TKU211103 Kalkulus Variabel Jamak

Double Integral/Integral Ganda

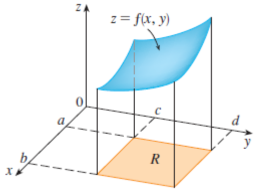
Oleh: Tim Dosen Kalkulus Variabel Jamak

Semester Gasal 2021/2022

Departemen Matematika FMIPA UGM

1. Definisi Double Integral

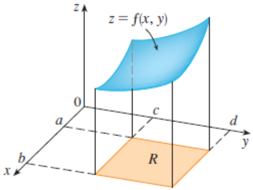
Motivasi (Volume dan Integral Ganda)



Diberikan persegi panjang

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d.\}$$

Motivasi (Volume dan Integral Ganda)



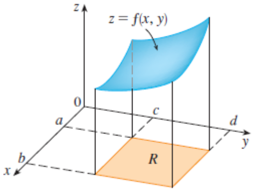
Diberikan persegi panjang

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ \ c \leq y \leq d.\}$$

Misalkan $f(x, y) \geq 0$. Grafik fungsi f adalah permukaan dengan persamaan $z = f(x, y)$. Misalkan S adalah daerah di bawah grafik f dan di atas R, yaitu

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in R\}.$$

Motivasi (Volume dan Integral Ganda)



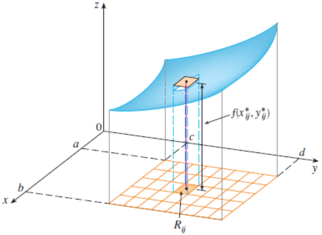
Diberikan persegi panjang

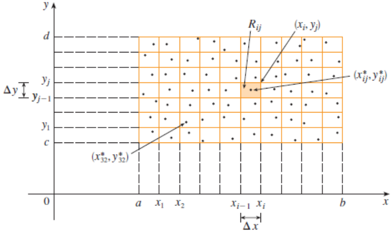
$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d.\}$$

Misalkan $f(x, y) \geq 0$. Grafik fungsi f adalah permukaan dengan persamaan $z = f(x, y)$. Misalkan S adalah daerah di bawah grafik f dan di atas R, yaitu

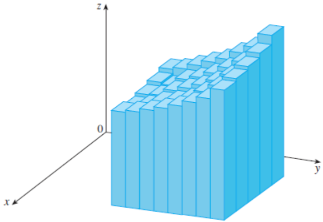
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in R\}.$$

Tujuan kita adalah **mencari volume** S.





$$V \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A, \qquad \Delta A = \Delta x \Delta y$$



Definisi

Integral ganda f atas persegi panjang R adalah

$$\iint_R f(x, y)\ dA = \lim_{m,n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

asalkan nilai limitnya ada.

Definisi

Integral ganda f atas persegi panjang R adalah

$$\iint_R f(x,y)\ dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A$$

asalkan nilai limitnya ada.

Akibatnya, jika $f(x,y) \geq 0$, maka **volume** V yaitu daaerah di bawah permukaan $z = f(x,y)$ dan diatas persegi panjang R adalah

$$V = \iint_R f(x,y)\ dA.$$

Menghitung integral ganda secara langsung sulit dilakukan namun integral ganda dapat dinyatakan sebagai integral iterasi.Misalkan f fungsi yang terintegral pada $R = [a, b] \times [c, d]$. Notasi $\int_c^d f(x, y)dy$ mempunyai arti bahwa x dibuat tetap (fixed) dan $f(x, y)$ diintegralkan terhadap y. Prosedur ini disebut **integral parsial** terhadap y.

Menghitung integral ganda secara langsung sulit dilakukan namun integral ganda dapat dinyatakan sebagai integral iterasi.Misalkan f fungsi yang terintegral pada $R = [a, b] \times [c, d]$. Notasi $\displaystyle\int_c^d f(x, y)dy$ mempunyai arti bahwa x dibuat tetap (fixed) dan $f(x, y)$ diintegralkan terhadap y. Prosedur ini disebut **integral parsial** terhadap y.

