1. Introduction to vectors

a) Consider the following vectors:

$$u = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Answer the following questions:

i. What is the length of: a) u, and b) $v - w$

ii. Calculate and draw in R^2 the following vector operations a) $u + v$ and b) $v - w$

iii. Find the angle between $(u - v)$ and $(w + v)$

b) Consider the following vectors:

$$u = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

and answer the following questions:

i. All vectors $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ that are perpendicular to u lie on a …... in R^3. The equation representing those vectors is ….......... Give me example of 3 vectors satisfying that equation!

ii. All vectors $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ that are perpendicular to u and v lie on a …... in R^3. The equation representing those vectors is ….......... Give me example of 3 vectors satisfying that equation!

iii. All vectors $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ that are perpendicular to u, v, and w lie on a …... in R^3. The equation representing those vectors is ….......... Give me example of 3 vectors satisfying that equation!

iv. Suppose I change w with $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}$. All vectors $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ that are perpendicular to u, v, and w lie on a …... in R^3. The equation representing those vectors is ….......... Give me example of 3 vectors satisfying that equation!

c) Prove the cosine law as follows: $||u - v||^2 = ||u||^2 - 2||u||||v||cos\theta + ||v||^2$ (**hint**. Use the dot product formula)

Jawaban:

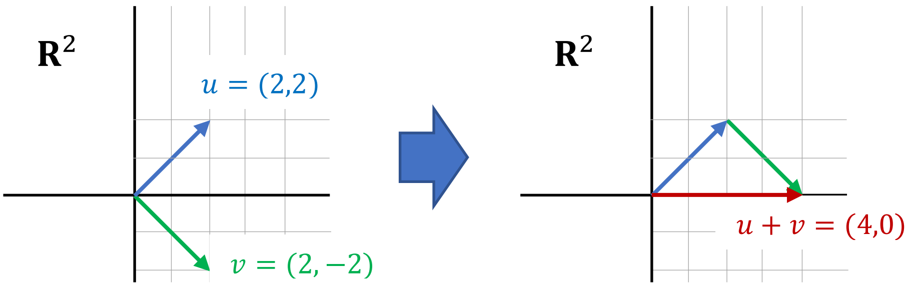
a) i. Panjang vektor $u = [u_1\ u_2]^T = [2\ \ 2]^T$ dapat dihitung sebagai berikut

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\,.$$

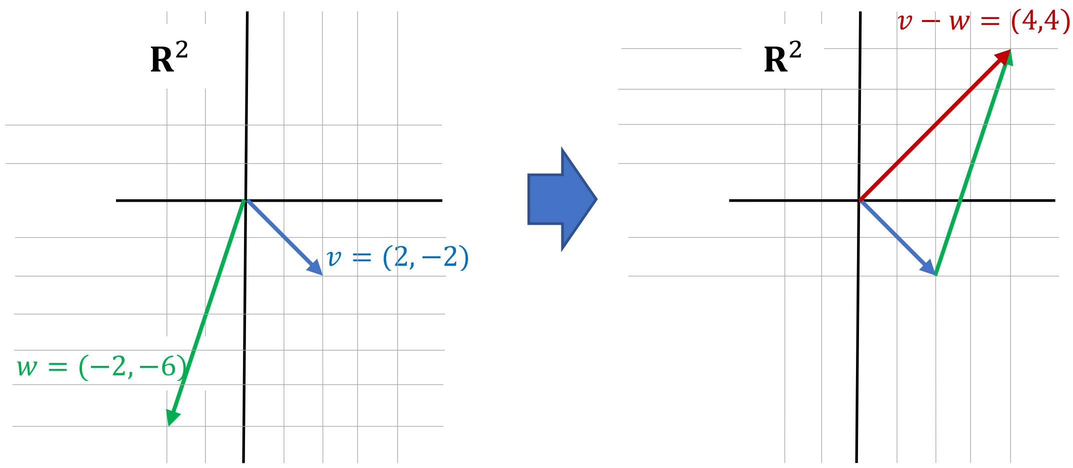
Panjang vektor $v - w = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ dapat dihitung sebagai berikut

$$\|v - w\| = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$$

ii. Untuk $u + v$ maka dihitung $u + v = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan digambar sebagai berikut



Untuk $v - w$ maka dihituung $v - w = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ dan digambar sebagai berikut



iii. Sudut yang dibentuk oleh $(u - v)$ and $(w + v)$:

Hitung vektor: $(u - v) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ dan $(w + v) = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \end{bmatrix}$.

Dimisalkan $a = (u - v)$ dan $b = (w + v)$, maka panjang vektor a dan b masing – masing adalah sebagai berikut

$$\|a\| = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4$$

$$\|b\| = \sqrt{0^2 + (-8)^2} = 8.$$

Hitung sudut θ antara $a = (u - v)$ dan $b = (w + v)$:

$$\cos\theta = \frac{a}{\|a\|} \cdot \frac{b}{\|b\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

$$\therefore \theta = 0°.$$

b) $u = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$

i. All vectors $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ that are perpendicular to u lie on a plane in R^3. The equation representing those vectors is $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \text{ or } 2x + 2y + 4z = 0$ Give me example of 3 vectors satisfying that equation!

3 example that satisfy that equation:

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

and also all of the linear combination of those 3 vectors will satisfy that equation.

ii. All vectors $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ that are perpendicular to u and v lie on a line in R^3. The equation representing those vectors is

$$\left[c \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \right] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$$\left(c \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \text{ and } d \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \right) \text{for } c, d \in R$$

$$\begin{cases} 2x + 2y + 4z = 0 \\ 2x + 4y + 6z = 0 \end{cases}$$

Give me example of 3 vectors satisfying that equation!

3 example that satisfy that equation:

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

iii. All vectors $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ that are perpendicular to u, v, and w lie on a point in R^3. The equation representing those vectors is

$$\left[c \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} + e \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} \right] = 0$$

$$\left(c\begin{bmatrix}2\\2\\4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=0\,,d\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=0\,,and\ e\begin{bmatrix}4\\6\\8\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=0\right) for\ c,d,e\ \in R$$

$$\begin{cases}2x+2y+4z=0\\2x+4y+6z=0\\4x+6y+8z=0\end{cases}$$

Give me example of 3 vectors satisfying that equation!

