2$

$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$x_1 + 4x_2 - x_3 = 0$

$-2x_3 = 0 \rightarrow x_3 = 0$

$x_1 + 4x_2 = 0$
$x_1 = -4x_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} -4x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$

Null space $N(A) = x_2 \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ // → hanya 1 krn jmlh dependent column A hanya 1

e) if $b = (5, 8, -4)$

$Ax = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -4 \\ -1 & -4 & -2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$[A \quad b]$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 5 \\ 2 & 8 & -4 & 8 \\ -1 & -4 & -2 & -4 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_2 - 2R_1 \\ R_3 + R_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right] 2R_3 - 3R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right]$$

$Ax = b$
tidak memiliki solusi
karena rank$(A) \neq$ rank $[A \; b]$

(baris terakhir $[A \; b]$ tidak 0 saat baris terakhir $[A] = 0$)

2. Intermediate

From the following vectors

$$v_1 = (1,2,-1), v_2 = (4,8,-4), v_3 = (-1,-4,-2), v_4 = (4,9,-4), v_5 = (-1,1,1)$$

a matrix A, B, and C defined as

$$A = [v_1\ v_2 v_3], B = [v_3\ v_4\ v_5], C = [v_1\ v_2\ v_3\ v_4\ v_5]$$

a. Using rows operations, convert C into reduced echelon form R! *(safe elimination matrix E for point 2b).*

Jawaban:

Kita tuliskan matrix C secara keseluruhan dahulu

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -4 & 9 & 1 \\ -1 & -4 & -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Dengan **Eliminasi baris ketiga dan kedua terhadap baris pertama** $E_{31}E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

diperoleh $E_{31}E_{21}C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Kemudian dengan **Eliminasi baris ketiga terhadap baris kedua** $E_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-3}{2} & 1 \end{bmatrix}$, diperoleh

$$E_{32}E_{31}E_{21}C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-3}{2} & \frac{-9}{2} \end{bmatrix}$$

Setelah menemukan pivot, eliminasi semua entry yang se-kolom dengan pivot tersebut (selain pivotnya) menjadi nol

Eliminasi baris pertama, terhadap baris kedua $E_{12} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, diperoleh

$$E_{12}E_{32}E_{31}E_{21}C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{-5}{2} \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-3}{2} & \frac{-9}{2} \end{bmatrix}$$

Eliminasi baris pertama dan kedua terhadap baris ketiga $E_{23}E_{13}=\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{7}{3}\\ 0 & 1 & \frac{2}{3}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$,

menghasilkan $E_{23}E_{13}E_{12}E_{32}E_{31}E_{21}C=\begin{bmatrix}1 & 4 & 0 & 0 & -13\\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{-3}{2} & \frac{-9}{2}\end{bmatrix}$

Langkah terakhir yaitu **Menjadikan pivotnya bernilai 1**, dengan $D=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{-1}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{-2}{3}\end{bmatrix}$, diperoleh

$DE_{23}E_{13}E_{12}E_{32}E_{31}E_{21}C=R=\begin{bmatrix}1 & 4 & 0 & 0 & -13\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$(bentuk teduced echelon form matrix C)

b. If $\boldsymbol{EC=R}$, what is $\boldsymbol{E^{-1}}$?

Jawaban:

Jika diamati kesamaan posisinya dari jawaban point *a*, didapat bahwa $E=DE_{23}E_{13}E_{12}E_{32}E_{31}E_{21}$, sehingga $E^{-1}={E_{21}}^{-1}{E_{31}}^{-1}{E_{32}}^{-1}{E_{12}}^{-1}{E_{13}}^{-1}{E_{23}}^{-1}D^{-1}$. Dengan memaatkan sifat invers dari matrix eliminasi dan matrix diagonal , yakni misalkan untuk

${E_{12}}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, dan $D^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & \frac{-3}{2}\end{bmatrix}$, yang lain dicari sendiri ya…. hehe

Diperoleh $E^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 4\\ 2 & -4 & 9\\ -1 & -2 & -4\end{bmatrix}$

c. For **b**=(-2, 5, 2), find all solution of C**x**=**b**!

