Dokumentacja

Michał Dobranowski   Wiktor Perczak

2 stycznia 2024

Spis treści

1 Część techniczna

1.1 Wymagania

Do używania programu potrzebny jest język `Python` w wersji co najmniej `3.10`. Ponadto wykorzystywane są również moduły:

- `numpy 1.26.2`
- `bitalg` napisany przez koło naukowe BIT do wizualizacji danych: `https://github.com/aghbit/Algorytmy-Geometryczne`

1.2 Moduł `geometry`

1.2.1 `Rectangle`

Klasa Rectangle implementuje prostokąt oraz wiele operacji, które można na nim wykonać:

- `def __eq__(self, other: Rectangle) -> bool` – metoda sprawdzająca, czy dwa prostokąty są sobie równe (czy współrzędne ich wierzchołków są identyczne)
- `def __and__(self, other: Rectangle) -> Rectangle | None` – metoda zwracająca część wspólną dwóch prostokątów, lub `None`, jeśli ona nie istnieje
- `def __contains__(self, item: Rectangle | Point) -> bool` – metoda sprawdzająca, czy jeden prostokąt w pełni zawiera się w drugim

1.3 Moduł `tree`

Zawiera klasę abstrakcyjną `Tree`, po której dziedziczą `Quadtree` oraz `KdTree`. Posiada dwie metody:

- `def __init__(self, points: list[Point])` – konstruktor klasy
- `def find(self, rectangle: Rectangle) -> list[Point]` – zwraca listę punktów, które znajdują się w zadanym prostokącie

1.4 Moduł `quadtree`

1.4.1 `_Node`

Każdy obiekt `_Node` trzyma informację o:

- `self.rectangle` – prostokącie, za który odpowiada dany wierzchołek drzewa
- `self.min_x, self.max_x, self.min_y, self.max_y` – ekstremach prostokąta
- `self.mid_x, self.min_y` – wartości w środku prostokąta

- `self.children` – dzieciach danego wierzchołka
- `self.leaf_node` – współrzędnych punktu, jeśli wierzchołek jest liściem

1.4.2 `Quadtree`

Klasa `Quadtree` umożliwia budowanie drzewa czwórkowego oraz odpowiadanie na zapytania o punkty wewnątrz danego prostokąta. Posiada następujące metody:

- `def __init__(self, points: list[Point])` – tworzy pierwszy (największy) prostokąt, który zostaje zapisany w korzeniu drzewa (`self.root`). Nastepnie wywołuje z korzenia metodę `__construct_subtree`, która konstruuje drzewo czwórkowe.
- `__construct_subtree(self, node: _Node, points: list[Point])` – konstruuje drzewo czwórkowe, dzieląc kolejne prostokąty na cztery ćwiartki oraz rozdzielając odpowiednio punkty na cztery zbiory. Jeżeli dojdzie do prostokąta, wewnątrz którego jest tylko jeden punkt, to obecnie rozważany wierzchołek (`_Node`) staje się liściem drzewa.

  Złożoność: $\mathcal{O}(hn)$, gdzie h to wysokość drzewa czwórkowego.
- `def __find(self, node: _Node, rectangle: Rectangle, res: list[Point])` – metoda, która służy do znajdywania punktów wewnątrz zadanego prostokąta. Rekurencyjnie znajduje prostokąty, które w pełni zawierają się w prostokącie z zapytania i dodaje liście poniżej do odpowiedzi.
- `def find(self, rectangle: Rectangle) -> list[Point]` – wywołuje metodę `__find()` i zwraca listę punktów, które mieszczą się w zadanym prostokącie. Złożoność: $\mathcal{O}(hk)$, gdzie k to liczba znalezionych punktów.

