TKU211103 Kalkulus Variabel Jamak

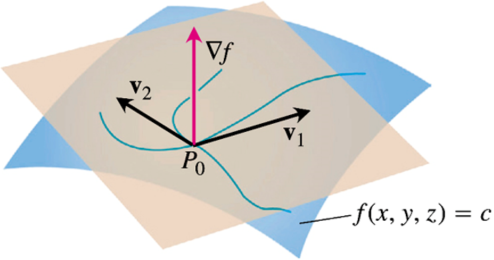
Derivatif Parsial Bag. 3

Tim Dosen Kalkulus Variabel Jamak

Semester Gasal 2021/2022 – 4 November 2021

Departemen Matematika FMIPA UGM

1.Bidang Singgung (Tangent Plane)



Vektor gradien fungsi f yaitu ∇f tegak lurus dengan vektor kecepatan dari setiap kurva mulus pada permukaan yang melalui titik P_0. Akibatnya, vektor kecepatan pada titik P_0 berada pada satu bidang yang sama, yang selanjutnya disebut bidang singgung di titik P_0.

Definisi

Bidang singgung *di titik* $P_0(x_0, y_0, z_0)$ *pada level permukaan* $f(x, y, z) = c$ *dari fungsi terdiferensial* f *adalah bidang yang melalui* P_0 *dan tegak lurus* $\nabla f|_{P_0}$.

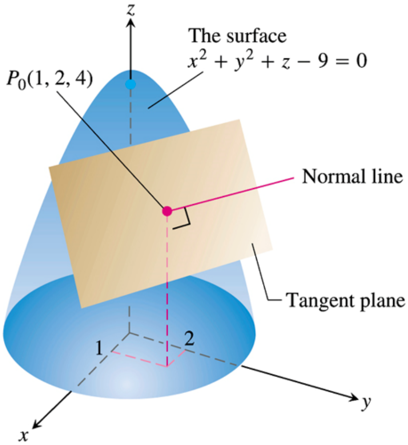
Garis normal *dari permukaan di titik* P_0 *adalah garis yang melalui* P_0 *dan paralel dengan* $\nabla f|_{P_0}$.

Akibatnya bidang singgung level permukan $f(x, y, z) = c$ di $P_0(x_0, y_0, z_0)$ diberikan oleh

$$f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + f_z(P_0)(z - z_0) = 0.$$

Sedangkan garis normal level permukan $f(x, y, z) = c$ di $P_0(x_0, y_0, z_0)$ diberikan oleh

$$x = x_0 + f_x(P_0)t, \qquad y = y_0 + f_y(P_0)t, \qquad z = z_0 + f_z(P_0)t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$


z
The surface
$x^2 + y^2 + z - 9 = 0$
$P_0(1, 2, 4)$
Normal line
Tangent plane
1
2
x
y

Contoh

Tentukan bidang singgung dan garis normal permukaan $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z - 9 = 0$ *di titik* $P_0(1, 2, 4)$.

Penyelesaian: Bidang singgung yang dimaksud adalah bidang yang melalui P_0 dan tegak lurus dengan gradien f di P_0. Gradiennya adalah

$$\nabla f|_{P_0} = (2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k})_{(1,2,4)} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Diperoleh bidang singgunnya adalah

$$2(x-1) + 4(y-2) + (z-4) = 0 \qquad \text{atau} \qquad 2x + 4y + z = 14.$$

Garis normal permukaan di titik P_0 adalah

$$x = 1 + 2t, \quad y = 2 + 4t, \quad z = 4 + t.$$

Bidang Singgung Permukaan $z = f(x, y)$

Untuk mendapatkan bidang singgung permukaan $z = f(x, y)$ di titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dengan $z_0 = f(x_0, y_0)$, perhatikan bahwa kita dapat menyatakan permukaan di atas ke dalam bentuk

$$f(x, y) - z = 0.$$

Akibatnya, permukaan $z = f(x, y)$ merupakan permukaan level nol dari fungsi $F(x, y, z) = f(x, y) - z$. Diperoleh derivatif parsial F sebagai berikut.

$$F_x = f_x, \qquad F_y = f_y, \qquad \text{dan} \qquad F_z = -1$$

sehingga diperoleh persamaan bidang singgunya adalah

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Contoh

Tentukan bidang singgung permukaan $z = f(x, y) = x \cos y - ye^x$ *di titik* $(0, 0, 0)$.

