

# Lean & ITP

Michał Dobranowski

12 grudnia 2025

## Spis treści

<b>1. Wstęp teoretyczny</b>	<b>2</b>
1.1. Logika intuicjonistyczna . . . . .	2
1.1.1. Związek z logiką klasyczną . . . . .	3
1.1.2. Semantyka . . . . .	4
1.2. Rachunek lambda . . . . .	5
1.2.1. Alfa-konwersja . . . . .	6
1.2.2. Beta-redukcja . . . . .	7
1.2.3. Kombinator punktu stałego . . . . .	8
1.2.4. Eta-redukcja . . . . .	8
1.2.5. Wyrażalność algorytmów w rachunku lambda . . . . .	9
1.3. Typowany rachunek lambda . . . . .	10
1.3.1. Izomorfizm Curry'ego-Howarda . . . . .	10
<b>2. Podstawy dowodzenia w Lean</b>	<b>11</b>
2.1. Składnia – bardzo krótki wstęp . . . . .	11
2.1.1. Tryby dowodzenia . . . . .	13
2.1.2. Argumenty i ich rodzaje . . . . .	13
2.1.3. Typy Sort, Type i Prop . . . . .	14
2.2. Rachunek zdań i pierwsze taktyki . . . . .	14
2.3. Przekształcenia algebraiczne i równości . . . . .	18
2.4. Rachunek kwantyfikatorów . . . . .	19
2.5. Taktyki automatyzujące dowodzenie . . . . .	20
<b>3. Studia przypadków</b>	<b>22</b>
3.1. Zbiór z relacją równoważności . . . . .	22
3.2. Grupa abelowa . . . . .	23
<b>4. Literatura</b>	<b>27</b>

## 1. Wstęp teoretyczny

Aby zrozumieć, dlaczego systemowi wspomagającego dowodzenie (ang. *proof assistant*) możemy ufać bardziej niż tuszowi na papierze, należy zrozumieć narzędzia oferowane przez logikę, rachunek lambda oraz teorię typów, na których zbudowany jest każdy znany autorowi tego typu system. Chociaż ten kurs nigdy nie miał być teoretyczny, zdaniem autora formalizmy dotyczące (typowanego) rachunku lambda są niezwykle ciekawe, więc w odpowiednich miejscach Czytelnik jest zachęcany do pogłębienia wiedzy, w tym też przeprowadzenia lub przeczytania dowodów przytaczanych twierdzeń.

### 1.1. Logika intuicjonistyczna

Typowym przykładem ilustrującym różnicę między logiką klasyczną a intuicjonistyczną (konstruktywną) jest twierdzenie:

Istnieją takie liczby niewymierne  $a$  i  $b$ , że  $a^b$  jest liczbą wymierną.

oraz jego dowód:

Jeśli  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$ , to  $a = b = \sqrt{2}$ , w przeciwnym razie niech  $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  oraz  $b = \sqrt{2}$ , wtedy  $a^b = 2 \in \mathbb{Q}$ .

Dowód ten jest oczywiście słuszny na gruncie logiki klasycznej, ale nie jest konstruktywny, ponieważ dalej nie znamy odpowiednich liczb  $a$  i  $b$ . W logice konstruktywnej zdanie jest prawdziwe, jeśli można podać jego *konstrukcję* (tzn. intuicyjny dowód), zgodnie z interpretacją Brouwera-Heytinga-Kolmogorowa:

- konstrukcja dla  $A \wedge B$  to konstrukcja dla  $A$  oraz konstrukcja dla  $B$ ,
- konstrukcja dla  $A \vee B$  to konstrukcja dla  $A$  lub konstrukcja dla  $B$  wraz z zaznaczeniem, która z nich to jest,
- konstrukcja dla  $A \rightarrow B$  to przekształcenie każdej konstrukcji dla  $A$  w konstrukcję dla  $B$ ,
- nie istnieje konstrukcja dla fałszu.

Formalnie, logika intuicjonistyczna to pewien system logiczny. Nie różni się od logiki klasycznej składnią, ale regułami wnioskowania. Fałsz oznaczamy przez  $\perp$ , a *osąd* zapisany w postaci  $\Gamma \vdash A$  oznacza, że formuła  $A$  wynika ze zbioru formuł (założeń)  $\Gamma$ . Zamiast  $\Gamma \cup \{B\}$  będziemy często pisać  $\Gamma, B$ .

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{\Gamma, A \vdash A} (\text{Ax}) \quad \frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} (\perp \text{ E}) \\
 \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} (\wedge \text{ I}) \quad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} (\wedge \text{ E1}) \quad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} (\wedge \text{ E2}) \\
 \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} (\vee \text{ I1}) \quad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B \vee A} (\vee \text{ I2}) \quad \frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C} (\vee \text{ E}) \\
 \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} (\rightarrow \text{ I}) \quad \frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} (\rightarrow \text{ E})
 \end{array}$$

Rysunek 1: Reguły wnioskowania w intuicjonistycznym rachunku zdań (IRZ).

Oprócz tego, definiujemy negację jako  $\neg A := A \rightarrow \perp$ . Dzięki tej definicji oraz regule  $(\rightarrow E)$  możemy wywieść

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \perp} (\neg E)$$

Oznaczamy również prawdę przez  $\top := \neg \perp = \perp \rightarrow \perp$ .

### Przykład 1.1

Pokaż, że w IRZ zachodzi *słabe prawo podwójnej negacji*, czyli  $A \rightarrow \neg\neg A$ .

*Rozwiążanie.* Z definicji negacji mamy  $\neg\neg A = (A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp$ , więc musimy pokazać  $A \rightarrow ((A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp)$ .

$$\frac{\begin{array}{c} \overline{A, A \rightarrow \perp \vdash A \rightarrow \perp} \text{ (Ax)} \quad \overline{A, A \rightarrow \perp \vdash A} \text{ (Ax)} \\ \overline{A, A \rightarrow \perp \vdash \perp} \text{ } (\rightarrow I) \\ \overline{A \vdash (A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp} \text{ } (\rightarrow I) \end{array}}{\vdash A \rightarrow ((A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp)} \text{ } (\rightarrow E)$$

□

### Przykład 1.2

Pokaż, że w IRZ zachodzi *prawo kontrapozycji*, czyli  $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ .

*Rozwiążanie.* Z definicji negacji mamy  $\neg B = B \rightarrow \perp$  oraz  $\neg A = A \rightarrow \perp$ , więc musimy pokazać  $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow \perp) \rightarrow (A \rightarrow \perp))$ .

$$\frac{\begin{array}{c} \overline{A \rightarrow B, B \rightarrow \perp, A \vdash B \rightarrow \perp} \text{ (Ax)} \quad \overline{\begin{array}{c} \overline{A \rightarrow B, B \rightarrow \perp, A \vdash A \rightarrow B} \text{ (Ax)} \quad \overline{A \rightarrow B, B \rightarrow \perp, A \vdash A} \text{ (Ax)} \\ \overline{A \rightarrow B, B \rightarrow \perp, A \vdash B} \text{ } (\rightarrow E) \end{array}} \text{ } (\rightarrow E) \\ \overline{A \rightarrow B, B \rightarrow \perp, A \vdash \perp} \text{ } (\rightarrow I) \\ \overline{A \rightarrow B \vdash (B \rightarrow \perp) \rightarrow (A \rightarrow \perp)} \text{ } (\rightarrow I) \\ \overline{\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow \perp) \rightarrow (A \rightarrow \perp))} \text{ } (\rightarrow I) \end{array}}{\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow \perp) \rightarrow (A \rightarrow \perp))} \text{ } (\rightarrow E)$$

□

#### 1.1.1. Związek z logiką klasyczną

Dokładając do reguł wnioskowania IRZ *silne prawo podwójnej negacji* ( $\neg\neg A \rightarrow A$ ) lub *prawo wyłączonego środka* ( $A \vee \neg A$ ), otrzymujemy logikę klasyczną. W przypadku prawa podwójnej negacji jest to oczywiste. W przypadku prawa wyłączonego środka (EM) można to pokazać następująco:

$$\frac{\begin{array}{c} \overline{(A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp \vdash A \vee (A \rightarrow \perp)} \text{ (EM)} \quad \overline{(A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp \vdash A} \text{ (Ax)} \\ \overline{\begin{array}{c} \overline{(A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp \vdash \perp} \text{ (Ax)} \quad \overline{\Gamma \vdash A \rightarrow \perp} \text{ (Ax)} \\ \overline{\Gamma \vdash \perp} \text{ } (\perp E) \end{array}} \text{ } (\rightarrow E) \\ \overline{(A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp \vdash A} \text{ } (\rightarrow I) \\ \overline{\vdash (A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp \rightarrow A} \text{ } (\rightarrow I) \end{array}}{\vdash (A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp \rightarrow A} \text{ } (\vee E)$$

gdzie  $\Gamma = \{(A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp, A \rightarrow \perp\}$ .

**Problem 1.3.** Pokazać, że prawo wyłączonego środka nie jest dowodliwe w IRZ.

**Uwaga** (ciekawostka)

Istnieją tautologie KRZ, które nie są dowodliwe w IRZ, ale po dodaniu do IRZ jako aksjomaty nie prowadzą do logiki klasycznej, tworząc logiki „pomiędzy” intuicjonistyczną i klasyczną. Przykłady:

- $\text{IRZ} + (\neg A \vee \neg\neg A)$ <sup>a</sup> — logika Jankova (de Morgana), w której zachodzą wszystkie cztery prawa de Morgana,
- $\text{IRZ} + ((A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A))$  — logika Gödla-Dummetta, w której wartościowania formuł można interpretować jako liczby z przedziału  $[0, 1]$ .