Only $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ satisfy those equations

iv. Suppose I change w with $\begin{bmatrix}4\\6\\10\end{bmatrix}$. All vectors $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ that are perpendicular to u, v, and w lie on a line in R^3. The equation representing those vectors is

$$\left[c\begin{bmatrix}2\\2\\4\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}+e\begin{bmatrix}4\\6\\10\end{bmatrix}\right]=0$$

$$\left(c\begin{bmatrix}2\\2\\4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=0\,,d\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=0\,,and\ e\begin{bmatrix}4\\6\\10\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=0\right) for\ c,d,e\ \in R$$

$$\begin{cases}2x+2y+4z=0\\2x+4y+6z=0\\4x+6y+10z=0\end{cases}$$

If we add the first and the second equation it will give us the third equation(the third vector is dependent with two other vectors) or we can say that the linear combination of two vectors will give us the third vector. It means we only need to satisfy two equations.

Give me example of 3 vectors satisfying that equation!

$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$

c) $\|u-v\|^2$ dapat dihitung dengan dot product sebagai berikut

$$\|u-v\|^2=(u-v)\cdot(u-v)=u\cdot u-v\cdot u-u\cdot v+v\cdot v.$$

Karena nilai skalar $v\cdot u$ sama dengan $u\cdot v$, maka

$$\|u-v\|^2=u\cdot u-2u\cdot v+v\cdot v.$$

Sekarang, karena $u\cdot u=\|u\|^2$, $v\cdot v=\|v\|^2$, dan $u\cdot v=\|u\|\|v\|\cos\theta$, maka terbukti bahwa

$$\|u-v\|^2=\|u\|^2-2\|u\|\|v\|\cos\theta+\|v\|^2.$$

2. **Solving $\boldsymbol{Ax = b}$**

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 10 & 10 \\ 5 & 20 & 10 & 20 \\ 10 & 5 & 15 & 10 \\ 10 & 15 & 20 & 15 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

a) Solve $Ax = b$ for x using **Gauss elimination** in the **matrix** language! Show me all elimination matrices E_{ij} that set components *ij* of A to zeros. Find also $E_{ij}{}^{-1}$!

b) Compute $A=LU$ and again solve $Ax=b$ using this **factorization**!

c) Find the matrix A^{-1} using **Gauss Jordan** and calculate the solution x using A^{-1}!

Jawaban:

a) Matriks augmented $[A \quad b]$:

$$[A \quad b] = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 10 & 10 & \mathbf{4} \\ 5 & 20 & 10 & 20 & \mathbf{9} \\ 10 & 5 & 15 & 10 & \mathbf{2} \\ 10 & 15 & 20 & 15 & \mathbf{9} \end{bmatrix}$$

Kemudian dilakukan eliminasi Gauss dengan menggunakan matriks

Langkah 1. Hilangkan komponen matriks A yang ada di bawah pivot a_{11}, yaitu a_{21} (multiplier $l_{21} = {}^{5}/_{10} = {}^{1}/_{2}$), a_{31} (multiplier $l_{31} = {}^{10}/_{10} = 1$), a_{41} (multiplier $l_{41} = {}^{10}/_{10} = 1$)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{41}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{31}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -{}^{1}/_{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{21}} \begin{bmatrix} 10 & 20 & 10 & 10 & \mathbf{4} \\ 5 & 20 & 10 & 20 & \mathbf{9} \\ 10 & 5 & 15 & 10 & \mathbf{2} \\ 10 & 15 & 20 & 15 & \mathbf{9} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 20 & 10 & 10 & \mathbf{4} \\ 0 & 10 & 5 & 15 & \mathbf{7} \\ 0 & -15 & 5 & 0 & \mathbf{-2} \\ 0 & -5 & 10 & 5 & \mathbf{5} \end{bmatrix}$$

Langkah 2. Hilangkan komponen matriks A yang ada di bawah pivot a_{22}, yaitu a_{32} (multiplier $l_{32} = {}^{-15}/_{10} = {}^{-3}/_{2}$), a_{42} (multiplier $l_{42} = {}^{-5}/_{10} = {}^{-1}/_{2}$)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & {}^{1}/_{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{42}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & {}^{3}/_{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{32}} \begin{bmatrix} 10 & 20 & 10 & 10 & \mathbf{4} \\ 0 & 10 & 5 & 15 & \mathbf{7} \\ 0 & -15 & 5 & 0 & \mathbf{-2} \\ 0 & -5 & 10 & 5 & \mathbf{5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 20 & 10 & 10 & \mathbf{4} \\ 0 & 10 & 5 & 15 & \mathbf{7} \\ 0 & 0 & {}^{25}/_{2} & {}^{45}/_{2} & \mathbf{{}^{17}/_{2}} \\ 0 & 0 & {}^{25}/_{2} & {}^{25}/_{2} & \mathbf{{}^{17}/_{2}} \end{bmatrix}$$

Langkah 3. Hilangkan komponen matriks A yang ada di bawah pivot a_{33}, yaitu a_{43} (multiplier $l_{43} = \frac{{}^{25}/_{2}}{{}^{25}/_{2}} = 1$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 20 & 10 & 10 & \mathbf{4} \\ 0 & 10 & 5 & 15 & \mathbf{7} \\ 0 & 0 & {}^{25}/_{2} & {}^{45}/_{2} & \mathbf{{}^{17}/_{2}} \\ 0 & 0 & {}^{25}/_{2} & {}^{25}/_{2} & \mathbf{{}^{17}/_{2}} \end{bmatrix}$$

E_{43}

$$= \begin{bmatrix} 10 & 20 & 10 & 10 & \mathbf{4} \\ 0 & 10 & 5 & 15 & \mathbf{7} \\ 0 & 0 & {}^{25}/_{2} & {}^{45}/_{2} & \mathbf{{}^{17}/_{2}} \\ 0 & 0 & 0 & -10 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Langkah 4. Lakukan *back substitution* untuk mencari penyelesaian *Ax=b*

$$\begin{cases} 10x_1 & +20x_2 & +10x_3 & +10x_4 & = 4 \\ & 10x_2 & +5x_3 & +15x_4 & = 7 \\ & & \dfrac{25}{2}x_3 & +\dfrac{45}{2}x_4 & = \dfrac{17}{2} \\ & & & -10x_4 & = 0 \end{cases}$$

$$-10x_4 = 0$$
$$x_4 = 0$$

$$\frac{25}{2}x_3 + \frac{45}{2}(0) = \frac{17}{2}$$
$$\frac{25}{2}x_3 = \frac{17}{2}$$
$$x_3 = \frac{17}{25}$$

$$10x_2 + 5\left(\frac{17}{25}\right) + 15(0) = 7$$
$$10x_2 = \frac{18}{5}$$
$$x_2 = \frac{9}{25}$$

$$10x_1 + 20\left(\frac{9}{25}\right) + 10\left(\frac{17}{25}\right) + 10(0) = 4$$
$$10x_1 = -10$$
$$x_1 = -1$$

