

Latihan 4

Integral Lipat Tiga, Integral Permukaan, dan Teorema Stokes

Soal

1. Seekor tupai yang beratnya 0.5 kg memanjat batang pohon yang berbentuk tabung dan menyusurnya mengikuti bentuk heliks $x = \cos t, y = \sin t, z = 4t, 0 \leq t \leq 8\pi$. Tentukan besar usaha yang dilakukan tupai tersebut.
2. Misalkan C adalah perbatasan segitiga dengan titik-titik sudut $(0, 0), (1, 2)$ dan $(0, 2)$. Hitunglah

$$\oint_C 4x^2y \, dx + 2y \, dy$$

3. Tentukan nilai dari integral garis

$$\oint_C (x^3 + 2y) \, dx + (4x - 3y^2) \, dy$$

dengan C adalah elips $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

4. Tentukan nilai dari

$$\oint_C y^2 \, dx + x^2 \, dy$$

dengan C adalah lintasan berorientasi positif berbentuk segitiga dengan titik-titik sudut $(0, 0), (0, 1)$, dan $(1, 0)$

5. Hitunglah nilai dari

$$\int_0^{\pi/2} \int_{\sin 2z}^0 \int_0^{2yz} \sin\left(\frac{x}{y}\right) \, dx \, dy \, dz$$

6. Tentukan $\iiint_E z \, dx \, dy \, dz$ dengan $E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \leq 1\}$.
7. Hitunglah integral lipat-tiga dari $f(x, y, z) = 2xyz$ atas daerah pejal S yang dibatasi oleh $z = 2 - 2x^2$ dan bidang-bidang $z = 0, y = 2x$, dan $y = 0$.
8. Tentukan volume dan pusat massa suatu benda pejal homogen S yang dibatasi oleh bola $x^2 + y^2 + z^2 = 81$ dan kerucut $z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}$.
9. Tentukan volume benda pejal yang dibatasi oleh bola $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ dan oleh paraboloida $4z = x^2 + y^2$

10. Benda bermassa m , yang berputar dalam suatu orbit melingkar dengan kecepatan sudut ω konstan, akan mengalami gaya sentrifugal yang diberikan oleh

$$\mathbf{F}(x, y, z) = m\omega^2 \mathbf{r} = m\omega^2(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

Tunjukkan bahwa $f(x, y, z) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2 + z^2)$ adalah fungsi potensial untuk \mathbf{F} .

11. Hitunglah $\iint_G xy + z \, ds$ dengan G adalah bagian bidang $2x - 2y + z = 3$ yang berada di atas segitiga R pada bidang- xy yang memiliki titik sudut $(0, 0)$, $(1, 0)$ dan $(1, 1)$.

12. Sebagian permukaan bola G dengan persamaan

$$z = f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$$

dengan x dan y memenuhi persamaan $x^2 + y^2 \leq 4$ mempunyai penutup baja tipis yang kerapatannya di (x, y, z) adalah $\delta(x, y, z) = z$. Tentukan massa penutup yang terbentuk.

13. Diberikan bola homogen dengan persamaan $x^2 + y^2 + z^2 = 16$. Tentukan momen inersia bola jika diputar terhadap sebarang garis singgung bola tersebut.

14. Diberikan $\mathbf{F}(x, y, z) = z^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$ dan S adalah daerah yang memenuhi $x^2 + z^2 \leq 1$ dan $0 \leq y \leq 8$. Tentukan $\iint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$

15. Misalkan C adalah lingkaran yang merupakan perpotongan bidang $2x + 2y + z = 0$ dan bola $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Untuk $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + 3y\mathbf{k}$, hitunglah

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$$