<sup>a</sup>słabe prawo wyłączonego środka

Skoro zbiór reguł wnioskowania IRZ jest podzbiorem zbioru reguł wnioskowania KRZ, to każda formuła dowodliwa IRZ jest również dowodliwa w KRZ.

**1.1.2. Semantyka**

Trochę zaniedbując formalizmy, skupimy się przez chwilę na wartościowaniach formuł logicznych. Możemy określić *semantykę* dla logiki klasycznej, przypisując formułom prawdziwym wartość 1, a formułom fałszywym wartość 0 (definiując przy okazji funkcje  $\wedge, \vee, \rightarrow$ ). Dla logiki intuicjonistycznej jest to trudniejsze, ale i ciekawsze. Pokażemy dwa z (nieskończenie) wielu możliwych sposobów. Oba z nich są *algebrami Heytinga*, których nie będziemy tutaj definiować. Warto jednak wiedzieć, że formuła logiczna jest tautologią IRZ wtedy i tylko wtedy, gdy jest prawdziwa w każdej algebrze Heytinga.

**Semantyka topologiczna** Możemy zdefiniować semantykę za pomocą topologii na  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned}\llbracket \perp \rrbracket &= \emptyset, \\ \llbracket \top \rrbracket &= \mathbb{R}, \\ \llbracket A \wedge B \rrbracket &= \llbracket A \rrbracket \cap \llbracket B \rrbracket, \\ \llbracket A \vee B \rrbracket &= \llbracket A \rrbracket \cup \llbracket B \rrbracket, \\ \llbracket A \rightarrow B \rrbracket &= \text{int}(\llbracket A \rrbracket^c \cup \llbracket B \rrbracket), \\ \llbracket A \rrbracket &= \text{dowolny otwarty podzbiór } \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Wtedy

$$\llbracket \neg A \rrbracket = \llbracket A \rightarrow \perp \rrbracket = \text{int}(\llbracket A \rrbracket^c \cup \emptyset) = \text{int}(\llbracket A \rrbracket^c)$$

Można przy pomocy takiej semantyki pokazać, że prawo wyłączonego środka nie jest dowodliwe w IRZ. Pod  $\llbracket A \rrbracket$  możemy podstawić np. zbiór  $(0, \infty)$ , wtedy

$$\llbracket A \vee \neg A \rrbracket = \llbracket A \rrbracket \cup \llbracket \neg A \rrbracket = \llbracket A \rrbracket \cup \text{int}(\llbracket A \rrbracket^c) = (0, \infty) \cup (-\infty, 0) \neq \mathbb{R}$$

**Semantyka kraty dystrybutywnej** Krata to zbiór częściowo uporządkowany, w którym istnieją kresy dolne i górne dowolnych par elementów. Będziemy je przedstawiać za pomocą *diagramów Hassego*<sup>1</sup>. Definiujemy działania

$$\begin{aligned}a \wedge b &:= \inf\{a, b\}, \\ a \vee b &:= \sup\{a, b\}.\end{aligned}$$

<sup>1</sup>Czym dokładnie jest diagram Hassego można dowiedzieć się na [Wikipедии](#).

Krata dystrybutywna to krata, w której zachodzą prawa rozdzielności:

$$\begin{aligned} a \wedge (b \vee c) &= (a \wedge b) \vee (a \wedge c), \\ a \vee (b \wedge c) &= (a \vee b) \wedge (a \vee c). \end{aligned}$$

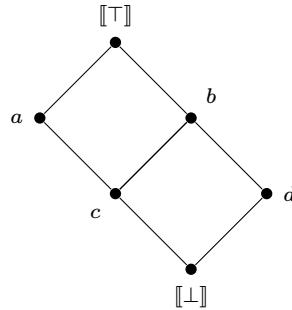
Można udowodnić, że każda niepusta i skończona krata jest ograniczona, czyli posiada elementy najmniejszy i największy. Krata, która jest niepusta, skończona i dystrybutywna posłuży nam do zdefiniowania semantyki:

$$\begin{aligned} \llbracket \perp \rrbracket &= \text{element najmniejszy}, \\ \llbracket \top \rrbracket &= \text{element największy}, \\ \llbracket A \wedge B \rrbracket &= \llbracket A \rrbracket \wedge \llbracket B \rrbracket, \\ \llbracket A \vee B \rrbracket &= \llbracket A \rrbracket \vee \llbracket B \rrbracket, \\ \llbracket A \rightarrow B \rrbracket &= \sup\{c : c \wedge \llbracket A \rrbracket \leqslant \llbracket B \rrbracket\}, \\ \llbracket A \rrbracket &= \text{dowolny element kraty}. \end{aligned}$$

Wtedy

$$\llbracket \neg A \rrbracket = \llbracket A \rightarrow \perp \rrbracket = \sup\{c : c \wedge \llbracket A \rrbracket \leqslant \llbracket \perp \rrbracket\} = \sup\{c : c \wedge \llbracket A \rrbracket = \llbracket \perp \rrbracket\}$$

Biorąc przykładową kratę



możemy udowodnić, że prawo wyłączonego środka nie jest dowodliwe w IRZ. Jeśli weźmiemy  $\llbracket A \rrbracket = c$ , to  $\llbracket \neg A \rrbracket = d$ , więc  $\llbracket A \vee \neg A \rrbracket = c \vee d = b \neq \llbracket \top \rrbracket$ .

**Problem 1.4.** Pokazać, że silne prawo podwójnej negacji nie jest dowodliwe w IRZ na podstawie dwóch powyższych semantyk.

**Problem 1.5.** Stwierdzić, które z czterech praw de Morgana są dowodliwe w IRZ.

## 1.2. Rachunek lambda

Rachunek lambda to język złożony z termów, z których każdy to:

- zmienna (zazwyczaj oznaczana małą literą, np.  $x$ ),
- $\lambda$ -abstrakcja postaci  $\lambda x. M$ , gdzie  $x$  jest zmienną, a  $M$  jest termem,
- aplikacja postaci  $MN$ , gdzie  $M$  i  $N$  są termami.

Formalnie termy można więc zdefiniować następująco:

$$M ::= x \mid (\lambda x. M) \mid (MN),$$

gdzie  $x$  reprezentuje dowolną zmienną.

Aby uprościć zapis, będziemy pisać  $MNP$  zamiast  $(MN)P$  – to znaczy stwierdzamy, że aplikacja jest łączna lewostronnie. Ponadto, wiele  $\lambda$ -abstrakcji zapisujemy jako  $\lambda x_1 \dots x_n. M$ , co jest równoważne termowi  $\lambda x_1. (\lambda x_2. (\dots (\lambda x_n. M) \dots))$ . Kropka w tym zapisie jest bardzo istotna, np.

$$\begin{aligned}\lambda xyz. M &= \lambda x. (\lambda y. (\lambda z. M)), \\ \lambda xy. zM &= \lambda x. (\lambda y. (zM)).\end{aligned}$$

W termie  $\lambda x. M$  zmienna  $x$  jest *zmienną związaną* w  $M$ . Zmienne występujące w  $M$ , które nie są związane przez żadną  $\lambda$ -abstrakcję, nazywamy *zmiennymi wolnymi*. Na przykład w termie  $\lambda x. (xy)$  zmienna  $x$  jest zmienną związaną, a  $y$  jest zmienną wolną. W termie  $xz(\lambda xy. (xyz))$  zmienna  $x$  raz występuje jako zmienna wolna, a raz jako związana. Takich sytuacji będziemy unikać ze względów czysto estetycznych.

Zbiór zmiennych wolnych termu  $M$  oznaczamy jako  $\text{FV}(M)$ . Term nazywamy *termem zamkniętym* lub *kombinatorem*, jeśli  $\text{FV}(M) = \emptyset$ .

### Uwaga 1.6

Formalnie definiujemy  $\text{FV}(M)$  rekurencyjnie:

$$\begin{aligned}\text{FV}(x) &= \{x\}, \\ \text{FV}(\lambda x. M) &= \text{FV}(M) \setminus \{x\}, \\ \text{FV}(MN) &= \text{FV}(M) \cup \text{FV}(N).\end{aligned}$$

#### 1.2.1. Alfa-konwersja

*α-konwersja* to przekształcenie termu, które polega na zmianie nazwy zmiennej (unikając kolizji oznaczeń zmiennych). Wprowadzamy relację równoważności  $\equiv_\alpha$  w zbiorze termów  $\Lambda$  w ten sposób, że dane dwa termy  $M$  i  $N$  są równoważne, jeśli można otrzymać jeden z drugiego poprzez (wielokrotne)  $\alpha$ -konwersje. Na przykład:

$$a(\lambda b. bc) \equiv_\alpha a(\lambda d. dc),$$

natomiast

$$\lambda a. ab \not\equiv_\alpha \lambda b. bb,$$

ponieważ zamiana zmiennej  $a$  na  $b$  prowadzi do kolizji oznaczeń zmiennych.

Od tej pory utożsamiamy ze sobą termy różniące się jedynie nazwami zmiennych, czyli jeśli  $M \equiv_\alpha N$ , to  $M$  i  $N$  są tym samym termem.