Jawaban:

Dari perhitungan pada point sebelumnya diperoleh matrix E sebagai $E=DE_{23}E_{13}E_{12}E_{32}E_{31}E_{21}$ sehingga EC = R. Sehingga C**x**=**b**, dapat diselesaikan dengan EC**x**=E**b,** atau R**x**=E**b,** sebagai berikut:

$E=\begin{bmatrix}\frac{34}{3} & -4 & \frac{7}{3}\\ \frac{-1}{3} & 0 & \frac{-1}{3}\\ \frac{-8}{3} & 1 & \frac{-2}{3}\end{bmatrix}$, maka E**b** = $\begin{bmatrix}-38\\ 0\\ 9\end{bmatrix}$, sehingga $\begin{bmatrix}1 & 4 & 0 & 0 & -13\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-38\\ 0\\ 9\end{bmatrix}$

Dari formasi R**x**=E**b** tersebut, diperoleh free variable x_2 dan x_5, karena kolom kedua dan kelima tidak memiliki pivot.

Mencari Particular Solution ($\boldsymbol{x_p}$)

Secara sederhana, dalam mencari particular solution, free variable diberi nilai nol, dalam hal ini $x_2 = x_5 = 0$, sehingga didapat $x_4 = 9, x_3 = 0, x_1 = -38$. Sehingga $\boldsymbol{x_p} = \begin{bmatrix} -38 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}$

Mencari Special Solution ($\boldsymbol{x_n}$)

Karena ada dua free variable, maka ada dua special solution, secara sederhananya untuk mencari tiap special solution dapat dengan memberi nilai 1 untuk satu free variable, dan nilai nol untuk free variable yang lain.

#untuk $x_2 = 1$ & $x_5 = 0$, diperoleh $x_4 = 9, x_3 = 0, x_1 = -42$

#untuk $x_2 = 0$ & $x_5 = 1$, diperoleh $x_4 = 6, x_3 = 0, x_1 = -25$

Sehingga $\boldsymbol{x_n} = \alpha \begin{bmatrix} -42 \\ 1 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -25 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Sehingga solusi keseluruhan untuk C**x** = **b** adalah $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_p} + \boldsymbol{x_n}$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -38 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -42 \\ 1 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -25 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

d. **Find $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v_1} \\ \boldsymbol{1} \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{v_1^T}$! What is the rank of matrix *D*?**

Jawaban:

By inspection, matrix D hanya memiliki rank 1, atau rank(D) = 1, karena setiap kolom matrix D merupakan perkalian scalar antara entry $\begin{bmatrix} \boldsymbol{v_1} \\ 1 \end{bmatrix}$ dengan $\boldsymbol{v}_1^T$.

$$D = \left[\begin{bmatrix} \boldsymbol{v_1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad 2\begin{bmatrix} \boldsymbol{v_1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad -\begin{bmatrix} \boldsymbol{v_1} \\ 1 \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

e. **Is $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{v_1}\boldsymbol{v_1^T}$ symmetric** ?

Jawaban**:**

E merupakan matrix symmetric karena E^T=E, $(\boldsymbol{v_1}\boldsymbol{v}_1^T)^T = (\boldsymbol{v}_1^T)^T \boldsymbol{v}_1^T = \boldsymbol{v_1}\boldsymbol{v}_1^T$

f. **Obtain $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{LDL^T}$ if it is symmetric, otherwise, find $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{LU}$!**

Jawaban:

matrix D tidak mungkin symmetric karena terlihat pada point d bahwa jumlah baris dan kolomnya berbeda.