Penyelesaian: Kita hitung derivatif parsial $f(x, y)$ dan gunakan formula persamaan garis singgung sebelumnya:

$$f_x(0,0) = (\cos y - ye^x)_{(0,0)} = 1 - 0 \cdot 1 = 1.$$

$$f_y(0,0) = (-x \sin y - e^x)_{(0,0)} = 0 - 1 = -1.$$

Diperoleh bidang singgunnya adalah

$$1(x-0) - 1(y-0) - (z-0) = 0 \qquad \text{atau} \qquad x - y - z = 0.$$

Contoh

Perpotongan permukaan $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2 = 0$ *dan* $g(x, y, z) = x + z - 4 = 0$ *adalah sebuah elips* E. *Tentukan persamaan garis singgung* E *di titik* $P_0(1, 1, 3)$.

Penyelesaian: Garis singgung E tegak lurus dengan ∇f dan ∇g di P_0 sehingga sejajar dengan $\mathbf{v} = \nabla f \times \nabla g$. Diperoleh

$$\nabla f|_{(1,1,3)} = (2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j})_{(1,1,3)} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}.$$

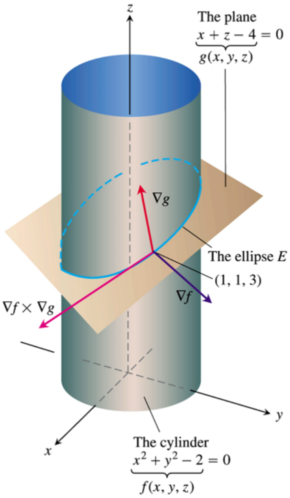
$$\nabla g|_{(1,1,3)} = (\mathbf{i} + \mathbf{k})_{(1,1,3)} = \mathbf{i} + \mathbf{k}.$$

$$\mathbf{v} = (2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \times (\mathbf{i} + \mathbf{k}) = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}.$$

Diperoleh persamaan garis singgunnya adalah

$$x = 1 + 2t, \qquad y = 1 - 2t, \qquad z = 3 - 2t.$$

Contoh Menentukan Garis Singgung Perpotongan Dua Permukaan



2. Linierisasi Fungsi Dua Variabel

Fungsi dua variabel kadang kala mempunyai bentuk rumit dan kita ingin menggantinya dengan bentuk yang lebih sederhana namun tetap menghasilkan akurasi yang sesuai dengan aplikasi tanpa kesulitan pada perhitungan. Pada fungsi satu variabel kita melakukan pendekatan linier dari fungsi awal.
Pada fungsi dua dimensi, kita perhatikan fungsi diferensiabel dapat dinyatakan dalam bentuk

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

dengan $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0$ dan $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$ saat $\Delta x, \Delta y \to 0$. Akibatnya kita peroleh

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0) =: L(x,y).$$

Dengan kata lain, sepanjang Δx dan Δy cukup kecil, f akan bernilai hampir sama dengan fungsi linier $L(x,y)$.

Definisi

Linierisasi *fungsi* $f(x, y)$ *di titik* (x_0, y_0) *dengan* f *diferensiabel adalah fungsi*

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Pendekatan

$$f(x, y) \approx L(x, y)$$

adalah ***pendekatan linier standar*** f *di* (x_0, y_0). *Lebih lanjut jika* f *mempunyai derivarif parsial tingkat satu dan dua yang kontinu pada suatu himpunan terbuka yang memuat persegi panjang* R *yang berpusat di* (x_0, y_0) *dan jika* M *adalah batas atas dari* $|f_{xx}|, |f_{yy}|$, *dan* $|f_{xy}|$ *pada* R *maka error* $E(x, y) = f(x, y) - L(x, y)$ *memenuhi*

$$|E(x, y)| \leq \frac{1}{2} M(|x - x_0| + |y - y_0|)^2.$$

Contoh

Tentukan linierisasi fungsi $f(x,y) = x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + 3$ *di titik* $(3,2)$ *dan tentukan batas errornya.*