### Uwaga 1.7

Bardziej formalnie, od tej pory będziemy operować na klasach abstrakcji relacji  $\equiv_\alpha$  (elementach zbioru  $\Lambda/\equiv_\alpha$ ), podobnie jak przy działaniach modulo operujemy na klasach abstrakcji relacji przystawania modulo  $p$  (elementach zbioru  $\mathbb{Z}/\equiv_p$ ).

Będziemy stosować dosyć uniwersalny zapis  $M[x := N]$  na term, który powstał z termu  $M$  poprzez zastąpienie wszystkich *wolnych* wystąpień zmiennej  $x$  termem  $N$ . Zakładamy przy tym, że żadna zmienna wolna w  $N$  nie zacznie być związaną w  $M[x := N]$  (ponownie unikamy kolizji oznaczeń).

### 1.2.2. Beta-redukcja

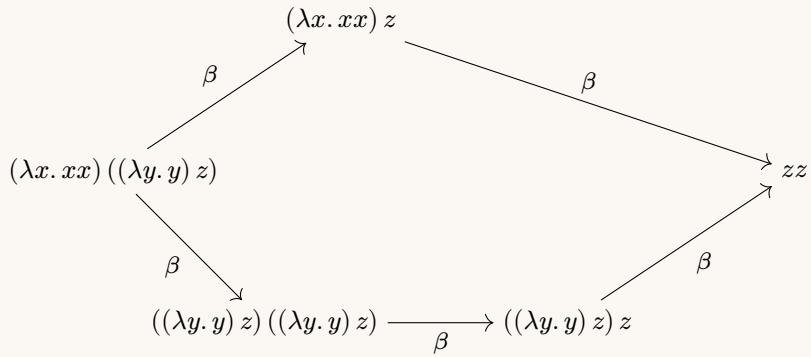
**$\beta$ -redukcia** to taka relacja  $\rightarrow_\beta$  w zbiorze termów  $\Lambda$ , że  $M \rightarrow_\beta N$ , gdy  **$\beta$ -redeks** postaci  $(\lambda x. P)Q$  w termie  $M$  zostaje zastąpiony przez  $P[x := Q]$  w termie  $N$ . Bardziej formalnie, jest to najmniejsza relacja w zbiorze  $\Lambda$  spełniająca następujące warunki:

1.  $(\lambda x. P)Q \rightarrow_\beta P[x := Q]$ ,
2. jeśli  $M \rightarrow_\beta M'$ , to
  - $MN \rightarrow_\beta M'N$ ,
  - $NM \rightarrow_\beta NM'$ ,
  - $\lambda x. M \rightarrow_\beta \lambda x. M'$ .

Jeśli w termie występuje więcej niż jeden  $\beta$ -redeks, to  $\beta$ -redukcia nie jest deterministyczna – możemy wybrać dowolny z nich i wykonać redukcję. Przez  $\twoheadrightarrow_\beta$  oznaczamy domknięcie przechodnio-zwrotne relacji  $\rightarrow_\beta$  (czyli najmniejsza relacja przechodnia i zwrotna, która zawiera relację  $\rightarrow_\beta$ ), a przez  $=_\beta$  jej domknięcie równoważnościowe.

#### Przykład 1.8

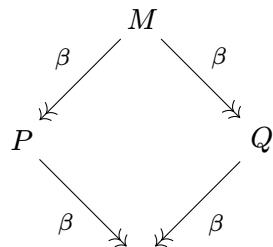
Pokazane poniżej są różne ścieżki redukcyjne dla podanego termu.



#### Twierdzenie 1.9 (Churcha-Rossera)

Jeśli  $M \twoheadrightarrow_\beta P$  oraz  $M \twoheadrightarrow_\beta Q$ , to istnieje takie  $M'$ , że  $P \twoheadrightarrow_\beta M'$  i  $Q \twoheadrightarrow_\beta M'$ .

Jest to jedno z ważniejszych twierdzeń rachunku lambda, mówiące o tym, że relacja  $\twoheadrightarrow_\beta$  ma **własność rombu** (ang. *diamond property*), której notabene nie ma relacja  $\rightarrow_\beta$  (czego dowodzi przykład 1.8). Jeśli dopełnienie przechodnio-zwrotne relacji ma własność rombu, to mówimy, że relacja ta jest **konfluentna**. Powyższe twierdzenie mówi więc, że relacja  $\rightarrow_\beta$  jest konfluentna.



Rysunek 2: Własność rombu relacji  $\twoheadrightarrow_\beta$ .

Prostym wnioskiem z tego twierdzenia jest fakt, że każdy term ma co najwyżej jedną postać normalną, to znaczy pozbawioną  $\beta$ -redeksów. Dlaczego *co najwyżej*, a nie *dokładnie*? Na przykład term

$$\Omega := (\lambda x. xx) (\lambda x. xx)$$

posiada tylko jeden  $\beta$ -redeks, a jego redukcja prowadzi do termu  $\Omega$  (co Czytelnik raczy sprawdzić), czyli  $\Omega \rightarrow_\beta \Omega$ . Term  $\Omega$  nie ma więc postaci normalnej.

### 1.2.3. Kombinator punktu stałego

Kombinator  $\mathbf{Y} := \lambda f. (\lambda x. f(xx))(\lambda x. f(xx))$  nazywamy *kombinatorem punktu stałego*. Ma on tę ciekawą własność, że dla każdego termu  $F \in \Lambda$ , zachodzi

$$F(\mathbf{Y}(F)) =_\beta \mathbf{Y}(F),$$

ponieważ

$$F(\mathbf{Y}(F)) \rightarrow_\beta F((\lambda x. F(xx))(\lambda x. F(xx)))$$

oraz

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(F) &\rightarrow_\beta (\lambda x. F(xx))(\lambda x. F(xx)) \\ &\rightarrow_\beta F((\lambda x. F(xx))(\lambda x. F(xx))). \end{aligned}$$

**Problem 1.10.** Znajdź term  $P$  taki, że  $Px =_\beta P$ .

**Problem 1.11.** Znajdź term  $P$  taki, że  $Px =_\beta xP$ .

### 1.2.4. Eta-redukcja

*$\eta$ -redukacja* to taka relacja  $\rightarrow_\eta$  w zbiorze termów  $\Lambda$ , że  $M \rightarrow_\eta N$ , gdy  *$\eta$ -redeks* postaci  $\lambda x. Px$  w termie  $M$  zostaje zastąpiony przez  $P$  w termie  $N$ , zakładając  $x \notin \text{FV}(P)$ . Bardziej formalnie, jest to najmniejsza relacja w zbiorze  $\Lambda$  spełniająca następujące warunki:

1. jeśli  $x \notin \text{FV}(P)$ , to  $\lambda x. Px \rightarrow_\eta P$ ,
2. jeśli  $M \rightarrow_\eta M'$ , to
  - $MN \rightarrow_\eta M'N$ ,
  - $NM \rightarrow_\eta NM'$ ,
  - $\lambda x. M \rightarrow_\eta \lambda x. M'$ .

Tak jak poprzednio, domknięcie przechodnio-zwrotne relacji  $\rightarrow_\eta$  oznaczamy przez  $\Rightarrow_\eta$ . Ponadto, sumę relacji  $\rightarrow_\beta$  i  $\rightarrow_\eta$  oznaczamy przez  $\rightarrow_{\beta\eta}$ , a jej domknięcie przechodnio-zwrotne przez  $\Rightarrow_{\beta\eta}$ .

**Twierdzenie 1.12** (Churcha-Rossera dla  $\eta$ -redukkcji i  $\beta\eta$ -redukkcji)

Relacje  $\rightarrow_\eta$  oraz  $\rightarrow_{\beta\eta}$  są konfluentne.

### 1.2.5. Wyrażalność algorytmów w rachunku lambda

Liczby naturalne możemy reprezentować w rachunku lambda za pomocą tzw. *liczebników Churcha*:

$$\mathbf{n} = \lambda f x. f^n(x),$$

na przykład

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= \lambda f x. x, \\ \mathbf{1} &= \lambda f x. f(x), \\ \mathbf{2} &= \lambda f x. f(f(x)), \\ \mathbf{3} &= \lambda f x. f(f(f(x))).\end{aligned}$$

Wtedy operacja następnika jest reprezentowana przez term

$$\mathbf{succ} = \lambda n f x. f(n f x),$$

a dodawanie przez term

$$\mathbf{add} = \lambda m n f x. m f(n f x).$$

Instrukcje warunkowe można zaimplementować za pomocą termów

$$\mathbf{true} = \lambda x y. x,$$

$$\mathbf{false} = \lambda x y. y,$$

wtedy instrukcja warunkowa `if B then M else N` jest reprezentowana przez term

$$\mathbf{if} = \lambda B M N. B M N.$$

Istotnie,

$$\begin{aligned}\mathbf{if true} \ M \ N &\rightarrow_{\beta} (\lambda x y. x) M N \rightarrow_{\beta} M, \\ \mathbf{if false} \ M \ N &\rightarrow_{\beta} (\lambda x y. y) M N \rightarrow_{\beta} N.\end{aligned}$$

Porównanie liczby  $n$  do zera można zaimplementować za pomocą termu

$$\mathbf{iszero} = \lambda n. n(\lambda x. \mathbf{false}) \ \mathbf{true}.$$

**Problem 1.13.** Zdefiniuj w rachunku lambda negację, koniunkcję, alternatywę oraz implikację.

**Problem 1.14.** Zdefiniuj w rachunku lambda funkcje mnożenia oraz potęgowania liczb naturalnych.

**Problem 1.15.** Zdefiniuj w rachunku lambda funkcję poprzednika liczby naturalnej. Poprzednik zera powinien zwracać zero.

