

# Lista Zadań 01 - Podstawowe własności Struktur Algebraicznych

Filip Zieliński

13 marca 2025

W zadaniach 1 – 5, stwierz czy podane działanie jest wewnętrzne.

1. Rozważmy zbiór  $\mathcal{C}(\mathbb{R})$  funkcji ciągłych o dziedzinie i przeciwdziedzinie rzeczywistej. Definiujemy działanie  $+$  :  $\mathcal{C}(\mathbb{R}) \times \mathcal{C}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R})$  jako  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$  (sumowanie po wartościach). Czy to działanie jest dobrze zdefiniowane (wewnętrzne)?
2. Rozważmy zbiór  $LF(V, \mathbb{K})$  odwzorowań liniowych przestrzeni wektorowej  $V$  nad ciałem  $\mathbb{K}$  w samą siebie. Definiujemy działanie  $+$  :  $LF(V, \mathbb{K}) \times LF(V, \mathbb{K}) \rightarrow LF(V, \mathbb{K})$  jako dodawanie po wartościach. Czy to działanie jest dobrze zdefiniowane (wewnętrzne)?
3. Rozważmy zbiór  $H((G, +))$  ednomorfizmów grupy  $G$ . Definiujemy działanie  $+$  :  $H((G, +)) \times H((G, +)) \rightarrow H((G, +))$  jako dodawanie po wartościach. Czy to działanie jest dobrze zdefiniowane (wewnętrzne)?
4. Rozważmy zbiór  $F \uparrow (\mathbb{R})$  funkcji rosnących o dziedzinie i przeciwdziedzinie rzeczywistej. Definiujemy działanie  $+$  :  $F \uparrow (\mathbb{R}) \times F \uparrow (\mathbb{R}) \rightarrow F \uparrow (\mathbb{R})$  jako dodawanie po wartościach. Czy takie działanie jest dobrze zdefiniowane (wewnętrzne)?

W zadaniach 5 – 10 odnosimy się do grupy  $(G, \cdot)$ .

5. Wykaż, że istnieje dokładnie jeden element neutralny w  $G$ .
6. Wykaż, że istnieje dokładnie jeden element symetryczny dla każdego elementu w  $G$ .
7. Wykaż, że dla każdego  $a \in G$  zachodzi  $(a^{-1})^{-1} = a$ .
8. Wykaż, że dla każdego  $a, b \in G$  zachodzi  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ .
9. Wykaż, że jeżeli dla każdego  $a \in G$  zachodzi  $aa = e$  to  $G$  jest grupą abelową.
10. Niech  $(H, +)$  będzie grupą oraz  $f : G \rightarrow H$  będzie homomorfizmem grup. Wykaż, że  $\ker f < G$  (jądro jest podgrupą  $G$ ).

11. Podaj przykład struktury z działaniem przemennym ale nie łącznym.

W zadaniach 12 – 14 odnosimy się do pierścienia  $(R, +, \cdot)$

12. Wykaż, że dla każdego  $a, b \in R$  zachodzi  $a(-b) = -(ab) = (-a)b$

13. Wykaż, że dla każdego  $a, b \in R$  zachodzi  $(-a)(-b) = ab$

14. \* Wykaż, że jeżeli  $R$  jest skończonym pierścieniem całkowitym to jest też ciałem

15. \* Wykaż, że jedynym automorfizmem  $\mathbb{Q}$  jako ciała jest identyczność

W zadaniach 16 – 21 dana jest funkcja  $f : X \rightarrow Y$  oraz  $A, B \subseteq X$  i  $C, D \subseteq Y$ .

16. Wykaż, że  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ .

17. Wykaż, że  $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ .

18. Wykaż, że  $f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B)$ .

19. Wykaż, że  $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ .

20. Wykaż, że  $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ .

21. Wykaż, że  $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

22. Wykaż, że funkcja  $f : X \rightarrow Y$  jest iniekcją wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnych  $A, B \subseteq X$  zachodzi równość  $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$ .