Penyelesaian: Pertama-tama kita hitung nilai f, f_x, dan f_y di titik $(x_0, y_0) = (3,2)$:

$$f(3,2) = \left(x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + 3\right)_{(3,2)} = 8.$$

$$f_x(3,2) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + 3\right)_{(3,2)} = (2x - y)_{(3,2)} = 4.$$

$$f_y(3,2) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + 3\right)_{(3,2)} = (-x + y)_{(3,2)} = -1,$$

yang memberikan

$$\begin{aligned} L(x,y) &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0) \\ &= 8 + (4)(x-3) + (-1)(y-2) = 4x - y - 2. \end{aligned}$$

Jadi linierisasi f di $(3,2)$ adalah $L(x,y) = 4x - y - 2$.

Contoh

Tentukan linierisasi fungsi $f(x, y) = x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + 3$ *di titik* $(3, 2)$ *dan tentukan batas errornya.*

Penyelesaian Lanjutan: Untuk menghitung batas error, kita hitung batas f_{xx}, f_{yy}, dan f_{xy} pada bidang-xy:

$$|f_{xx}| = |2| = 2, \qquad |f_{yy}| = |1| = 1, \qquad |f_{xy}| = |-1| = 1,$$

yang memberikan $M = \max\{2, 1, 1\} = 2$ sehingga

$$|E(x, y)| \leq \frac{1}{2}M(|x - 3| + |y - 2|)^2 = (|x - 3| + |y - 2|)^2.$$

3. Diferensial

Pada fungsi satu variabel $y = f(x)$, kita definisikan perubahan pada f saat x berubah dari a ke $a + \Delta x$ dengan

$$\Delta f = f(a + \Delta) - f(a)$$

dan diferensial f dengan

$$df = f'(a)\Delta x.$$

Untuk fungsi dua variabel kita definisikan perubahan f sebagai

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Sedangkan perubahan pada L diberikan oleh

$$\Delta L = L(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - L(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Selanjutnya akan didefinisikan **total diferensial** fungsi f.

Diferensial dx dan dy adalah variabel bebas, sehingga bisa diatur nilainya. Sering kali kita ambil $dx = \Delta x = x - x_0$ dan $dy = \Delta y = y - y_0$. Definisi total diferensial diberikan sebagai berikut.

Definisi (Total Diferensial)

Jika kita gerakkan titik (x_0, y_0) ke titik $(x_0 + dx, y_0 + dy)$ disekitarnya, hasi perubahan

$$df = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$$

*dalam bentuk linierisasi f disebut **total diferensial** f.*

Contoh

Misalkan kaleng berbentuk silinder didesain dengan jari-jari 1 dm, dan tinggi 5 dm, namun hasilnya tidak sesuai rancangan dengan perbedaan $dr = +0,03$ *dan* $dh = -0,1$. *Hitunglah selisih absolut volume kaleng dengan estimasi awal.*

Penyelesaian: Untuk mengestimasi perubahan absolut pada $V = \pi r^2 h$, kita gunakan

$$\Delta V \approx dV = V_r(r_0, h_0)dr + V_h(r_0, h_0)dh.$$

Dengan $V_r = 2\pi rh$ dan $V_h = \pi r^2$, diperoleh

$$\begin{aligned} dV &= 2\pi r_0 h_0 dr + \pi r_0^2 dh = 2\pi(1)(5)(0,03) + \pi(1)^2(-0,1) \\ &= 0,3\pi - 0,1\pi = 0,2\pi \approx 0,63\text{dm}^3. \end{aligned}$$

4. Lagrange Multiplier

Pada beberapa kasus, kita diharapkan untuk menentukan nilai maksimum atau minimum suatu fungsi dengan syarat domainnya terletak pada suatu daerah khusus pada bidang–sebagai contoh cakram, segitiga tertutup, atau sepanjang kurva. Pada bagian ini kita akan menggunakan metode yang cukup ampuh untuk menentukan nilai maksimum dan minimum dengan syarat tertentu: metode *Lagrange Multipliers*.