**Problem 1.16.** Zdefiniuj w rachunku lambda funkcję obliczającą  $n!$ .

**Twierdzenie 1.17** (Kleene'a)

Każda funkcja częściowo rekurencyjna jest reprezentowalna w rachunku lambda.

Twierdzenie odwrotne również jest prawdziwe. Funkcje częściowo rekurencyjne to dokładnie te funkcje, które są obliczalne przez maszyny Turinga. Z powyższego twierdzenia wynika więc, że rachunek lambda jest modelem obliczalności równoważnym maszynom Turinga.

### 1.3. Typowany rachunek lambda

Do rachunku lambda będziemy chcieli dodać typy w następujący sposób. Każdy term rachunku lambda będzie miał przypisany pewien typ, co będziemy zapisywać jako  $M : \tau$ , gdzie  $M$  jest termem, a  $\tau$  jest typem. Niech  $\mathbb{A}$  będzie zbiorem *typów atomowych*. Zbiór wszystkich typów  $\mathbb{T}$  definiujemy rekurencyjnie:

$$\begin{aligned}\alpha \in \mathbb{A} &\implies \alpha \in \mathbb{T}, \\ \sigma, \tau \in \mathbb{T} &\implies (\sigma \rightarrow \tau) \in \mathbb{T},\end{aligned}$$

gdzie druga reguła jest *konstruktorem typów funkcyjnych*. Zakładamy przy tym, że nie istnieją typy  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{A}$  takie, że  $\alpha \rightarrow \beta = \gamma$ . Zamiast pisać  $\sigma \rightarrow (\tau \rightarrow \rho)$ , będziemy pisać  $\sigma \rightarrow \tau \rightarrow \rho$  (operator  $\rightarrow$  jest łączny prawostronnie).

$$\frac{}{\Gamma, x : A \vdash x : A} (\text{Ax})$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash M : B}{\Gamma \vdash \lambda x. M : (A \rightarrow B)} (\lambda \text{ abs}) \quad \frac{\Gamma \vdash M : (A \rightarrow B) \quad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash MN : B} (\lambda \text{ app})$$

Rysunek 3: Reguły przypisania typów.

#### Przykład 1.18

Niech  $\mathbb{A} = \{\alpha\}$ . Wtedy term  $\mathbf{true} = \lambda x. \lambda y. x$  ma typ  $\alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha$ , ponieważ

$$\frac{\frac{x : \alpha, y : \alpha \vdash x : \alpha}{x : \alpha, y : \alpha \vdash \lambda y. x : \alpha \rightarrow \alpha} (\lambda \text{ abs})}{\vdash \lambda x. \lambda y. x : \alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha} (\lambda \text{ abs})$$

Oznaczając  $\alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha$  przez  $\mathbb{B}$  (typ boolowski), możemy pokazać, że term  $\mathbf{neg}\ \mathbf{true}$  również ma typ  $\mathbb{B}$ .

#### 1.3.1. Izomorfizm Curry'ego-Howarda

Pokazany powyżej system typów możemy rozszerzyć o konstruktory typów  $\wedge$  i  $\vee$  oraz dodać do  $\mathbb{A}$  specjalny typ  $\perp$ , który nie będzie przypisany żadnemu termowi. Reguły przypisania typów należałyby wtedy rozszerzyć o odpowiednie zasady konstrukcji i destrukcji dla tych nowych typów.

Izomorfizm Curry'ego-Howarda to twierdzenie, które łączy logikę i tak zbudowaną teorię typów. Mówi ono, że jeśli formułom logicznym przypiszemy odpowiednie typy, a dowodom tych formuł przypiszemy odpowiednie termy, to otrzymamy izomorfizm postaci:

$$\text{formuła ma dowód} \iff \text{typ ma term.}$$

W ten sposób możemy przepisać formułę logiczną do postaci typu i udowodnić ją, konstruując term tego typu. W tym właśnie procesie przydaje się oprogramowanie takie jak Lean.

logika intuicjonistyczna	typowany rachunek lambda
formuła $A$	typ $A \in \mathbb{T}$
dowód formuły $A$	term typu $A$
implikacja	typ funkcyjny ( $\rightarrow$ )
formuła niedowodliwa	typ nieposiadający termu
tautologia	typ kombinatora

Tabela 1: Odpowiadające sobie pojęcia w logice i w typowanym rachunku lambda.

## 2. Podstawy dowodzenia w Lean

Polecam używać VS Code z rozszerzeniem **Lean 4** lub Neovim z rozszerzeniem **lean.nvim**. Aby rozpocząć pracę, należy stworzyć projekt za pomocą

---

```
lake new project-name math-lax
```

---

który od razu dodaje Mathlib (de facto bibliotekę standardową, zawierającą wiele twierdzeń z różnych działów matematyki) do wymaganych zależności.

### 2.1. Składnia – bardzo krótki wstęp

Póki co nie będziemy się zagłębiać w składnię, a jedynie wymienimy kilka podstawowych elementów, które posłużą nam do w miarę swobodnego poruszania się w Leanie (a przynajmniej jego części dotyczącej dowodzenia twierdzeń matematycznych).

**Funkcje i stałe** Funkcje (oraz stałe, które są funkcjami stałej wartości) definiujemy za pomocą słowa kluczowego **def**, na przykład:

---

```
def add (a b : Nat) : Nat := a + b
```

---

definiuje funkcję **add**, która przyjmuje dwie liczby naturalne (typ **Nat**) i zwraca ich sumę.

**Twierdzenia i przykłady** Twierdzenia definiujemy za pomocą słowa kluczowego **theorem** lub **lemma**, na przykład:

---

```
theorem add_zero (a : Nat) : add a 0 = a := -- dowód
```

---

przy czym używanie **lemma** wymaga dodania Mathliba (**import Mathlib.Tactic**). Jeśli mamy pewne stwierdzenie (z dowodem), którego nie będziemy używać, więc nie potrzebuje nazwy, możemy użyć słowa kluczowego **example**:

---

```
example (a : Nat) : add 0 a = a := -- dowód
```

---

Samo sformułowanie twierdzeń, lematów i przykładów jest często pewną trudnością. Możemy być więc w sytuacji, gdy chcemy najpierw sformułować tezę, a jej dowód zostawić na później. W takim przypadku nieodzowne będzie słowo kluczowe **sorry**, dzięki któremu program się skompiluje (z ostrzeżeniem), mimo braku dowodu.

---

```
theorem pow_comm (a b : Nat) : a ^ b = b ^ a :=  
  sorry
```

---

Oczywiście, taka teza może być fałszywa (jak powyżej).

### Uwaga 2.1 (Plausible)

Istnieje paczka Leana o nazwie **Plausible**, która pomaga w szybkim szukaniu kontrprzykładów do hipotez. Jej działania opiera się po prostu na losowym próbkowaniu argumentów i sprawdzaniu, czy teza zachodzi. Jeśli nie, to zwraca znaleziony kontrprzykład (przez informację diagnostyczną błędu komplikacji).

---

```
import Plausible  
  
theorem pow_comm (a b : Nat) : a ^ b = b ^ a := by  
  plausible
```

---

**Aksjomaty** Czasami będziemy chcieli wprowadzić pewne aksjomaty, czyli stwierdzenia przyjmowane bez dowodu. W tym celu używamy słowa kluczowego **axiom**:

---

```
axiom add_comm (a b : Nat) : a + b = b + a
```

---

**Komentarze** Komentować kod można i należy następująco:

---

```
def foo : Nat := 42 -- to jest komentarz jednowierszowy  
/- to jest  
komentarz  
wielowierszowy -/
```

---

**Sprawdzenie typu** Sprawdzić typ termu (czyli, przez izomorfizm Curry'ego-Howarda, również wypowiedź twierdzenia), możemy następująco:

---

```
#check Nat -- Nat : Type  
#check Nat.add -- Nat.add : Nat → Nat → Nat  
#check Nat.add 1 -- Nat.add 1 : Nat → Nat  
#check Nat.add 1 2 -- Nat.add 1 2 : Nat  
#check Nat.add_comm -- Nat.add_comm (n m : Nat) : n + m = m + n
```

---

**Problem 2.2.** Skoro `Nat` jest typu **Type**, to jaki jest typ **Type**? Jaki jest typ tego typu?

**Ewaluacja funkcji** Czasami, zamiast dowodzić twierdzeń, będziemy chcieli po prostu obliczyć wartość pewnej funkcji. Możemy to zrobić tak:

---

```
#eval Nat.add 2 3 -- 5
```

---

**Operatory potoku i odwróconego potoku** Jak na porządku język programowania przystało, Lean posiada operatory umożliwiające kontrolę kolejności ewaluacji wyrażeń. Operatory `<|` i `|>` zachowują się tak samo jak w F# czy Elm, sam operator `|>` znajdziemy również w Elixirze czy OCaml-u. W Haskellu odpowiadają one odpowiednio operatorom `$` i `&`. Przykłady użycia:

---

```
#eval Nat.add 1 (Nat.mul 2 3) -- 7
#eval Nat.add 1 <| Nat.mul 2 3 -- 7
#eval Nat.mul 2 3 |> Nat.add 1 -- 7
```

---

### 2.1.1. Tryby dowodzenia

Dowodząc twierdzenie, lemat, czy przykład, możemy wybrać jeden z dwóch trybów:

- *tryb termowy* (ang. *term mode*), w którym dowód jest pojedynczym (potencjalnie długim) termem,
- *tryb taktyczny* (ang. *tactic mode*), w którym dowód jest ciągiem *taktyk* modyfikujących stan dowodu.

