



Algebra Komputerowa

Macierze Blokowe

Filip Zieliński

2025

1. Wstęp

2. Podstawowe Operacje

3. Mnożenie

4. Odwrotności

W poniższych rozważaniach skupimy się na macierzach blokowych 2×2 . Wiele wyników da się jednak uogólnić.

Definicja

Rozważmy macierze

$A \in \mathcal{M}_{n_1 \times m_1}$, $B \in \mathcal{M}_{n_1 \times m_2}$, $C \in \mathcal{M}_{n_2 \times m_1}$, $D \in \mathcal{M}_{n_2 \times m_2}$ nad ustalonym ciałem K . Wtedy, **Macierzą Blokową** (klatkową) $X \in \mathcal{M}_{n_1+n_2 \times m_1+m_2}$ złożoną z A, B, C, D definiujemy jako $X = (x_{ij})$, gdzie

$$x_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & i \leq n_1, \quad j \leq m_1 \\ b_{(i)(j-m_1)} & i \leq n_1, \quad m_1 < j \leq m_1 + m_2 \\ c_{(i-n_1)(j)} & n_1 < i \leq n_1 + n_2, \quad j \leq m_1 \\ d_{(i-n_1)(j-m_1)} & n_1 < i \leq n_1 + n_2, \quad m_1 < j \leq m_1 + m_2 \end{cases}$$

Takie macierze zapisujemy jako

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Zauważmy, że macierze można dzielić na bloki na wiele sposobów,

$$X = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{array} \right]$$

ale zawsze zachodzi

$$\text{col}A = \text{col}C, \quad \text{col}B = \text{col}D, \quad \text{row}A = \text{row}B, \quad \text{row}C = \text{row}D$$

Konwencja

Blok, będący macierzą dowolnych wymiarów wypełnioną samymi zerami oznaczamy jako **0**.

Definicja

Diagonalną (Przekątniową) macierzą blokową nazywamy macierz blokową D , jeśli da się ją zapisać jako

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_2 \end{bmatrix}$$

Definicja

Trójkątno-górną macierz blokową nazywamy macierz blokową U , jeśli da się ją zapisać jako

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ \mathbf{0} & U_{22} \end{bmatrix}$$

Definicja

Trójkątno-dolną macierz blokową nazywamy macierz blokową L , jeśli da się ją zapisać jako

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & \mathbf{0} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}$$

Konwencja

W notacji macierzy blokowej \mathcal{I} może oznaczać macierz jednostkową dowolnego wymiaru.

Uwaga

Macierz jednostkową można zapisać w postaci blokowej jako

$$\mathcal{I} = \begin{bmatrix} \mathcal{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{I} \end{bmatrix}$$

Obserwacja

Niech X, Y będą macierzami tych samych wymiarów. Jeżeli X, Y podzielimy na bloki odpowiednio *tych samych wymiarów*, to macierze blokowe można dodawać

$$X = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix}, \quad X + Y = \begin{bmatrix} A_1 + A_2 & B_1 + B_2 \\ C_1 + C_2 & D_1 + D_2 \end{bmatrix}$$

Równie naturalnie, zdefiniowane jest odejmowanie macierzy blokowych jak i mnożenie macierzy przez skalar z ciała.

Twierdzenie

Niech $X = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ będzie macierzą blokową. Transpozycja macierzy A jest macierzą blokową, zadaną jako

$$A^T = \begin{bmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{bmatrix}$$

Twierdzenie

Niech, $X \in \mathcal{M}_{n_1+n_2 \times m_1+m_2}$, $Y \in \mathcal{M}_{m_1+m_2 \times p_1+p_2}$ będą macierzami nad tym samym ciałem K podzielonymi na bloki w następujący sposób

$$X = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix},$$

gdzie $\text{col}A_1 = \text{col}C_1 = \text{row}A_2 = \text{row}B_2$ oraz $\text{col}B_1 = \text{col}D_1 = \text{row}C_2 = \text{row}D_2$.

Wtedy

$$M = XY = \begin{bmatrix} A_1A_2 + B_1C_2 & A_1B_2 + B_1D_2 \\ C_1A_2 + D_1C_2 & C_1B_2 + D_1D_2 \end{bmatrix}$$

Twierdzenie

Niech $D = \begin{bmatrix} D_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_2 \end{bmatrix}$ będzie kwadratową macierzą blokowo-diagonalną, gdzie D_1, D_2 są blokami kwadratowymi. Macierz D jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy gdy macierze D_1 oraz D_2 są nieosobliwe oraz D^{-1} zadane jest wzorem

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} D_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_2^{-1} \end{bmatrix}$$

Twierdzenie

Niech $D = \begin{bmatrix} D_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_2 \end{bmatrix}$ będzie kwadratową macierzą blokowo-diagonalną, gdzie D_1, D_2 są blokami kwadratowymi. Macierz D jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy gdy macierze D_1 oraz D_2 są nieosobliwe oraz D^{-1} zadane jest wzorem

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} D_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_2^{-1} \end{bmatrix}$$

Dowód.