Misalkan

$$A(x) = \int_c^d f(x, y)dy.$$

Selanjutnya,

$$\int_a^b A(x)dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)dy\right] dx \qquad \ldots(1)$$

Integral pada ruas kanan persamaan (1) disebut "**integral iterasi**". Lebih lanjut,

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy \right] dx$$

Dengan cara yang serupa diperoleh

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)dydx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dy \right] dx$$

Contoh (1)

Hitunglah integral iterasi berikut: $(a)\ \int_0^3 \int_1^2 x^2 y dy dx \qquad (b)\ \int_1^2 \int_0^3 x^2 y dx dy$

Contoh (1)

Hitunglah integral iterasi berikut: $(a)\ \int_0^3 \int_1^2 x^2 y dy dx \qquad (b)\ \int_1^2 \int_0^3 x^2 y dx dy$

Penyelesaian:

(a) Dengan menganggap x sebagai konstanta diperoleh

$$\int_1^2 x^2 y dy = \left[x^2 \frac{y^2}{2} \right]_{y=1}^{y=2} = \frac{3}{2}x^2.$$

Akibatnya $A(x) = \frac{3}{2}x^2$. Selanjutnya,

$$\int_0^3 \int_1^2 x^2 y dy dx = \int_0^3 A(x) dx = \frac{3}{2} \int_0^3 x^2 dx = \frac{27}{2}.$$

Contoh (1)

Hitunglah integral iterasi berikut: $(a)\ \int_0^3 \int_1^2 x^2 y dy dx \qquad (b)\ \int_1^2 \int_0^3 x^2 y dx dy$

Penyelesaian:

(a) Dengan menganggap x sebagai konstanta diperoleh

$$\int_1^2 x^2 y dy = \left[x^2 \frac{y^2}{2} \right]_{y=1}^{y=2} = \frac{3}{2} x^2.$$

Akibatnya $A(x) = \frac{3}{2} x^2$. Selanjutnya,

$$\int_0^3 \int_1^2 x^2 y dy dx = \int_0^3 A(x) dx = \frac{3}{2} \int_0^3 x^2 dx = \frac{27}{2}.$$

(b) Dengan cara yang serupa diperoleh

$$\int_1^2 \int_0^3 x^2 y dx dy = \int_1^2 9y dy = \frac{27}{2}.$$

Teorema (Fubini)

Jika f kontinu pada persegi panjang

$$R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$$

maka,

$$\iint_R f(x, y)dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)dxdy.$$

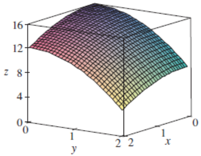
Contoh (2)

Tentukan volume benda solid S yang dibatasi oleh paraboloida elipis $x^2 + 2y^2 + z = 16$, bidang $x = 2$ dan $y = 2$ serta tiga bidang koordinat.

Contoh (2)

Tentukan volume benda solid S yang dibatasi oleh paraboloida elipis $x^2 + 2y^2 + z = 16$, bidang $x = 2$ dan $y = 2$ serta tiga bidang koordinat.

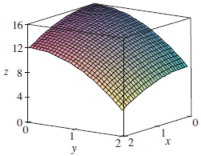
Penyelesaian: Pertama bahwa S berada di bawah permukaan $z = 16 - x^2 - 2y^2$ dan di atas persegi $R = [0, 2] \times [0, 2]$.



Contoh (2)

Tentukan volume benda solid S yang dibatasi oleh paraboloida elipis $x^2 + 2y^2 + z = 16$, bidang $x = 2$ dan $y = 2$ serta tiga bidang koordinat.

Penyelesaian: Pertama bahwa S berada di bawah permukaan $z = 16 - x^2 - 2y^2$ dan di atas persegi $R = [0, 2] \times [0, 2]$.



$$\begin{aligned} V &= \iint_R (16 - x^2 - 2y^2)\,dA = \int_0^2 \int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2)\,dx\,dy \\ &= \int_0^2 \left[16x - \frac{1}{3}x^3 - 2y^2x\right]_{x=0}^{x=2} dy = \int_0^2 \left(\frac{88}{3} - 4y^2\right) dy = 48. \end{aligned}$$

Double Integal Fungsi Separabel

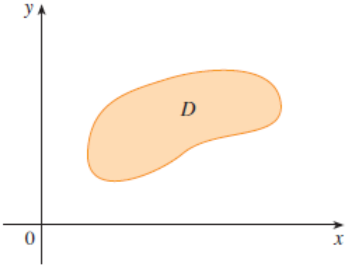
Misalkan $f(x,y) = g(x)h(y)$ dan $R = [a,b] \times [c,d]$, diperoleh