Contoh

Tentukan titik $P(x, y, z)$ yang paling dekat dengan titik asal $((0, 0, 0))$ pada bidang $2x + y - z - 5 = 0$.

Penyelesaian: Masalah di atas adalah mencari nilai minimum dari fungsi

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

dengan syarat

$$2x + y - z - 5 = 0.$$

Karena $|\overrightarrow{OP}|$ mencapai nilai minimum ketika fungsi

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

mencapai nilai minimum, jadi kita hanya perlu mencari nilai minimum $f(x, y, z)$ dengan syarat $2x + y - z - 5 = 0$. Jika x dan y dianggap sebagai variabel independen maka dapat dituliskan

$$z = 2x + y - 5.$$

Contoh

Tentukan titik $P(x, y, z)$ yang paling dekat dengan titik asal $((0, 0, 0))$ pada bidang $2x + y - z - 5 = 0$.

Penyelesaian Lanjutan: Sehingga masalah di atas dapat direduksi menjadi mencari titik (x, y) sehingga $h(x, y)$ mencapai nilai minimum dengan

$$h(x, y) = f(x, y, 2x + y - 5) = x^2 + y^2 + (2x + y - 5)^2.$$

Lebih lanjut

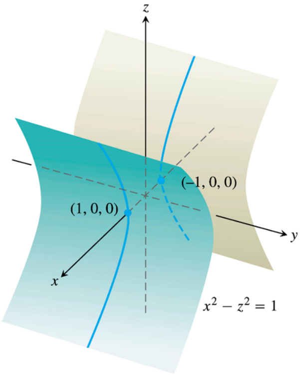
$$h_x = 2x + 2(2x + y - 5)(2) = 0, \qquad h_y = 2y + 2(2x + y - 5) = 0.$$

Diperoleh $x = \frac{5}{3}$ dan $y = \frac{5}{6}$ sehingga $z = 2(5/3) + 5/6 - 5 = -5/6$. Akibatnya, titik yang dimaksud adalah $P\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{6}, -\frac{5}{6}\right)$ dengan jarak ke titik pusat adalah $5/\sqrt{6} \approx 2,04$.

Cara penyelesaian seperti di atas (dengan substitusi) tidak selalu berjalan lancar. Inilah salah satu alasan dibentuknya metode Lagrange Multipliers.

Contoh

Tentukan titik terdekat dengan titik asal pada silinder hiperbolis $x^2 - z^2 - 1 = 0$.



Penyelesaian: Seperti pada kasus sebelumnya, kita ingin mencari titik (x_0, y_0, z_0) yang meminimalkan fungsi

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

dengan syarat $x^2 - z^2 - 1 = 0$. Jika kita memandang x dan y sebagai variabel independen, maka

$$z^2 = x^2 - 1$$

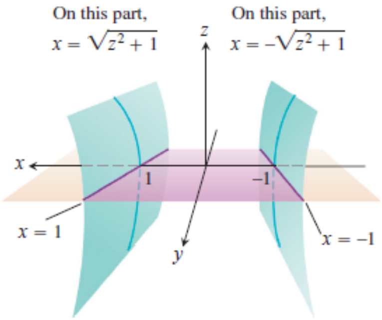
sehingga nilai fungsi f pada silinder diberikan oleh fungsi

$$h(x, y) = x^2 + y^2 + (x^2 - 1) = 2x^2 + y^2 - 1.$$

Dengan kata lain kita mencari titik pada bidang-xy yang meminimalkan h. Nilai ekstrem h terjadi saat

$$h_x = 4x = 0 \qquad \text{dan} \qquad h_y = 2y = 0$$

yaitu di titik $(0, 0)$. Namun tidak ada titik di silinder dimana nilai x dan y keduanya nol. Apa yang salah?



