Drzewa czwórkowe i kd-drzewa

Michał Dobranowski   Wiktor Perczak

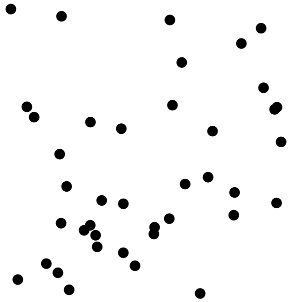
31 grudnia 2023

Plan prezentacji

1. Przedstawienie problemu
2. Rozwiązanie trywialne
3. Drzewa czwórkowe
4. Kd-drzewa

Przedstawienie problemu

Dany jest zbiór n punktów P na płaszczyźnie. Chcemy odpowiadać na zapytania typu:

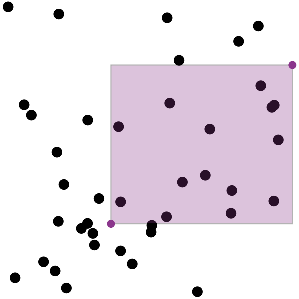


Przedstawienie problemu

Dany jest zbiór n punktów P na płaszczyźnie. Chcemy odpowiadać na zapytania typu:

dla zadanych x_1, x_2, y_1, y_2 *znaleźć punkty* $p \in P$ *takie, że*

$$x_1 \leq x_p \leq x_2, y_1 \leq y_p \leq y_2.$$



Rozwiązanie trywialne

Sprawdzić każdy punkt. Złożoność czasowa zapytania: $\mathcal{O}(n)$.

Rozwiązanie trywialne

Sprawdzić każdy punkt. Złożoność czasowa zapytania: $\mathcal{O}(n)$.

```
filter(lambda p: x_1 <= p[0] <= x_2 and y_1 <= p[1] <= y_2, points)
```

Rozwiązanie trywialne

Sprawdzić każdy punkt. Złożoność czasowa zapytania: $\mathcal{O}(n)$.

```
filter(lambda p: x_1 <= p[0] <= x_2 and y_1 <= p[1] <= y_2, points)
```

Nie uda nam się poprawić złożoności czasowej, jeśli miałaby zależeć tylko od n. Chcemy więc, żeby zależała od liczby punktów wynikowych, którą oznaczymy przez k.

Drzewa czwórkowe – opis struktury

Drzewo czwórkowe (ang. *quadtree*) do drzewiastą struktura danych, w której:

Drzewa czwórkowe – opis struktury

Drzewo czwórkowe (ang. *quadtree*) do drzewiastą struktura danych, w której:

1. każdy wierzchołek odpowiada za pewnien prostokąt na płaszczyźnie,

Drzewa czwórkowe – opis struktury

Drzewo czwórkowe (ang. *quadtree*) do drzewiastą struktura danych, w której:

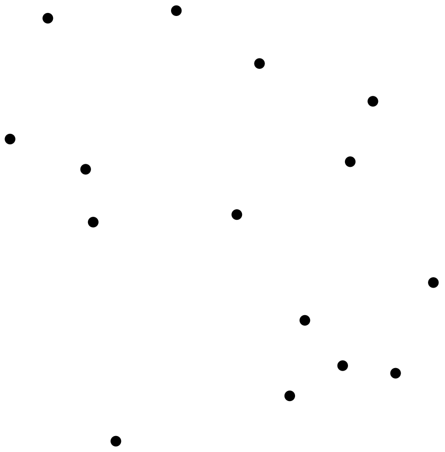
1. każdy wierzchołek odpowiada za pewnien prostokąt na płaszczyźnie,
2. każdy wierzchołek posiada maksymalnie czworo dzieci, z których każdy odpowiada za ćwiartkę prostokątu rodzica,

Drzewa czwórkowe – opis struktury

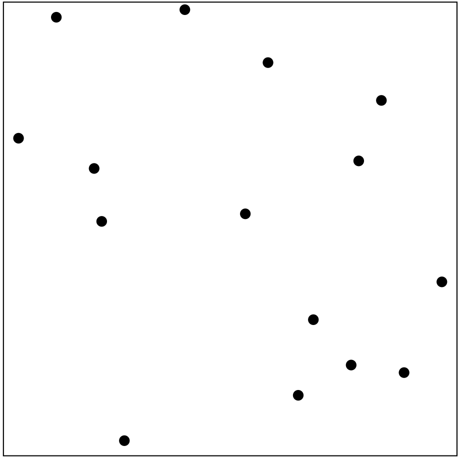
Drzewo czwórkowe (ang. *quadtree*) do drzewiastą struktura danych, w której:

1. każdy wierzchołek odpowiada za pewnien prostokąt na płaszczyźnie,
2. każdy wierzchołek posiada maksymalnie czworo dzieci, z których każdy odpowiada za ćwiartkę prostokątu rodzica,
3. każdy liść odpowiada za jeden punkt na płaszczyźnie.