Pierwszy jest zbliżony do rachunku lambda, drugi bardziej przypomina tradycyjne dowodzenie matematyczne. Często proste fakty łatwiej udowodnić w trybie termowym, a bardziej złożone w trybie taktycznym. Oto przykład dowodu (a właściwie zastosowania twierdzenia) w obu trybach:

---

```
-- term mode (aplikacja 2a i 2b do twierdzenia Nat.add_comm)
example (a b : Nat) : 2 * a + 2 * b = 2 * b + 2 * a := Nat.add_comm (2 * a) (2 * b)
-- tactic mode (po wykonyaniu taktyki rw)
example (a b : Nat) : 2 * a + 2 * b = 2 * b + 2 * a := by rw [Nat.add_comm]
```

---

### 2.1.2. Argumenty i ich rodzaje

Czytelnik już zapewne zdążył zauważyc, że twierdzenia w Leanie zazwyczaj przyjmują argumenty. Na przykład w twierdzeniu `Nat.add_comm` mamy argumenty `(n : Nat)` i `(m : Nat)`, zapisywane jako `(n m : Nat)`. Takimi argumentami będą również założenia twierdzenia, na przykład w:

---

```
theorem tw (a : Nat) (b : Nat) (c : Nat) (h1 : a < b) (h2 : b < c) : a < c := sorry
```

---

Chcąc użyć takiego twierdzenia, musimy podać wszystkie argumenty, np.

---

```
axiom one_lt_two : 1 < 2
axiom two_lt_three : 2 < 3

#check tw 1 2 3 one_lt_two two_lt_three
```

---

Widać tutaj więc pewną redundancję – argumenty `a`, `b` i `c` są w pełni określone przez założenia `h1` i `h2`. Aby tego uniknąć, Lean pozwala na definiowanie argumentów *implicit*, czyli takich, które mogą być pominięte przy wywoływaniu danej funkcji lub twierdzenia. W tym celu używamy nawiasów klamrowych zamiast okrągłych:

---

```
theorem tw {a : Nat} {b : Nat} {c : Nat} (h1 : a < b) (h2 : b < c) : a < c := sorry
```

---

Teraz możemy użyć tego twierdzenia jako

---

```
#check tw one_lt_two two_lt_three
```

---

Oprócz argumentów *explicit* i *implicit*, Lean pozwala na definiowanie argumentów *instance implicit* oraz *strict implicit*, oznaczanych odpowiednio przez [...] oraz {...}. Zajmiemy się nimi później.

### 2.1.3. Typy Sort, Type i Prop

W ramach problemu 2.2 Czytelnik miał okazję zastanowić się nad typami `Type`, `Type 1`, `Type 2` itd. Są one częścią nieskończonej hierarchii typów `Sort u`, gdzie `u` jest zmienną uniwersalną oznaczającą poziom uniwersum. Typ `Sort u` jest więc typu `Sort (u + 1)`. `Type u` jest synonimem dla `Sort (u + 1)`, a `Prop` jest synonimem dla `Sort 0`.

Skąd takie przesunięcie? Typy typu `Type u` (a więc sorty poziomu co najmniej 1) „trzymają” pewne obiekty matematyczne, np. term (liczba) 1 jest „trzymana” przez typ `Nat : Type 0`. Typy typu `Prop` (czyli sorty poziomu 0) nie „trzymają” nic. Tego typu będą więc twierdzenia, od których nie wymagamy (albo nawet nie chcemy), żeby trzymały swój dowód (*proof irrelevance*).

## 2.2. Rachunek zdań i pierwsze taktyki

Od tego miejsca będziemy stosować logikę klasyczną. Jak Lean radzi sobie z rozbieżnościami między logiką intuicjonistyczną a klasyczną? Definiuje aksjomat wyboru:

```
axiom Classical.choice {a : Sort u} : Nonempty a → a,
```

z którego następuje, dzięki twierdzeniu Diaconescu, wyprowadza prawo wyłączonego środka `Classical.em` oraz wiele innych praw logiki klasycznej, jak chociażby silne prawo podwójnego przeczenia `Classical.not_not`. Niżej omawiane taktyki Leana korzystają z tych aksjomatów, gdy jest to konieczne.

**Taktyki intro, exact i apply** Jeśli cel dowodzenia znajduje się wśród założeń, to wystarczy go wskazać za pomocą taktyki `exact`. Jeśli cel jest w postaci `P → Q`, to możemy użyć taktyki `intro`, aby wprowadzić do dowodu założenie `P` i zmienić cel na `Q`.

---

```
example {P : Prop} (h : P) : P := by
  exact h

example {P : Prop} : P → P := by
  intro h
  exact h
```

---

Jeśli celem jest `Q`, a mamy wśród założeń `P → Q`, to możemy użyć taktyki `apply`, aby zmienić cel na `P`. Możemy stosować również aplikację znaną z typowanego rachunku lambda.

---

```
example {P Q : Prop} (h1 : P → Q) (h2 : P) : Q := by
  apply h1
  exact h2

example {P Q : Prop} (h1 : P → Q) (h2 : P) : Q := by
  exact h1 h2
```

---

**Koniunkcja** W Lean istnieje struktura `And`, której jedynym konstruktorem jest

```
And.intro {a b : Prop} (left : a) (right : b) : a ∧ b.
```

Jako że `And.intro` ma typ `a → b → a ∧ b`, to świetnie nadaje się do użycia z `apply`, które wprowadzi dwa cele (do rozwiązania jeden po drugim).

Jeśli chcemy w ten sposób użyć konstruktora dowolnej struktury, to możemy użyć taktyki `constructor`.

---

```
example {P Q : Prop} (hp : P) (hq : Q) : P ∧ Q := by
  apply And.intro
  · exact hp
  · exact hq

example {P Q : Prop} (hp : P) (hq : Q) : P ∧ Q := by
  constructor
  · exact hp
  · exact hq

example {P Q : Prop} (h : P ∧ Q) : P := by
  exact h.left
```

---

**Równoważność** Struktura `Iff`, która reprezentuje równoważność logiczną, ma konstruktor

```
Iff.intro {a b : Prop} (mp : a → b) (mpr : b → a) : a ↔ b,
```

gdzie pierwszy argument to *modus ponens* ( $a \implies b$ ), a drugi to *modus ponens reversed* ( $b \implies a$ ). Sposób użycia jest analogiczny jak w przypadku koniunkcji. Na przykład

---

```
example {P Q : Prop} (h : P ↔ Q) : Q → P := by
  exact h.mpr
```

---

**Alternatywa** Istnieje również struktura `Or`, której konstruktorami są

```
inl {a b : Prop} (h : a) : a ∨ b
```

oraz

```
inr {a b : Prop} (h : b) : a ∨ b.
```

Aby ich użyć, skorzystamy z taktyki `cases` lub `rcases` (które rekurencyjnie wywołuje `cases` zgodnie z podanym wzorem).

---

```
example {P Q R : Prop} (hpq : P ∨ Q) (hpr : P → R) (hqr : Q → R) : R := by
  cases hpq with
  | inl hp =>
    apply hpr
    exact hp
  | inr hq =>
    apply hqr
    apply hq

example {P Q R : Prop} (hpq : P ∨ Q) (hpr : P → R) (hqr : Q → R) : R := by
  rcases hpq with hp | hq
  · apply hpr
    exact hp
  · apply hqr
    apply hq
```

---

Taktyka `rcases` może się przydać również przy koniunkcjach i bardziej złożonych zdaniach, na przykład:

---

```
example {P Q R S : Prop} (h : S ∧ R ∧ P ∨ S ∧ (Q ∧ R)) : R := by
  rcases h with ⟨_, hr, _⟩ | ⟨_, ⟨_, hr⟩⟩
  · exact hr
  · exact hr
```

---

Jeśli alternatywa jest naszym celem, a nie założeniem, to przydatne będą taktyki `left` i `right`.

---

```
example {P Q : Prop} (h : P) : P ∨ Q := by
  left
  exact h
```

---

### Uwaga 2.3

Bardziej dokładnie, taktyka `constructor` używa pierwszego pasującego konstruktora struktury, a taktyki `left` i `right` używają odpowiednio pierwszego i drugiego konstruktora struktury, która ma dokładnie dwa konstruktory. Nie są one przypisane do struktur `And` i `Or`. W szczególności, zamiast `left` zawsze można używać `constructor`, ale sensowność takiego działania pozostawiamy do oceny Czytelnikowi.

**Negacja** Podobnie jak w IRZ,  $\neg P$  definiujemy jako  $P \rightarrow \text{False}$ , gdzie `False` jest typem bez termów (i bez konstruktora). Bardzo łatwo jest więc dowieść, że  $\neg(P \wedge \neg P)$ .

