Multiplication, Inverse, and Factorization of Matrices

Tutor TVM - Pertemuan 04

Matrix Multiplication

$(A_{rows \times columns})$

Ingat : pada perkalian matrix AB, jumlah kolom A = jumlah baris B,

DON'T FORGET

so : $A_{m \times n}\ B_{n \times p}$ = $C_{m \times p}$

Ada 4 jenis/cara perkalian matrix

1. Dot operation : element-wise, Component by component

Misalkan : untuk AB=C, mencari nilai $\boldsymbol{C_{12}}$ = (baris ke 1 A).(kolom ke 2 B)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$maka\ \boldsymbol{C_{12}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ sehingga $\boldsymbol{C_{12}}$ = (1x1) + (2x2) = 5

Matrix Multiplication

2. Combinations of columns

C = AB dimana B adalah column vector

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$C = 1\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

→ C adalah kombinasi linear dari **kolom-kolom matrix A**

3. Combination of Rows

C= AB dimana A adalah row vector

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = 4\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 10 \end{bmatrix}$$

→ C adalah kombinasi linear dari **baris-baris matrix B**

digunakan pada saat eliminasi matriks,

contohnya untuk menghilangkan (2,1)

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= -3\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 3 & 8 & 1 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & -6 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Matrix Multiplication

4. Columns Multiply Row

C=AB dimana A dilihat sebagai kumpulan vector kolom dan B sebagai kumpulan vector baris

$$A = [col1 \quad col2] \;, \quad B = \begin{bmatrix} row1^T \\ row2^T \end{bmatrix}$$

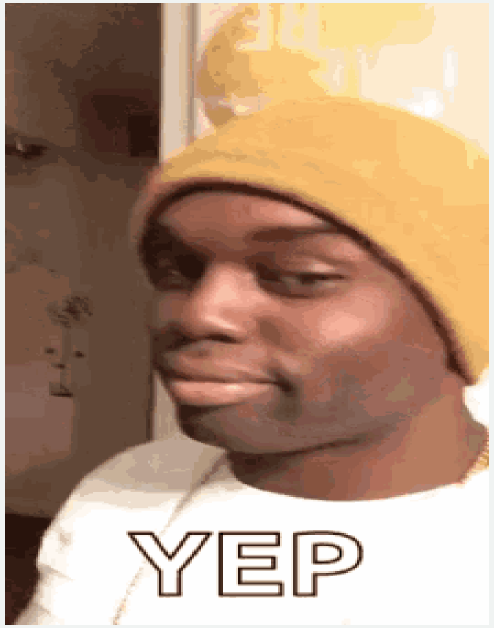
$$C = col1.\ row1^T + col2.\ row2^T$$

→ Maka C adalah kombinasi dari kolom matriks A dikali baris matriks B

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} [1 \quad 1] + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} [4 \quad 2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 12 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 16 & 10 \end{bmatrix}$$

Easy Right ??



Matrix Multiplication

Aturan untuk Perkalian Matriks :

$AB \neq BA$	(the commutative "law" is *usually broken*)
$C(A+B) = CA + CB$	(distributive law from the left)
$(A+B)C = AC + BC$	(distributive law from the right)
$A(BC) = (AB)C$	(associative law for ABC) (***parentheses not needed***).

Elimination using Matrices

Seperti minggu kemarin, Suppose Ax = b

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\3 & 8 & 1\\0 & 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\12\\2\end{bmatrix}$$

Lalu lakukan eliminasi gauss

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & -2 & 1\end{bmatrix}}_{E_{32}}\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{E_{31}}\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\-3 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{E_{21}}\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 2\\3 & 8 & 1 & 12\\0 & 4 & 1 & 2\end{array}\right]}_{[A|b]}=\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 2\\0 & 2 & -2 & 6\\0 & 0 & 5 & -10\end{array}\right]}_{[U|Eb]}$$

Kita tahu bahwa pada Ax=b pada eliminasi gauss, kedua ruas Ax dan b dikali dengan matriks eliminasi E yang merupakan gabungan dari beberapa matriks eliminasi.

$$E = E_{32}\ E_{31}\ E_{21}$$

Sehingga persamaannya menjadi **EAx=Eb.**

Pada eliminasi gauss hasil dari EA merupakan matriks segitiga atas (U) sehingga **Ux=Eb**

Inverse Matrices

$$A^{-1}\,A = A\;\;A^{-1} = I$$

"Matriks A invertible apabila ada matriks lain (A^{-1}) yang menginvers A"

Syarat inverse = **matriksnya non-singular**

FYI : Matrices multiplication reversible dengan cara hasilnya dikali dengan inverse matrix pengalinya, kecuali matriks pengalinya non-singular.

Misal : ada persamaan AM= C , untuk mendapatkan M dari C, maka $M = A^{-1}C$ dengan syarat A matriks non-singular.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \dashrightarrow C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ x+2y \end{bmatrix}$$

$$M = A^{-1}C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x+y \\ x+2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Inverse Matrices

Cara menentukan suatu matriks punya invers atau nggak yaitu……..