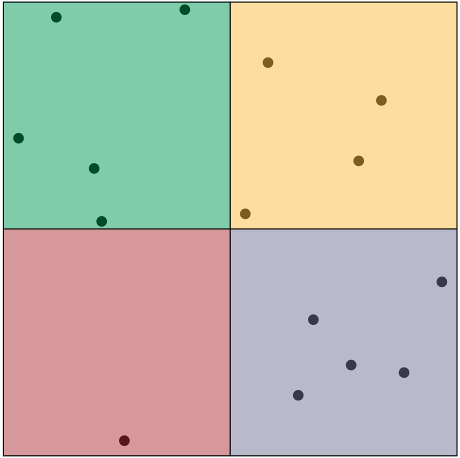
Drzewa czwórkowe – sposób podziału

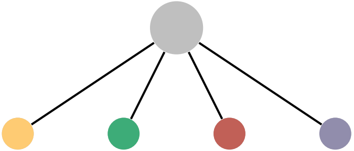


Drzewa czwórkowe – sposób podziału

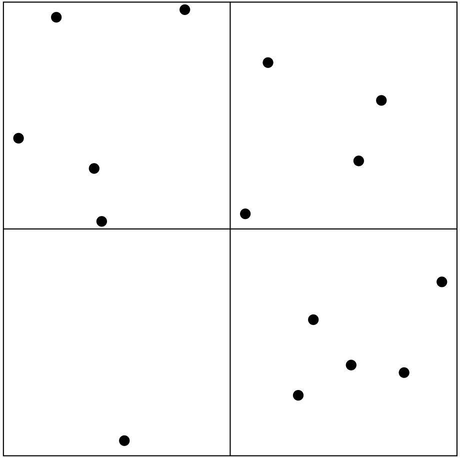


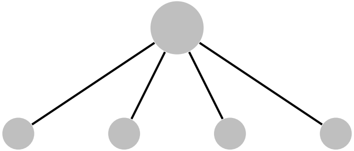
Drzewa czwórkowe – sposób podziału



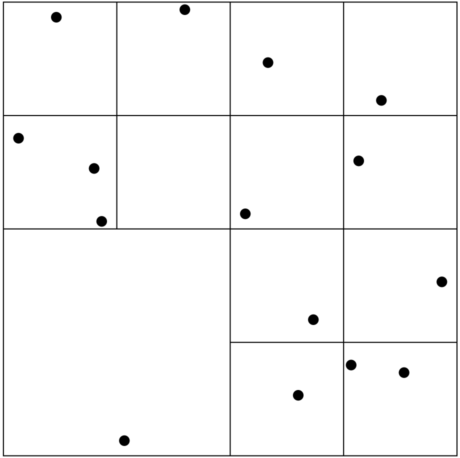


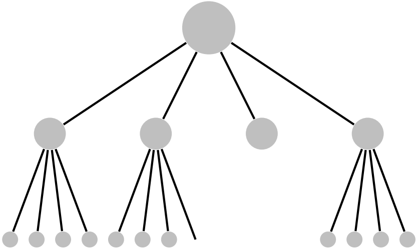
Drzewa czwórkowe – sposób podziału



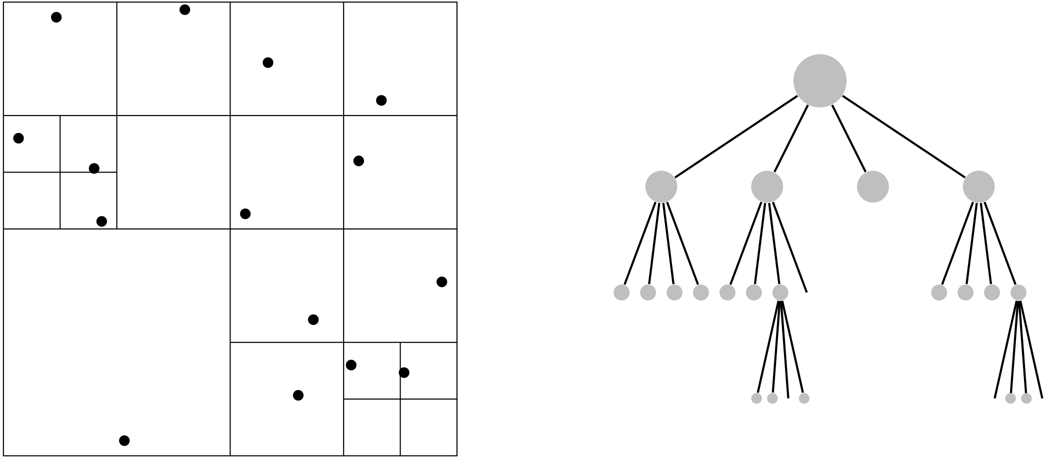


Drzewa czwórkowe – sposób podziału





Drzewa czwórkowe – sposób podziału



Drzewa czwórkowe – analiza złożoności

Lemat (wysokość drzewa czwórkowego)

Niech

$$\beta = \frac{\max_{p,q \in P} \|p - q\|}{\min_{p,q \in P, p \neq q} \|p - q\|}.$$

Wysokość h drzewa czwórkowego dla zbioru P jest $\Theta(\log \beta)$.

