



Przedmiotowy Konkurs Informatyczny LOGIA powołany przez Mazowieckiego Kuratora Oświaty

Zadanie Spirala – LOGIA 24 (2023/24), etap 1

Treść zadania

Janek rysuje spiralę złożoną z prostokątów. Przyjmuje, że długość jednego boku prostokąta zawsze wynosi 1. Prosi Basię o podanie długości drugiego boku. Zaczyna rysowanie od prostokąta o długości boku podanego przez Basię, każdy kolejny rysowany prostokąt ma długość boku o jeden mniejszą od poprzedniego. Ostatni prostokąt, który Janek rysuje, to kwadrat o długości boku 1.

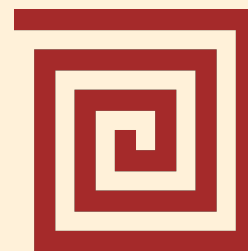
Pomóż Jankowi i napisz program, który wczyta długość boku podanego przez Basię i wypisze obwód figury.



Kolejne prostokąty
5, 4, 3, 2, 1.



Kolejne prostokąty
8, 7, 6, ..., 1.



Kolejne prostokąty
12, 11, 10, ..., 1.

Wejście

Liczba naturalna z zakresu od 2 do 100.

Wyjście

Liczba – obwód figury.

Przykłady:

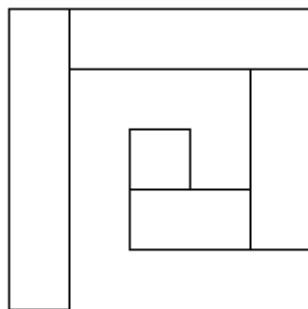
Wejście	5	8	12
Wyjście	32	74	158

Omówienie rozwiązania

Przeanalizujmy rysunek krok po kroku i zacznijmy od najkrótszego prostokąta, a dokładniej kwadratu. Jego obwód wynosi 4. Potem dokładamy prostokąt o długościach boków 2 i 1, którego obwód wynosi $2 * (2 + 1) = 6$. Obwód kolejnego prostokąta to $2 * (3 + 1) = 12$, itd. aż do $2 * (n + 1)$. Trzeba jednak zauważyć, że prostokąty stykają się bokami, wobec tego wszystkie boki wewnętrzne trzeba odliczyć. Od obwodu pierwszego i ostatniego prostokąta odejmujemy 1, od pozostałych 2.



Przedmiotowy Konkurs Informatyczny LOGIA powołany przez Mazowieckiego Kuratora Oświaty



$$\text{Obwód} = 4 - 1 + 2 * (2 + 1) - 2 + 2 * (3 + 1) - 2 + \dots + 2 * (n + 1) - 1$$

W wyniku przekształceń otrzymujemy:

$$\text{Obwód} = 4 + 2 * (2 + 1) - 2 + 2 * (3 + 1) - 2 + \dots + 2 * (n + 1) - 2$$

$$\text{Obwód} = 2 + 2 * 1 + 2 * 2 + 2 * 3 + \dots + 2 * n$$

$$\text{Obwód} = 2 + 2 * (1 + 2 + \dots + n)$$

$$\text{Obwód} = 2 + 2 * (n + 1) * n / 2$$

$$\text{Obwód} = 2 + (n + 1) * n$$

$$\text{Obwód} = 2 + n + n * n$$

Wzór na sumę n liczb naturalnych $1 + 2 + 3 + \dots + n$ jest znany jako wzór Gaussa i wyraża się jako:

$$S(n) = (n + 1) * n / 2$$

Ten wzór można wyjaśnić poprzez łączenie w pary pierwszego i ostatniego elementu ciągu, drugiego i przedostatniego, itd. Suma liczb w każdej parze wynosi $n + 1$. Jeśli n jest liczbą parzystą, istnieje $n / 2$ takich par. Dla n nieparzystego, jest o jedną parę mniej, ale zostaje jeden element równy $(n + 1) / 2$.

Jako ciekawostkę warto dodać, że wzór ten pochodzi od Karola Gaussa, niemieckiego matematyka, który miał go odkryć jako młody uczeń, wykonując zadanie polegające na zsumowaniu pierwszych 100 liczb naturalnych. Gauss zauważył, że sumując pierwszą i ostatnią liczbę $1 + 100$, drugą i przedostatnią $2 + 99$, i tak dalej, otrzymujemy 101. Ponieważ było 50 takich par, suma wynosiła $50 * 101 = 5050$, co jest szczególnym przypadkiem ogólnego wzoru.

Rozwiązanie w języku Python

Gdy wyprowadziliśmy wzór, rozwiązanie jest krótkie.

```
1 n = int(input())
2 print(n * n + n + 2)
```

Alternatywne rozwiązanie polega na iteracyjnym obliczaniu długości obwodu.

```
1 def ile(n):
2     obwod = 4
3     for i in range(2, n + 1):
4         obwod += 2 * i
5     return obwod
6
7 n=int(input())
8 print(ile(n))
```



Przedmiotowy Konkurs Informatyczny LOGIA powołany przez Mazowieckiego Kuratora Oświaty

Testy

Najpierw testujemy zadanie na przykładach z treści zadania. Potem sprawdzamy dla parametrów parzystych i nieparzystych ze szczególnym uwzględnieniem warunków brzegowych. Dla małych danych warto rozrysować sobie spiralę i policzyć ręcznie, by upewnić się, że wynik jest poprawny.

Test	Wynik
2	8
7	58
13	184
25	652
46	2164
54	2972
79	6322
88	7834
91	8374
100	10102