# Um estudo sobre funções grouping generalizadas e uma nova classe de implicações fuzzy

Mauricio Balboni[1][0000−0001−7653−0962], Helida Santos[1][0000−0003−2994−2862]
Jocivania Pinheiro[2][0000−0001−8616−1144], Graçaliz P. Dimuro[1][0000−0001−6986−9888],
Giancarlo Lucca[3][0000−0002−3776−0260], and Benjamin
Bedregal[4][0000−0002−6757−7934]

[1] Centro de Ciências Computacionais, Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande-RS
{balboni,helida,gracalizdimuro}@furg.br
[2] Departamento de Ciências Naturais, Matemática e Estatística, Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Mossoró-RN, vaniamat@ufersa.edu.br
[3] Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional, Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande-RS, gincarlo.lucca@furg.br
[4] Departamento de Informática e Matemática Aplicada, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal-RN, bedregal@dimap.ufrn.br

**Resumo** Funções *grouping* e *overlap* destacam-se por possuírem maior flexibilidade em relação a algumas propriedades quando comparadas a outras funções de agregação. Notadamente, funções *grouping* são úteis em problemas de tomada de decisão baseados em relações de preferência *fuzzy*. Algumas generalizações desses operadores já foram propostas, como as funções *grouping* $n$-dimensionais e funções *grouping* intervalarmente valoradas. Neste trabalho, temos o objetivo de apresentar uma nova generalização que permite lidar com problemas de dimensionalidade $n$ para as entradas, e de formalizar a definição desse novo operador de forma mais flexível que as generalizações até então propostas por outros autores. Além disso, fornecemos uma nova classe de implicações materiais construídas a partir das negações fuzzy compostas com esses novos conectivos.

**Keywords:** Funções de agregação · Funções grouping generalizadas · Implicações fuzzy.

## 1 Introdução

As funções *overlap* (ou funções de sobreposição) são um tipo de função de agregação [4], não necessariamente associativas, introduzidas por Bustince, *et al.* [5] com a finalidade de estimar o grau de sobreposição entre duas classes ou objetos. As funções *grouping* (de agrupamento) podem ser entendidas como a função dual das funções *overlap*. Funções *grouping* foram apresentadas por Bustince *et al.* [6] com a finalidade de expressar a quantidade de evidências a favor de qualquer uma das duas alternativas, para quando existir a necessidade de realizar uma comparação por pares [2] em problemas que envolvem tomada de decisão baseada em relações de preferência *fuzzy* [7]. Funções *grouping* também são utilizadas como operadores de disjunção em vários contextos, por exemplo, no desenvolvimento de uma classe de funções de implicação para a geração de medidas de inclusão *fuzzy* e medidas de entropia [9], e até mesmo em uma técnica de limiarização (*thresholding*) de imagens [18].

Tomando como referência as *t-conormas* e *t-normas*, as funções *grouping* e *overlap*, são classes mais ricas e, por isso, tem sido profundamente estudadas. Diversas propriedades dessas funções mostram-se interessantes, como: a idempotência, a homogeneidade, e principalmente, o recurso de auto-proximidade em relação a soma convexa, e a agregação por composição generalizada de funções *overlap* e/ou *grouping* [8,10,11,13]. Por exemplo, a *t-conorma* do máximo é a única idempotente e há somente duas *t-conormas* homogêneas, do máximo e da soma probabilística. Em contrapartida, podemos encontrar inúmeras funções *grouping* idempotentes ou homogêneas [3,14].

Uma das vantagens das funções *grouping* é não ser necessariamente uma função associativa, no entanto, todas elas são bivariadas. Só podem ser aplicadas em problemas bidimensionais, ou seja, quando temos apenas um par de classes ou objetos a serem considerados. Com o intuito de resolver essa limitação, Gomez *et al.* [17] propôs funções *grouping* $n$-dimensionais, aplicadas como uma forma alternativa para quantificar a qualidade do resultado de um sistema fuzzy (baseado em operadores $n$-dimensionais) de detecção de uma comunidade, na área de análise de redes sociais.

Recentemente, De Miguel *et al.* [20] relaxando algumas condições de contorno restritivas, introduziu as funções *overlap* generalizadas aplicadas em sistemas de classificação baseados em regras *fuzzy*, mais especificamente, na determinação do grau de correspondência no método de raciocínio *fuzzy*. Assim, inspirados nesse último trabalho, este artigo tem dois principais objetivos: (i) apresentar o conceito de funções *grouping* generalizadas (FGG), formalizando sua caracterização, e fornecendo seus diferentes métodos de construção; e (ii) apresentar uma nova classe de implicações fuzzy construídas a partir das negações fuzzy e FGG. O propósito principal é definir a base teórica de um operador mais flexível em comparação às funções *grouping* $n$-dimensionais, e que pode ser interpretado como a quantidade de evidência a favor de uma alternativa frente à múltiplas alternativas, quando se realiza comparações $n$-árias em problemas de tomada de decisão com múltiplos critérios, com relações de preferência *fuzzy* incompletas, $n$-árias e heterogêneas [15,19,27].