Mungkin jika soal ini dianggap salah ketik menjadi **Obtain $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{LDL^T}$ if it is symmetric, otherwise, find $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{LU}$!**, maka matrix E symmetric seperti point e. Sebenarnya matrix $\boldsymbol{L^T}$ pada $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{LDL^T}$ merupakan matrix $\boldsymbol{U}$ pada $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{LDU}$ yang secara otomatis equivalent karena matrix $\boldsymbol{E}$ symmaetric.

$E = \boldsymbol{v_1}\boldsymbol{v}_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

Eliminasi baris kedua dan ketiga terhadap baris pertama $E_{31}E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, menjadi $E_{31}E_{21}E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, karena sudah membentuk matrix upper triangular(walaupun diagonalnya nol),maka sudah dapat dibentu E=LU dengan memanfaatkan sifat inverse matrix eliminasi, diperoleh $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Untuk mengubahnya menjadi $E = LDU$, diperlukan matrix *D* yaitu matrix diagonal yang entry diagonalnya diisi dengan **pivot** matrix upper triangular. Namun, karena matrix *U* pivotnya tidak lengkap (0 bukan pivot) maka tidak dapat dibentuk $E = LDU$ ataupun $E=LDL^T$.

g. **Is the solutions of $a\boldsymbol{v_1} + b\boldsymbol{v_2} + c\boldsymbol{v_5} = v_3$ form a subspace?**

Jawaban:

$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & 1 \\ -1 & -4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$ dengan meng eliminasi baris kedua dan baris ketiga terhadap baris pertama, didapatkan $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$, terlihat pada baris ketiga diperoleh persamaan $0a + 0b + 0c = -3$, kondisi ini tidak mungkin terselesaikan (not solvable) sehingga solusi persamaan $a\boldsymbol{v_1} + b\boldsymbol{v_2} + c\boldsymbol{v_5} = v_3$ tidak membentuk **subspace** karena memang tidak memiliki solusi.

h. Is the solutions of $a\boldsymbol{v_1} + b\boldsymbol{v_2} + c\boldsymbol{v_5} = 0$ form a subspace?

Jawaban:

Dengan mengeliminasi baris kedua dan ketiga terhadap baris pertama, didapatkan $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, dengan melakukan pertukaran baris (agar baris ketiga memiliki pivot),

