2) a) $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2 + (x_1 + x_2)^2 + x_1$

$$f'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_2 + 2x_1 + 2x_2 + 1 \\ 2x_2 - 2x_1 + 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 + 1 \\ 4x_2 \end{pmatrix}$$

$$f''(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{positiv definit}$$

$$f'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 4x_1 + 1 \\ 4x_2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = -\frac{1}{4} \\ x_2 = 0 \end{matrix}$$

$(-\frac{1}{4}, 0)$ ist globales Minimum und liegt innerhalb des Einheitskreises

b) $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2 + (x_1 + x_2)^2 + 8x_2$

$$f'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_2 + 2x_1 + 2x_2 \\ 2x_2 - 2x_1 + 2x_1 + 2x_2 + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 \\ 4x_2 + 8 \end{pmatrix}$$

$$f''(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{positiv definit}$$

$$f'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 4x_1 \\ 4x_2 + 8 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = -2 \end{matrix}$$

$(0, -2)$ ist globales Minimum von f auf $\mathbb{R}^2$, liegt aber außerhalb des Einheitskreises. Da es keine weiteren stationären Punkte gibt muss das Minimum von f über den Einheitskreis auf dem Einheitskreis liegen.

$$\Lambda(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} 4x_1 + 2\lambda x_1 \\ 4x_2 + 8 + 2\lambda x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow x_1(4 + 2\lambda) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \lor \lambda = -2 \\ \Rightarrow x_2(4 + 2\lambda) + 8 = 0 \quad (*) \\ \end{matrix}$$

$$(*) \Rightarrow x_2 = \frac{-4}{2 + \lambda} \Rightarrow \lambda \neq -2$$

$$x_1 = 0 \land (x_2 = -1 \lor x_2 = 1)$$

$f(0, -1) < f(0, 1)$ Also ist $(0, -1)$ das Minimum von f über den Einheitskreis