O trabalho está organizado da seguinte forma. A Seção 2 apresenta conceitos importantes e necessários para o entendimento deste trabalho, incluindo operadores fuzzy, como as funções de agregação. Em seguida, na Seção 3 apresentamos a primeira contribuição deste artigo, fornecendo as definições das FGG. A Seção 4 discute sobre a construção de impliçóes materiais derivadas das FGG e negações *fuzzy*. As considerações finais e trabalhos futuros encontram-se na Seção 5.

## 2 Conceitos preliminares

### 2.1 Operadores fuzzy

**Definição 1.** *Uma função* $N\colon [0,1] \to [0,1]$ *é uma negação fuzzy se é decrescente, i.e.,* $(N1)$ $N(x) \leq N(y), \forall y \leq x$, *e satisfaz as condições de fronteira:* $(N2)$ $N(0) = 1$ *e* $N(1) = 0$.

Dizemos que $N$ é estrita se $N$ é contínua e satisfaz $N(y) > N(x), \forall y < x$. Ainda, $N$ é dita forte se $N(N(x)) = x$, para todo $x \in [0,1]$.

**Definição 2.** *Uma função* $S\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ *é chamada de conorma triangular (t-conorma, como abreviação) se satisfaz as seguintes condições,* $\forall x,y,z \in [0,1]$*:*

(S1) *Comutatividade:* $S(x,y) = S(y,x)$*;*
(S2) *Associatividade:* $S(x, S(y,z)) = S(S(x,y), z)$*;*
(S3) *Monotonicidade: se* $x \leq y$ *então* $S(x,z) \leq S(y,z)$*;*
(S4) *Elemento neutro:* $S(0,x) = x$*.*

**Definição 3.** *[6] Uma função binária* $G\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ *é chamada de função grouping, se* $G$ *satisfaz as seguintes condições,* $\forall x,y,z \in [0,1]$*:*

(G1) $G(x,y) = G(y,x)$*;*
(G2) $G(x,y) = 0$ *se e somente se* $x = y = 0$*;*
(G3) $G(x,y) = 1$ *se e somente se* $x = 1$ *ou* $y = 1$*;*
(G4) *Se* $x \leq y$ *então* $G(x,z) \leq G(y,z)$*;*
(G5) $G$ *é contínua.*

Todas as propriedades e conceitos relacionados à função *grouping* podem ser encontrados em [3,6,12,13,21,23].

**Definição 4.** *Uma função* $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ *é uma implicação fuzzy se as seguintes propriedades são satisfeitas,* $\forall x,y,z \in [0,1]$*:*

(I1) *Se* $x \leq y$ *então* $I(y,z) \leq I(x,z)$*;*
(I2) *Se* $y \leq z$ *então* $I(x,y) \leq I(x,z)$*;*
(I3) $I(0,y) = 1$*;*
(I4) $I(x,1) = 1$*;*
(I5) $I(1,0) = 0$*.*

*O conjunto de todas as implicações fuzzy será denotado por* $\mathcal{FI}$*.*

**Definição 5.** *Dada uma* $I \in \mathcal{FI}$*. A função* $N_I : [0,1] \to [0,1]$ *definida por* $N_I(x) = I(x,0), x \in [0,1]$ *é conhecida como a negação natural de* $I$ *ou também como a negação induzida por* $I$*.*

A seguir, apresentamos algumas das propriedades mais importantes de algumas implicações *fuzzy*, úteis para o desenvolvimento do presente trabalho, as mesmas podem ser encontradas em [16,26].

**Definição 6.** *Uma implicação fuzzy* $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ *satisfaz:*

*(NP)* *a propriedade de neutralidade à esquerda, se,* $\forall y \in [0,1]$*,* $I(1,y) = y$
*(EP)* *o princípio da troca, se,* $\forall x,y,z \in [0,1]$*,* $I(x, I(y,z)) = I(y, I(x,z))$*.*

**Definição 7.** *[1] Seja* $I \in \mathcal{FI}$ *e* $N$ *uma negação fuzzy. Então,* $I$ *satisfaz,* $\forall x,y \in [0,1]$*:*

*(CP)* *a lei da contraposição em relação a* $N$*, se* $I(x,y) = I(N(y), N(x))$;
*(L-CP)* *a lei da contraposição à esquerda em relação a* $N$*, se* $I(N(x), y) = I(N(y), x)$*;*
*(R-CP)* *a lei da contraposição à direita em relação a* $N$*, se* $I(x, N(y)) = I(y, N(x))$*.*

**Definição 8.** *Uma função $G_n\colon [0,1]^n \to [0,1]$ é chamada de função grouping $n$-dimensional se as seguintes condições são satisfeitas, $\forall \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n$:*

**(**$Gn1$**)** *$G_n$ é comutativa;*
**(**$Gn2$**)** *$G_n(\vec{x}) = 0$ se e somente se $x_i = 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$ ;*
**(**$Gn3$**)** *$G_n(\vec{x}) = 1$ se existe um $i \in \{1, \ldots, n\}$ de modo que $x_i = 1$;*
**(**$Gn4$**)** *$G_n$ é crescente em cada componente;*
**(**$Gn5$**)** *$G_n$ é contínua.*

## 3 Funções Grouping Generalizadas

Seguindo as ideias de De Miguel *et al.* [20], Santos *et al.* [24] definiram as FGG.