→ **Invertibility test** : Dengan syarat..

- Determinant = 0
- di gauss elimination ditemukan **zero row vector** (ada baris yang berisi 0 saja)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$ → zero row vector

- x = zero vector ($x = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$), **bukan** satu-satunya solusi untuk Ax=0

Gimana cara nyari inverse matrix ???

Inverse Matrices

First, matriks 2x2

Jika $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

maka $A^{-1} = \dfrac{1}{a.d - b.c}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

dimana $\det(A) = a.d - b.c \neq 0$

Kalau matriks nxn ????

Inverse Matrices

cara lain mencari inverse matrix = bisa pakai **Gauss-Jordan Elimination**

1. **Meng-augmentasikan matriks A dengan matriks Identitas**

$$[\ A|I\ ]$$

2. **Kemudian dieliminasi hingga A menjadi matriks identitas.**

$$[\ \mathrm{EA}|\mathrm{EI}\ ], \qquad \text{where} \quad \mathrm{EA} = \mathrm{I}$$

3. **Disini matriks E hasil eliminasi merupakan A^{-1}**

$$[\ I\ |\ A^{-1}\ ]$$

Inverse Matrices

Misal : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

Meng-augmentasikan matriks A dengan matriks Identitas

$$[\ A|I\ ]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Kemudian dieliminasi hingga A menjadi matriks identitas.

$$[\ \boldsymbol{EA}|\boldsymbol{EI}\ ] \rightarrow [\ \boldsymbol{I}|\boldsymbol{EI}\ ]$$

$$R_2 = R_2 - 2R_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$R_2 = -\frac{1}{3}R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Inverse Matrices

$$R_1 = R_1 - 2R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/3 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$R_3 = R_3 - 4R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/3 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & -8/3 & 4/3 & 1 \end{array}\right]$$

$$R_3 = -3R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/3 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -4 & -3 \end{array}\right]$$

$$R_2 = R_2 - \frac{1}{3}R_3 \text{ , } R_1 = R_1 - \frac{1}{3}R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -9/3 & 6/3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -6/3 & 3/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -4 & -3 \end{array}\right]$$

Disini matriks E hasil eliminasi merupakan A^{-1}

$$[\, A^{-1}A \mid A^{-1}I \,] \rightarrow [\, I \mid A^{-1} \,]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -4 & -3 \end{array}\right]$$

Inverse of Elimination Matrices

Why = E^{-1} lebih mudah dibuat daripada E

Before : $E = E_{32}\ E_{31}\ E_{21}$

$$E = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & -L_{32} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\-L_{31} & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\-L_{21} & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

E_{32} E_{31} E_{21}

$$= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\-L_{21} & 1 & 0\\-L_{31} + (-L_{21}.-L_{32}) & -L_{32} & 1\end{bmatrix}$$

Contoh :

$$E = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\4 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\-3 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\-3 & 1 & 0\\10 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

E_{32} E_{31} E_{21}

After : $E^{-1} = E_{21}^{-1}\ E_{31}^{-1}\ E_{32}^{-1}$

$$E^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & L_{32} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\L_{31} & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\L_{21} & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

E_{21}^{-1} E_{31}^{-1} E_{32}^{-1}

$$= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\L_{21} & 1 & 0\\L_{31} & L_{32} & 1\end{bmatrix}$$

Contoh :

$$E^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\3 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\-4 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\3 & 1 & 0\\-4 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

E_{21}^{-1} E_{31}^{-1} E_{32}^{-1}

Factorization A = LU

Ide = **Matiks A bisa di buat dari matriks segitiga bawah (L) dan segitiga atas (U)**

$$EA = U \rightarrow A = E^{-1}\,\mathrm{U}$$

Dimana biasanya E^{-1} adalah matriks segitiga bawah (L), maka persamaannya jadi

$$A = \mathrm{L}\,\mathrm{U}$$

Cara menyelesaikan faktorisasi A=LU

1. Kita tahu $Ax = b$ dan $A = \mathrm{L}\,\mathrm{U}$
2. Sehingga persamaannya jadi $\mathrm{LU}x = b$, lalu misalkan $\mathrm{U}x$ dengan c (sehingga $Lc = b$)
3. Selesaikan terlebih dahulu $Lc = b$
4. Lalu selesaikan $\mathrm{U}x = c$ untuk mendapatkan nilai x

Factorization A = LU

Misalkan kita punya persamaan Ax=b

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\3 & 8 & 1\\0 & 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\12\\2\end{bmatrix}$$

$$A \qquad x = b$$

1. Punya A=LU → dari eliminasi gauss

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\3 & 1 & 0\\0 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\0 & 2 & -2\\0 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

$$A = \quad L \quad U$$

2. Selesaikan Lc = b untuk mendapatkan c

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\3 & 1 & 0\\0 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\12\\2\end{bmatrix} \rightarrow c_1=2,\ \ c_2=6,\ \ c_3=-10$$

$$L \qquad c = b$$

3. Selesaikan Ux=c untuk mendapatkan x

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\0 & 2 & -2\\0 & 0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\6\\-10\end{bmatrix} \rightarrow x_1=2,\ \ x_2=1,\ \ x_3=-2$$

$$U \qquad x = c$$

We're done !