Maka penyelesaiannya:

$$x = \begin{bmatrix} -1 \\ {}^{9}/_{25} \\ {}^{17}/_{25} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Menunjukkan matriks eliminasi dan inversenya. Ingat! Inverse matriks eliminasi E_{ij} bisa dicari dengan <u>mengganti tanda dari elemen ij</u>

$$E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -{}^{1}/_{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {E_{21}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ {}^{1}/_{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {E_{31}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{41} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {E_{41}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & {}^{3}\!/_{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad E_{32}{}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -{}^{3}\!/_{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{42} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & {}^{1}\!/_{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad E_{42}{}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -{}^{1}\!/_{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{43} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad E_{43}{}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(mohon *scroll*)

b) Compute $\boldsymbol{A = LU}$

Dari poin 2.a) kita sudah mendapatkan matriks *upper triangular* U dan matriks eliminasi E_{ij}.

Matriks *upper triangular*:

$$U = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 10 & 10 \\ 0 & 10 & 5 & 15 \\ 0 & 0 & {}^{25}/_{2} & {}^{45}/_{2} \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

Matriks *lower triangular* L didapatkan dengan meng-*inverse* matriks eliminasi E:

$$E = E_{43}E_{42}E_{32}E_{41}E_{31}E_{21}$$

$$L = E^{-1}$$

$$= E_{21}{}^{-1}E_{31}{}^{-1}E_{41}{}^{-1}E_{32}{}^{-1}E_{42}{}^{-1}E_{43}{}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ {}^{1}/_{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -{}^{3}/_{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -{}^{1}/_{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ {}^{1}/_{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -{}^{3}/_{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -{}^{1}/_{2} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ {}^{1}/_{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -{}^{3}/_{2} & 1 & 0 \\ 0 & -{}^{1}/_{2} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ {}^{1}/_{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -{}^{3}/_{2} & 1 & 0 \\ 1 & -{}^{1}/_{2} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ {}^{1}/_{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -{}^{3}/_{2} & 1 & 0 \\ 1 & -{}^{1}/_{2} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ {}^{1}/_{2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -{}^{3}/_{2} & 1 & 0 \\ 1 & -{}^{1}/_{2} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sebenarnya kita boleh saja lanjut ke hasil akhir untuk menghemat waktu.

TAPI kita juga tulis **ARGUMEN**: "Untuk sebuah matriks eliminasi E_{ij}, pada vektor baris yang mengandung elemen pivot, elemennya bernilai **1** hanya pada **pivot kolom ke-j**, sedangkan **kolom lain** bernilai **0**.

Oleh karena itu, perkalian antara matriks eliminasi E_{ij} yang berurutan hanya mengubah elemen baris ke-i kolom ke-j."

HATI-HATI jika ada matriks permutasi P & scaling M. Lebih baik dikalikan secara urut.

Sehingga

$$A = LU$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 20 & 10 & 10 \\ 5 & 20 & 10 & 20 \\ 10 & 5 & 15 & 10 \\ 10 & 15 & 20 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ {}^{1}/_{2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -{}^{3}/_{2} & 1 & 0 \\ 1 & -{}^{1}/_{2} & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 20 & 10 & 10 \\ 0 & 10 & 5 & 15 \\ 0 & 0 & {}^{25}/_{2} & {}^{45}/_{2} \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

Solve $\boldsymbol{Ax = b}$

Selesaikan $Lc = b$ untuk mendapatkan c:

$$Lc = b$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ {}^{1}/_{2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -{}^{3}/_{2} & 1 & 0 \\ 1 & -{}^{1}/_{2} & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Lakukan *forward substitution* untuk mendapatkan elemen c

$$\begin{aligned} c_1 &= 4 \\ \frac{1}{2}c_1 + c_2 &= 9 \\ c_1 - \frac{3}{2}c_2 + c_3 &= 2 \\ c_1 - \frac{1}{2}c_2 + c_3 + c_4 &= 9 \end{aligned}$$

$c_1 = 4$	$\begin{aligned} c_2 &= 9 - \frac{1}{2}c_1 \\ &= 9 - \frac{1}{2}\cdot 4 \\ &= 9 - 2 \\ &= 7 \end{aligned}$	$\begin{aligned} c_3 &= 2 - c_1 + \frac{3}{2}c_2 \\ &= 2 - 4 + \frac{3}{2}\cdot 7 \\ &= -2 + \frac{21}{2} \\ &= \frac{-4+21}{2} \\ &= \frac{17}{2} \end{aligned}$	$\begin{aligned} c_4 &= 9 - c_1 + \frac{1}{2}c_2 - c_3 \\ &= 9 - 4 + \frac{1}{2}\cdot 7 - \frac{17}{2} \\ &= 5 + \frac{-10}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$