Wzór najprościej sprawdzić z definicji macierzy odwrotnej. Wskazanie na istnienie wynika z analizy liczby liniowo niezależnych wierszy lub macierzy. □

Twierdzenie

Niech $U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ \mathbf{0} & U_{22} \end{bmatrix}$ będzie kwadratową macierzą blokową trójkątną górną, gdzie U_{11}, U_{22} są blokami kwadratowymi. Macierz U jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy gdy macierze U_{11} oraz U_{22} są nieosobliwe oraz U^{-1} zadane jest wzorem

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} U_{11}^{-1} & -U_{11}^{-1}U_{12}U_{22}^{-1} \\ \mathbf{0} & U_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

Twierdzenie

Niech $U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ \mathbf{0} & U_{22} \end{bmatrix}$ będzie kwadratową macierzą blokową trójkątną górną, gdzie U_{11}, U_{22} są blokami kwadratowymi. Macierz U jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy gdy macierze U_{11} oraz U_{22} są nieosobliwe oraz U^{-1} zadane jest wzorem

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} U_{11}^{-1} & -U_{11}^{-1}U_{12}U_{22}^{-1} \\ \mathbf{0} & U_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

Dowód.

Wzór można wyprowadzić z metody Gaussa, natomiast wkw wynika z analizy liczby liniowo niezależnych kolumn i wierszy. □

Twierdzenie

Niech $L = \begin{bmatrix} L_{11} & \mathbf{0} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}$ będzie kwadratową macierzą blokową trójkątną dolną, gdzie L_{11}, L_{22} są blokami kwadratowymi. Macierz L jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy gdy macierze L_{11} oraz L_{22} są nieosobliwe oraz L^{-1} zadane jest wzorem

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} L_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ -L_{22}^{-1}L_{21}L_{11}^{-1} & L_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

Twierdzenie

Niech $L = \begin{bmatrix} L_{11} & \mathbf{0} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}$ będzie kwadratową macierzą blokową trójkątną dolną, gdzie L_{11} , L_{22} są blokami kwadratowymi. Macierz L jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy gdy macierze L_{11} oraz L_{22} są nieosobliwe oraz L^{-1} zadane jest wzorem

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} L_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ -L_{22}^{-1}L_{21}L_{11}^{-1} & L_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

Dowód.

Wzór można wyprowadzić z metody Gaussa, natomiast wkw wynika z analizy liczby liniowo niezależnych kolumn i wierszy. □

Niech $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ będzie kwadratową macierzą blokową, gdzie A, D są kwadratowymi blokami.

Definicja

Jeżeli D jest nieosobliwe, **Dopełnienie Schura** macierzy M względem D definiujemy jako $M/D = A - BD^{-1}C$

Definicja

Jeżeli A jest nieosobliwe, **Dopełnienie Schura** macierzy M względem A definiujemy jako $M/A = D - CA^{-1}B$

Niech $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ będzie kwadratową macierzą blokową, gdzie A, D są kwadratowymi blokami.

Twierdzenie

Niech A będzie nieosobliwe. Wtedy M^{-1} istnieje wtedy i tylko wtedy gdy M/A jest odwracalne oraz zachodzi wzór

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(M/A)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(M/A)^{-1} \\ -(M/A)^{-1}CA^{-1} & (M/A)^{-1} \end{bmatrix}$$

Dowód.

Wzór najprościej wyprowadzić z metody Gaussa. □

Niech $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ będzie kwadratową macierzą blokową, gdzie A, D są kwadratowymi blokami.

Twierdzenie

Niech D będzie nieosobliwe. Wtedy M^{-1} istnieje wtedy i tylko wtedy gdy M/D jest odwracalne oraz zachodzi wzór

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} (M/D)^{-1} & -(M/D)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(M/D)^{-1} & D^{-1} + D^{-1}C(M/D)^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix}$$

Dowód.

Wzór najprościej wyprowadzić z metody Gaussa.



Konwencja

Oznaczmy przez \mathcal{J} macierz kwadratową dowolnego rozmiaru, która ma 1 na odwrotnej przekątnej, a pozostałe elementy są równe 0. Zauważmy, że można zapisać taką macierz w postaci blokowej jako

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathcal{J} \\ \mathcal{J} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Obserwacja

Niech $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ będzie kwadratową macierzą blokową, której bloki B, C są blokami kwadratowymi. Zauważmy, że macierz $M\mathcal{J} = \begin{bmatrix} B\mathcal{J} & A\mathcal{J} \\ D\mathcal{J} & C\mathcal{J} \end{bmatrix}$ jest macierzą kwadratową o blokach kwadratowych na głównej przekątnej, zatem można policzyć jej odwrotność przy pomocy wspomnianych wcześniej twierdzeń.

Obserwacja

Macierz odwrotną do macierzy blokowej M posiadającej bloki kwadratowe na przekątnej odwrotnej, możemy wyliczyć z zależności

$$M^{-1} = \mathcal{J}\mathcal{J}^{-1}M^{-1} = \mathcal{J}(M\mathcal{J})^{-1}$$

1. Inverses and Determinants of $n \times n$ matrices, Müge Saadetoğlu, Şakir Mehmet Dinsev, 2023, *Mathematics*
2. Block Matrix Formulas , John A. Gubner, 2024