



# **Algebra Komputerowa**

## **Macierze Blokowe**

**Filip Zieliński**

2025

**1. Wstęp**

**2. Podstawowe Operacje**

**3. Mnożenie**

**4. Odwrotności**

W poniższych rozważaniach skupimy się na macierzach blokowych  $2 \times 2$ . Wiele wyników da się jednak uogólnić.

## Definicja

Rozważmy macierze

$A \in \mathcal{M}_{n_1 \times m_1}$ ,  $B \in \mathcal{M}_{n_1 \times m_2}$ ,  $C \in \mathcal{M}_{n_2 \times m_1}$ ,  $D \in \mathcal{M}_{n_2 \times m_2}$  nad ustalonym ciałem  $K$ . Wtedy, **Macierzą Blokową** (klatkową)  $X \in \mathcal{M}_{n_1+n_2 \times m_1+m_2}$  złożoną z  $A, B, C, D$  definiujemy jako  $X = (x_{ij})$ , gdzie

$$x_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & i \leq n_1, \quad j \leq m_1 \\ b_{(i)(j-m_1)} & i \leq n_1, \quad m_1 < j \leq m_1 + m_2 \\ c_{(i-n_1)(j)} & n_1 < i \leq n_1 + n_2, \quad j \leq m_1 \\ d_{(i-n_1)(j-m_1)} & n_1 < i \leq n_1 + n_2, \quad m_1 < j \leq m_1 + m_2 \end{cases}$$

Takie macierze zapisujemy jako

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Zauważmy, że macierze można dzielić na bloki na wiele sposobów,

$$X = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{array} \right]$$

ale zawsze zachodzi

$$\text{col}A = \text{col}C, \quad \text{col}B = \text{col}D, \quad \text{row}A = \text{row}B, \quad \text{row}C = \text{row}D$$

## Konwencja

Blok, będący macierzą dowolnych wymiarów wypełnioną samymi zerami oznaczamy jako **0**.

## Definicja

**Diagonalną (Przekątniową) macierzą blokową** nazywamy macierz blokową  $D$ , jeśli da się ją zapisać jako

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_2 \end{bmatrix}$$

## Definicja

**Trójkątno-górną macierzą blokową** nazywamy macierz blokową  $U$ , jeśli da się ją zapisać jako

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ \mathbf{0} & U_{22} \end{bmatrix}$$

## Definicja

**Trójkątno-dolną macierzą blokową** nazywamy macierz blokową  $L$ , jeśli da się ją zapisać jako

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & \mathbf{0} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}$$

## Konwencja

W notacji macierzy blokowej  $\mathcal{I}$  może oznaczać macierz jednostkową dowolnego wymiaru.

## Uwaga

Macierz jednostkową można zapisać w postaci blokowej jako

$$\mathcal{I} = \begin{bmatrix} \mathcal{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{I} \end{bmatrix}$$

## Obserwacja

Niech  $X, Y$  będą macierzami tych samych wymiarów. Jeżeli  $X, Y$  podzielimy na bloki odpowiednio *tych samych wymiarów*, to macierze blokowe można dodawać

$$X = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix}, \quad X + Y = \begin{bmatrix} A_1 + A_2 & B_1 + B_2 \\ C_1 + C_2 & D_1 + D_2 \end{bmatrix}$$

Równie naturalnie, zdefiniowane jest odejmowanie macierzy blokowych jak i mnożenie macierzy przez skalar z ciała.



## Twierdzenie

Niech  $X = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$  będzie macierzą blokową. Transpozycja macierzy  $A$  jest macierzą blokową, zadaną jako

$$A^T = \begin{bmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{bmatrix}$$

### Twierdzenie

Niech,  $X \in \mathcal{M}_{n_1+n_2 \times m_1+m_2}$ ,  $Y \in \mathcal{M}_{m_1+m_2 \times p_1+p_2}$  będą macierzami nad tym samym ciałem  $K$  podzielonymi na bloki w następujący sposób

$$X = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix},$$

gdzie  $\text{col}A_1 = \text{col}C_1 = \text{row}A_2 = \text{row}B_2$  oraz  
 $\text{col}B_1 = \text{col}D_1 = \text{row}C_2 = \text{row}D_2$ .

Wtedy

$$M = XY = \begin{bmatrix} A_1A_2 + B_1C_2 & A_1B_2 + B_1D_2 \\ C_1A_2 + D_1C_2 & C_1B_2 + D_1D_2 \end{bmatrix}$$

## Twierdzenie

Niech  $D = \begin{bmatrix} D_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_2 \end{bmatrix}$  będzie kwadratową macierzą blokowo-diagonalną, gdzie  $D_1, D_2$  są blokami kwadratowymi. Macierz  $D$  jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy gdy macierze  $D_1$  oraz  $D_2$  są nieosobliwe oraz  $D^{-1}$  zadane jest wzorem

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} D_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_2^{-1} \end{bmatrix}$$

## Twierdzenie

Niech  $D = \begin{bmatrix} D_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_2 \end{bmatrix}$  będzie kwadratową macierzą blokowo-diagonalną, gdzie  $D_1, D_2$  są blokami kwadratowymi. Macierz  $D$  jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy gdy macierze  $D_1$  oraz  $D_2$  są nieosobliwe oraz  $D^{-1}$  zadane jest wzorem

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} D_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_2^{-1} \end{bmatrix}$$

## Dowód.

Wzór najprościej sprawdzić z definicji macierzy odwrotnej. Wskazanie na istnienie wynika z analizy liczby liniowo niezależnych wierszy lub macierzy. □