Drzewa czwórkowe – analiza złożoności

Lemat (wysokość drzewa czwórkowego)

Niech

$$\beta = \frac{\max_{p,q \in P} \|p - q\|}{\min_{p,q \in P, p \neq q} \|p - q\|}.$$

Wysokość h drzewa czwórkowego dla zbioru P jest $\Theta(\log \beta)$.

Warto zauważyć, że h może być nieograniczone przez n. W praktyce jest ograniczone dzięki standardowi liczb zmiennoprzecinkowych.

Łatwo pokazać, że h jest $\Omega(\log n)$ (a jeśli punkty w P są rozłożone równomiernie, to $\Theta(\log n)$).

Drzewa czwórkowe – analiza złożoności

Lemat (wysokość drzewa czwórkowego)

Niech

$$\beta = \frac{\max_{p,q \in P} \|p-q\|}{\min_{p,q \in P, p \neq q} \|p-q\|}.$$

Wysokość h drzewa czwórkowego dla zbioru P jest $\Theta(\log \beta)$.

Warto zauważyć, że h może być nieograniczone przez n. W praktyce jest ograniczone dzięki standardowi liczb zmiennoprzecinkowych.

Łatwo pokazać, że h jest $\Omega(\log n)$ (a jeśli punkty w P są rozłożone równomiernie, to $\Theta(\log n)$).

Złożoność

1. konstrukcji drzewa:
2. zapytania:
3. pamięciowa:

Drzewa czwórkowe – analiza złożoności

Lemat (wysokość drzewa czwórkowego)

Niech

$$\beta = \frac{\max_{p,q \in P} \|p - q\|}{\min_{p,q \in P, p \neq q} \|p - q\|}.$$

Wysokość h drzewa czwórkowego dla zbioru P jest $\Theta(\log \beta)$.

Warto zauważyć, że h może być nieograniczone przez n. W praktyce jest ograniczone dzięki standardowi liczb zmiennoprzecinkowych.

Łatwo pokazać, że h jest $\Omega(\log n)$ (a jeśli punkty w P są rozłożone równomiernie, to $\Theta(\log n)$).

Złożoność

1. konstrukcji drzewa: $\mathcal{O}(hn)$,
2. zapytania:
3. pamięciowa:

Drzewa czwórkowe – analiza złożoności

Lemat (wysokość drzewa czwórkowego)

Niech

$$\beta = \frac{\max_{p,q \in P} \|p - q\|}{\min_{p,q \in P, p \neq q} \|p - q\|}.$$

Wysokość h drzewa czwórkowego dla zbioru P jest $\Theta(\log \beta)$.

Warto zauważyć, że h może być nieograniczone przez n. W praktyce jest ograniczone dzięki standardowi liczb zmiennoprzecinkowych.

Łatwo pokazać, że h jest $\Omega(\log n)$ (a jeśli punkty w P są rozłożone równomiernie, to $\Theta(\log n)$).

Złożoność

1. konstrukcji drzewa: $\mathcal{O}(hn)$,
2. zapytania:
3. pamięciowa: $\mathcal{O}(hn)$.

Drzewa czwórkowe – analiza złożoności

Lemat (wysokość drzewa czwórkowego)

Niech

$$\beta = \frac{\max_{p,q \in P} \|p - q\|}{\min_{p,q \in P, p \neq q} \|p - q\|}.$$

Wysokość h drzewa czwórkowego dla zbioru P jest $\Theta(\log \beta)$.

Warto zauważyć, że h może być nieograniczone przez n. W praktyce jest ograniczone dzięki standardowi liczb zmiennoprzecinkowych.
Łatwo pokazać, że h jest $\Omega(\log n)$ (a jeśli punkty w P są rozłożone równomiernie, to $\Theta(\log n)$).
Złożoność

1. konstrukcji drzewa: $\mathcal{O}(hn)$,
2. zapytania: $\mathcal{O}(hk)$,
3. pamięciowa: $\mathcal{O}(hn)$.

kd-tree – opis struktury

Kd-drzewo (ang. *kd-tree*) to drzewo binarne, w którym:

kd-tree – opis struktury

Kd-drzewo (ang. *kd-tree*) to drzewo binarne, w którym:

