2.) $X = [1, 2]$ $\quad f(x) = x + \ln(x) - 2$

$f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k + \ln(x_k) - 2}{1 + \frac{1}{x_k}}$$

$$= \frac{x_k + 1}{1 + \frac{1}{x_k}} - \frac{x_k + \ln(x_k) - 2}{1 + \frac{1}{x_k}} = \frac{3 - \ln(x_k)}{1 + \frac{1}{x_k}}$$

$$\Rightarrow \Phi(x) = \frac{3 - \ln(x)}{1 + \frac{1}{x}}$$

a) zu zeigen: $\| \Phi(x) - \Phi(y) \| \leq \alpha \| x - y \|$, $\forall x, y \in X$

$\alpha < 1$, auf X eine Kontraktion mit $\alpha = \frac{1}{4}$

und $\Phi : X \to X$

$\Phi : X \to X$: für $y \in [1, 2]$ gilt:

$$\Phi(y) = \frac{3 - \ln(y)}{1 + \frac{1}{y}} \geq \frac{3 - \ln(2)}{1 + 1} \approx 1{,}15 ,$$

$$\Phi(y) = \frac{3 - \ln(y)}{1 + \frac{1}{y}} \leq \frac{3 - \ln(1)}{1 + \frac{1}{2}} = 2$$

$$\Rightarrow \Phi : X \to X$$

$$\Phi'(\xi) = \frac{-\ln(\xi) - \xi + 2}{(\xi + 1)^2} \leq \frac{-\ln(1) - 1 + 2}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$$

$$\Phi'(\xi) \geq \frac{-\ln(2) - 2 + 2}{(1+1)^2} \approx -0{,}173$$

$\Rightarrow$ mit dem Mittelwertsatz: $\xi \in co(x, y)$

$$| \Phi(x) - \Phi(y) | = | \Phi(\xi) | \cdot | x - y | \leq \frac{1}{4} | x - y |$$

$\Rightarrow$ Das Newton-Verfahren auf X ist eine Kontraktion mit $\alpha = \frac{1}{4}$

2 b)

$$x_0 = 1 \qquad x_1 = \phi(x_0) = \frac{3}{2}$$

$$e_k = \| x - x_k \| \leq \frac{\alpha^k}{1-\alpha} \| x_1 - x_0 \| \overset{!}{\leq} 10^{-6}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha^k \leq \frac{10^{-6} (1-\alpha)}{\| x_1 - x_0 \|}$$

$$\Rightarrow \quad k \geq \ln \left(\frac{10^{-6} (1-\alpha)}{\| x_1 - x_0 \|} \right) \cdot \frac{1}{\ln(\alpha)}$$

Für $\alpha = \frac{1}{4}$:

$$k \geq \ln \left(\frac{7{,}5 \cdot 10^{-7}}{0{,}5} \right) \cdot \frac{1}{\ln(0{,}25)}$$

$$\Rightarrow \quad k \geq 9{,}67$$

Also, da $k \in \mathbb{N}$:

$$k \geq 10$$

3.) $f(x) = \arctan(x) - x$, $x = 0$ als einzige Nullstelle

(a) $f(0) = \arctan(0) - 0 = 0$

$f'(x) = \frac{1}{x^2+1} - 1$

$f'(0) = \frac{1}{1} - 1 = 0$

$f''(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$

$f''(0) = 0$

$f'''(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$

$f'''(0) = \frac{2(0-1)}{(0+1)^3} = -2$

$\Rightarrow$ $x = 0$ ist eine 3-fache Nullstelle von f

$\Rightarrow$ Nach Satz 168 konvergiert das Newton-Verfahren für mehrfache Nullstellen nur linear in einer Umgebung von x.