**Definição 9.** *Uma função $GG\colon [0,1]^n \to [0,1]$ é chamada de função grouping generalizada (FGG) se as seguintes condições são satisfeitas, $\forall \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n$:*

**(**$GG1$**)** *$GG$ é comutativa;*
**(**$GG2$**)** *Se $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0$ então $GG(\vec{x}) = 0$;*
**(**$GG3$**)** *Se existe um $i \in \{1, \ldots, n\}$ de tal modo que $x_i = 1$ , então $GG(\vec{x}) = 1$;*
**(**$GG4$**)** *$GG$ é crescente;*
**(**$GG5$**)** *$GG$ é contínua.*

Nota-se que por ($GG2$), dizemos que $0$ é o anulador das FGG $GG$. Nos próximos resultados, mostramos alguns métodos de construção das FGG, além de exemplos.

**Proposição 1.** *[24] Se $G_n\colon [0,1]^n \to [0,1]$ é uma função grouping $n$-dimensional, então $G_n$ também é uma FGG.*

Pela Prop. 1, pode-se concluir que a ideia das FGG é a generalização das funções *grouping* $n$-dimensionais, que por sua vez constituem também numa generalização dos conceitos de funções $0$-*grouping* e $1$-*grouping* [22], como visto no exemplo a seguir.

**Exemplo 1.**
1. *Toda função grouping $G\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ é uma FGG, mas o inverso não é válido.*
2. *A função $GG(x,y) = \min\{1, 2-(1-x)^2-(1-y)^2\}$ é uma FGG, mas não é uma função grouping bidimensional, visto que $GG(0.5, 0.5) = 1$.*
3. *Considerando $G(x,y) = \max\{1-(1-x)^p, 1-(1-y)^p\}$, para $p > 0$ e $S_{\mathfrak{L}}(x,y) = \min\{1, x+y\}$. Então, a função $GG^{S_{\mathfrak{L}}}(x,y) = G(x,y)S_{\mathfrak{L}}(x,y)$ é uma FGG.*
4. *Seja qualquer função grouping $G$, e seja uma $t$-conorma contínua $S$. Então, a generalização do item 3. é uma FGG binária, dada por: $GG(x,y) = G(x,y)S(x,y)$.*
5. *Outros exemplos são:*

$$Prod\_S\_Luk(x_1, \ldots, x_n) = \left(1 - \prod_{i=1}^{n}(1-x_i)\right) * \left(\min\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i, 1\right\}\right)$$
$$GM\_S\_Luk(x_1, \ldots, x_n) = \left(1 - \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)}\right) * \left(\min\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i, 1\right\}\right).$$

**Proposição 2.** *Seja $F\colon [0,1]^n \to [0,1]$ uma função de agregação comutativa e contínua. Então, podemos afirmar que:*

**(i)** *Se $F$ é disjuntiva*[5]*, então $F$ é uma FGG.*
**(ii)** *Se $F$ é conjuntiva, então $F$ nem é uma FGG e também não é uma função grouping $n$-dimensional.*

*Demonstração.* Ver demonstração em [24, Prop. 3]. □

Podemos dizer que $a \in [0,1]$ é o elemento neutro de $GG$ se, para cada $x \in [0,1]$, $GG(x, \underbrace{a, \ldots, a}_{(n-1)}) = x$.

**Proposição 3.** *Seja $GG\colon [0,1]^n \to [0,1]$ uma FGG com o elemento neutro $a \in [0,1]$. Então, $a = 0$ se e somente se $GG$, $\forall \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n$, satisfaz a condição:*

$(GG2')$ *Se $GG(\vec{x}) = 0$, então $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0$.*

*Demonstração.* Ver prova em [24, Prop. 4]. □

**Observação 1.** *Observe que o resultado da Prop. 3 não significa que quando uma FGG tem um elemento neutro, então ele é necessariamente igual a $0$. Na verdade, para cada $a \in (0,1)$, a função $GG\colon [0,1]^n \to [0,1]$, $\forall \vec{x} = (x_1 \ldots, x_n) \in [0,1]^n$, definida por:*

$$GG(\vec{x}) = \begin{cases} \min\{\vec{x}\}, & \textit{se } \max\{\vec{x}\} \leq a \\ \max\{\vec{x}\}, & \textit{se } \min\{\vec{x}\} \geq a \\ \frac{\min\{\vec{x}\} + \max\{\vec{x}\}\left(1 - \min\{\vec{x}\}\right) - a}{1-a}, & \textit{se } \min\{\vec{x}\} < a < \max\{\vec{x}\} \end{cases}$$

*é uma FGG com o elemento neutro $a$.*

**Proposição 4.** *Se $0$ é o elemento neutro da FGG $GG\colon [0,1]^n \to [0,1]$, e $GG$ é idempotente, então $GG$ é o operador máximo.*