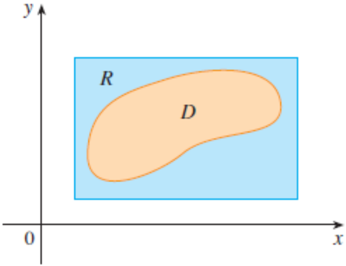
$$\begin{aligned}
\iint_R f(x,y)dA &= \int_c^d \int_a^b g(x)h(y)dxdy \\
&= \int_c^d \left[\int_a^b g(x)h(y)dx\right] dy = \int_c^d \left[h(y)\int_a^b g(x)dx\right] dy \\
&= \int_a^b g(x)dx \int_c^d h(y)dy.
\end{aligned}$$

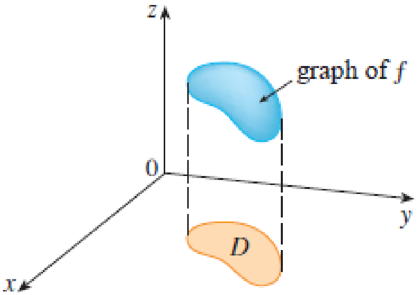
Jadi,

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b g(x)dx \int_c^d h(y)dy.$$

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{jika } (x,y) \in D \\ 0 & \text{jika } (x,y) \notin D. \end{cases}$$







Jika F terinteral pada R maka didefinisikan integral ganda fungsi f atas D sebagai

$$\iint_D f(x,y)dA = \iint_R F(x,y)dA.$$

Daerah D dikatakan masuk ke dalam tipe I jika

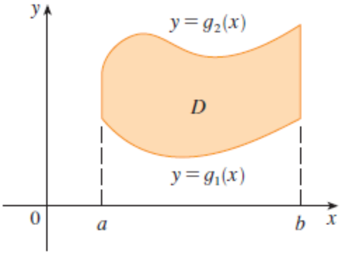
$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \quad g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

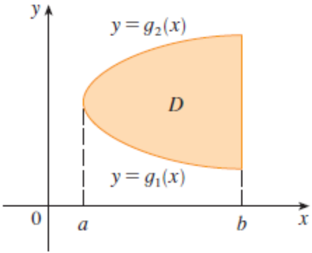
dengan g_1 dan g_2 kontinu pada $[a, b]$.

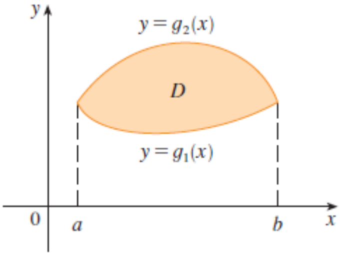
Daerah D dikatakan masuk ke dalam tipe I jika

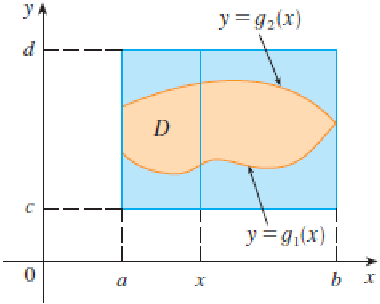
$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \quad g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

dengan g_1 dan g_2 kontinu pada $[a, b]$.







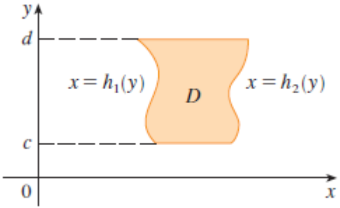


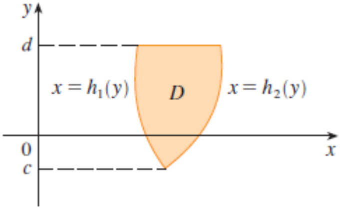
Jika f kontinu pada daerah tipe I D dengan

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

maka

$$\iint_D f(x, y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)dydx.$$





Daerah tipe II dapat dinyatakan sebagai

$$D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d,\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

$$\iint_D f(x, y)dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)dxdy.$$

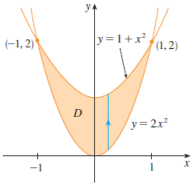
Contoh (3)

Hitunglah $\iint_D (x+2y)dA$, *dimana* D *adalah daerah yang dibatasi parabola* $y = 2x^2$ *dan* $y = 1 + x^2$.

Contoh (3)

Hitunglah $\iint_D (x+2y)\,dA$, *dimana* D *adalah daerah yang dibatasi parabola* $y = 2x^2$ *dan* $y = 1 + x^2$.