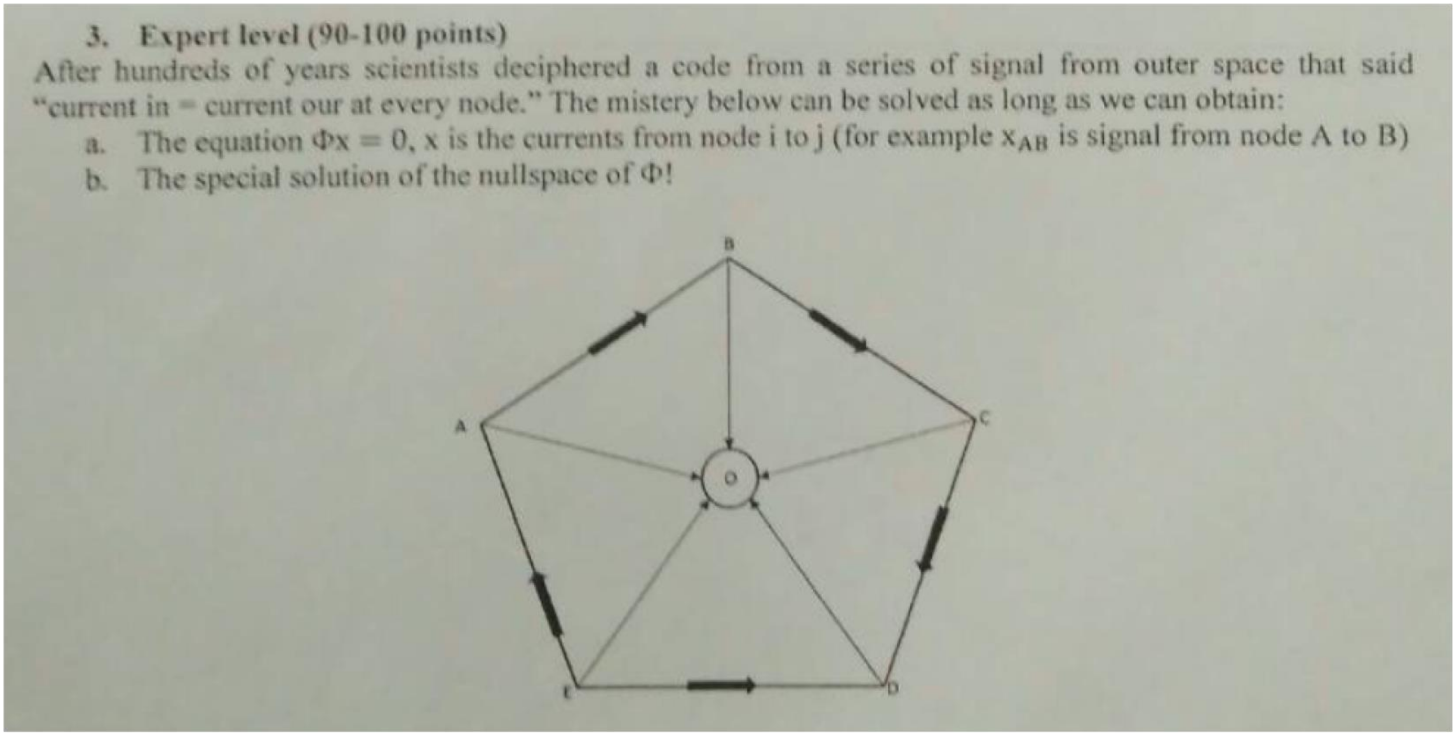
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$dan baris kedua tidak memiliki pivot, sehingga *b* menjadi free variable.

Untuk mencari special solutionnya, secara sederhana dengan *b*=1, sehingga didapat $c = 0, a = -4$. Dan untuk solusi keseluruhannya adalah $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$. Solusi tersebut merupakan Nullspace dari matrix $[v_1\ v_2\ v_5]$yang berbentuk garis yang melalui titik origin (yang dibuktikan untuk $\alpha = 0$). Sehingga "Ya" bahwa solusi $a\boldsymbol{v_1} + b\boldsymbol{v_2} + \mathrm{c}\boldsymbol{v_5} = 0$ adalah line yang merupakan subspace dari $\mathbb{R}^3$.[i]

---

[i] $\mathbb{R}^3$ di sini merupakan vector space di mana Nullspace berada. Vector space dari Nullspace adalah $\mathbb{R}^n$ dengan *n* adalah banyaknya kolom suatu matrix. Sedangkan Vector space dari column space adalah $\mathbb{R}^m$ dengan *m* banyaknya baris suatu matrix.