Selesaikan $Ux = c$ untuk mendapatkan x:

$$Ux = c$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 20 & 10 & 10 \\ 0 & 10 & 5 & 15 \\ 0 & 0 & {}^{25}/_{2} & {}^{45}/_{2} \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ {}^{17}/_{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lakukan *backward substitution* untuk mencari elemen c:

$$\begin{aligned} 10x_1 + 20x_2 + 10x_3 + 10x_4 &= 4 \\ 10x_2 + 5x_3 + 15x_4 &= 7 \\ \frac{25}{2}x_3 + \frac{45}{2}x_4 &= \frac{17}{2} \\ -10x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$\begin{aligned} x_4 &= \frac{0}{-10} \\ &= 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \frac{25}{2}x_3 &= \frac{17}{2} - \frac{45}{2}x_4 \\ x_3 &= \frac{2}{25}\left(\frac{17}{2} - \frac{45}{2}\cdot 0\right) \\ &= \frac{17}{25} \end{aligned}$	$\begin{aligned} 10x_2 &= 7 - 5x_3 - 15x_4 \\ x_2 &= \frac{1}{10}\left(7 - 5\cdot\frac{17}{25} - 15\cdot 0\right) \\ &= \frac{1}{10}\left(\frac{35-17}{5}\right) \\ &= \frac{1}{10}\cdot\frac{18}{5} \\ &= \frac{9}{25} \end{aligned}$	$\begin{aligned} 10x_1 &= 4 - 20x_2 - 10x_3 - 10x_4 \\ x_1 &= \frac{1}{10}\left(4 - 20\cdot\frac{9}{25} - 10\cdot\frac{17}{25} - 10\cdot 0\right) \\ &= \frac{1}{10}\left(4 - 4\cdot\frac{9}{5} - 2\cdot\frac{17}{5}\right) \\ &= \frac{1}{10}\left(4 - \frac{36+34}{5}\right) \\ &= \frac{1}{10}\cdot\left(4 - \frac{70}{5}\right) \\ &= \frac{1}{10}\cdot(4 - 14) \\ &= -1 \end{aligned}$

Maka penyelesaiannya:

$$x = \begin{bmatrix} -1 \\ 9/25 \\ 17/25 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) Gauss-Jordan

Dibentuk matriks *augmented* [A I], lalu dilakukan *row operations* agar menjadi [I A^{-1}]. (Karena $A^{-1}A = I$ dan $A^{-1}I = A^{-1}$).

$\begin{bmatrix} \mathbf{10} & 20 & 10 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 20 & 10 & 20 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 15 & 10 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 15 & 20 & 15 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\boldsymbol{R2 = R2 - \frac{1}{2}R1}$ $\boldsymbol{R3 = R3 - R1}$ $\boldsymbol{R4 = R4 - R1}$
$\begin{bmatrix} \mathbf{10} & 20 & 10 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 5 & 15 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 5 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\boldsymbol{R1 = \frac{1}{10}R1}$
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & \frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{10} & 5 & 15 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 5 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\boldsymbol{R1 = R1 - \frac{1}{5}R2}$ $\boldsymbol{R3 = R3 - \left(-\frac{3}{2}\right)R2}$ $\boldsymbol{R4 = R4 - \left(-\frac{1}{2}\right)R2}$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{10} & 5 & 15 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{25}{2} & \frac{45}{2} & -\frac{7}{4} & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{25}{2} & \frac{25}{2} & -\frac{5}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\boldsymbol{R2 = \frac{1}{10}R2}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{20} & \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{\frac{25}{2}} & \frac{45}{2} & -\frac{7}{4} & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{25}{2} & \frac{25}{2} & -\frac{5}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\boldsymbol{R2 = R2 - \frac{1}{25} R3}$ $\boldsymbol{R4 = R4 - R3}$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{1}{50} & \frac{1}{25} & -\frac{1}{25} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{\frac{25}{2}} & \frac{45}{2} & -\frac{7}{4} & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & \frac{1}{2} & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$	$\boldsymbol{R3 = \frac{2}{25} R3}$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{1}{50} & \frac{1}{25} & -\frac{1}{25} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{5} & -\frac{7}{50} & \frac{3}{25} & \frac{2}{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{-10} & \frac{1}{2} & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$	$\boldsymbol{R1 = R1 - \frac{1}{5} R4}$ $\boldsymbol{R2 = R2 + \frac{3}{50} R4}$ $\boldsymbol{R3 = R3 + \frac{9}{50} R4}$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{20} & -\frac{1}{50} & -\frac{1}{10} & \frac{3}{50} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{20} & -\frac{3}{50} & -\frac{1}{10} & \frac{9}{50} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{-10} & \frac{1}{2} & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$	$\boldsymbol{R4 = -\frac{1}{10} R4}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{20} & -\frac{1}{50} & -\frac{1}{10} & \frac{3}{50} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{20} & -\frac{3}{50} & -\frac{1}{10} & \frac{9}{50} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -\frac{1}{20} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}$	[I A^{-1}]

Jadi, matriks A^{-1} yaitu:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{20} & -\frac{1}{50} & -\frac{1}{10} & \frac{3}{50} \\ -\frac{1}{20} & -\frac{3}{50} & -\frac{1}{10} & \frac{9}{50} \\ -\frac{1}{20} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}.$$

Untuk menghitung solusi persamaan linear Ax = b,

Ax = b

$A^{-1}Ax = A^{-1}$ b

Karena $A^{-1}A = I$, dan Ix = x,

x = A^{-1} b

$$x = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{20} & -\frac{1}{50} & -\frac{1}{10} & \frac{3}{50} \\ -\frac{1}{20} & -\frac{3}{50} & -\frac{1}{10} & \frac{9}{50} \\ -\frac{1}{20} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{\frac{9}{25}} \\ \mathbf{\frac{17}{25}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

3. The complete solution to Ax=b

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 15 & 30 & 10 \\ 15 & 10 & 5 & 30 & 10 \\ 15 & 10 & 15 & 20 & 20 \end{bmatrix}$$

a) Reduced row echelon form (rref)

i. Find rref of A (R) by using row operations.
ii. What are the pivot variables and the pivot columns?
iii. Find the free variables and free columns.
iv. Find the rank of matrix A.

b) Column space C(A)

i. What is the most obvious basis of C(A)?
ii. Find the dimension of C(A).
iii. Find 3 vectors in C(A) and the linear combinations of the basis to obtain those vectors.
iv. What is the geometry of C(A)?

c) Nullspace N(A)

i. Find N(A) and its basis.
ii. Determine the dimension of N(A).
iii. Find 3 vectors in N(A) and the linear combination of the basis to obtain those vectors.
iv. What is the geometry of N(A)?

d) The complete solution

If b is now changed into:

$$b = [9 \quad 2 \quad 9]^T$$

i. Find the particular solution x_p to $Ax = b$
ii. Find the complete solution $x = x_p + x_n$ to $Ax = b$
iii. Find 3 vectors from the complete solution and the linear combinations to obtain those vectors!
iv. Describe in words the geometry of the complete solution!
v. From the matrix R, is $Ax = b$ always solvable for all b's? You can answer from column space and/or row reduction perspective.