*Demonstração.* Considerando que a FGG $GG$ satisfaz a propriedade de idempotência e é crencente em cada argumento, então $\forall \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n$: **(1)** $GG(x_1, \ldots, x_n) \leq GG(\max(\vec{x}), \ldots, \max(\vec{x})) = \max\{\vec{x}\}$. Assim, $x_k = \max\{\vec{x}\}$ para algum $k = 1, \ldots, n$; e, portanto $x_k = GG(0, \ldots, x_k, \ldots, 0) \leq GG(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)$. Além disso, **(2)** $GG(x_1, \ldots, x_n) \geq x_k = \max\{\vec{x}\}$, e então, considerando **(1)** e **(2)**, concluímos que $GG(x_1, \ldots, x_n) = \max\{\vec{x}\}$, para cada $\vec{x} \in [0,1]^n$. □

**Teorema 1.** *A função $GG\colon [0,1]^n \to [0,1]$ é considerada uma função grouping generalizada se e somente se*

$$GG(\vec{x}) = \frac{f(\vec{x})}{f(\vec{x}) + h(\vec{x})} \tag{1}$$

*para algumas $f, h\colon [0,1]^n \to [0,1]$, de tal modo que, $\forall \vec{x} \in [0,1]^n$, as seguintes condições são satisfeitas:*

[5] Uma função de agregação $F$ é disjuntiva quando é limitada por baixo pelo máximo, i.e., $F \geq \max$, e é dita conjuntiva quando é limitada por cima pelo mínimo, i.e., $F \leq \min$.

**(i)** *$f$ e $h$ são comutativas;*

**(ii)** *$f$ é crescente e $h$ é decrescente.*

**(iii)** *Se $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$, então $f(\vec{x}) = 0$.*

**(iv)** *Se existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x_i = 1$, então $h(\vec{x}) = 0$.*

**(v)** *$f$ e $h$ são contínuas.*

**(vi)** *$f(\vec{x}) + h(\vec{x}) \neq 0$ para qualquer $\vec{x} \in [0,1]^n$.*

*Demonstração.* Verificar [24, Teorema 2]. □

**Exemplo 2.** *Considerando o método de construção de funções grouping generalizadas dadas no Teorema 1, considere, por exemplo, uma função chamada de máxima $p$-potência, definida por : $\max^p(\vec{x}) = \max_{1\leq i\leq n}\{x_i^p\}$, com $p > 0$. Se levarmos em conta a função $T\max_\alpha^p \colon [0,1]^n \to [0,1]$, chamada máxima $p$-potência $\alpha$-truncada, tal que, para todo $\vec{x} \in [0,1]^n$ e $\alpha \in (0,1)$, ela é dada por:*

$$T\max_\alpha^p(\vec{x}) = \begin{cases} 0, & \textit{se} \ \max^p(\vec{x}) \leq \alpha \\ \max^p(\vec{x}), & \textit{se} \ \max^p(\vec{x}) > \alpha \end{cases}$$

*e claramente $T\max_\alpha^p$ não é contínua. Contudo, pode-se considerar uma função chamada de truncamento contínuo da máxima $p$-potência, $CT\max_{\alpha,\epsilon}^p \colon [0,1]^n \to [0,1]$, definida, para todo $\vec{x} \in [0,1]^n$, $\alpha \in [0,1]$ e $\epsilon \in (0,\alpha]$, por:*

$$CT\max_{\alpha,\epsilon}^p(\vec{x}) = \begin{cases} 0, & \textit{se} \ \max^p(\vec{x}) \leq \alpha - \epsilon \\ \frac{\alpha}{\epsilon}\left(\max^p(\vec{x}) - (\alpha - \epsilon)\right), & \textit{se} \ \alpha - \epsilon < \max^p(\vec{x}) < \alpha \\ \max^p(\vec{x}), & \textit{se} \ \max^p(\vec{x}) \geq \alpha. \end{cases}$$

*Se considerarmos $f = CT\max_{\alpha,\epsilon}^p$, então $f$ satisfaz as propriedades **(i)-(iii)** e **(v)** do Teorema 1. Agora, considere $h(\vec{x}) = \min_{1\leq i\leq n}\{1 - x_i\}$, que satisfaz as propriedades **(i)-(ii)** e **(iv)-(v)** exigidas no Teorema 1. Portanto, pode-se concluir que*

$$GG(\vec{x}) = \frac{CT\max_{\alpha,\epsilon}^p(\vec{x})}{CT\max_{\alpha,\epsilon}^p(\vec{x}) + \min_{1\leq i\leq n}\{1 - x_i\}}$$

*é um função grouping generalizada.*

**Observação 2.** *Note que a máxima $p$-potência é uma função grouping $n$-dimensional, enquanto $CT\max_{\alpha,\epsilon}^p$ é uma FGG [17]. Por outro lado, $CT\max_{\alpha,\epsilon}^p$ não é uma função grouping $n$-dimensional, para $\alpha - \epsilon > 0$, uma vez que $CT\max_{\alpha,\epsilon}^p(\alpha - \epsilon, \ldots, \alpha - \epsilon) = 0$.*