Penyelesaian:

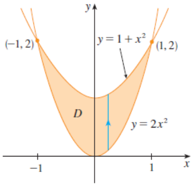


$$D = \{(x, y) \mid -1 \le x \le 1,\ \ 2x^2 \le y \le 1 + x^2\}.$$

Contoh (3)

Hitunglah $\iint_D (x+2y)dA$*, dimana* D *adalah daerah yang dibatasi parabola* $y = 2x^2$ *dan* $y = 1 + x^2$.

Penyelesaian:



$$D = \{(x, y) \mid -1 \le x \le 1,\ \ 2x^2 \le y \le 1 + x^2\}.$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned}\iint_D (x+2y)dA &= \int_{-1}^{1}\int_{2x^2}^{1+x^2} (x+2y)dydx = \int_{-1}^{1} \left[xy + y^2\right]_{y=2x^2}^{y=1+x^2} dx \\ &= \int_{-1}^{1} (-3x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1)dx = \frac{32}{15}\end{aligned}$$

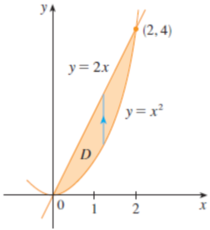
Contoh (4)

Hitunglah volume benda solid di bawah paraboloida $z = x^2 + y^2$ *dan di atas daerah* D *pada bidang-xy yang dibatasi oleh garis* $y = 2x$ *dan parabola* $y = x^2$.

Contoh (4)

Hitunglah volume benda solid di bawah paraboloida $z = x^2 + y^2$ *dan di atas daerah* D *pada bidang-*xy *yang dibatasi oleh garis* $y = 2x$ *dan parabola* $y = x^2$.

Penyelesaian:



Daerah D adalah tipe I dengan

$$D = \left\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, \;\; x^2 \leq y \leq 2x\right\}.$$

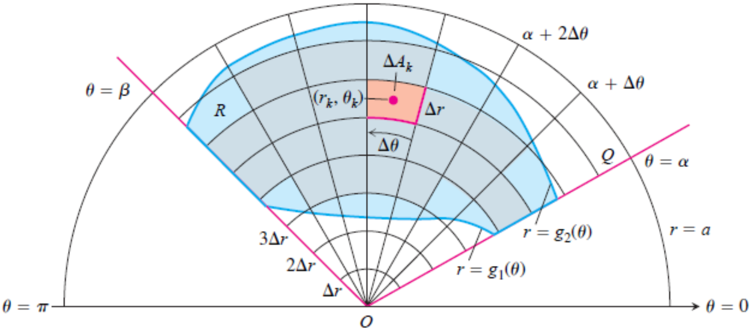
Akibatnya, volume benda di bawah $z = x^2 + y^2$ dan di atas D adalah

Lanjutan Penyelesaian:

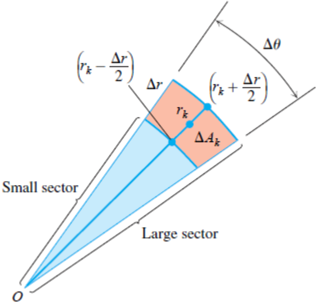
$$
\begin{aligned}
V &= \iint_D (x^2+y^2)\,dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2+y^2)\,dy\,dx \\
&= \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_{y=x^2}^{y=2x} dx \\
&= \int_0^2 \left[-\frac{x^6}{3} - x^4 + \frac{14x^3}{3}\right] dx \\
&= \left[-\frac{x^7}{21} - \frac{x^5}{5} + \frac{7x^4}{6}\right]_0^2 = \frac{216}{35}
\end{aligned}
$$

2. Double Integral pada Polar Koordinat

Pada koordinat polar, misalkan fungsi $f(r,\theta)$ didefinisikan pada region terbatas R yang dibatasi oleh sinar garis $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$, dan kurva kontinu $r = g_1(\theta)$ dan $r = g_2(\theta)$.



$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(r_k, \theta_k)\Delta A_k.$$



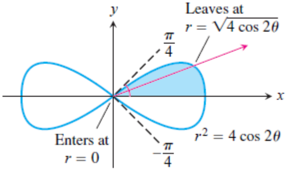
$$\Delta A_k = r_k \Delta r \Delta\theta, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} f(r_k, \theta_k) r_k \Delta r \Delta\theta, \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \iint_R f(r,\theta) r \, dr d\theta.$$

$$\iint_R f(r,\theta) r \, dr d\theta = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \int_{r=g_1(\theta)}^{r=g_2(\theta)} f(r,\theta) r \, dr d\theta.$$

Contoh (5)

Tentukan luas daerah tertutup lemniscate $r^2 = 4\cos 2\theta$.