Factorization PA = LU

New member = **matriks permutasi (P)** → digunakan untuk menukar baris.

Matriks P = matriks identitas yang rownya ditukar sesuai baris yang akan ditukar.

Matriks P inversnya sama dengan aslinya.

$$\text{Misal : } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Apabila di eliminasi menjadi

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Untuk membalik row 2 dan 3 gunakan matriks permutasi

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \underbrace{E_{21}^{-1} \quad P_{32}^{-1}} \quad \mathrm{U}$$

$$A = E^{-1} \quad \mathrm{U}$$

Factorization PA = LU

Pada faktorisasi PA=LU, kedua ruas A dan E^{-1}U yang tadi sudah didapatkan

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\2 & 1 & 1\\0 & 4 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\-2 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\0 & 4 & 1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$A = E^{-1}\,\mathrm{U}$$

dikalikan dengan matriks permutasi yang digunakan untuk menukar baris 2 dan 3.

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\2 & 1 & 1\\0 & 4 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\-2 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\0 & 4 & 1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$P\;A = \mathrm{P}\;E^{-1}\;\mathrm{U}$$

Ini dilakukan untuk mengubah $\mathrm{P}\,\mathrm{E}^{-1}$ menjadi matriks segitiga bawah L.

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\2 & 1 & 1\\0 & 4 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\-2 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\0 & 4 & 1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$P\;A = \mathrm{L}\;\mathrm{U}$$

Factorization PA = LU

Sehingga penyelesaian faktorisasinya juga berubah,

Pada faktorisasi **A=LU** → $Lc = b$ kemudian $Ux = c$

Pada faktorisasi **PA=LU** → $Lc = Pb$ kemudian $Ux = c$

Dengan menggunakan matriks PA=LU sebelumnya, kemudian **hitung Lc=Pb**

$$\underset{L}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{c}{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}} = \underset{P}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}} \underset{b}{\begin{bmatrix} 2 \\ -10 \\ 2 \end{bmatrix}}$$

$$\underset{L}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{c}{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}} = \underset{P\,b}{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -10 \end{bmatrix}} \rightarrow c_1 = 2, c_2 = 2, c_3 = -6$$

Factorization PA = LU

Lalu **hitung Ux=c** seperti pada faktorisasi A=LU

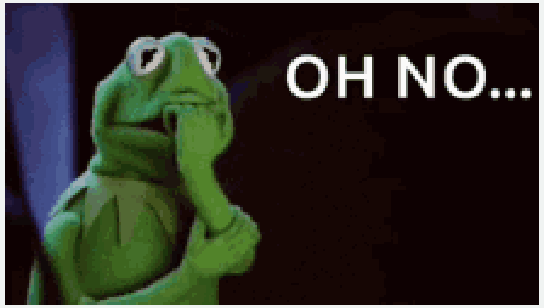
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

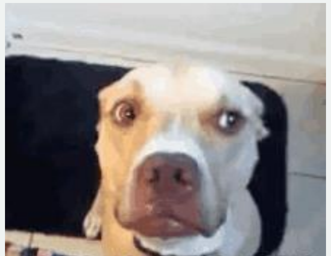
$$\text{U} \quad x = c$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix} \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -6$$

$$\text{U} \quad x = c$$

We’re Done Here





QUIZ

Di kerjakan dalam waktu 30 menit. Ditulis tangan, discan dan dikumpulkan dalam bentuk PDF.

Disubmit melalui link presensi pertemuan 4: https://forms.gle/Lha4LZVYwV7ZZLK56

Soal

Suatu ketika Prof. Gilbert Strang berkunjung ke UGM; beliau berkunjung ke warung siomay 'KC' di Jakal bersama 2 orang koleganya. Karena begitu mencintai Aljabar Linear, beliau berniat mengaplikasikan konsep Aljabar Linear untuk mengetahui harga masing-masing makanan (siomay, tahu, kentang). Oleh karena itu masing-masing kolega diminta untuk mengetahui harga total makanan yang mereka pesan masing-masing. Kemudian beliau bertanya langsung harga makanan yang dipesan kepada koleganya.

- Kolega pertama yang memesan 2 tahu dan 3 siomay menjawab harganya Rp 40.000,00.
- Kolega kedua yang memesan 1 tahu, 2 kentang, dan 2 siomay menjawab harganya Rp 40.000,00.
- Sementara itu, harga makanan yang dipesan Prof. Strang (1 tahu, 1 kentang, dan 2 siomay) adalah Rp 32.500,00.

Carilah harga masing-masing makanan dengan menggunakan metode (tuliskan tahapannya satu per satu):

a. Eliminasi Gauss
b. Eliminasi Gauss-Jordan
c. Faktorisasi LU