Yang terjadi adalah nilai minimum h tercapai pada domain h dimana domain ini tidak sama dengan domain silinder seperti pada gambar. Strip dari $x = -1$ sampai $x = 1$ tidak termasuk ke dalam domain silinder.

Hal ini dapat dihindari dengan memandang y dan z sebagai variabel bebas dengan $x^2 = z^2 + 1$ sehingga diperoleh

$$k(y, z) = (z^2 + 1) + y^2 + z^2 = 1 + y^2 = 2z^2$$

selanjutnya untuk nilai minimum terjadi di titik (y, z) dengan

$$k_y = 2y = 0 \qquad \text{dan} \qquad k_z = 4z = 0$$

yang dipenuhi oleh $y = z = 0$. Hal ini mengakibatkan $x^2 = 1$ yaitu $x = \pm 1$. Jadi nilai minimumnya tercapai pada titik $(\pm 1, 0, 0)$.

Metode Lagrange Multiplier digunakan untuk mencari nilai ekstrem fungsi $f(x, y, z)$ dengan variabel memenuhi persamaan $g(x, y, z) = 0$. Titik ekstrem ditemukan di permukaan $g = 0$ pada titik yang memenuhi

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

untuk suatu skalar λ (disebut **Lagrange multiplier**).

Metode Lagrange Multiplier

Misalkan $f(x, y, z)$ dan $g(x, y, z)$ terdiferensial. Untuk menemukan nilai minimum atau maksimum lokal f dengan syarat $g(x, y, z) = 0$, temukan nilai x, y, z dan λ secara simultan yang memenuhi persamaan

$$\nabla f = \lambda \nabla g \qquad \text{dan} \qquad g(x, y, z) = 0.$$

Untuk fungsi dua variabel independen, kondisinya serupa namun tanpa variabel z.

Contoh

Tentukan nilai minimum dan maksimum fungsi $f(x,y) = xy$ *pada domain ellips* $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} = 1$.

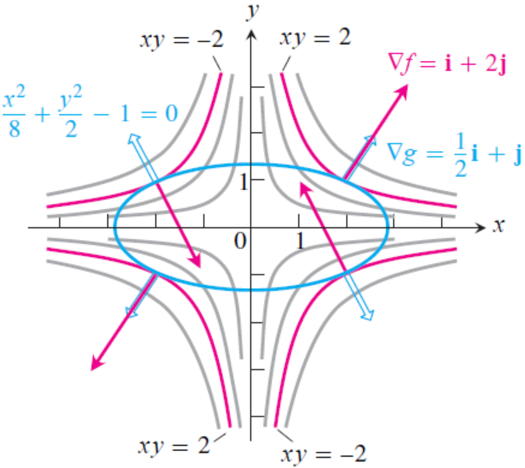
Penyelesaian: Kita ingin menentukan nilai ekstrem $f(x,y) = xy$ dengan syarat $g(x,y) = \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} - 1 = 0$. Pertama-tama kita tntukan x, y, dan λ yang memenuhi

$$\nabla f = \lambda \nabla g \qquad \text{dan} \qquad g(x,y) = 0.$$

Diperoleh

$$y\mathbf{i} + x\mathbf{j} = \frac{\lambda}{4} x\mathbf{i} + \lambda y\mathbf{j}$$

dan dipenuhi oleh $y = x = 0$ atau $\lambda = \pm 2$. Karena $(0,0)$ tidak berada pada elips maka $y \neq 0$. Jika $y \neq 0$ maka diperoleh $\lambda = \pm 2$ dan $x = \pm 2y$ yang dipenuhi oleh $y = \pm 1$. Akibatnya $f(x,y)$ mencapai nilai ekstrem pada empat titik yaitu $(\pm 2, 1)$, $(\pm 2, -1)$. Nilai ekstremnya adalah $xy = 2$ dan $xy = -2$.



y
x
$xy = -2$
$xy = 2$
$\nabla f = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0$
$\nabla g = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \mathbf{j}$
1
0
1
$xy = 2$
$xy = -2$

Contoh

Tentukan nilai minimum dan maksimum fungsi $f(x, y) = 3x + 4y$ *pada lingkaran* $x^2 + y^2 = 1$.