**Corolário 1.** *Seja $GG \colon [0,1]^n \to [0,1]$ uma FGG construída pelo Teorema 1 e considerando as funções $f, h \colon [0,1]^n \to [0,1]$, então $GG$ é idempotente se e somente se, para todo $x \in [0,1)$, temos: $f(x, \ldots, x) = \frac{x}{1-x} h(x, \ldots, x)$.*

*Demonstração.* Demonstrado em [24, Corolário 1]. □

## 4 Construindo implicações fuzzy a partir de FGG

Dimuro *et al.* [14] apresentou um estudo sobre uma classe de implicações *fuzzy*, chamada de $(G, N)$-implicações. As mesmas foram definidas a partir da composição de uma função *grouping* e uma negação *fuzzy*. Inspirados neste estudo, apresentamos uma classe análoga substituindo a função *grouping* por uma FGG bivariada. Deste modo, introduzimos uma nova classe de implicações chamada de $(GG, N)$-implicações.

Primeiramente será apresentada a definição de um operador construído por meio de uma negação *fuzzy* e um função *grouping* generalizada bivariada, que sem perda de generalidade, será chamada de FGG.

**Definição 10.** *Seja* $GG\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ *uma FGG e* $N$ *uma negação fuzzy. Uma função* $I_{GG,N}\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ *é definida, para todo* $x, y \in [0,1]$*, por*

$$I_{GG,N}(x,y) = GG(N(x), y).$$

**Proposição 5.** *A função* $I_{GG,N}\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ *é uma implicação fuzzy, denominada por* $(GG, N)$*-implicação.*

*Demonstração.* Para uma função *grouping* generalizada $GG\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ e seja a negação *fuzzy* $N$, vamos verificar se, para todo $x, y, z \in [0,1]$, a função $I_{GG,N}\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ dada de acordo com a Def. 10, satisfaz as condições exigidas pela Def. 4:

$(I1)$ Tendo em mente que a condição $(GG4)$ é satisfeita por $GG$, então $x \leq y \overset{\text{(N1)}}{\Rightarrow} N(x) \geq N(y) \Rightarrow GG(N(x), z) \geq GG(N(y), z)$. Logo, $I_{GG,N}(x,z) \geq I_{GG,N}(y,z)$;
$(I2)$ Como $(GG4)$ é válida, temos que $y \leq z \Rightarrow GG(N(x), y) \leq GG(N(x), z)$. Então, $I_{GG,N}(x,y) \leq I_{GG,N}(x,z)$;

$(I3)$ Por $(GG3)$, obtemos $I_{GG,N}(0,y) = GG(N(0), y) \overset{\text{(N2)}}{=} GG(1,y) = 1$;
$(I4)$ Também por $(GG3)$, temos que $I_{GG,N}(x,1) = GG(N(x), 1) = 1$;

$(I5)$ Por $(GG2)$, temos que $I_{GG,N}(1,0) = GG(N(1), 0) \overset{\text{(N2)}}{=} GG(0,0) = 0$.

Deste modo, $I_{GG,N}$ é uma implicação *fuzzy*. □

O seguinte resultado garante que a classe das $(GG, N)$-implicações, onde $GG$ não tem $0$ como elemento neutro, não tem intersecção com a classe das $(S, N)$-implicações.

**Proposição 6.** *Seja* $GG$ *uma FGG. Se* $GG$ *não tem o* $0$ *como elemento neutro, então* $I_{GG,N} \neq I_{S,\widetilde{N}}$*, para qualquer t-conorma* $S$ *e quaisquer negações fuzzy* $N$ *e* $\widetilde{N}$.

*Demonstração.* Sejam uma função *grouping* generalizada $GG$ e uma negação *fuzzy* $N$, suponha que existe uma t-conorma $S$ e a negação *fuzzy* $\widetilde{N}$, de tal modo que $I_{GG,N}(x,y) = I_{S,\widetilde{N}}(x,y)$, para todo $x, y \in [0,1]$. Em particular, $GG(N(1), y) = S(\widetilde{N}(1), y)$. Portanto, pelas condições $(S4)$ e $(N2)$, $GG(0,y) = S(0,y) = y$, para todo $y \in [0,1]$. Assim, $0$ é um elemento neutro de $GG$, na qual gera uma contradição. □

**Proposição 7.** *Sejam* $GG$ *uma FGG e* $N$ *uma negação fuzzy, então:*

*(i)* *Se* $0$ *é o elemento neutro de* $GG$*, então* $N_{I_{GG,N}} = N$*;*
*(ii)* *Se* $N$ *é estrita* $N_{I_{GG,N}} = N$*, então* $0$ *é o elemento neutro de* $GG$.

*Demonstração.* (i) Uma vez que $0$ é o elemento neutro de $GG$, então, $N_{I_{GG,N}}(x) = I_{GG,N}(x,0) = GG(N(x),0) = N(x), \forall x \in [0,1]$.