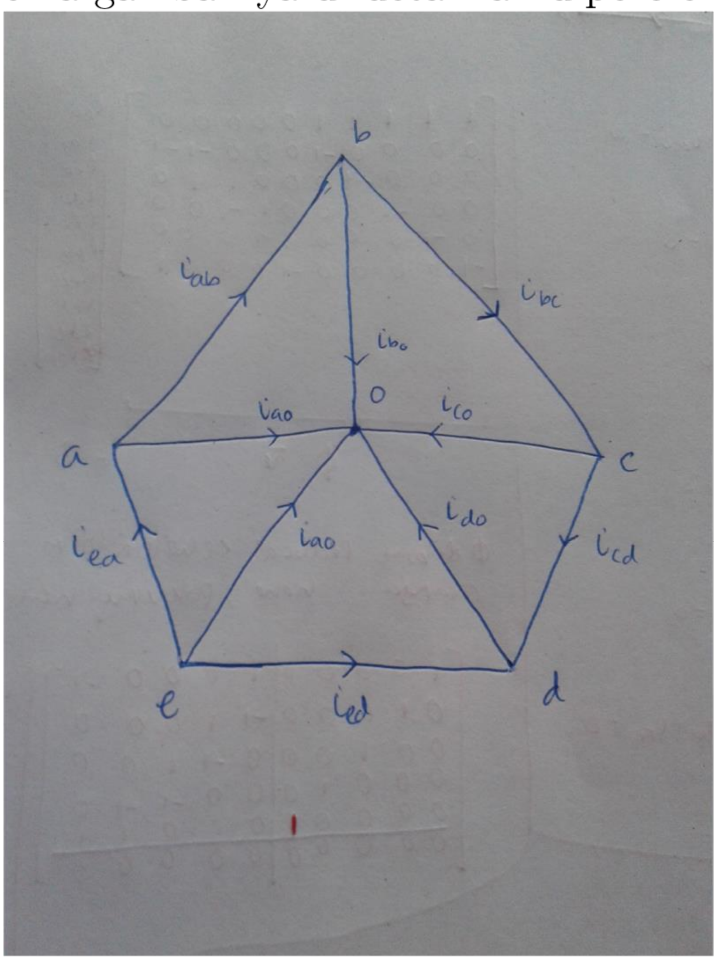
3. **Expert level (90-100 points)**

After hundreds of years scientists deciphered a code from a series of signal from outer space that said "current in = current our at every node." The mistery below can be solved as long as we can obtain:

a. The equation $\Phi x = 0$, x is the currents from node i to j (for example x_{AB} is signal from node A to B)

b. The special solution of the nullspace of Φ!

Jika gambarnya di-detailkan diperoleh berikut



Langkah a membuat persamaan arus ke dalam perkalian matrix $\mathbf{\Phi x} = \mathbf{0}$

\# Node o $\rightarrow +i_{ao} + i_{bo} + i_{co} + i_{do} + i_{eo} = 0$

\# Node e $\rightarrow -i_{ea} - i_{ed} - i_{eo} = 0$

\# Node d $\rightarrow +i_{cd} - i_{do} - i_{ed} = 0$

\# Node c $\rightarrow +i_{bc} - i_{co} - i_{cd} = 0$

Node b $\rightarrow +i_{ab} - i_{bo} - i_{bc} = 0$
Node a $\rightarrow +i_{ea} - i_{ab} - i_{ao} = 0$

Jika dibuat matrix menjadi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{ao} \\ i_{bo} \\ i_{co} \\ i_{do} \\ i_{eo} \\ i_{ab} \\ i_{bc} \\ i_{cd} \\ i_{de} \\ i_{ea} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian dengan mencari bentuk Reduced Echelon Form dari matrix $\mathbf{\Phi}$ tersebut seperti cara yang sudah disampaikan pada soal sebelumnya, diperoleh:

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} i_{ao} \\ i_{bo} \\ i_{co} \\ i_{do} \\ i_{eo} \\ i_{ab} \\ i_{bc} \\ i_{cd} \\ i_{de} \\ i_{ea} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dan ternyata bentuk matrix R nya dalam bentuk:

$R = \begin{bmatrix} I & F \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$

Sehingga dapat ditentukan matrix Nullspace (yang tiap kolomnya merupakan special solution) yang dikalikan vector yang elemennya skalar.

$N = \begin{bmatrix} -F \\ I \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} i_{ao} \\ i_{bo} \\ i_{co} \\ i_{do} \\ i_{eo} \\ i_{ab} \\ i_{bc} \\ i_{cd} \\ i_{de} \\ i_{ea} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \tau \\ \eta \end{bmatrix}$$

untuk $\alpha, \beta, \gamma, \tau, \eta$ adalah bilangan Real $\mathbb{R}$