Penyelesaian: Kita modelkan masalah ini sebagai masalah Lagrange multiplier dengan $f(x, y) = 3x + 4$ dan $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ dan menentukan x, y, dan λ yang memenuhi persamaan

$$\nabla f = \lambda \nabla g \qquad \text{dan} \qquad g(x, y) = 0$$

yaitu

$$3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} = 2x\lambda\mathbf{i} + 2y\lambda\mathbf{j}, \qquad x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Diperoleh $x = \dfrac{3}{2\lambda},\ y = \dfrac{2}{\lambda}$ sehingga

$$\left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 - 1 = 0.$$

Persamaan diatas memiliki solusi $\lambda = \pm\frac{5}{2}$ yang berakibat $x = \pm\frac{3}{5}$ dan $y = \pm\frac{4}{5}$ sehingga $f(x, y) = 3x + 4y$ mencapai nilai ekstrem pada titik $\pm(3/5, 4/5)$ dengan nilai minimum -5 dan nilai maksimum 5.

Metode Lagrange Multipliers dengan Dua Syarat

Pada beberapa kasus, dibutuhkan cara mencari nilai maksimum atau minimum $f(x, y, z)$ dengan dua syarat yang harus dipenuhi yaitu

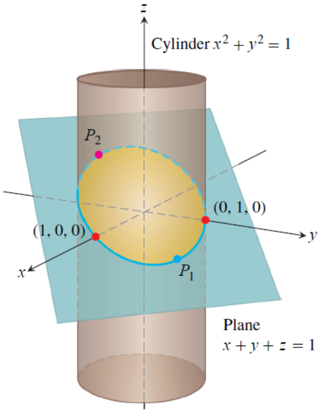
$$g_1(x, y, z) = 0 \qquad \text{dan} \qquad g_2(x, y, z) = 0.$$

Menggunakan ide yang serupa dengan pembahasan sebelumnya, jika ∇g_1 tidak sejajar ∇g_2 maka masalah ini dapat dipandang menjadi masalah mencari x, y, z, λ dan μ yang memenuhi persamaan

$$\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2, \qquad g_1(x, y, z) = 0, \qquad g_2(x, y, z) = 0.$$

Contoh

Bidang $x + y + z = 1$ *memotong silinder* $x^2 + y^2 = 1$ *berupa sebuah ellips. Tentukan titik pada ellips tersebut yang terdekat dan terjauh dari tiitk asal (origin).*



Metode Lagrange Multipliers dengan Dua Syarat

Penyelesaian: Kita ingin menentukan nilai ekstrem dari $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ dengan syarat

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$g_2(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0.$$

Dengan metode Lagrange multipliers diperoleh

$$\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2$$

$$2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} = \lambda(2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}) + \mu(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$
$$2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} = (2\lambda x + \mu)\mathbf{i} + (2\lambda y + \mu)\mathbf{j} + \mu\mathbf{k}.$$

Diperoleh

$$2x = 2\lambda x + 2z \quad \Rightarrow \quad (1 - \lambda)x = z$$
$$2y = 2\lambda y + 2z \quad \Rightarrow \quad (1 - \lambda)y = z$$

Penyelesaian Lanjutan: Solusi sistem persamaan di atas adalah ($\lambda = 1$ dan $z = 0$) atau ($\lambda \neq 1$ dan $x = y = z/(1 - \lambda)$). Jika $z = 0$ diperoleh dua titik yaitu $(1, 0, 0)$ dan $(0, 1, 0)$ pada ellips.