1. każdy poziom drzewa odpowiada za wymiar, względem którego dzieli się punkty,

kd-tree – opis struktury

Kd-drzewo (ang. *kd-tree*) to drzewo binarne, w którym:

1. każdy poziom drzewa odpowiada za wymiar, względem którego dzieli się punkty,
2. każdy wierzchołek odpowiada za wartość współrzędnej podziału w danym wymiarze,

kd-tree – opis struktury

Kd-drzewo (ang. *kd-tree*) to drzewo binarne, w którym:

1. każdy poziom drzewa odpowiada za wymiar, względem którego dzieli się punkty,
2. każdy wierzchołek odpowiada za wartość współrzędnej podziału w danym wymiarze,
3. wartość współrzędnej podziału jest przyjmowana jako mediana zbioru (znajdowana za pomocą algorytmu quickselect),

kd-tree – opis struktury

Kd-drzewo (ang. *kd-tree*) to drzewo binarne, w którym:

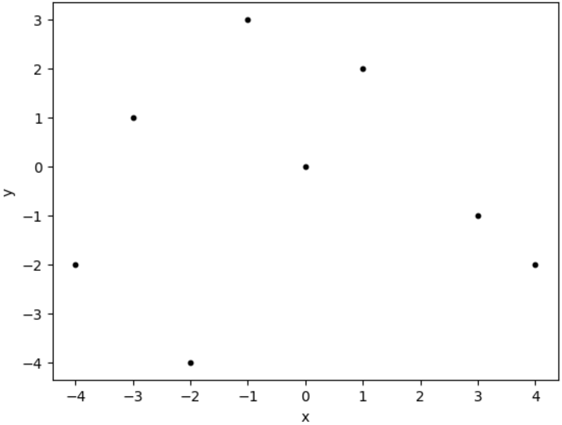
1. każdy poziom drzewa odpowiada za wymiar, względem którego dzieli się punkty,
2. każdy wierzchołek odpowiada za wartość współrzędnej podziału w danym wymiarze,
3. wartość współrzędnej podziału jest przyjmowana jako mediana zbioru (znajdowana za pomocą algorytmu quickselect),
4. dla każdego wierzchołka obiekty mniejsze trafiają do lewego potomka, większe do prawego, a równe albo do lewego albo do prawego (dla zrównoważenia drzewa),

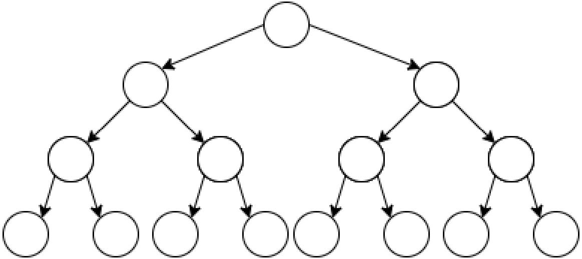
kd-tree – opis struktury

Kd-drzewo (ang. *kd-tree*) to drzewo binarne, w którym:

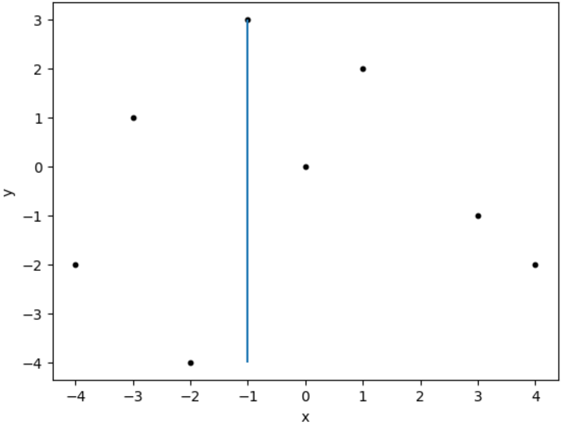
1. każdy poziom drzewa odpowiada za wymiar, względem którego dzieli się punkty,
2. każdy wierzchołek odpowiada za wartość współrzędnej podziału w danym wymiarze,
3. wartość współrzędnej podziału jest przyjmowana jako mediana zbioru (znajdowana za pomocą algorytmu quickselect),
4. dla każdego wierzchołka obiekty mniejsze trafiają do lewego potomka, większe do prawego, a równe albo do lewego albo do prawego (dla zrównoważenia drzewa),
5. każdy liść odpowiada za jeden punkt na płaszczyźnie.