1.5 Moduł `kd_tree`

1.5.1 `_Node`

Każdy obiekt `_Node` trzyma informację o:

- `self.left` – lewym dziecku wierzchołka
- `self.right` – prawym dziecku wierzchołka
- `self.rectangle` – prostokącie, który powstał przez ograniczenia przodków
- `self.leafs` – liście wszystkich liści, które są potomkami danego wierzchołka
- `self.leaf_point` – współrzędnych punktu, jeśli dany wierzchołek jest liściem

1.5.2 `KdTree`

Klasa `KdTree` umożliwia budowanie drzewa oraz odpowiadanie na zapytania 2D, gdyż taki był temat zadania. Kod można jednak bardzo łatwo przekształcić, tak aby umożliwiał operacje na dowolnej liczbie wymiarów. Klasa `KdTree` posiada następujące metody:

- `def __init__(self, points: list[Point])` – konstruktor klasy, do którego przekazuje się listę punktów, a następnie konstruowane jest kd-drzewo. Tworzony jest też parametr `self.root`, dzięki któremu ma się dostęp do całego drzewa.

- `def build_tree(self, points: list[Point], depth: int, rectangle: Rectangle) -> _Node` – metoda, która rekurencyjnie buduje kd-drzewo. W każdej instancji dzieli dany zbiór punktów na dwa zbiory względem współrzędnej podziału, którą jest mediana (wyliczana algorytmem `quick_select`). Następnie wywołuje się rekurencyjnie z dzieci wierzchołka, który jest obecnie rozważany. W liściach zapisuje punkty z zadanego zbioru. Złożoność: $\mathcal{O}(n \log n)$.

- `def __find(self, node: _Node, rectangle: Rectangle, res: list[Point])` – metoda, która służy do znajdywania punktów wewnątrz zadanego prostokąta. Jeśli prostokąt z danego wierzchołka w pełni zawiera się, w prostokącie z zapytania to dodaje do odpowiedzi wszystkie liście poniżej. Jeśli zawiera się tylko częściowo, wywołuje się rekurencyjnie z jego dzieci.

- `def find(self, rectangle: Rectangle) -> list[Point]` – wywołuje metodę `__find()` i zwraca listę punktów, które mieszczą się w zadanym prostokącie. Złożoność: $\mathcal{O}(\sqrt{n} + k)$, gdzie k to liczba znalezionych punktów.

1.6 Moduł `quick_select`

Służy do zwracania mediany nieposortowanego zbioru punktów w czasie $\mathcal{O}(n)$. Działanie jest identyczne z sortowaniem przez scalanie, dzieli zbiór na dwa zbiory względem zadanej wartości, aż odnajdzie medianę. Posiada trzy funkcje:

- `def quick_select(points: list[Point], l: int, r: int, k: int, depth: int) -> Point` – zwraca medianę zbioru punktów, względem danego wymiaru (`depth: int`)

- `def partition(points: list[Point], l: int, r: int, depth: int) -> int` – porządkuje punkty na dwa zbiory: mniejsze od punktu porządkującego lub większe od niego i zwraca indeks pierwszego punktu ze zbioru punktów większych od punktu porządkującego

- `def rand_partition(points: list[Point], l: int, r: int, depth: int) -> int` – losowo wybiera punkt porządkujący, a następnie wywołuje funkcję `partition()`

2 Część użytkownika

W tej sekcji zaprezentowane są przykładowe użycia klas `Quadtree` i `KdTree`: skonstruowanie drzewa oraz znalezienie punktów, leżących wewnątrz zadanego prostokąta.

2.1 Użycie Quadtree

```python
from quadtree import Quadtree
from geometry import Rectangle

points = [(0, 0), (1.5, 1), (2, 3), (2, 0), (0.5, 1.5)]
rectangle = Rectangle(0, 1.5, 1, 3)

tree = Quadtree(points)
print(tree.find(rectangle))
```

Odpowiedź dla przykładu: [(0.5, 1.5), (1.5, 1)].

2.2 Użycie KdTree

```python
from kd_tree import KdTree
from geometry import Rectangle

points = [(0, 0), (1.5, 1), (2, 3), (2, 0), (0.5, 1.5)]
rectangle = Rectangle(0, 1.5, 1, 3)

tree = KdTree(points)
print(tree.find(rectangle))
```

3 Wizualizacja

Do wizualizacji wykorzystano narzędzie koła naukowego BIT (https://github.com/aghbit/Algorytmy-Geometryczne). Napisano dwie klasy `QuadtreeVis` oraz `KdTreeVis`, które umożliwiają:

- podział przestrzeni na prostokąty
- zobrazowanie zbioru znalezionych punktów dla danego zapytania
- wygenerowanie pliku GIF, który wizualizuje kolejne kroki algorytmu

3.1 Wizualizacja `QuadtreeVis`

Klasa `QuadtreeVis` dziedziczy po `Quadtree` dodatkowo dodając elementy wizualizacji.