Jawaban:

a) Reduced row echelon form (rref)

i. Untuk mencari rref dari matriks A (yang dinotasikan dengan R), dilakukan row operations hingga pivot matriks seluruhnya bernilai 1 dan elemen lain di pivot tersebut bernilai 0.

$\begin{bmatrix} \mathbf{10} & 5 & 15 & 30 & 10 \\ 15 & 10 & 5 & 30 & 10 \\ 15 & 10 & 15 & 20 & 20 \end{bmatrix}$	$R_2 = R_2 - \frac{3}{2}R_1$ $R_3 = R_3 - \frac{3}{2}R_1$

$\begin{bmatrix} \mathbf{10} & 5 & 15 & 30 & 10 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{35}{2} & -15 & -5 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{15}{2} & -25 & 5 \end{bmatrix}$	$R_1 = \frac{1}{10} R_1$
$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 3 & 1 \\ 0 & \mathbf{\frac{5}{2}} & -\frac{35}{2} & -15 & -5 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{15}{2} & -25 & 5 \end{bmatrix}$	$R_1 = R_1 - \frac{1}{5} R_2$ $R_3 = R_3 - R_2$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & \mathbf{\frac{5}{2}} & -\frac{35}{2} & -15 & -5 \\ 0 & 0 & 10 & -10 & 10 \end{bmatrix}$	$R_2 = \frac{2}{5} R_2$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & \mathbf{10} & -10 & 10 \end{bmatrix}$	$R_1 = R_1 - \frac{1}{2} R_3$ $R_2 = R_2 + \frac{7}{10} R_3$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 11 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & 5 \\ 0 & 0 & \mathbf{10} & -10 & 10 \end{bmatrix}$	$R_3 = \frac{1}{10} R_3$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 11 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$	Sudah didapat bentuk reduced row echelon form.

$$\therefore R = \mathrm{rref}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 11 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ii. Berdasarkan $\mathrm{rref}(A)$, pivot berada di kolom ke-1, 2, dan 3. Karena **pivot variables** adalah variabel yang terikat dengan kolom-kolom tersebut, **pivot variables**-nya adalah x_1, x_2, dan x_3.

Sedangkan **pivot columns** berarti kolom di mana terdapat pivot. Jika dilihat dari matriks R, pivot ada di kolom ke-1, 2, dan 3. Maka **pivot columns** dari matriks R adalah:

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, dan $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

iii. **Free variables** adalah variabel yang terikat dengan kolom yang tidak mengandung pivot. Karena kolom tersebut yaitu kolom ke-4 dari 5, free variables (variabel bebas) nya adalah x_4 dan x_5.

Free columns adalah kolom yang tidak mengandung pivot. Free columns dari matriks R adalah kolom ke-4 dan ke-5:

$\begin{bmatrix} 11 \\ -13 \\ 1 \end{bmatrix}$, dan $\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

iv. Rank dari matriks A adalah jumlah pivot yang terdapat dalam matriks A. Bentuk $R = \text{rref}(A)$ dapat memberi kita informasi terkait jumlah pivot A. Karena jumlah pivot A sama dengan jumlah pivot R yang berjumlah 3, sehingga **rank** matriks A adalah 3.

b) Column space C(A)

i. **Basis** yang paling obvious dari $\boldsymbol{C}(A)$ adalah **pivot columns** dari matriks A, yaitu kolom ke-1, 2, dan 3 (sama dengan pivot columns R). Sehingga, basis yang obvious dari $\boldsymbol{C}(A)$ adalah:

$\begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 15 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$, dan $\begin{bmatrix} 15 \\ 5 \\ 15 \end{bmatrix}$

ii. Dimensi $\boldsymbol{C}(A)$ adalah jumlah vektor pada basis $\boldsymbol{C}(A)$ yaitu 3.

iii. Tiga vektor di $\boldsymbol{C}(A)$ dapat diperoleh dengan mencari 3 sembarang kombinasi linear dari basis $\boldsymbol{C}(A)$ dengan persamaan:

$$c\begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 15 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} + e\begin{bmatrix} 15 \\ 5 \\ 15 \end{bmatrix}, \text{untuk semua } c, d, e \in \mathbf{R}$$

Jika c=1, d=1, e=1, vektornya:

$$1\begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 15 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 15 \\ 5 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10+5+15 \\ 15+10+5 \\ 15+10+15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 35 \\ 45 \end{bmatrix}$$

Jika c=0, d=2, e=0, vektornya:

$$0\begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 15 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 15 \\ 5 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Jika c=0, d=0, e=5, vektornya:

$$0\begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 15 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 15 \\ 5 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 \\ 25 \\ 75 \end{bmatrix}$$

iv. Geometri $\boldsymbol{C}(A)$ adalah sebuah *plane* (bidang) berdimensi 3 di dalam $\mathbf{R}^3$.

c) Nullspace N(A)

i. Nullspace matriks A atau $\boldsymbol{N}(A)$ adalah semua solusi $\boldsymbol{x}$ untuk $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Nullspace adalah subspace dari $\mathbf{R}^n$ (untuk matriks $m \times n$). Untuk mencari nullspace $\boldsymbol{N}(A)$ kita perlu mencari terlebih dahulu special solution.

$$\begin{bmatrix} 10 & 5 & 15 & 30 & 10 \\ 15 & 10 & 5 & 30 & 10 \\ 15 & 10 & 15 & 20 & 20 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Karena free variable ada 2 (x_4 dan x_5), dapat dibuat beberapa case untuk nilai x_4 dan x_5.