---

```
example (P : Prop) : \neg(P ∧ \neg P) := by
  intro h
  exact h.right h.left
```

---

Z fałszu możemy oczywiście dowieść wszystko. W Leanie *ex falso quodlibet* jest realizowane przez `False.elim` lub `absurd`.

---

```
example {P Q : Prop} (h : P) (nh : \neg P) : Q := by
  exact False.elim (nh h)
```

---



---

```
example {P Q : Prop} (h : P) (nh : \neg P) : Q := by
  exact absurd h nh
```

---

**Taktyki assumption, contradiction, trivial oraz operator `<;>`** Poniższy przykład (reguła *modus tollendo ponens*) Czytelnik powinien już być w stanie zrozumieć. Pokażemy, jak udowodnić go trochę prościej.

---

```
example {P Q : Prop} (h : P ∨ Q) (not_p : \neg P) : Q := by
  rcases h with hp | hq
  · exact False.elim (not_p hp)
  · exact hq
```

---

Zamiast `exact hq` możemy użyć taktyki `assumption`, która sprawdza, czy cel jest wśród założeń (nie musimy go wskazywać). Zamiast `False.elim` możemy użyć taktyki `contradiction`, która sprawdza, czy wśród założeń znajdują się dwa trywialne sprzeczne stwierdzenia.

---

```
example {P Q : Prop} (h : P ∨ Q) (not_p : ¬P) : Q := by
rcases h with hp | hq
· contradiction
· assumption
```

---

Jeśli nie używamy wprowadzonych założeń (w przykładzie `hp` i `hq`), to nie musimy ich nazywać – dalej będą one dostępne dla taktyk `assumption` i `contradiction`.

---

```
example {P Q : Prop} (h : P ∨ Q) (not_p : ¬P) : Q := by
cases h
· contradiction
· assumption
```

---

Istnieje również taktyka `trivial`, która próbuje rozwiązać cel używając kilku prostych taktyk, jak `assumption`, `contradiction` czy `rfl` (użyteczna przy równościach).

---

```
example {P Q : Prop} (h : P ∨ Q) (not_p : ¬P) : Q := by
cases h
· trivial
· trivial
```

---

Jeśli chcemy użyć tej samej taktyki dla różnych przypadków, to możemy użyć `<;>` w następujący sposób:

---

```
example {P Q : Prop} (h : P ∨ Q) (not_p : ¬P) : Q := by
cases h <;> trivial
```

---

**Problem 2.4.** Zrobić pierwszy zestaw zadań:

---

```
-- Zadanie 1
example {A B C D : Prop} (h1 : A → B) (h2 : B → C) (h3 : C → D) : A → D := sorry

-- Zadanie 2
example (P Q R : Prop) (h1 : P ∧ Q) (h2 : P → R) : R := sorry

-- Zadanie 3
theorem modus_tollens {P Q : Prop} (h1 : P → Q) (h2 : ¬Q) : ¬P := sorry

-- Zadanie 4
example {P Q : Prop} (h : ¬(P ∨ Q)) : ¬P ∧ ¬Q := sorry

-- Zadanie 5
example {P Q : Prop} (h : ¬P ∧ ¬Q) : ¬(P ∨ Q) := sorry

-- Zadanie 6
example (A B C D E : Prop) (h1 : A ∧ B) (h2 : B → ¬C ∧ D) (h3 : E → C) : ¬E := sorry

-- Zadanie 7
example {P : Prop} : ((P → P) → P) → P := sorry

-- Zadanie 8
-- Pokaż, że system logiczny oparty na logice klasycznej z aksjomatem A jest trywialny.
axiom A {P : Prop} : (((P → P) → P) → P) → P

example {Q : Prop} : Q := sorry
```

---

### 2.3. Przekształcenia algebraiczne i równości

Jeśli nasz cel jest trywialną równością, możemy użyć taktyki `rfl` (od ang. *reflexivity*).

---

```
example (a : Nat) : a = a := by
  rfl

example : 1 + 1 = 2 := by
  rfl
```

---

Jeśli nasz cel nie jest równością, ale wymaga jedynie *obliczenia*, a nie dowodu (jak w drugim przykładzie powyżej), wystarczy użyć taktyki `decide`.

---

```
example : 2 * 3 + 1 ≥ 4 := by
  decide
```

---

Często jednak będziemy chcieli użyć jakiejś równości do zmiany fragmentu bardziej skomplikowanej formuły. W tym celu możemy użyć taktyki `rewrite`, lub `rw`, która działa jak `rewrite`, ale próbuje jeszcze `rfl`.

---

```
example (h : a = b) : a^3 + 1 = b^3 + 1 := by
  rewrite [h]
  rfl

example (h : a = b) : a^3 + 1 = b^3 + 1 := by
  rw [h]
```

---

Domyślnie te taktyki przepisują lewą stronę równości na prawą. Aby przepisać w drugą stronę, należy użyć `←` przed nazwą równości.

---

```
example {a b c : Nat} (h1 : 2 * b = a) (h2 : b = 2 * c) : a = 4 * c := by
  rewrite [←h1]
  rewrite [h2]
  rewrite [←Nat.mul_assoc]
  rfl

example {a b c : Nat} (h1 : 2 * b = a) (h2 : b = 2 * c) : a = 4 * c := by
  rw [←h1, h2, ←Nat.mul_assoc]
```

---

Jeśli chcemy przepisać nie część celu, a któregoś z założeń, wystarczy go wskazać za pomocą `at`. Możemy też przepisywać kilka formuł naraz, oddzielając je spacjami, gdzie cel oznaczamy przez `←`.

---

```
example {a b c : Nat} (h1 : 2 * b = a) (h2 : b = 2 * c) : a = 4 * c := by
  rw [h2, ←Nat.mul_assoc] at h1
  rw [h1]

example {a b : Nat} (h_eq : a = b + 1) (h : a + b = 4) : 2 * a = 5 := by
  rw [h_eq] at h ←
  rw [Nat.two_mul]
  rw [←Nat.add_assoc (b + 1) b 1]
  rw [h]
```

---

Bardzo często będziemy chcieli udowodnić najpierw jakiś cel pośredni, żeby następnie wykorzystać go do udowodnienia głównego celu. W takiej sytuacji nie trzeba definiować nowego lematu, a wystarczy użyć taktyki `have`.

---

```
example {a : Nat} : a * 2 + 1 = 2 * a + 1 := by
  -- h1, h2, h3 to identyczne założenia
  have h1 : a * 2 = 2 * a := by rw [Nat.mul_comm]
  have h2 : a * 2 = 2 * a := Nat.mul_comm a 2
  have h3 := Nat.mul_comm a 2
  apply Nat.add_left_inj.mpr
  assumption
```

---

Takie założenie działa jak każde inne twierdzenie, możemy je więc udowodnić w trybie termowym lub taktycznym. Jeśli udowadniamy je w trybie termowym, to oczywiście nie musimy nawet formułować jego pełnej treści. Możemy po `have` nie dać żadnej nazwy, wtedy Lean automatycznie nazwie to założenie `this`.

## 2.4. Rachunek kwantyfikatorów

**Kwantyfikator uniwersalny** Z kwantyfikatora  $\forall$  korzystaliśmy już wielokrotnie, chociaż niebezpośrednio. Na przykład twierdzenie  $\forall x \in \mathbb{N}(x + 0 = x)$  zapisywaliśmy jako

---

```
theorem add_zero (x : Nat) : x + 0 = x := sorry
```

---

Mogliśmy je również zapisać i udowodnić jako

---

```
theorem add_zero' : ∀ x : Nat, x + 0 = x := by
  intro x
  exact add_zero x
```

---

korzystając z poznanej już taktyki `intro`. Przeciwnieństwem `intro` w tym kontekście jest taktyka `revert`, która przenosi podaną zmienną z założeń do kwantyfikatora  $\forall$  w celu.

**Kwantyfikator egzystencjalny** Formuły z kwantyfikatorem  $\exists$  najlepiej dowodzić za pomocą dostępnej w `Mathlib.Tactic.Use` taktyki `use`.

---

```
example : ∃ n : Nat, n > 1000 := by
  use 1001
  decide
```

---

**Problem 2.5.** Dowiedzieć się, jak działa kwantyfikator  $\exists!$  w Leanie (zdefiniowany w pliku `Mathlib.Logic.ExistsUnique`).

**Problem 2.6.** Zrobić drugi zestaw zadań:

---

```
import Mathlib.Logic.ExistsUnique

-- Zadanie 1
example {x y : Nat} (h1 : x = y + 2) (h2 : y = 3) : x < 6 := sorry

-- Zadanie 2
example {k : Nat} (h : 15 = k * 3) : 10 ≤ 3 * k := sorry

-- Zadanie 3
example {x y : Nat} (hx : 0 < x) (hy : 0 < y) : 0 < x * y := sorry
```

---

---

```
-- Zadanie 4
example : ∃! n : Nat, n ^ 2 = 9 := sorry

-- Zadanie 5
example {x y : Nat} (h_eq : 3 * x = 9) (h_lt : 2 * y < 8) : y * 2 * x * 3 ≤ 100 := sorry

-- Zadanie 6
example (m n : Nat) (h1 : m ≥ n) (h2 : n ≥ m) : n = m := sorry

-- Zadanie 7
axiom one_eq_two : 1 = 2

example : 2 = 3 := sorry
```

---

## 2.5. Taktyki automatyzujące dowodzenie

Lean posiada wiele taktyk automatyzujących dowodzenie, z których najważniejsze omówimy w tej sekcji.

