6 a)

Nach Satz 2.4.2 gilt:

$$E = \int_{a_i}^{b_i} f(x)\,dx - T = -\frac{1}{12} h^3 f''(\xi)$$

f'' ist idR unbekannt.

Wir teilen das Intervall in der Mitte

$$[a_l, b_l] = [a_i, m_i], \quad [a_r, b_r] = [m_i, b_i]$$

$$m_i = \frac{a_i + b_i}{2}$$

Wir wenden auf beide Hälften die Trapezregel an, d.h. $h_l = h_r = \frac{h}{2}$

$$E_l = \int_{a_i}^{m_i} f(x)\,dx - T_l = -\frac{1}{12}\left(\frac{h}{2}\right)^3 f''(\xi_l)$$

$$E_r = \int_{m_i}^{b_i} f(x)\,dx - T_r = -\frac{1}{12}\left(\frac{h}{2}\right)^3 f''(\xi_r)$$

und erhalten die Näherung $\tilde{T} = T_l + T_r$

mit Fehlerabschätzung

$$\tilde{E} = \int_{a_i}^{b_i} f(x)\,dx - \tilde{T} = E_l + E_r = -\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{f''(\xi_l) + f''(\xi_r)}{2}$$

Unter der Annahme $f''(\xi_l) \approx f''(\xi_r) \approx f''(\xi)$ folgt

$$\tilde{E} = \frac{1}{4} E$$

und damit

$$\tilde{T} - T = E - \tilde{E} \approx \frac{3}{4} E \approx 3\tilde{E}$$

Daraus erhalten wir $F, \tilde{F}$ für $T, \tilde{T}$

$$F = \frac{4}{3} |\tilde{T} - T| \approx E$$

$$\tilde{F} = \frac{|\tilde{T} - T|}{3} \approx \tilde{E}$$

$\square$