Jika $x = y$ maka diperoleh $x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ dan $z = 1 \mp \sqrt{2}$. Sehingga titik pada ellips yang dimaksud adalah

$$P_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \sqrt{2}\right) \qquad \text{dan} \qquad P_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \sqrt{2}\right).$$

Dengan menyelidiki nilai fungsi f di masing-masing titik kritis tersebut diperoleh titik pada ellips yang paling dekat dengan titik asal adalah $(1, 0, 0)$ dan $(0, 1, 0)$ sedangkan titik pada ellips yang paling jauh dari titik asal adalah P_2.

5. Derivatif Parsial dengan Variabel Tak Bebas

Pada saat mencari derivatif parsial fungsi $w = f(x, y)$, kita memandang x dan y sebagai variabel independen. Namun pada beberapa kasus, seperti U yaitu energi internal gas dapat dinyatakan sebagai fungsi $U = f(P, V, T)$ dengan P tekanan, V volume dan T temperatur. Apabila masing-masing molekul gas tidak berinteraksi, ketiga variabel tersebut memenuhi persamaan

$$PV = nRT \qquad (n \text{ dan } R \text{ konstan}).$$

Ketiga variabel tidak lagi menjadi variabel independen karena bergantung satu dengan lainnya.

Step-step mencari $\dfrac{\partial w}{\partial x}$:

(1) Tentukan mana variabel dependen dan variabel independen.

(2) *Hilangkan* variabel dependen pada bentuk w.

(3) *Dirensialkan* seperti biasa.

Contoh

Tentukan $\partial w/\partial x$ *pada titik* $(x, y, z) = (2, -1, 1)$ *jika*

$$w = x^2 + y^2 + z^2, \quad z^3 - xy + yz + y^3 = 1$$

dan x *dan* y *adalah variabel independen.*

Penyelesaian: Pada kasus ini tidak mudah untuk menyatakan z dalam fungsi x dan y. Namun kita bisa turunkan parsial w terhadap x dengan memandang x dan y sebagai variabel bebas dan z dan w sebagai variabel tak bebas. Diperoleh

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x}$$

dan

$$3z^2\frac{\partial z}{\partial x} - y + y\frac{\partial z}{\partial x} + 0 = 0.$$

Dari persamaan terakhir diperoleh

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{y + 3z^2}$$

sehingga

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{(2,-1,1)} = \left(2x + \frac{2yz}{y + 3z^2}\right)_{(2,-1,1)} = 3.$$

Notasi

Untuk menunjukkan variabel apa yang diasumsikan bebas pada perhitungan derivatif parsial, kita dapat menggunakan notasi berikut.

$\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)_y$	$\partial w/\partial x$ dengan x dan y bebas
$\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,t}$	$\partial f/\partial y$ dengan y, x dan t bebas.

Taylor's Formula for $f(x, y)$ at the Point (a, b)

Suppose $f(x, y)$ and its partial derivatives through order $n + 1$ are continuous throughout an open rectangular region R centered at a point (a, b). Then, throughout R,

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + (hf_x + kf_y)|_{(a,b)} + \frac{1}{2!}(h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy})|_{(a,b)}$$

$$+ \frac{1}{3!}(h^3 f_{xxx} + 3h^2 k f_{xxy} + 3hk^2 f_{xyy} + k^3 f_{yyy})|_{(a,b)} + \cdots + \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f\Big|_{(a,b)}$$

$$+ \frac{1}{(n + 1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f\Big|_{(a+ch,b+ck)}. \tag{7}$$

Taylor's Formula for $f(x, y)$ at the Origin

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(0,0) + xf_x + yf_y + \frac{1}{2!}\left(x^2 f_{xx} + 2xy f_{xy} + y^2 f_{yy}\right) \\ &+ \frac{1}{3!}\left(x^3 f_{xxx} + 3x^2 y f_{xxy} + 3xy^2 f_{xyy} + y^3 f_{yyy}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f \\ &+ \frac{1}{(n+1)!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f \Bigg|_{(cx,cy)} \end{aligned} \tag{8}$$

Thank You

All the graphics: Copyright © 2008 Pearson Education, Inc. Publishing as Pearson Addison-Wesley