**ring** Udosowdñijmy, że dla každych  $a, b \in \mathbb{N}$  zachodzi  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ .

---

```
example {a b : Nat} : (a + b) ^ 2 = a ^ 2 + 2 * a * b + b ^ 2 := by
rw [Nat.pow_two]
rw [Nat.mul_add]
rw [Nat.add_mul]
rw [Nat.add_mul]
rw [←Nat.pow_two]
rw [←Nat.pow_two]
rw [←Nat.add_assoc]
rw [Nat.mul_comm]
rw [Nat.add_assoc (a ^ 2)]
rw [←Nat.two_mul]
rw [Nat.mul_assoc]
```

---

Aby udowadniać podobne tożsamości w pierścieniach przemiennych oraz półpierścieniach przemiennych (na przykład w  $\mathbb{N}$ ), możemy użyć taktyki `ring`.

---

```
import Mathlib.Tactic.Ring

example {a b : Nat} : (a + b) ^ 2 = a ^ 2 + 2 * a * b + b ^ 2 := by
ring
```

---

Jeśli nie chcemy od razu udowadniać równości, a jedynie uprościć cel (np. nierówność), zamiast `ring` możemy użyć taktyki `ring_nf` (od ang. *normal form*).

**simp** Lean posiada taktykę `simp`, która upraszcza cel (lub założenie) za pomocą zbioru predefiniowanych reguł. Na przykład

---

```
example {n : Nat} : n | 1 ↔ n = 1 := by
exact Nat.dvd_one
```

---

możemy udowodnić też jako

---

```
example {n : Nat} : n | 1 ↔ n = 1 := by
simp
```

---

ponieważ twierdzenie `Nat.dvd_one` jest poprzedzone atrybutem `@[simp]` przy swojej definicji, a więc tym samym dodanym do zbioru reguł używanych przez `simp`.

```
@[simp] theorem Nat.dvd_one {n : Nat} : n | 1 ↔ n = 1
```

Twierdzenia otagowane przez `@[simp]` powinny być w postaci  $A = B$  lub  $A \leftrightarrow B$ , wtedy Lean zastąpi każde wystąpienie  $A$  przez  $B$  (nie odwrotnie). Zarówno sam Lean, jak i Mathlib posiadają wiele takich twierdzeń. Możemy również sami je dodawać; należy jednak przy tym uważać – takie twierdzenie powinno *zawsze* upraszczać formułę, prowadząc ją do pewnego rodzaju postaci normalnej.

Zamiast prostego `simp` możemy użyć dowolnego z jego wariantów:

- `simp [a, b]`, który używa lematów oznaczonych przez `@[simp]` oraz dodatkowo podanych `a` i `b`,
- `simp [←a]`, który używa lematów oznaczonych przez `@[simp]` oraz `a` w odwrotną stronę,
- `simp [-a]`, który używa lematów oznaczonych przez `@[simp]` z wyjątkiem `a`,
- `simp [*]`, który używa lematów oznaczonych przez `@[simp]` oraz wszystkich dostępnych w lokalnym kontekście,
- `simp at h`, który upraszcza założenie `h`,
- `simp only [a, b]`, który używa tylko podanych lematów `a` i `b`.

### Uwaga 2.7

Ponieważ z każdą aktualizacją Leana i Mathliba zbiór reguł używanych przez `simp` może się zmieniać, nie powinno się używać `simp` w środku dowodu. Można używać go na końcu, ponieważ zakładamy, że `simp` nie zacznie działać *gorzej*.

W środku dowodu można użyć `simp only [...]`. Jeśli nie wiemy, jakich dokładnie twierdzeń chcemy użyć, możemy użyć `simp?`, która podpowie nam, jakie reguły zostały użyte do uproszczenia formuły.

**omega** Taktyka `omega` używa *testu omega* W. Pugha. Jest użyteczna do udowadniania nierówności liniowych z liczbami całkowitymi i naturalnymi.

---

```
example {x y : Nat} : x ≤ y ∨ y ≤ x := by
omega

example {x : Int} (h1 : 0 < x) (h2 : x < 1) : False := by
omega
```

---

**linarith** Taktyka `linarith` również służy do udowadniania nierówności liniowych, ale raczej na liczbach rzeczywistych i wymiernych. Na liczbach naturalnych i całkowitych również działa, ale jest mniej skuteczna niż `omega`.

---

```
import Mathlib.Data.Real.Basic
import Mathlib.Tactic.Linarith

example {x y : ℝ} (h : x < y) : x - 1 < y := by
linarith

example {x y : ℝ} (h1 : x < 4) (h2 : y < 4) : x + y ≤ 10 := by
linarith
```

---

**nlinarith** Taktyka `nlinarith` działa tak jak `linarith`, ale potrafi też rozwiązać niektóre nieliniowe problemy arytmetyczne.

---

```
import Mathlib.Data.Real.Basic
import Mathlib.Tactic.Linarith

example {x : ℝ} (h1 : x < 4) (h2 : x > 0) : x ^ 2 < 16 := by
  nlinarith
```

---

## 3. Studia przypadków

### 3.1. Zbiór z relacją równoważności

**Cele** (czego się nauczymy?)

Struktury, klasy typów, instancje.

**Definicja 3.1** (relacja równoważności). Relację  $\sim$  nazywamy relacją równoważności, jeśli spełnia następujące warunki dla dowolnych  $a, b, c \in A$ :

- $a \sim a$  (zwrotność),
- jeśli  $a \sim b$ , to  $b \sim a$  (symetryczność),
- jeśli  $a \sim b$  oraz  $b \sim c$ , to  $a \sim c$  (przechodniość).

W języku angielskim zbiór z relacją równoważności nazywa się *setoid* i tej właśnie nazwy będziemy używać. Sformalizujemy w Leanie poniższe twierdzenie.

#### Twierdzenie 3.2

Setoidem jest para  $(\mathbb{Z}^2, \approx)$ , gdzie  $(x_1, y_1) \approx (x_2, y_2)$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$x_1 + y_1 = x_2 + y_2.$$

Zdefiniujemy teraz swoją pierwszą strukturę w Leanie.

---

```
structure Point where
  x : Int
  y : Int
```

---

Elementy struktury tworzymy za pomocą jednego z trzech sposobów:

---

```
def p := (0, 1) : Point    -- lub def p : Point := ...
def q := Point.mk 1 0      -- lub def q : Point := ...
def r : Point := { x := 1, y := 1 }
```

---

W Leanie istnieją *klasy typów* (ang. *type classes*), które są trochę jak interfejsy w Javie czy C#, ale z pewnymi różnicami. Między innymi: można dodawać instancję klasy typów do istniejącego typu bez jego modyfikacji, istnieją parametryzowane klasy typów, klasy typów mogą dziedziczyć po innych klasach typów, klasy typów mogą być instancjonowane automatycznie lub w wyniku dowodzenia.

Udowodnienie, że para  $(\text{Point}, \approx)$  jest setoidem będzie polegało właśnie na zdefiniowaniu *instancji* klasy typów *Setoid* dla typu *Point*.

---

```

instance : Setoid Point where
r a b := a.x + a.y = b.x + b.y
iseqv := by
  constructor
  · -- refl (zwrotność, reflexivity)
    intro p
    rfl
  · -- symm (symetryczność, symmetry)
    intro p q
    intro h
    rw [h]
  · -- trans (przechodniość, transitivity)
    intro p q r
    intro h1 h2
    rw [h1, h2]

```

---

Pola `r` oraz `iseqv` odpowiadają odpowiednio relacji równoważności oraz dowodowi, że jest to relacja równoważności. Alternatywny, krótszy zapis dowodu pokazano poniżej.

---

```

instance : Setoid Point where
r a b := a.x + a.y = b.x + b.y
iseqv := {
  refl := by intro p; rfl
  symm := by intro p q h; rw [h]
  trans := by intro p q r h1 h2; rw [h1, h2]
}

```

---

Teraz możemy używać relacji  $\approx$  na elementach typu `Point` i korzystać z jej własności.

---

```

example : p ≈ q := by
  rfl

```

---

### 3.2. Grupa abelowa

**Cele** (czego się nauczysz?)

Typy zależne, koercja typów, inferencja klasy typów, taktyki `change`, `unfold`, `field_simp`, `infer_instance`.

**Definicja 3.3** (magma). Niech  $R$  będzie zbiorem niepustym oraz  $\cdot : R \times R \rightarrow R$  działaniem wewnętrzny na  $R$ . Parę  $(R, \cdot)$  nazywamy wtedy magmą lub grupoidem.

**Definicja 3.4** (półgrupa). Magma  $(R, \cdot)$  jest półgrupą, jeśli działanie  $\cdot$  jest łączne, tzn. dla dowolnych  $a, b, c \in R$  zachodzi

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

**Definicja 3.5** (monoid). Półgrupa  $(R, \cdot)$  jest monoidem, jeśli istnieje element neutralny  $e \in R$ , tzn. dla dowolnego  $a \in R$  zachodzi

$$e \cdot a = a \cdot e = a.$$

**Definicja 3.6** (grupa). Monoid  $(R, \cdot)$  jest grupą, jeśli dla dowolnego  $a \in R$  istnieje element odwrotny  $a^{-1} \in R$ , tzn. zachodzi

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e.$$

**Definicja 3.7** (grupa abelową). Grupa  $(R, \cdot)$  jest grupą abelową, jeśli działanie  $\cdot$  jest przemienne, tzn. dla dowolnych  $a, b \in R$  zachodzi

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Warunek przemienności możemy wprowadzić na dowolnym poziomie, tworząc magmy, półgrupy czy monoidy przemienne (abelowe).