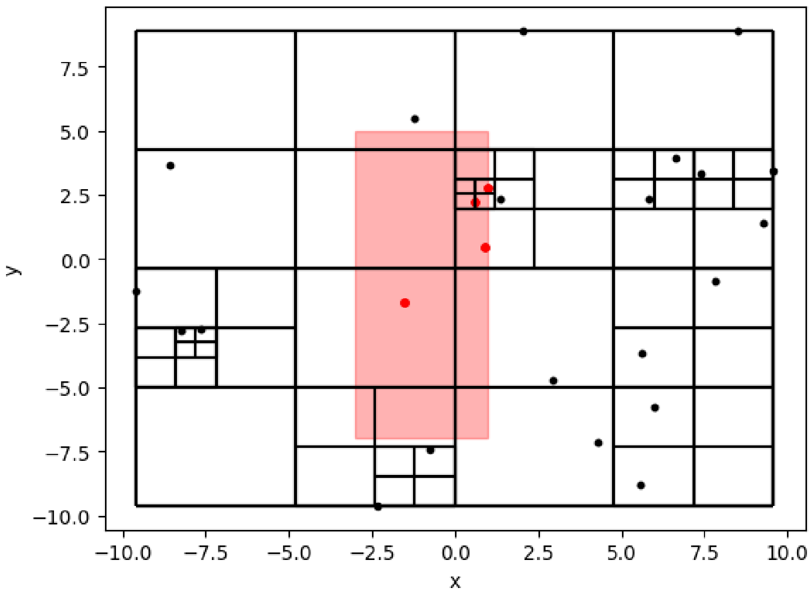
Przykładowy kod na zwizualizowanie procesu tworzenia quadtree (na losowo wygenerowanym zbiorze):

```
from quadtree_visualization import QuadtreeVis
from geometry import Rectangle
from numpy.random import seed, uniform

def generate_uniform_points(left, right, n):
    return list(zip(uniform(left, right, size=n), uniform(left, right,
    ↪   size=n)))

points = generate_uniform_points(-10, 10, 25)
rectangle = Rectangle(-3, 1, -7, 5)
quadtree = QuadtreeVis(points)
quadtree.add_grid()
quadtree.find(rectangle)
quadtree.vis.show()
```

Wykres wygenerowany przez ten program przedstawia poniższy rysunek.



Rysunek 1: Wizualizacja drzewa czwórkowego.

Aby wygenerować plik GIF do wyświetlania kolejnych kroków algorytmu, należy zamiast: `quadtree.vis.show()`, użyć `quadtree.vis.show_gif()`.

3.2 Wizualizacja KdTreeVis

Klasa KdTreeVis działa identycznie jak klasa KdTree, ale dodatkowo dodaje elementy wizualizacji, zarówno podczas konstruowania drzewa, jak i odpowiadania na zapytanie.