Penyelesaian: Untuk menghitung luas kita pilih $f(r,\theta) = 1$.



Luas lemniscate adalah 4 kali luas daerah di kuadran 1 sehingga diperoleh

$$A = 4\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sqrt{4\cos 2\theta}} r\,drd\theta = 4\int_0^{\pi/4} 2\cos 2\theta d\theta = 4.$$

Double Integral pada Polar Koordinat

Kita dapat mengubah integral ganda $\iint_R f(x,y)dydx$ ke dalam bentuk integral polar. Pertama kita substitusi $x = r\cos\theta$ dan $y = r\sin\theta$ dengan $dxdy = r\,drd\theta$. Akibatnya diperoleh

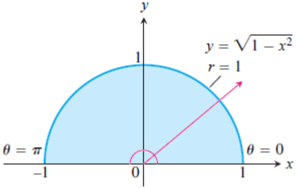
$$\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_G f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,drd\theta$$

dengan G adalah daerah integrasi pada koordinat polar.

Contoh (6)

Hitunglah $\iint_R e^{x^2+y^2}dydx$ *dengan R adalah setengah cakram yang dibatasi sumbu-x dan kurva* $y = \sqrt{1-x^2}$.

Penyelesaian: Substitusi $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ dan ganti $dxdy$ menjadi $r\,drd\theta$ sehingga diperoleh



$$\begin{aligned} \iint_R e^{x^2+y^2}dydx &= \int_0^\pi \int_0^1 e^{r^2}\,r\,drd\theta = \int_0^\pi \left[\frac{1}{2}e^{r^2}\right]_0^1 d\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{1}{2}(e-1)d\theta = \frac{\pi}{2}(e-1). \end{aligned}$$

3. Aplikasi Double Integral

TABLE 15.1 Mass and first moment formulas for thin plates covering a region R in the xy-plane

Mass: $M = \iint_R \delta(x, y)\, dA$ $\qquad$ $\delta(x, y)$ is the density at (x, y)

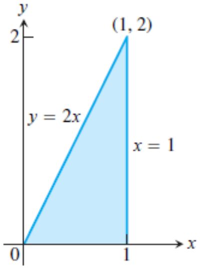
First moments: $M_x = \iint_R y\delta(x, y)\, dA, \qquad M_y = \iint_R x\delta(x, y)\, dA$

Center of mass: $\bar{x} = \dfrac{M_y}{M}, \qquad \bar{y} = \dfrac{M_x}{M}$

Contoh (7)

Sebuah pelat tipis menutupi daerah berbentuk segitiga yang dibatasi oleh sumbu-x, garis $x = 1$ *dan garis* $y = 2x$ *pada kuadran pertama. Densitas/ketebalan pelat tersebut pada titik* (x, y) *adalah* $\delta(x, y) = 6x + 6y + 6$. *Tentukan massa pelat, momen pertama, serta pusat massanya.*

Penyelesaian: Daerah yang dibatas pelat tersebut dapat dilihat pada gambar berikut.



Contoh Pusat Massa

Penyelesaian Lanjutan: Massa pelat tersebut adalah

$$\begin{aligned} M &= \int_0^1 \int_0^{2x} \delta(x,y)\, dydx = \int_0^1 \int_0^{2x} (6x+6y+6)\, dydx \\ &= \int_0^1 (24x^2+12x)\, dx = 14. \end{aligned}$$

Momen pertama terhadap sumbu-x diberikan oleh

$$M_x = \int_0^1 \int_0^{2x} y\delta(x,y)\, dydx = \int_0^1 \int_0^{2x} (6xy+6y^2+6y)\, dydx = \int_0^1 (28x^3+12x^2)\, dx = 11.$$

Dengan cara serupa diperoleh bahwa $M_y = \displaystyle\int_0^1 \int_0^{2x} x\delta(x,y)\, dydx = 10$. Akibatnya, diperoleh pusat massa pelat tersebut berada pada koordinat $(\overline{x}, \overline{y})$ dengan

$$\overline{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}, \qquad \overline{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{11}{14}.$$

Momen Inersia

TABLE 15.2 Second moment formulas for thin plates in the *xy*-plane

Moments of inertia (second moments):

About the x-axis: $$I_x = \iint y^2 \delta(x, y)\, dA$$

About the y-axis: $$I_y = \iint x^2 \delta(x, y)\, dA$$

About a line L: $$I_L = \iint r^2(x, y) \delta(x, y)\, dA,$$

where $r(x, y) =$ distance from (x, y) to L

About the origin (polar moment): $$I_0 = \iint (x^2 + y^2) \delta(x, y)\, dA = I_x + I_y$$

Radii of gyration:

About the x-axis: $R_x = \sqrt{I_x/M}$

About the y-axis: $R_y = \sqrt{I_y/M}$

About the origin: $R_0 = \sqrt{I_0/M}$

Contoh (8)

Menggunakan Contoh 7, tentukan momen inersia serta radius putaran terhadap sumbu koordinat dan titik pusat.