(ii) Como $N$ é estrita, temos que $\forall x \in [0,1]$, $GG(x,0) = GG(N(N^{-1}(x)),0) = I_{GG,N}(N^{-1}(x),0) = N_{I_{GG,N}}(N^{-1}(x))$. Por hipótese, tome $N_{I_{GG,N}} = N$. Assim, $GG(x,0) = N(N^{-1}(x)) = x, \forall x \in [0,1]$. E, $0$ é o elemento neutro de $GG$. $\square$

Observe que existem negações *fuzzy* $N$ não estritas que satisfazem $N_{I_{GG,N}} = N$, mas $GG$ não tem elemento neutro, ou seja, o inverso da Proposição $7(i)$ nem sempre é válido. O seguinte exemplo ilustra essa situação.

**Exemplo 3.** *Seja a negação fuzzy* $N_\top\colon [0,1] \to [0,1]$*, dada por* $N_\top(x) = \begin{cases} 0, & \textit{se } x = 1 \\ 1, & \textit{se } x \neq 1. \end{cases}$
*Então, pelas condições* $(GG2)$ *e* $(GG3)$*,* $\forall x \in [0,1]$*,*

$$N_{I_{GG,N_\top}}(x) = GG(N_\top(x),0) = \begin{cases} GG(0,0), & \textit{se } x = 1 \\ GG(1,0), & \textit{se } x \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \textit{se } x = 1 \\ 1, & \textit{se } x \neq 1 \end{cases} = N_\top(x).$$

*Contudo, como GG é uma FGG qualquer, ela não necessariamente tem um elemento neutro.*

**Proposição 8.** *Sejam* $GG\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ *uma FGG,* $N_1, N_2\colon [0,1] \to [0,1]$ *negações fuzzy e sejam* $I_{GG,N_1}, I_{GG,N_2}\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ $(GG,N)$*-implicações, temos:*

*(i) Se* $N_1 \leq N_2$ *então* $I_{GG,N_1} \leq I_{GG,N_2}$*;*
*(ii) Se* $0$ *é o elemento neutro de GG e* $I_{GG,N_1} \leq I_{GG,N_2}$*, então* $N_1 \leq N_2$*.*

*Demonstração.* (i) Uma vez que $N_1 \leq N_2$, por $(GG4)$ temos que $GG(N_1(x),y) \leq GG(N_2(x),y)$ para todo $x,y \in [0,1]$, i.e., $I_{GG,N_1} \leq I_{GG,N_2}$.

(ii) Como $I_{GG,N_1} \leq I_{GG,N_2}$, então, em particular, $GG(N_1(x),0) \leq GG(N_2(x),0)$, para todo $x \in [0,1]$. Portanto, $N_1(x) \leq N_2(x)$ para todo $x \in [0,1]$, uma vez que $0$ é o elemento neutro de $GG$. $\square$

**Proposição 9.** *Sejam* $GG_1, GG_2\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ *funções grouping generalizadas,* $N_1, N_2\colon [0,1] \to [0,1]$ *negações fuzzy e* $I_{GG_1,N_1}, I_{GG_2,N_2}\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ $(GG,N)$*-implicações. Se* $I_{GG_1,N_1} \leq I_{GG_2,N_2}$ *então:*

*(i) Se* $a_1 \leq a_2$*, onde* $a_i$ *é um elemento neutro de* $GG_i$*, para* $i \in \{1,2\}$*, então* $N_1 \leq N_2$*;*
*(ii) Se* $N_1 = N_2$ *é contínua, então* $GG_1 \leq GG_2$*.*

*Demonstração.* (i) Considerando $I_{GG_1,N_1} \leq I_{GG_2,N_2}$ e $a_1 \leq a_2$, então temos que $GG_1(N_1(x),a_1) \leq GG_2(N_2(x),a_2)$, $\forall x \in [0,1]$. Assim, uma vez que $a_i$ é um elemento neutro de $GG_i$, para $i \in \{1,2\}$, $N_1(x) \leq N_2(x), \forall x \in [0,1]$.

(ii) Uma vez que $N_1 = N_2 = N$ é contínua, para cada $x \in [0,1]$ existe um $\widetilde{x} \in [0,1]$ tal que $N(\widetilde{x}) = x$. Portanto, $GG_1(x,y) = GG_1(N(\widetilde{x}),y) \leq GG_2(N(\widetilde{x}),y) = GG_2(x,y), \forall x,y \in [0,1]$. Consequentemente, $GG_1 \leq GG_2$. $\square$

**Proposição 10.** *Seja* $GG\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ *uma FGG e* $N\colon [0,1] \to [0,1]$ *uma negação fuzzy. Então,* $y \leq GG(0,y)$ *se e somente se* $y \leq I_{GG,N}(x,y)$*, para todo* $x,y \in [0,1]$*, onde* $I_{GG,N}\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ *é uma* $(GG,N)$*-implicação.*

*Demonstração.* De fato, se $y \leq GG(0,y)$, então, uma vez que $0 \leq N(x)$, $\forall x \in [0,1]$, e pela condição $(GG4)$, nós temos que $y \leq GG(0,y) \leq GG(N(x),y) = I_{GG,N}(x,y)$. Por outro lado, se $y \leq I_{GG,N}(x,y)$, $\forall x \in [0,1]$, então, para $x = 1$, $y \leq GG(N(1),y) = GG(0,y)$. □