Case	x_4	x_5

1	1	0
2	0	1

Case 1. $x_4 = 1$ dan $x_5 = 0$

$$\begin{bmatrix} 10 & 5 & 15 & 30 & 10 \\ 15 & 10 & 5 & 30 & 10 \\ 15 & 10 & 15 & 20 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Karena solusi $Ax = 0$ sama dengan solusi $Rx = 0$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 11 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

maka

$$x_1 + 11 = 0 \rightarrow x_1 = -11$$
$$x_2 - 13 = 0 \rightarrow x_2 = 13$$
$$x_3 - 1 = 0 \rightarrow x_3 = 1$$

∴ **Special solution** untuk case 1 adalah

$$\boldsymbol{s_1} = \begin{bmatrix} -11 \\ 13 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Case 2. $x_4 = 0$ dan $x_5 = 1$

$$\begin{bmatrix} 10 & 5 & 15 & 30 & 10 \\ 15 & 10 & 5 & 30 & 10 \\ 15 & 10 & 15 & 20 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Karena solusi $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ sama dengan solusi $R\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 11 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

maka

$$x_1 - 3 = 0 \rightarrow x_1 = 3$$
$$x_2 + 5 = 0 \rightarrow x_2 = -5$$
$$x_3 + 1 = 0 \rightarrow x_3 = -1$$

∴ **Special solution** untuk case 2 adalah

$$\boldsymbol{s_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Nullspace $\boldsymbol{N}(A)$ adalah seluruh kombinasi linear dari vektor – vektor special solution.

$$\therefore \boldsymbol{N}(A) = c\boldsymbol{s_1} + d\boldsymbol{s_2} = c\begin{bmatrix} -11 \\ 13 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{untuk semua } c, d \in \mathbf{R}.$$

Basis $\boldsymbol{N}(A)$ adalah vektor – vektor special solution yaitu $\begin{bmatrix} -11 \\ 13 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

ii. Dimensi $\boldsymbol{N}(A)$ adalah jumlah vektor pada basis $\boldsymbol{N}(A)$ yaitu 2.

iii. Kombinasi linear dari basis $\boldsymbol{N}(A)$:

$$v = c\begin{bmatrix} -11 \\ 13 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ untuk semua } c, d \in \mathbf{R}.$$

Tiga vektor di dalam $\boldsymbol{N}(A)$ diperoleh dari kombinasi linear basis $\boldsymbol{N}(A)$:

Untuk c=1, d=0	Untuk c=0, d=1	Untuk c=1, d=1
$v_1 = 1\begin{bmatrix} -11 \\ 13 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [-11 \quad 13 \quad 1 \quad 1 \quad 0]^T$	$v_2 = 0\begin{bmatrix} -11 \\ 13 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [3 \quad -5 \quad -1 \quad 0 \quad 1]^T$	$v_3 = 1\begin{bmatrix} -11 \\ 13 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [-8 \quad 8 \quad 0 \quad 1 \quad 1]^T$

iv. Geometri $\boldsymbol{N}(A)$ adalah sebuah *plane* (bidang) berdimensi 2 di dalam $\mathbf{R}^5$.

d) Complete solution $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$

Kita cari terlebih dahulu rref($[A\ b]$).

$\begin{bmatrix} \mathbf{10} & 5 & 15 & 30 & 10 & 9 \\ 15 & 10 & 5 & 30 & 10 & 2 \\ 15 & 10 & 15 & 20 & 20 & 9 \end{bmatrix}$	$R_2 = R_2 - \frac{3}{2}R_1$ $R_3 = R_3 - \frac{3}{2}R_1$
$\begin{bmatrix} \mathbf{10} & 5 & 15 & 30 & 10 & 9 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{35}{2} & -15 & -5 & -\frac{23}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{15}{2} & -25 & 5 & -\frac{9}{2} \end{bmatrix}$	$R_1 = \frac{1}{10}R_1$
$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 3 & 1 & \frac{9}{10} \\ 0 & \boldsymbol{\frac{5}{2}} & -\frac{35}{2} & -15 & -5 & -\frac{23}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{15}{2} & -25 & 5 & -\frac{9}{2} \end{bmatrix}$	$R_1 = R_1 - \frac{1}{5}R_2$ $R_3 = R_3 - R_2$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 & 2 & \frac{16}{5} \\ 0 & \boldsymbol{\frac{5}{2}} & -\frac{35}{2} & -15 & -5 & -\frac{23}{2} \\ 0 & 0 & 10 & -10 & 10 & 7 \end{bmatrix}$	$R_2 = \frac{2}{5}R_2$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 & 2 & \frac{16}{5} \\ 0 & 1 & -7 & -6 & -2 & -\frac{23}{5} \\ 0 & 0 & \mathbf{10} & -10 & 10 & 7 \end{bmatrix}$	$R_1 = R_1 - \frac{5}{10} R_3$ $R_2 = R_2 + \frac{7}{10} R_3$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 11 & -3 & -\frac{3}{10} \\ 0 & 1 & 0 & -13 & 5 & \frac{3}{10} \\ 0 & 0 & \mathbf{10} & -10 & 10 & 7 \end{bmatrix}$	$R_3 = \frac{1}{10} R_3$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 11 & -3 & -3/10 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & 5 & 3/10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 7/10 \end{bmatrix}$	Sudah didapat bentuk reduced row echelon form (rref).

Rref dari matriks augmented $[A\ b]$ yaitu

$$\operatorname{rref}([A\ b]) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 11 & -3 & -3/10 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & 5 & 3/10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 7/10 \end{bmatrix}.$$

i. Particular solution $\boldsymbol{x}_p$ dapat dihitung sebagai berikut. Karena free column adalah kolom 4 dan 5, maka kita buat komponen ke-4 dan ke-5 dari vektor particular solution $\boldsymbol{x}_p$ bernilai nol, $x_{p_4} = x_{p_5} = 0$. Sekarang, nilai komponen x_{p_1}, x_{p_2}, dan x_{p_3} dapat dicari sehingga diperoleh particular solution $\boldsymbol{x}_p = \begin{bmatrix} -\frac{3}{10} & \frac{3}{10} & \frac{7}{10} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.

ii. Sebelum ini telah diperoleh suatu vektor $\boldsymbol{x}_n$ di dalam nullspace $\boldsymbol{N}(A)$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{x}_n = c\boldsymbol{s}_1 + d\boldsymbol{s}_2 = c \begin{bmatrix} -11 \\ 13 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ untuk semua } c, d \in \mathbf{R}.$$

Maka, diperoleh complete solution $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{x}_n$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_p + (c\boldsymbol{s}_1 + d\boldsymbol{s}_2) = \begin{bmatrix} -3/10 \\ 3/10 \\ 7/10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -11 \\ 13 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ untuk semua } \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

iii. Tiga contoh vektor complete solution dapat dicari dari kombinasi linear $\boldsymbol{x}_p + c\boldsymbol{s}_1 + d\boldsymbol{s}_2$ dengan mengatur nilai c dan d. Contohnya sebagai berikut.