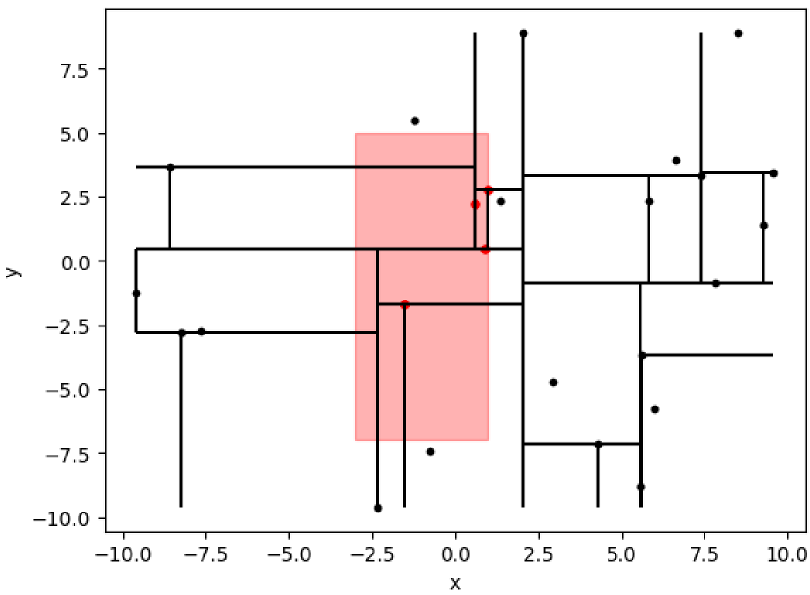
Przykładowe użycie klasy KdTreeVis dla losowo wygenerowanego zbioru punktów:

```
from kd_tree_visualization import KdTreeVis
from geometry import Rectangle
from numpy.random import seed, uniform

def generate_uniform_points(left, right, n):
    return list(zip(uniform(left, right, size=n), uniform(left, right,
    ↪   size=n)))

points = generate_uniform_points(-10, 10, 25)
rectangle = Rectangle(-3, 1, -7, 5)
kd_tree = KdTreeVis(points)
kd_tree.find(rectangle)
kd_tree.vis.show()
```

Wykres wygenerowany przez ten program przedstawia poniższy rysunek.



Rysunek 2: Wizualizacja kd-drzewa.

Aby wygenerować plik GIF do wyświetlania kolejnych kroków algorytmu, należy zamiast: kd_tree.vis.show(), użyć kd_tree.vis.show_gif().

4 Porównanie – testy czasowe

Porównanie obu struktur danych przeprowadzono przy użyciu dwóch zbiorów testujących:

- $\mathcal{A}(n)$ – zbiór n punktów $P \in \mathcal{S} = [-1000, 1000]^2$ wygenerowanych losowo za pomocą funkcji `numpy.random.uniform`,
- $\mathcal{B}(n)$ – zbiór n punktów, z których połowa to zbiór $\mathcal{A}(n/2)$, a reszta to translacja tego zbioru o wektor $[10^{-8}, 0]$.

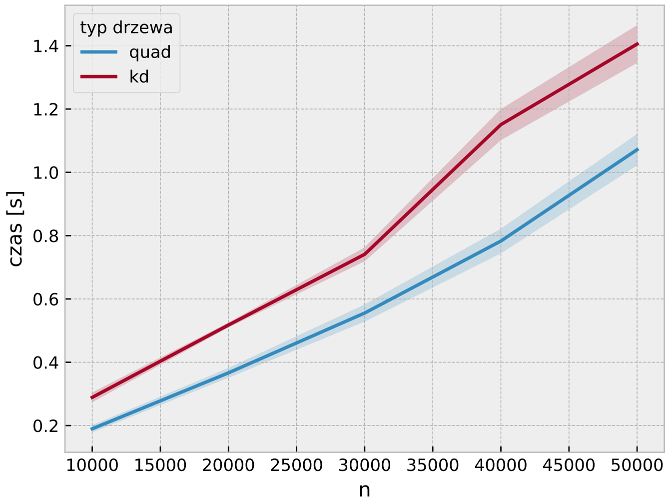
Dla każdego zbioru wybrano po 5 wartości n, dla których przeprowadzono testy. Każdy z testów polegał na wygenerowaniu 15 zbiorów testujących i sprawdzenia czasu wykonywania:

1. konstrukcji drzewa,
2. zapytania o mały prostokąt (losowy, mający powierzchnię równą $\frac{1}{100}$ powierzchni prostokąta $\mathcal{S}$),
3. zapytania o duży prostokąt (losowy, mający powierzchnię równą $\frac{1}{4}$ powierzchni prostokąta $\mathcal{S}$),