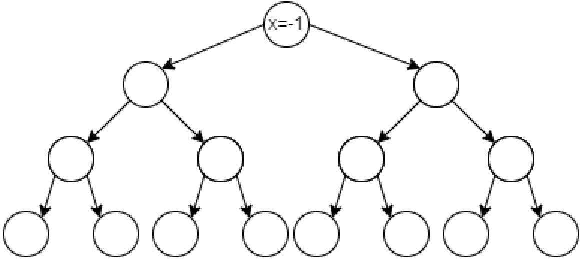
kd-drzewa – sposób podziału



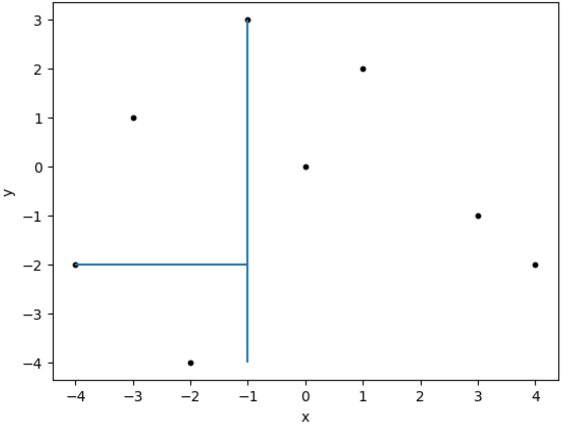


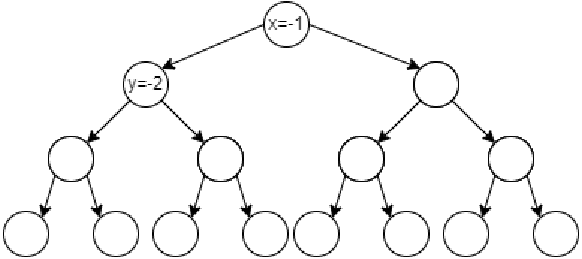
kd-drzewa – sposób podziału



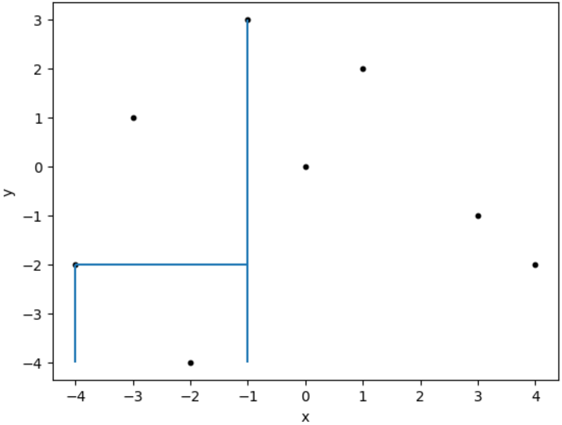


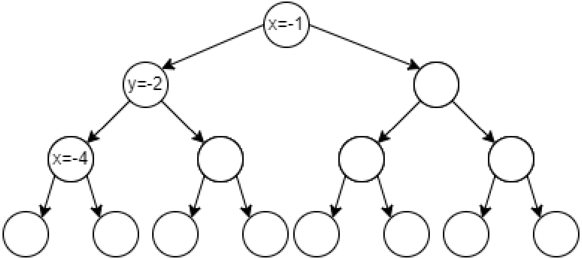
kd-drzewa – sposób podziału



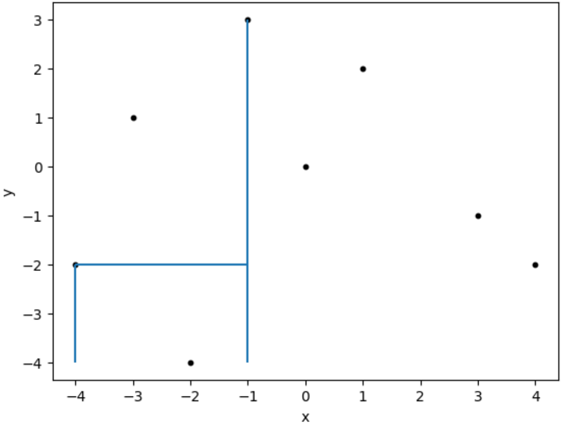


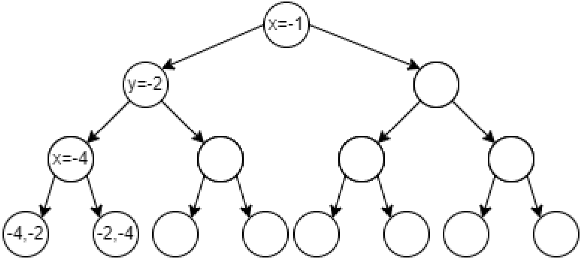
kd-drzewa – sposób podziału



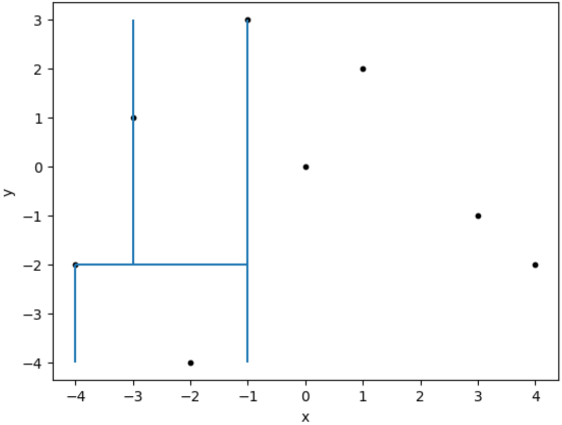


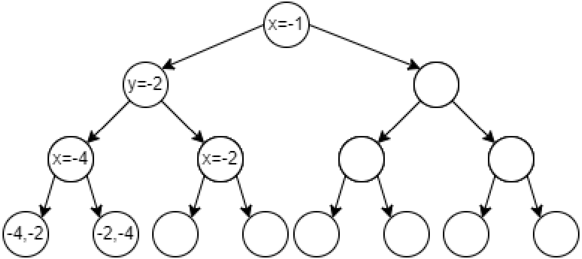