## Twierdzenie

Niech  $U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ \mathbf{0} & U_{22} \end{bmatrix}$  będzie kwadratową macierzą blokową trójkątną górną, gdzie  $U_{11}, U_{22}$  są blokami kwadratowymi. Macierz  $U$  jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy gdy macierze  $U_{11}$  oraz  $U_{22}$  są nieosobliwe oraz  $U^{-1}$  zadane jest wzorem

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} U_{11}^{-1} & -U_{11}^{-1}U_{12}U_{22}^{-1} \\ \mathbf{0} & U_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

## Twierdzenie

Niech  $U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ \mathbf{0} & U_{22} \end{bmatrix}$  będzie kwadratową macierzą blokową trójkątną górną, gdzie  $U_{11}, U_{22}$  są blokami kwadratowymi. Macierz  $U$  jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy gdy macierze  $U_{11}$  oraz  $U_{22}$  są nieosobliwe oraz  $U^{-1}$  zadane jest wzorem

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} U_{11}^{-1} & -U_{11}^{-1}U_{12}U_{22}^{-1} \\ \mathbf{0} & U_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

## Dowód.

Wzór można wyprowadzić z metody Gaussa, natomiast wkw wynika z analizy liczby liniowo niezależnych kolumn i wierszy. □

## Twierdzenie

Niech  $L = \begin{bmatrix} L_{11} & \mathbf{0} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}$  będzie kwadratową macierzą blokową trójkątną dolną, gdzie  $L_{11}, L_{22}$  są blokami kwadratowymi. Macierz  $L$  jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy gdy macierze  $L_{11}$  oraz  $L_{22}$  są nieosobliwe oraz  $L^{-1}$  zadane jest wzorem

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} L_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ -L_{22}^{-1}L_{21}L_{11}^{-1} & L_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

## Twierdzenie

Niech  $L = \begin{bmatrix} L_{11} & \mathbf{0} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}$  będzie kwadratową macierzą blokową trójkątną dolną, gdzie  $L_{11}, L_{22}$  są blokami kwadratowymi. Macierz  $L$  jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy gdy macierze  $L_{11}$  oraz  $L_{22}$  są nieosobliwe oraz  $L^{-1}$  zadane jest wzorem

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} L_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ -L_{22}^{-1}L_{21}L_{11}^{-1} & L_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

## Dowód.

Wzór można wyprowadzić z metody Gaussa, natomiast wkw wynika z analizy liczby liniowo niezależnych kolumn i wierszy. □



Niech  $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$  będzie kwadratową macierzą blokową, gdzie  $A, D$  są kwadratowymi blokami.

### Definicja

Jeżeli  $D$  jest nieosobliwe, **Dopełnienie Schura** macierzy  $M$  względem  $D$  definiujemy jako  $M/D = A - BD^{-1}C$

### Definicja

Jeżeli  $A$  jest nieosobliwe, **Dopełnienie Schura** macierzy  $M$  względem  $A$  definiujemy jako  $M/A = D - CA^{-1}B$

Niech  $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$  będzie kwadratową macierzą blokową, gdzie  $A, D$  są kwadratowymi blokami.

### Twierdzenie

Niech  $A$  będzie nieosobliwe. Wtedy  $M^{-1}$  istnieje wtedy i tylko wtedy gdy  $M/A$  jest odwracalne oraz zachodzi wzór

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(M/A)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(M/A)^{-1} \\ -(M/A)^{-1}CA^{-1} & (M/A)^{-1} \end{bmatrix}$$

### Dowód.

Wzór najprościej wyprowadzić z metody Gaussa.



Niech  $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$  będzie kwadratową macierzą blokową, gdzie  $A, D$  są kwadratowymi blokami.

### Twierdzenie

Niech  $D$  będzie nieosobliwe. Wtedy  $M^{-1}$  istnieje wtedy i tylko wtedy gdy  $M/D$  jest odwracalne oraz zachodzi wzór

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} (M/D)^{-1} & -(M/D)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(M/D)^{-1} & D^{-1} + D^{-1}C(M/D)^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix}$$

### Dowód.

Wzór najprościej wyprowadzić z metody Gaussa.



## Konwencja

Oznaczmy przez  $\mathcal{J}$  macierz kwadratową dowolnego rozmiaru, która ma 1 na odwrotnej przekątnej, a pozostałe elementy są równe 0. Zauważmy, że można zapisać taką macierz w postaci blokowej jako

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathcal{J} \\ \mathcal{J} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

### Obserwacja

Niech  $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$  będzie kwadratową macierzą blokową, której bloki  $B, C$  są blokami kwadratowymi. Zauważmy, że macierz  $M\mathcal{J} = \begin{bmatrix} B\mathcal{J} & A\mathcal{J} \\ D\mathcal{J} & C\mathcal{J} \end{bmatrix}$  jest macierzą kwadratową o blokach kwadratowych na głównej przekątnej, zatem można policzyć jej odwrotność przy pomocy wspomnianych wcześniej twierdzeń.

### Obserwacja

Macierz odwrotną do macierzy blokowej  $M$  posiadającej bloki kwadratowe na przekątnej odwrotnej, możemy wyliczyć z zależności

$$M^{-1} = \mathcal{J}\mathcal{J}^{-1}M^{-1} = \mathcal{J}(M\mathcal{J})^{-1}$$

1. Inverses and Determinants of  $n \times n$  matrices, Müge Saadetoğlu, Şakir Mehmet Dinsev, 2023, *Mathematics*
2. Block Matrix Formulas , John A. Gubner, 2024