- Untuk nilai $c = d = 0$, diperoleh vektor

$$\boldsymbol{x}_1 = [-3/10 \quad 3/10 \quad 7/10 \quad 0 \quad 0]^T.$$

- Untuk nilai $c = 1/10, d = 0$, diperoleh vektor

$$\boldsymbol{x}_2 = [-14/10 \quad 16/10 \quad 8/10 \quad 1/10 \quad 0]^T.$$

- Untuk nilai $c = 0, d = 1/10$, diperoleh vektor

$$\boldsymbol{x}_3 = [0 \quad -2/10 \quad 6/10 \quad 0 \quad 1/10]^T.$$

iv. Secara geometri, complete solution dapat dipandang sebagai nullspace $\boldsymbol{N}(A)$ berdimensi $n - r$ (dengan n adalah jumlah kolom matriks A dan r adalah rank matriks A) yang tergeser oleh vektor particular solution $\boldsymbol{x}_p$ di dalam ruang $\mathbf{R}^n$. Karena vektor $\boldsymbol{x}_p$ selalu independen dari nullspace $\boldsymbol{N}(A)$, maka complete solution tidak lagi memiliki zero vector $\mathbf{0}$. Untuk kasus matriks A di atas, maka geometri complete solution adalah nullspace $\boldsymbol{N}(A)$ berdimensi 2 yang tergeser oleh vektor particular solution $\boldsymbol{x}_p$ di dalam ruang $\mathbf{R}^5$.

v. Ya, persamaan matriks $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ selalu memiliki solusi karena semua vektor $\boldsymbol{b}$ berada di column space $\boldsymbol{C}(A)$. Dapat dipahami bahwa karena matriks R memiliki 3 pivot, maka column space $\boldsymbol{C}(A)$ mengisi seluruh ruang $\mathbf{R}^3$. Sementara itu, semua vektor $\boldsymbol{b}$ berada di dalam ruang $\mathbf{R}^3$ sehingga vektor $\boldsymbol{b}$ selalu berada di column space $\boldsymbol{C}(A)$.

4. Bonus problems

a) Show that the complete solution $x = x_p + x_n$ is not a subspace!

b) Show that matrices A and AB have the same column space! (**hint**. Use the definition of column space and the notion from matrix multiplication which can be seen as row combinations or column combinations)

c) Show if $A = uv^T$ for any u, v in R^n then rref of A has only one column pivot! (**hint**. Use the fact that A is a multiplication of column times row of two vectors)

Jawaban:

a) **Jawaban versi singkat (*reasoning*)**: *Complete solution* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{x}_n$ bukan subspace karena tidak memiliki *zero vector*. Hal ini karena *complete solution* memiliki vektor *particular solution* $\boldsymbol{x}_p \neq \mathbf{0}$ yang independen terhadap vektor $\boldsymbol{x}_n$.

Jawaban versi panjang (*complete mathematical proof*)[1]: Secara matematis hal ini dapat dibuktikan sebagai berikut.

Kita akan menunjukkan bahwa kombinasi linear 2 vektor sembarang *complete solution* bukan merupakan vektor *complete solution*. Dimisalkan *nullspace* atau himpunan vektor $\boldsymbol{x}_n$ memiliki dimensi r. Sementara itu, dimisalkan *nullspace* berisi sekumpulan vektor hasil kombinasi linear vektor - vektor *special solution* yang saling independen satu sama lain $\boldsymbol{s}_j; j = 1,2, \ldots, r$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{x}_n = \alpha_1 \boldsymbol{s}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{s}_2 + \cdots + \alpha_r \boldsymbol{s}_r \text{ untuk semua } \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbf{R}.$$

[1] Tidak direkomendasikan untuk menuliskan jawaban versi panjang ketika ujian mengingat ketersediaan waktu yang terbatas.

Sekarang kita ambil sembarang 2 vektor *complete solution* yaitu vektor $\boldsymbol{v}$ dan $\boldsymbol{w}$ sebagai berikut[2]

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{x}_{n_1} = \boldsymbol{x}_p + (\alpha_{11}\boldsymbol{s}_1 + \alpha_{21}\boldsymbol{s}_2 + \cdots + \alpha_{r1}\boldsymbol{s}_r), \forall \alpha_{11}, \alpha_{21}, \dots, \alpha_{r1} \in \mathbf{R}$$
$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{x}_{n_2} = \boldsymbol{x}_p + (\alpha_{12}\boldsymbol{s}_1 + \alpha_{22}\boldsymbol{s}_2 + \cdots + \alpha_{r2}\boldsymbol{s}_r), \forall \alpha_{12}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{r2} \in \mathbf{R}$$

dengan vektor *particular solution* $\boldsymbol{x}_p$ bukanlah *zero vector* atau $\boldsymbol{x}_p \neq \boldsymbol{0}$ dan independen dari vektor $\boldsymbol{x}_n$. Oleh karena itu, kombinasi linear vektor $\boldsymbol{v}$ dan $\boldsymbol{w}$ menghasilkan vektor berikut

$$c\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{w} = (c + d)\boldsymbol{x}_p + (\beta_1\boldsymbol{s}_1 + \beta_2\boldsymbol{s}_2 + \cdots + \beta_r\boldsymbol{s}_r),$$
$$\forall c, d, \beta_i = \alpha_{i1} + \alpha_{i2} \in \mathbf{R} \text{ dan } i = 1,2, \dots, r.$$

Sekarang dapat dilihat bahwa untuk $c + d \neq 1$ maka kombinasi linear $c\boldsymbol{v} + \boldsymbol{d}\boldsymbol{w}$ tidak termasuk ke dalam vektor *complete solution*

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_p + (\alpha_1\boldsymbol{s}_1 + \alpha_2\boldsymbol{s}_2 + \cdots + \alpha_r\boldsymbol{s}_r), \forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in \mathbf{R}.$$

■

b) **Jawaban versi singkat (*reasoning*)**: *Column space* matriks A adalah seluruh vektor hasil kombinasi linear sebagai berikut

$$\boldsymbol{C}(A) = \boldsymbol{C}(A) = \alpha_1\boldsymbol{A}_1 + \alpha_2\boldsymbol{A}_2 + \cdots + \alpha_p\boldsymbol{A}_p, \forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in \mathbf{R}.$$