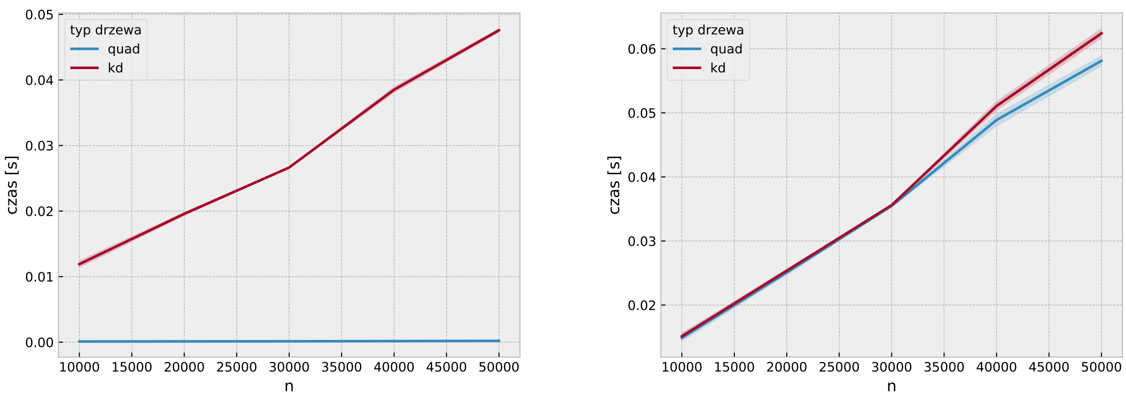
dla każdej ze struktur. Średni czas dla każdej konfiguracji przedstawiono w tabelach 1a i 1b na końcu dokumentu.

4.1 Wyniki

Dla zbiorów typu $\mathcal{A}$ drzewo czwórkowe okazało się wyraźnie lepsze. Szybciej można je skonstruować (rysunek 3), minimalnie szybciej również odpowiada na zapytania o duży prostokąt (rysunek 4b). W zdecydowanie lepszym czasie odpowiada też na zapytania o mały prostokąt (rysunek 4a).



Rysunek 3: Porównanie czasu konstrukcji drzew dla zbioru $\mathcal{A}$.

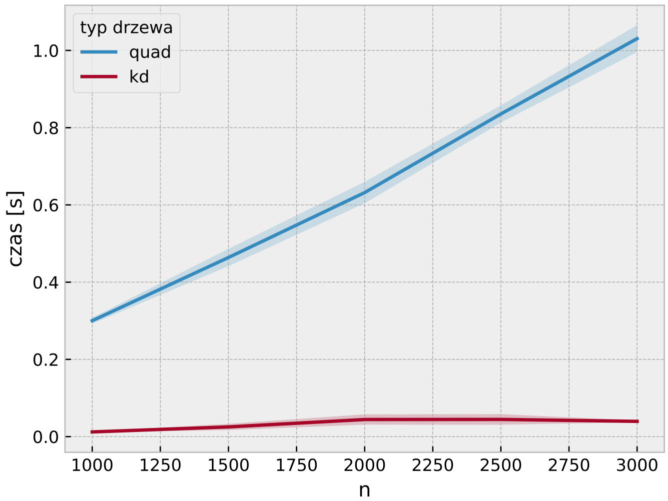


(a) zapytania o mały prostokąt

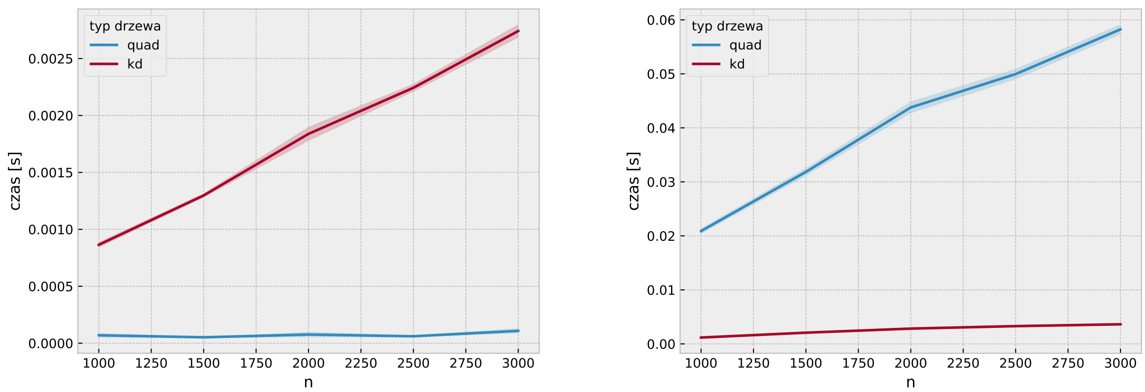
(b) zapytania o duży prostokąt

Rysunek 4: Porównanie czasu zapytania dla zbioru $\mathcal{A}$.

