1) $f(x_1, x_2) = 1 - \frac{1}{1+x_1^2} + \frac{1}{1+x_2^2} + \frac{x_2^2}{4}$

$$f'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{2x_1}{(1+x_1^2)^2} \\ -\frac{2x_2}{(1+x_2^2)^2} + \frac{1}{2}x_2 \end{pmatrix}$$

$$f''(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{2}{(1+x_1^2)^2} - \frac{8x_1^2}{(1+x_1^2)^3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{2}{(1+x_2^2)^2} + \frac{8x_2^2}{(1+x_2^2)^3} \end{pmatrix}$$

$f'(x_1, x_2) \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow \quad 2x_1 = 0 \quad \wedge \quad -\frac{2x_2}{(1+x_2^2)^2} + \frac{1}{2}x_2 = 0$

$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad \frac{x_2((1+x_2^2)^2 - 4)}{2(1+x_2^2)^2} = 0$

$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2((1+x_2^2)^2 - 2^2) = 0$

$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2((1+x_2^2)-2)((1+x_2^2)+2) = 0$

$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 (x_2^2 - 1)(x_2^2 + 3) = 0$

$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad (x_2 = 0 \vee x_2 = 1 \vee x_2 = -1)$

Stationäre Punkte: $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$

$f''(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ indefinit $\Rightarrow (0,0)$ ist Sattelpunkt

$f''(0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ positiv definit $\Rightarrow (0,1)$ ist lok. Min.

$f''(0,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ positiv definit $\Rightarrow (0,-1)$ ist lok. Min.

4.) $q(x) = \frac{1}{2} x^T A x + b^T x + c$

a) $q(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c$

$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c$

$q_k'(x) = \frac{1}{2} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} a_{ik} x_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} a_{kj} x_j \right) + a_{kk} x_k + b_k$

$q'(x) = \frac{1}{2} (A^T x + A x) + \operatorname{diag}(A) x + b$

b) $q''_{kl}(x) = \frac{1}{2} a_{lk} + \frac{1}{2} a_{kl} + \delta_{kl} \cdot a_{ll}$

$q''(x) = \frac{1}{2} (A^T + A) + \operatorname{diag}(A)$

c)

Sei $B = \frac{1}{2}(A + A^T)$. B ist symmetrisch.

$x^T B x = x^T \left(\frac{1}{2} (A + A^T) \right) x$

$= \frac{1}{2} x^T (Ax + A^T x)$

$= \frac{1}{2} (x^T A x + x^T A^T x)$

$= \frac{1}{2} (x^T A x + (A^T x)^T x)$

$= \frac{1}{2} (x^T A x + x^T A x) = x^T A x$

$\square$

d) A ist s.p.d. Dann ist auch $\operatorname{diag}(A)$ s.p.d.

$\Rightarrow$ $q'(x) = A x + \operatorname{diag}(A) x + b$

$= (A + \operatorname{diag}(A)) x + b \overset{!}{=} 0$

Aus A s.p.d. und $\operatorname{diag}(A)$ s.p.d. folgt $(A + \operatorname{diag}(A))$ s.p.d. Daraus folgt $(A + \operatorname{diag}(A))$ ist invertierbar.

$\Rightarrow$ $\bar{x} = -(A + \operatorname{diag}(A))^{-1} b$

$q''(\bar{x}) = A + \operatorname{diag}(A)$ s.p.d $\Rightarrow$ Minimum

$\square$