**Corolário 2.** *Sejam $GG\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ uma FGG, $N\colon [0,1] \to [0,1]$ uma negação fuzzy e $I_{GG,N}\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ uma $(GG,N)$-implicação. Se $0$ é o elemento neutro de $GG$, então $y \leq I_{GG,N}(x,y)$, para todo $x, y \in [0,1]$.*

**Lema 1.** *Seja $GG$ uma FGG. Se $GG$ é associativa, então $0$ é o elemento neutro de $GG$.*

*Demonstração.* Uma vez que $GG$ é associativa, $\forall x, y, z \in [0,1]$, $GG(x, GG(y,z)) = GG(GG(x,y),z)$. Para $x = y = 0$, e pela condição $(GG2)$,

$$GG(0, GG(0,z)) = GG(0,z), \tag{2}$$

$\forall z \in [0,1]$. Agora, seja quaisquer $y \in [0,1]$, como $GG$ é contínua, existe $z \in [0,1]$, de tal modo que $GG(0,z) = y$. Assim, $GG(0,y) = GG(0, GG(0,z)) \overset{\text{Eq. (2)}}{=} GG(0,z) = y$. Portanto, $0$ é o elemento neutro de $GG$. □

**Proposição 11.** *Seja $GG$ uma FGG, se $GG$ associativa, então $GG$ é uma $t$-conorma.*

*Demonstração.* Por $(GG1)$ e $(GG4)$, temos que as propriedades $(S1)$ e $(S3)$ são satisfeitas, respectivamente. Uma vez que $GG$ é associativa, então $(S2)$ é satisfeita. Além disto, pelo Lema 1, $(S4)$ também é válida. Portanto, $GG$ é uma $t$-conorma. □

**Corolário 3.** *Seja $GG$ uma FGG, se $GG$ é associativa, então $I_{GG,N}$ é uma $(S,N)$-implicação.*

As próximas proposições mostram sob quais condições as $(GG,N)$-implicações satisfazem algumas das propriedades das implicações encontradas nas Definições 6 e 7.

**Proposição 12.** *Seja $I_{GG,N}\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ uma $(GG,N)$-implicação, então:*

*(i)* *$I_{GG,N}$ satisfaz (NP) se e somente se $0$ é o elemento neutro de $GG$.*
*(ii)* *Se $GG$ é associativa, então $I_{GG,N}$ satisfaz (EP). Além disto, se $N$ é estrita e $I_{GG,N}$ satisfaz (EP), então $GG$ é associativa.*

*Demonstração.* (i) $\forall y \in [0,1], I_{GG,N}(1,y) = y \Leftrightarrow y = GG(N(1),y) \overset{\text{(N2)}}{=} GG(0,y)$.
(ii) Pela Prop. 11, $GG$ é uma $t$-conorma. Então, o resultado segue direto de [1, Prop. 2.4.3(i)]. Considere que $N$ é estrita e $I_{GG,N}$ satisfaz (EP). Então, por $(GG1)$ e $(EP)$, $\forall x, y, z \in [0,1]$, temos que: $GG(x, GG(y,z)) = GG(x, GG(z,y)) = GG(N(N^{-1}(x)), GG(N(N^{-1}(z)),y)) = I_{GG,N}(N^{-1}(x), I_{GG,N}(N^{-1}(z),y)) = I_{GG,N}(N^{-1}(z), I_{GG,N}(N^{-1}(x),y)) = GG(N(N^{-1}(z)), GG(N(N^{-1}(x)),y)) = GG(z, GG(x,y)) = GG(GG(x,y),z)$. Portanto, $GG$ é associativa. □

**Proposição 13.** *Seja $I_{GG,N}\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ uma $(GG,N)$-implicação. Então:*

*(i)* *$I_{GG,N}$ satisfaz a propriedade R-CP(N).*
*(ii)* *Se $N$ é estrita, então $I_{GG,N}$ satisfaz L-CP($N^{-1}$).*

*(iii) Se $I_{GG,N}$ satisfaz L-CP(N) e $0$ é o elemento neutro de GG, então $N$ é forte.*
*(iv) Se $N$ é forte, então $I_{GG,N}$ satisfaz CP(N).*
*(v) Se $I_{GG,N}$ satisfaz CP(N) e $0$ é o elemento neutro de GG, então $N$ é forte.*

*Demonstração.* (i) Por $(GG1)$, $\forall x, y \in [0,1]$, $I_{GG,N}(x, N(y)) = GG(N(x), N(y)) = GG(N(y), N(x)) = I_{GG,N}(y, N(x))$. Assim, $I_{GG,N}$ satisfaz R-CP(N).

(ii) Como $N$ é estrita, por $(GG1)$ temos $I_{GG,N}(N^{-1}(x), y) = GG(N(N^{-1}(x)), y) = GG(x, y) = GG(y, x) = GG(N(N^{-1}(y)), x) = I_{GG,N}(N^{-1}(y), x)$, $\forall x, y \in [0,1]$. Portanto, $I_{GG,N}$ satisfaz L-CP($\mathrm{N}^{-1}$).