Penyelesaian: Dengan menggunakan fungsi densitas $\delta(x, y) = 6x + 6y + 6$, momen inersia terhadap sumbu-x diberikan oleh

$$\begin{aligned} I_x &= \int_0^1 \int_0^{2x} y^2 \delta(x, y)\, dydx = \int_0^1 \int_0^{2x} (6xy^2 + 6y^3 + 6y^2)\, dydx \\ &= \int_0^1 (40x^4 + 16x^3)\, dx = 12. \end{aligned}$$

Dengan cara serupa, momen inersia terhadap sumbu-y diberikan oleh

$$I_y = \int_0^1 \int_0^{2x} x^2 \delta(x, y)\, dydx = \frac{39}{5}.$$

Contoh Momen Inersia

Penyelesaian: Lebih lanjut, momen inersia terhadap titik pusat diberikan oleh

$$I_O = I_x + I_y = 12 + \frac{39}{5} = \frac{60+39}{5} = \frac{99}{5}.$$

Tiga radius putaran diberikan oleh

$$R_x = \sqrt{I_x/M} = \sqrt{12/14} = \sqrt{6/7} \approx 0,93$$

$$R_y = \sqrt{I_y/M} = \sqrt{\left(\frac{39}{5}\right)/14} = \sqrt{39/70} \approx 0,75$$

$$R_O = \sqrt{I_O/M} = \sqrt{\left(\frac{99}{5}\right)/14} = \sqrt{99/70} \approx 1,19.$$

4. Substitusi pada Double Integral

Misalkan region G pada bidang-uv ditransformasi satu-satu ke region R pada bidang-xy yang memenuhi persamaan

$$x = g(u, v), \qquad y = h(u, v).$$

Integral fungsi $f(x, y)$ pada R diberikan oleh

$$\iint_R f(x, y) dx\, dy = \iint_G f(g(u, v), h(u, v)) |J(u, v)| du\, dv.$$

dengan $J(u, v)$ merupakan matriks Jacobian. Integal di atas terdefinisi jika g, h, dan f mempunyai derivatif parsial yang kontinu.

Definisi (Jacobian)

Determinan Jacobian *atau* ***Jacobian*** *dari transformasi koordinat* $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$ *adalah*

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}.$$

Contoh (9)

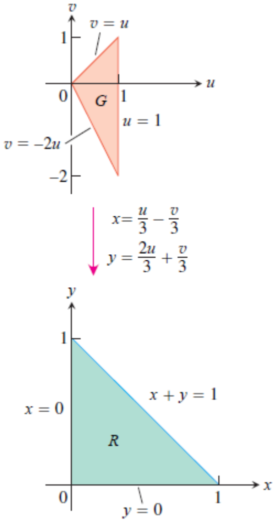
Hitunglah $\int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y}(y-2x)^2 dydx$.

Penyelesaian: Substitusi $u = x + y$ dan $v = y - 2x$ sehingga diperoleh

$$x = \frac{u}{3} - \frac{v}{3}, \qquad y = \frac{2u}{3} + \frac{v}{3}.$$

xy*-equations for the boundary of *R	**Corresponding *uv*-equations for the boundary of *G***	**Simplified *uv*-equations**
$x + y = 1$	$\left(\frac{u}{3} - \frac{v}{3}\right) + \left(\frac{2u}{3} + \frac{v}{3}\right) = 1$	$u = 1$
$x = 0$	$\frac{u}{3} - \frac{v}{3} = 0$	$v = u$
$y = 0$	$\frac{2u}{3} + \frac{v}{3} = 0$	$v = -2u$

Substitusi pada Double Integral



Penyelesaian: Jacobian dari transformasi tersebut adalah

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{3} & -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}.$$

Jadi diperoleh

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y}(y-2x)^2 dydx &= \int_{u=0}^{u=1} \int_{v=-2u}^{v=u} u^{1/2} v^2 |1/3| dvdu \\ &= \frac{1}{9} \int_0^1 u^{1/2}(9u^3) du = \int_0^1 u^{7/2} du = \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

Thank You