kd-drzewa – sposób podziału



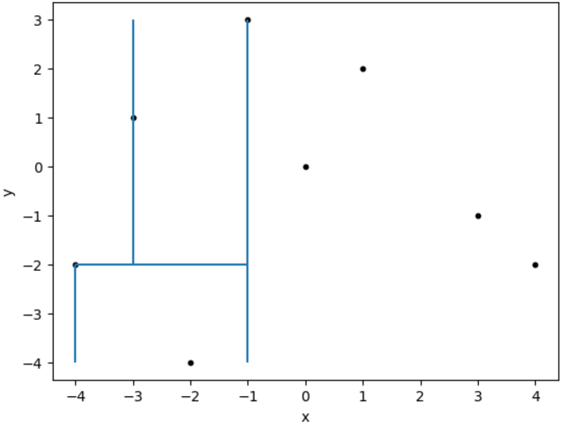


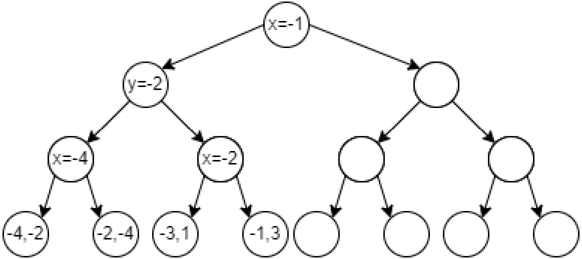
kd-drzewa – sposób podziału



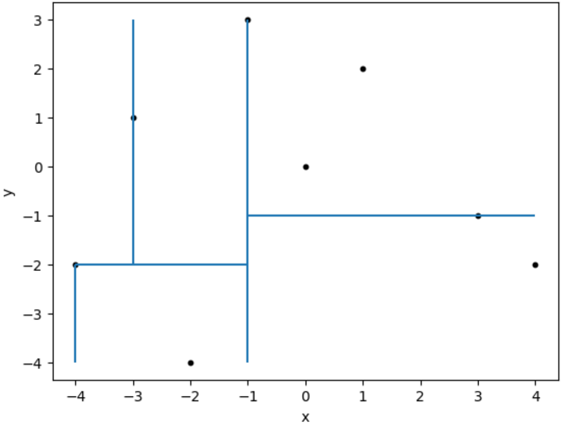


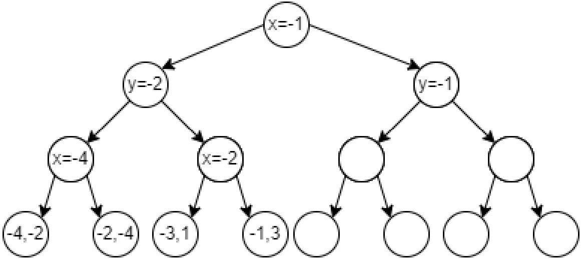
kd-drzewa – sposób podziału



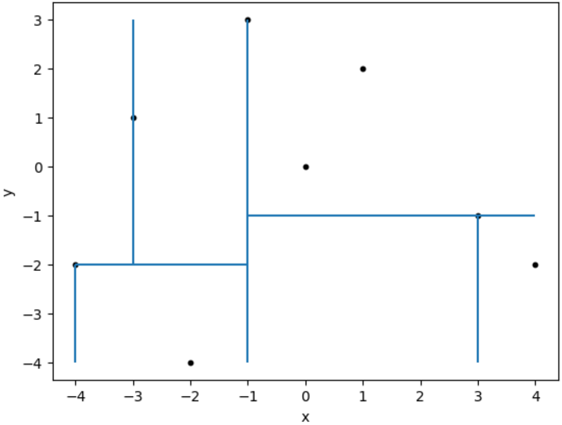


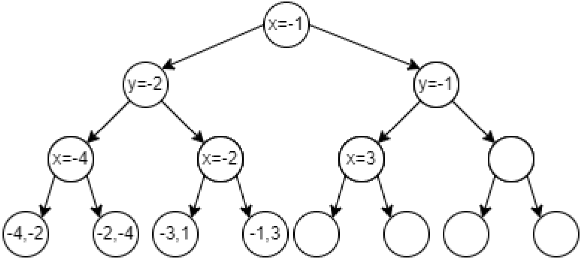
kd-drzewa – sposób podziału



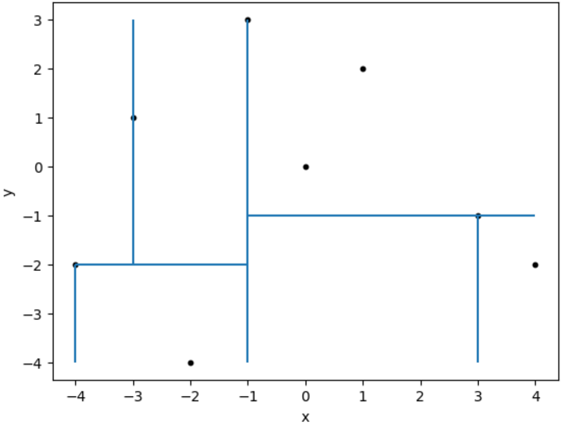


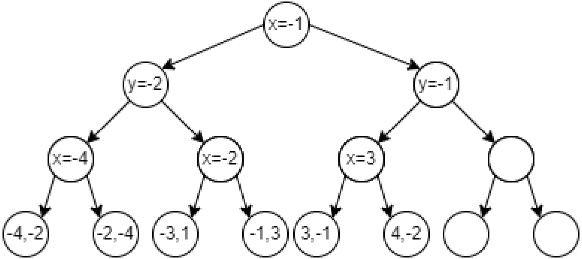
kd-drzewa – sposób podziału