Będziemy chcieli udowodnić, że pewna przykładowa struktura jest grupą abelową.

### Twierdzenie 3.8

Grupą abelową jest para  $(A, \star)$ , gdzie  $A = \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ , a działanie  $\star$  jest zdefiniowane jako

$$a \star b = ab - a - b + 2.$$

Czytelnik powinien w tym momencie udowodnić to twierdzenie na kartce.

Zacznijmy od zdefiniowania działania  $\star$ . Najłatwiej będzie to zrobić w ten sposób, że zdefiniujemy specjalny typ  $A$ , a działanie  $\star$  jako mnożenie na tym typie.

---

```
import Mathlib.Data.Rat.Init

def A : Type := {x : ℚ // x ≠ 1}
```

---

Po raz pierwszy spotykamy się z *podtypami* (ang. *subtypes*), które pozwalają nam definiować typy jako inne typy z dodatkowym warunkiem. Aby skonstruować element podtypu, musimy podać element typu bazowego oraz dowód spełnienia warunku. Na przykład, aby skonstruować element  $0 : A$ , napiszemy:

---

```
#check (⟨0, by decide⟩ : A)
```

---

Element podtypu jest automatycznie wyposażony w wiele przydatnych pól, w tym wartość  $i$  twierdzenie o spełnianiu warunku. Warto zauważyć, że  $a : \mathbb{Q} = b : \mathbb{Q} \iff a : A = b : A$ . Takie twierdzenie też jest oczywiście dostępne.

---

```
def a0 := (⟨0, by decide⟩ : A)
#check a0.val      -- ↑a0 : ℚ
#check a0.prop     -- ↑a0 ≠ 1
#check a0.coe_inj -- ↑a = ↑b ↔ a = b
```

---

Strzałka w góre oznacza tutaj koercję (rzutowanie) typu z podtypu na typ bazowy.

Zdefiniujmy działanie  $\star$ , póki co na liczbach wymiernych.

---

```
def op (a b : ℚ) : ℚ := a * b - a - b + 2
```

---

Teraz możemy pokazać, że  $(A, \star)$  jest magmą, tzn. że  $a \star b \in A$  dla dowolnych  $a, b \in A$ .

---

```
lemma op_ne_one {a b : ℚ} (ha : a ≠ 1) (hb : b ≠ 1) : op a b ≠ 1 := by
  intro h
  unfold op at h
  have : (a - 1) * (b - 1) = 0 := by linarith
```

---

---

```
rcases mul_eq_zero.mp this with ha' | hb'
· have : a = 1 := by linarith
  contradiction
· have : b = 1 := by linarith
  contradiction
```

---

Użyliśmy tutaj taktyki `unfold`, która *rozwija* definicję `op` w danym miejscu.

Mając powyższy lemat, możemy już stwierdzić, że  $(A, \star)$  rzeczywiście jest magma. W Leanie, magma multiplikatywna jest nazwana po prostu `Mul`, więc wystarczy zdeklarować instancję tej klasy typów dla naszego podtypu.

---

```
instance : Mul A where
mul a b := ⟨op a.val b.val, op_ne_one a.prop b.prop⟩
```

---

Teraz chcemy udowodnić, że  $(A, \star)$  jest nie tylko magma, ale i podgrupą, czyli że  $\star$  jest łączne. Jest to nawet prostrze niż na karce.

---

```
import Mathlib.Tactic.Ring

instance : Semigroup A where
mul_assoc a b c := by
  apply Subtype.ext
  change op (op a.val b.val) c.val = op a.val (op b.val c.val)
  unfold op
ring
```

---

Musielimy użyć tutaj twierdzenia

`Subtype.ext {p : a → Prop} {a1 a2 : {x // p x}} : ↑a1 = ↑a2 → a1 = a2`

oraz nowej taktyki, `change`, która pozwala nam zmienić cel na równoważny *z definicji*.

Teraz pokażemy, że  $(A, \star)$  jest monoidem, czyli ma element neutralny. W tym celu należy powiedzieć, że typ  $A$  ma jedynkę (równą 2), a następnie, że ta jedynka istotnie jest elementem neutralnym, tzn.  $2 \star a = a \star 2 = a$  dla każdego  $a \in A$ .

---

```
instance : One A where
one := ⟨2, by decide⟩

instance : Monoid A where
one_mul a := by
  apply Subtype.ext
  change op 2 a.val = a.val
  unfold op
ring

mul_one a := by
  apply Subtype.ext
  change op a.val 2 = a.val
  unfold op
ring
```

---

Aby pokazać, że  $(A, \star)$  jest grupą, trzeba najpierw udowodnić, że  $a^{-1} = \frac{a}{a-1} \in A$ , wskazać wzór na odwrotność, a na końcu pokazać, że istotnie spełnia on  $a^{-1}a = 2$ .

---

```
import Mathlib.Tactic.FieldSimp
import Mathlib.Tactic.Linarith
```

---

---

```

lemma op_inv_ne_one {a : ℚ} (ha : a ≠ 1) : a / (a - 1) ≠ 1 := by
  intro h
  have a_sub_one_ne_zero : a - 1 ≠ 0 := sub_ne_zero.mpr ha
  have := (div_eq_one_iff_eq a_sub_one_ne_zero).mp h
  linarith

instance : Inv A where
  inv a := ⟨a.val / (a.val - 1), op_inv_ne_one a.prop⟩

instance : Group A where
  inv_mul_cancel a := by
    apply Subtype.ext
    change op (a.val / (a.val - 1)) a.val = 2
    unfold op
    field_simp
    have : (a.val - 1) / (a.val - 1) = 1 := by
      have a_sub_one_ne_zero : a.val - 1 ≠ 0 := sub_ne_zero.mpr a.prop
      exact div_self a_sub_one_ne_zero
    rw [this]
    ring

```

---

Użyliśmy tutaj taktyki `field_simp`, która próbuje sprowadzić wyrażenia do wspólnego mianownika.

Na koniec zostało pokazać przemienność  $\star$ .

---

```

instance : CommGroup A where
  mul_comm a b := by
    apply Subtype.ext
    change op a.val b.val = op b.val a.val
    unfold op
    ring

```

---

Z tych wszystkich własności możemy wyprowadzić inne fakty, np. że  $(A, \star)$  jest przemiennym monoidem z własnością skracania ( $ac = bc \implies a = b$ ). Jest to oczywiste, ale o tyle ciekawe, że nie każdy monoid przemienny ma własność skracania (np.  $(\mathbb{N}, \cdot)$ ) i nie każdy monoid przemienny z własnością skracania jest grupą (np.  $(\mathbb{N}, +)$ ). W Leanie, takie instancje można *inferować* przy pomocy `infer_instance`.

---

```

instance : CancelCommMonoid A := by
  infer_instance

```

---

Wbrew pozorom, nie będziemy z tego często korzystać, bo Lean automatycznie próbuje inferować instancje w momencie, kiedy jest to konieczne (np. przy aplikacji do twierdzenia).

Warto wiedzieć, że zamiast budować dowód krok po kroku, można od razu stworzyć dużą deklarację `instance : CommGroup A`, w której należy udowodnić każdą konieczną własność.

**Problem 3.9.** Zrobić trzeci zestaw zadań:

---

```

import Mathlib.Data.Rat.Init
import Mathlib.Data.Real.Basic

-- Zadanie 1
example {x : ℝ} (hx : 0 < x) : 2 ≤ x + 1 / x := sorry

```

---

---

```
-- Zadanie 2
-- Udowodnić, że (A, op) jest grupą przemienną.
def A := {x : ℚ // -1 < x ∧ x < 1}
def op (a b : ℚ) := (a + b) / (1 + a * b)

instance : CommGroup A := sorry
```

---

## 4. Literatura

- [1] J. Avigad, P. Massot. Mathematics in Lean, [https://leanprover-community.github.io/mathematics\\_in\\_lean/](https://leanprover-community.github.io/mathematics_in_lean/).
- [2] J. Avigad, L. de Moura, S. Kong, S. Ullrich. Theorem Proving in Lean 4, [https://leanprover.github.io/theorem\\_proving\\_in\\_lean4/](https://leanprover.github.io/theorem_proving_in_lean4/).
- [3] H. Barendregt, W. Dekkers, R. Statman. Lambda Calculus with Types, *Perspectives in Logic*, Cambridge University Press, 2013.
- [4] L. Csirmaz, Z. Gyenis. Mathematical Logic: Exercises and Solutions, *Problem Books in Mathematics*, Springer, 2022.
- [5] E. Palmgren. Semantics of intuitionistic propositional logic: lecture notes for Applied Logic, 2009, <https://www2.math.uu.se/~palmgren/tilllog/heyting3.pdf>.
- [6] M. H. Sørensen, P. Urzyczyn. Lectures on the Curry-Howard Isomorphism, *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, vol. 149, Elsevier, 2006.
- [7] P. Urzyczyn. Rachunek lambda: materiały do wykładu, 2025, <https://www.mimuw.edu.pl/~urzy/Lambda/erlambda.pdf>.
- [8] R. Zach et. al, The Open Logic Text, <https://openlogicproject.org/>.