Rozwiązania równania potencjału grawitacyjnego z użyciem FEM

Michał Dobranowski

22 grudnia 2023

Sformułowanie silne

Dane jest następujące równanie

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi(x)}{\mathrm{d}x^2} = 4\pi G\rho(x), \tag{1}$$

gdzie

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } x \in [0,1] \\ 1, & \text{dla } x \in (1,2] \\ 0, & \text{dla } x \in (2,3] \end{cases},$$

przy warunkach brzegowych

$$\Phi(0) = 5, \quad \Phi(3) = 4.$$

Szukana jest funkcja $\Phi : [0,3] \to \mathbb{R}$.

Sformułowanie słabe (wariacyjne)

Mnożąc równanie 1 obustronnie przez funkcję testową v i całkując na dziedzinie $[0,3]$ otrzymujemy

$$\int_0^3 \Phi'' v \,\mathrm{d}x = 4\pi G \int_0^3 \rho v \,\mathrm{d}x,$$

co, korzystając z definicji ρ, możemy zapisać jako

$$\int_0^3 \Phi'' v \,\mathrm{d}x = 4\pi G \int_1^2 v \,\mathrm{d}x.$$

Teraz całkujemy przez części

$$\left[\Phi' v\right]_0^3 - \int_0^3 \Phi' v' \,\mathrm{d}x = 4\pi G \int_1^2 v \,\mathrm{d}x.$$

Ponieważ obustronnie zadano warunek Dirichleta, funkcja testowa v zeruje się na brzegu dziedziny, więc

$$-\int_0^3 \Phi' v' \,\mathrm{d}x = 4\pi G \int_1^2 v \,\mathrm{d}x.$$

Chcemy szukać rozwiązań w formie $\Phi = w + \widetilde{\Phi}$, gdzie $w(0) = w(3) = 0$. Łatwo zauważyć, że taką funkcją jest $\widetilde{\Phi}(x) = 5 - \frac{x}{3}$. Podstawiamy i oznaczamy:

$$-\int_0^3 (w' + \widetilde{\Phi}')v' \,\mathrm{d}x = 4\pi G \int_1^2 v \,\mathrm{d}x,$$

$$\underbrace{-\int_0^3 w'v' \,\mathrm{d}x}_{B(w,v)} = \underbrace{4\pi G \int_1^2 v \,\mathrm{d}x + \int_0^3 \widetilde{\Phi}'v' \,\mathrm{d}x}_{L(v)}. \tag{2}$$

Dyskretyzacja problemu

Dzielimy dziedzinę $[0, 3]$ na n przedziałów (x_j, x_{j+1}) o długości $h = \frac{3}{n}$ takich, że

$$x_j = 3 \cdot \frac{j}{n}, \quad \text{dla } j \in \{0, \ldots, n\}.$$

Będziemy używać funkcji bazowych e_i zdefiniowanych następująco

$$e_i = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h}, & \text{dla } x \in (x_{i-1}, x_i), \\ \frac{x_{i+1} - x}{h}, & \text{dla } x \in (x_i, x_{i+1}), \\ 0, & \text{w innym przypadku.} \end{cases}$$

Pochodna takiej funkcji to

$$e_i' = \begin{cases} \frac{1}{h}, & \text{dla } x \in (x_{i-1}, x_i), \\ -\frac{1}{h}, & \text{dla } x \in (x_i, x_{i+1}), \\ 0, & \text{w innym przypadku.} \end{cases}$$

Funkcja w będzie przybliżana przez pewną kombinację liniową funkcji bazowych e_i. Ograniczymy również nieskończenie wymiarową przestrzeń funkcji testujących V do skończenie wymiarowej przestrzeni funkcji bazowych $V_h \subset V$. Niech zbiór funkcji $v_i = e_i$ będzie bazą tej przestrzeni. Dla każdego $j \in \{0, \ldots, n\}$ mamy więc

$$B\left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i e_i, v_j\right) = L(v_j).$$

Ze względu na dwuliniowość B, możemy przekształcić powyższy układ równań do postaci

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i B(e_i, v_j) = L(v_j), \quad j \in \{1, \ldots, n\},$$

czyli, wykorzystując $v_i = e_i$,

$$\begin{bmatrix} B(e_0,e_0) & B(e_1,e_0) \cdots\cdots & B(e_n,e_0) \\ B(e_0,e_1) & B(e_1,e_1) \cdots\cdots & B(e_n,e_1) \\ \vdots & \vdots \quad \ddots & \vdots \\ B(e_0,e_n) & B(e_1,e_n) \cdots\cdots & B(e_n,e_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(e_0) \\ L(e_1) \\ \vdots \\ L(e_n) \end{bmatrix}.$$

Ze względu na warunki Dirichleta, musimy zapewnić, że $\alpha_0 = \alpha_n = 0$. Usuwamy odpowiednie wiersze i kolumny macierzy otrzymując

$$\begin{bmatrix} B(e_1,e_1) & B(e_2,e_1) \cdots\cdots & B(e_{n-1},e_1) \\ B(e_1,e_2) & B(e_2,e_2) \cdots\cdots & B(e_{n-1},e_2) \\ \vdots & \vdots \quad \ddots & \vdots \\ B(e_1,e_{n-1}) & B(e_2,e_{n-1}) \cdots\cdots & B(e_{n-1},e_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(e_1) \\ L(e_2) \\ \vdots \\ L(e_{n-1}) \end{bmatrix}.$$

Uproszczenie układu równań

Można zauważyć, że ze względu na konstrukcję funkcji e_i, $B(e_i, e_j) = 0$ dla każdej pary i, j, dla której $|i - j| \geq 2$. Dodatkowo, $B(e_i, e_j) = B(e_j, e_i)$.

Wynik

Dla $G = 1$ (dla prawdziwej stałej grawitacyjnej wykres jest bliski prostej) otrzymano poniższej narysowaną funkcję.