1) $f(x_1, x_2) = 1 - \frac{1}{1+x_1^2} + \frac{1}{1+x_2^2} + \frac{x_2^2}{4}$

$$f'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{2x_1}{(1+x_1^2)^2} \\ -\frac{2x_2}{(1+x_2^2)^2} + \frac{1}{2}x_2 \end{pmatrix}$$

$$f''(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{2}{(1+x_1^2)^2} - \frac{8x_1^2}{(1+x_1^2)^3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{2}{(1+x_2^2)^2} + \frac{8x_2^2}{(1+x_2^2)^3} \end{pmatrix}$$

$f'(x_1, x_2) \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow \quad 2x_1 = 0 \quad \wedge \quad -\frac{2x_2}{(1+x_2^2)^2} + \frac{1}{2}x_2 = 0$

$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad \frac{x_2((1+x_2^2)^2 - 4)}{2(1+x_2^2)^2} = 0$

$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2((1+x_2^2)^2 - 2^2) = 0$

$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2((1+x_2^2)-2)((1+x_2^2)+2) = 0$

$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 (x_2^2 - 1)(x_2^2 + 3) = 0$

$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad (x_2 = 0 \vee x_2 = 1 \vee x_2 = -1)$

Stationäre Punkte: $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$

$f''(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ indefinit $\Rightarrow (0,0)$ ist Sattelpunkt

$f''(0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ positiv definit $\Rightarrow (0,1)$ ist lok. Min.

$f''(0,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ positiv definit $\Rightarrow (0,-1)$ ist lok. Min.

3)

a) $f(y) = \lambda^T y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i$

Sei $\lambda_{i*} = \min_{i=1,\dots,n} \lambda_i$

$\Rightarrow \lambda_i \geq \lambda_{i*} \quad \forall\, i \in \{1,\dots,n\}$

Mit $y_i \geq 0$ folgt

$f(y) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i*} y_i = \lambda_{i*} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} y_i}_{=1} = \lambda_{i*}$ (I)

Sei nun $\bar{y}$ so, dass $\bar{y}_i = \begin{cases} 1 & \text{für } i = i* \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Dann ist $f(\bar{y}) = \lambda_{i*}$ und aus (I) folgt, dass es das Minimum ist. $\square$

b) Sei $y_i := x_i^2 \Rightarrow y_i \geq 0$

$\|x\|_2 \overset{!}{=} 1 \Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i} = 1$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i = 1$

Also ist die Aussage äquivalent zu a) $\square$

c) A ist symmetrisch, also diagonalisierbar

Sei $A = S D_A S^T$ die Diagonalisierung

$f(x) = x^T A x = x^T S D_A S^T x = (S^T x)^T D_A S^T x$

$= \tilde{x}^T D_A \tilde{x} \quad$ mit $\tilde{x} := S^T x$

$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{x}^2$

$\|\tilde{x}\|_2 = (\langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle)^{\frac{1}{2}} = (\tilde{x}^T \tilde{x})^{\frac{1}{2}} = [(S^T x)^T S^T x]^{\frac{1}{2}}$

$= (x^T S S^T x)^{\frac{1}{2}} = (x^T x)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_2 \overset{!}{=} 1$

Also ist die Aussage äquivalent zu c) $\square$

d) $f(x) = x^T A x = \frac{1}{2}(x^T A x + x^T A x)$

$$= \frac{1}{2}(\langle x, Ax \rangle + x^T A x)$$

$$= \frac{1}{2}(\langle Ax, x \rangle + x^T A x)$$

$$= \frac{1}{2}((Ax)^T x + x^T A x)$$

$$= \frac{1}{2}(x^T A^T x + x^T A x)$$

$$= x^T \frac{1}{2}(A^T + A) x$$

$$= x^T B x \quad \text{mit } B := \frac{1}{2}(A^T + A)$$

$$= \frac{1}{2}(A + A^T)$$

$$= \frac{1}{2}(A^T + A)^T$$

$$= B^T$$

Also lässt sich $f(x)$ als $x^T B x$ schreiben und B ist symmetrisch. Daher ist die Aussage äquivalent zu c)

$\square$

4.) $q(x) = \frac{1}{2} x^T A x + b^T x + c$

a) $q(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c$

$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c$

$q'_k(x) = \frac{1}{2} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} a_{ik} x_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} a_{kj} x_j \right) + a_{kk} x_k + b_k$

$q'(x) = \frac{1}{2} (A^T x + A x) + \operatorname{diag}(A) x + b$

b) $q''_{kl}(x) = \frac{1}{2} a_{lk} + \frac{1}{2} a_{kl} + \delta_{kl} \cdot a_{ll}$

$q''(x) = \frac{1}{2} (A^T + A) + \operatorname{diag}(A)$

c)

Sei $B = \frac{1}{2} (A + A^T)$. B ist symmetrisch.

$x^T B x = x^T \left(\frac{1}{2} (A + A^T) \right) x$

$= \frac{1}{2} x^T (A x + A^T x)$

$= \frac{1}{2} (x^T A x + x^T A^T x)$

$= \frac{1}{2} (x^T A x + (A^T x)^T x)$

$= \frac{1}{2} (x^T A x + x^T A x) = x^T A x$

$\square$

d) A ist s.p.d. Dann ist auch $\operatorname{diag}(A)$ s.p.d.

$\Rightarrow q'(x) = A x + \operatorname{diag}(A) x + b$

$= (A + \operatorname{diag}(A)) x + b \overset{!}{=} 0$

Aus A s.p.d. und $\operatorname{diag}(A)$ s.p.d. folgt $(A + \operatorname{diag}(A))$ s.p.d. Daraus folgt $(A + \operatorname{diag}(A))$ ist invertierbar.

$\Rightarrow \bar{x} = -(A + \operatorname{diag}(A))^{-1} b$

$q''(\bar{x}) = A + \operatorname{diag}(A)$ s.p.d $\Rightarrow$ Minimum

$\square$