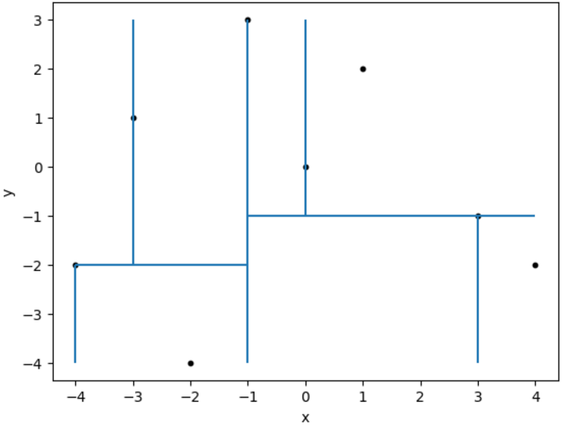


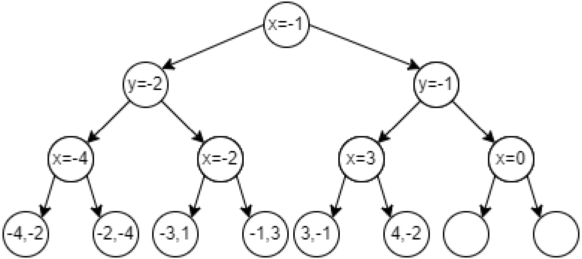
kd-drzewa – sposób podziału



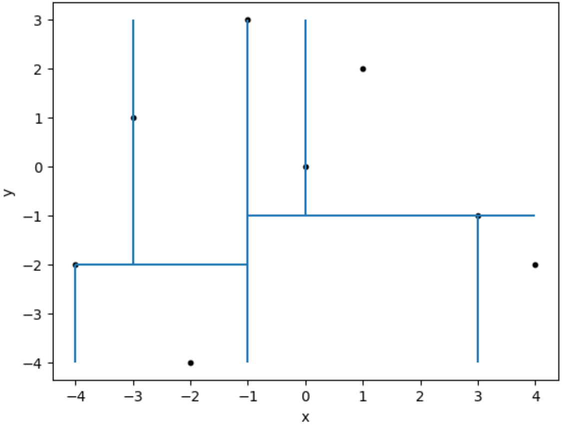


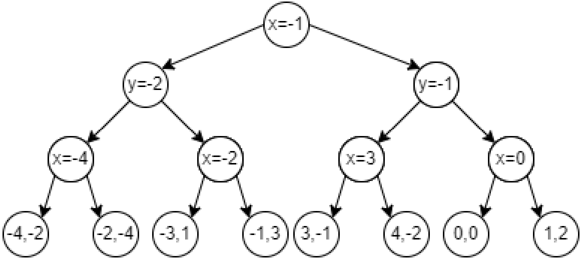
kd-drzewa – sposób podziału





kd-drzewa – sposób podziału





kd-tree – odpowiadanie na zapytania

Znajdowanie punktów, które należą do zadanego obszaru działa następująco:

kd-tree – odpowiadanie na zapytania

Znajdowanie punktów, które należą do zadanego obszaru działa następująco:

1. każdy wierzchołek w drzewie (poza liśćmi) odpowiada za konkretny obszar w przestrzeni,

kd-tree – odpowiadanie na zapytania

Znajdowanie punktów, które należą do zadanego obszaru działa następująco:

1. każdy wierzchołek w drzewie (poza liśćmi) odpowiada za konkretny obszar w przestrzeni,
2. przeszukuje się drzewo od korzenia – jeśli obszar z wierzchołka w pełni znajduje się w zadanym obszarze, to uwzględniamy wszystkie jego liście w odpowiedzi,

kd-tree – odpowiadanie na zapytania

Znajdowanie punktów, które należą do zadanego obszaru działa następująco:

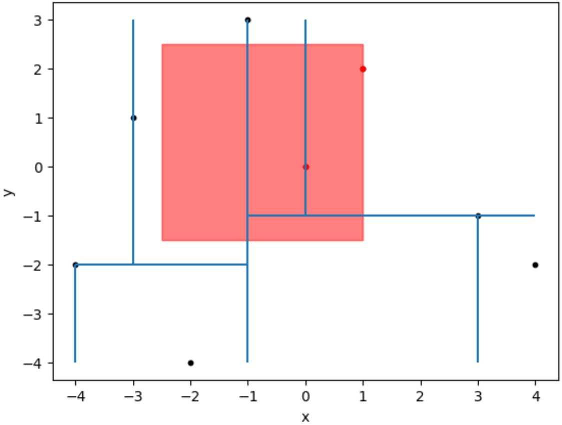
1. każdy wierzchołek w drzewie (poza liśćmi) odpowiada za konkretny obszar w przestrzeni,
2. przeszukuje się drzewo od korzenia – jeśli obszar z wierzchołka w pełni znajduje się w zadanym obszarze, to uwzględniamy wszystkie jego liście w odpowiedzi,
3. jeśli obszar tylko częściowo pokrywa się z zadanym obszarem, to sprawdzamy dalej jego dzieci,

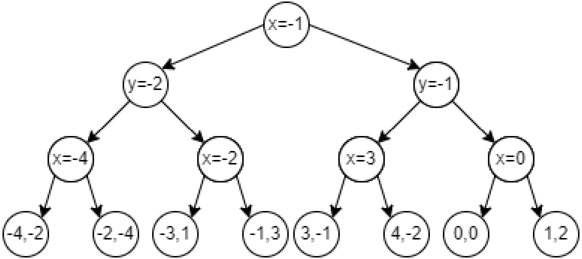
kd-tree – odpowiadanie na zapytania

Znajdowanie punktów, które należą do zadanego obszaru działa następująco:

1. każdy wierzchołek w drzewie (poza liśćmi) odpowiada za konkretny obszar w przestrzeni,
2. przeszukuje się drzewo od korzenia – jeśli obszar z wierzchołka w pełni znajduje się w zadanym obszarze, to uwzględniamy wszystkie jego liście w odpowiedzi,
3. jeśli obszar tylko częściowo pokrywa się z zadanym obszarem, to sprawdzamy dalej jego dzieci,
4. jesli obszar w ogóle nie pokrywa się z zadanym obszarem to kończymy przeszukiwanie w tym poddrzewie.

kd-drzewa – odpowiadanie na zapytania





kd-tree – analiza złożoności

Budując drzewo, trzeba w każdym kroku liczyć medianę, co odbywa się w czasie $\mathcal{O}(n)$. Drzewo jest zrównoważone, więc z każdym podziałem zbiór zmniejsza się dwukrotnie, więc ostateczna złożoność wynosi $\mathcal{O}(n \log n)$.

kd-tree – analiza złożoności

Budując drzewo, trzeba w każdym kroku liczyć medianę, co odbywa się w czasie $\mathcal{O}(n)$. Drzewo jest zrównoważone, więc z każdym podziałem zbiór zmniejsza się dwukrotnie, więc ostateczna złożoność wynosi $\mathcal{O}(n \log n)$.

Lemat (o kd-drzewie)

Dla zrównoważonego kd-drzewa o zamiennym podziale (czyli takim, gdzie punkt dzielący jest wybierany według różnych wymiarów dla różnych poziomów drzewa), dowolna pionowa lub pozioma prosta przecina $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ komórek.

Złożoność

1. konstrukcji drzewa: $\mathcal{O}(n \log n)$,
2. zapytania: $\mathcal{O}(\sqrt{n})$,
3. pamięciowa: $\mathcal{O}(n)$.