Zupełnie inaczej wygląda sytuacja w przypadku zbiorów typu $\mathcal{B}$. Zarówno konstrukcja drzewa czwórkowego, jak i użycie go dla zapytań o duży prostokąt, jest zdecydowanie wolniejsze niż w przypadku kd-drzewa (rysunki 5 i 6b). Różnica jest na tyle duża, że testy przeprowadzono na danych o rząd wielkości mniejszych. W zapytaniach o mały prostokąt ponownie lepiej sprawdza się drzewo czwórkowe (rysunek 6a).



Rysunek 5: Porównanie czasu konstrukcji drzew dla zbioru $\mathcal{B}$.



(a) zapytania o mały prostokąt

(b) zapytania o duży prostokąt

Rysunek 6: Porównanie czasu zapytania dla zbioru $\mathcal{B}$.

4.2 Wnioski

Wyraźnie widać, że względne odległości między punktami mają ogromne znaczenie przy wyborze odpowiedniej struktury danych. W większości przypadków lepiej sprawdzi się drzewo czwórkowe, ale łatwo również znaleźć takie zbiory punktów, na których jego wydajność bardzo szybko spada.

Lepiej sprawdzi się drzewo czwórkowe w sytuacjach, w których zwykle będziemy pytać o małe podzbiory zbioru punktów (na przykład w aplikacjach typu Google Maps), albo gdy możemy pominąć duże obszary tego zbioru (wykrywanie kolizji i kompresja obrazów).

typ operacji	n	czas [s] quadtree	czas [s] kd-tree
1	10000	0.1898	0.2890
	20000	0.3665	0.5176
	30000	0.5555	0.7410
	40000	0.7829	1.1507
	50000	1.0716	1.4053
2	10000	0.0001	0.0119
	20000	0.0001	0.0196
	30000	0.0001	0.0266
	40000	0.0002	0.0385
	50000	0.0002	0.0476
3	10000	0.0149	0.0151
	20000	0.0251	0.0254
	30000	0.0355	0.0356
	40000	0.0489	0.0511
	50000	0.0581	0.0624

(a) zbiory $\mathcal{A}(n)$

typ operacji	n	czas [s] quadtree	czas [s] kd-tree
1	1000	0.3001	0.0122
	1500	0.4638	0.0251
	2000	0.6319	0.0443
	2500	0.8355	0.0445
	3000	1.0306	0.0395
2	1000	0.0001	0.0009
	1500	0.0001	0.0013
	2000	0.0001	0.0018
	2500	0.0001	0.0022
	3000	0.0001	0.0027
3	1000	0.0209	0.0012
	1500	0.0318	0.0021
	2000	0.0438	0.0028
	2500	0.0500	0.0033
	3000	0.0582	0.0036

(b) zbiory $\mathcal{B}(n)$

Tabela 1: Porównanie średnich czasów dla poszczególnych operacji, zbiorów i struktur.

Kd-drzewo również ma swoje zalety; warto wymienić między innymi bardzo proste uogólnienie na większą liczbę wymiarów czy łatwiejsze wprowadzenie dodatkowych operacji (na przykład szukania najbliższego sąsiada dla danego puntu).

5 Testy

Na potrzeby testowania napisano prosty program, który działał w czasie $\mathcal{O}(n)$, sprawdzając po kolei każdy punkt. Następnie wygenerowano losowe zbiory punktów i sprawdzano poprawność dla różnych prostokątów. Dla wszystkich testów wyniki drzewa czwórkowego, kd-drzewa oraz algorytmu „brutalnego” były identyczne.

Literatura

[1] **Algorytmy geometryczne – wykład**, dr inż. Barbara Głut.

[2] **Quadtrees, Geometric Approximation Algorithms**, prof. Kevin Buchin, TU Dortmund. `https://ls11-www.cs.tu-dortmund.de/_media/buchin/teaching/akda_ws21/quadtrees.pdf`

[3] **Wprowadzenie do algorytmów**, Thomas H. Cormen et al.