Sementara itu, matriks AB dapat dijabarkan menurut aturan perkalian matriks sebagai berikut

$$AB = A\left[\boldsymbol{B_1}\ \boldsymbol{B}_2 \dots \boldsymbol{B}_q\right] = \left[A\boldsymbol{B}_1\ A\boldsymbol{B}_2 \dots\ A\boldsymbol{B}_q\right]$$

sehingga dapat diamati bahwa setiap kolom matriks AB yaitu vektor $A\boldsymbol{B}_1, A\boldsymbol{B}_2, \dots, A\boldsymbol{B}_q$ merupakan hasil kombinasi linear kolom – kolom matriks A atau, agar lebih jelas, untuk vektor kolom ke-i dari matriks AB dapat ditulis sebagai berikut

$$A\boldsymbol{B}_i = A\left[b_{1i}\ b_{2i} \dots b_{pi}\right]^T = b_{1i}\boldsymbol{A}_1 + b_{2i}\boldsymbol{A}_2 + \cdots + b_{pi}\boldsymbol{A}_p \text{ untuk } i = 1,2, \dots, q.$$

Oleh karena itu, *column space* matriks AB yang direpresentasikan oleh seluruh vektor hasil kombinasi linear kolom – kolom matriks AB merupakan seluruh vektor hasil kombinasi linear kolom – kolom matriks A. Dengan kata lain, matriks AB memiliki *column space* yang sama dengan *column space* matriks A.

Jawaban versi panjang (*complete mathematical proof*)[3]: Kita akan melihat ekspresi matematis *column space* $\boldsymbol{C}(A)$ dan $\boldsymbol{C}(AB)$ untuk menunjukkan matriks A dan B memiliki *column space* yang sama.

Dimisalkan matriks A memiliki p buah kolom dan matriks B memiliki q buah kolom. *Column space* $\boldsymbol{C}(A)$ diekspresikan sebagai berikut

[2] Simbol ∀ dibaca 'untuk semua'.

[3] Tidak direkomendasikan untuk menuliskan jawaban versi panjang ketika ujian mengingat ketersediaan waktu yang terbatas.

$$\boldsymbol{C}(A) = \alpha_1 \boldsymbol{A}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{A}_2 + \cdots + \alpha_p \boldsymbol{A}_p, \forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in \mathbf{R}.$$

Sebelum menuliskan ekspresi *column space* $\boldsymbol{C}(AB)$, kita akan meninjau terlebih dahulu bentuk matriks AB menggunakan aturan perkalian matriks sebagai berikut

$$AB = A[\boldsymbol{B_1}\ \boldsymbol{B}_2 \dots \boldsymbol{B}_q] = [A\boldsymbol{B}_1\ A\boldsymbol{B}_2 \dots\ A\boldsymbol{B}_q]$$

dengan $\boldsymbol{B}_i; i = 1,2, \dots, q$ adalah vektor kolom ke-i dari matriks B. Karena vektor kolom $\boldsymbol{B}_i$ terdiri dari komponen $\boldsymbol{B}_i = [b_{1i}\ b_{2i} \dots b_{pi}]^T$, maka vektor kolom $A\boldsymbol{B}_i$ dapat dituliskan sebagai kombinasi linear kolom – kolom matriks A

$$A\boldsymbol{B}_i = b_{1i}\boldsymbol{A}_1 + b_{2i}\boldsymbol{A}_2 + \cdots + b_{pi}\boldsymbol{A}_p$$

dengan $\boldsymbol{A}_j; j = 1,2, \dots, p$ adalah vektor kolom ke-j dari matriks A. Sekarang kita bisa menuliskan ekspresi *column space* $\boldsymbol{C}(AB)$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{C}(AB) = \beta_1 A\boldsymbol{B}_1 + \beta_2 A\boldsymbol{B}_2 + \cdots + \beta_q A\boldsymbol{B}_q, \forall \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q \in \mathbf{R}$$

yang mana kita memiliki ekspresi vektor $\beta_i A\boldsymbol{B}_i = \beta_i(b_{1i}\boldsymbol{A}_1 + b_{2i}\boldsymbol{A}_2 + \cdots + b_{pi}\boldsymbol{A}_p)$. Ekspresi *column space* $\boldsymbol{C}(AB)$ menjadi

$$\boldsymbol{C}(AB) = \gamma_1 \boldsymbol{A}_1 + \gamma_2 \boldsymbol{A}_2 + \cdots + \gamma_p \boldsymbol{A}_p, \forall \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p \in \mathbf{R}$$

dengan $\gamma_j = \sum_{i=1}^{q} \beta_i b_{ji}\,; j = 1,2, \dots, p$. Dapat dilihat bahwa *column space* $\boldsymbol{C}(AB)$ merupakan sekumpulan vektor hasil kombinasi linear vektor – vektor kolom dari matriks A sehingga matriks A dan AB memiliki *column space* yang sama.

■

c) Bahwa $\text{rref}(A)$ memiliki 1 pivot kolom adalah implikasi dari situasi matriks A hanya memiliki 1 vektor independen (matriks A memiliki rank 1). Oleh karena itu, permasalahan dapat diselesaikan dengan menunjukkan bahwa matriks $A = \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T$ hanya memiliki 1 vektor independen.

Vektor $\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^n$ dan $\boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^n$ masing - masing memiliki n komponen sehingga dapat ditulis $\boldsymbol{u} = [u_1\ u_2 \dots u_n]^T$ dan $\boldsymbol{v} = [v_1\ v_2 \dots v_n]^T$. Matriks A kemudian dapat ditulis sebagai perkalian vektor kolom $\boldsymbol{u}$ dengan vektor baris $\boldsymbol{v}^T$ berikut

$$A = \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T = \boldsymbol{u}[v_1\ v_2 \dots v_n] = [v_1\boldsymbol{u}\ v_2\boldsymbol{u} \dots v_n\boldsymbol{u}]$$

yang mana masing - masing kolom matriks A adalah perkalian vektor $\boldsymbol{u}$ dengan suatu skalar $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbf{R}$. Dapat dipahami bahwa vektor ke-2 ($v_2\boldsymbol{u}$) sampai vektor ke-n ($v_n\boldsymbol{u}$) adalah hasil perkalian skalar vektor ke-1 ($v_1\boldsymbol{u}$) sehingga dapat dikatakan matriks A hanya memiliki 1 vektor independen yaitu vektor ke-1 ($v_1\boldsymbol{u}$).