(iii) Como $I_{GG,N}$ satisfaz L-CP(N), $GG(N(N(x)), y) = GG(N(N(y)), x), \forall x, y \in [0,1]$. Em particular, para $y = 0$, $GG(N(N(x)), 0) = GG(N(N(0)), x) = GG(0, x)$. Então, uma vez que $0$ é o elemento neutro de $GG$, temos que $N(N(x)) = x$, $\forall x \in [0,1]$. Por isto, $N$ é forte.

(iv) Como $N$ é forte, $I_{GG,N}(N(y), N(x)) = GG(N(N(y)), N(x)) = GG(y, N(x))$, $\forall x, y \in [0,1]$. Então, por $(GG1)$, temos que $I_{GG,N}(N(y), N(x)) = GG(N(x), y) = I_{GG,N}(x, y)$. Portanto, $I_{GG,N}$ satisfaz CP(N).

(v) Como $I_{GG,N}$ satisfaz CP(N), $GG(N(N(y)), N(x)) = GG(N(x), y), \forall x, y \in [0,1]$. Em particular, para $x$=1, por (N2), $GG(N(N(y)), 0) = GG(0, y)$. Então, sendo $0$ o elemento neutro de $GG$, temos $N(N(y)) = y$, $\forall y \in [0,1]$. Assim, $N$ é forte. $\square$

**Lema 2.** *Seja $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ uma implicação fuzzy contínua. Se $N_I\colon [0,1] \to [0,1]$ é uma negação fuzzy estrita e $I$ satisfaz L-CP($N_I^{-1}$), então $GG_I(x, y) = I(N_I^{-1}(x), y)$ é uma FGG.*

*Demonstração.* Verificaremos que $GG_I$ satisfaz todas as condições da Def. 9, $\forall x, y, z \in [0,1]$. $(GG1)$ Como $I$ satisfaz L-CP($N_I^{-1}$), $GG_I(x, y) = I(N_I^{-1}(x), y) = I(N_I^{-1}(y), x) = GG_I(y, x)$; $(GG2)$ Se $x = y = 0$, então $GG_I(0, 0) = I(N_I^{-1}(0), 0) = I(1, 0) \overset{\text{(I5)}}{=} 0$; $(GG3)$ Se $x = 1$, então $GG_I(1, y) = I(N_I^{-1}(1), y) = I(0, y) \overset{\text{(I3)}}{=} 1$. Por outro lado, se $y = 1$, então $GG_I(x, 1) = I(N_I^{-1}(x), 1) \overset{\text{(I4)}}{=} 1$; $(GG4)$ $x \leq y \overset{\text{(N1)}}{\Rightarrow} N_I^{-1}(y) \leq N_I^{-1}(x) \overset{\text{(I1)}}{\Rightarrow} I(N_I^{-1}(x), z) \leq I(N_I^{-1}(y), z) \Rightarrow GG_I(x, z) \leq GG_I(y, z)$; $(GG5)$ segue da continuidade de $I$ e $N_I^{-1}$. Portanto, $GG_I$ é a função *grouping* generalizada. $\square$

O Lema 2 ajuda a corroborar o seguinte resultado, que fornece a caracterização da classe das $(GG, N)$-implicações.

**Teorema 2.** *Seja $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$, as afirmações a seguir são equivalentes:*

*(i) $I = I_{GG,N}$ é uma $(GG, N)$-implicação, onde $N$ é estrita e $0$ é o elemento neutro de GG;*
*(ii) $I$ é contínua e satisfaz a condição $(I1)$, (NP) e L-CP($N_I^{-1}$), onde $N_I$ é estrita.*

*Demonstração.* De fato, $(i) \Rightarrow (ii)$ Seja $I(x, y) = GG(N(x), y)$, onde $N$ estrita e $0$ é o elemento neutro de $GG$. Então, pela Prop. 5, $I$ satisfaz a condição $(I1)$. Segue da continuidade de $GG$ e $N$ que $I$ é contínua. Sendo $0$ o elemento neutro de $GG$, $\forall x \in [0,1]$, tem-se $N_I(x) = I(x, 0) = GG(N(x), 0) = N(x)$. Portanto, $N_I$ é estrita, uma vez que $N$ é igualmente estrita. Finalmente, pelas Prop. $12(i)$ e $13(ii)$, $I_{GG,N}$ satisfaz (NP) e L-CP($N_I^{-1}$), respectivamente.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Para $y \leq z$, têm-se por (N2) que $N_I^{-1}(z) \leq N_I^{-1}(y)$. Então, uma vez que $I$ satisfaz $(I1)$ e L-CP($N_I^{-1}$), $\forall x \in [0,1]$, temos que: $I(x,y) = I(N_I^{-1}(N_I(x)), y) \overset{\text{L-CP}}{=} I(N_I^{-1}(y), N_I(x))) \overset{\text{(I1)}}{\leq} I(N_I^{-1}(z), N_I(x))) \overset{\text{L-CP}}{=} I(N_I^{-1}(N_I(x)), z) = I(x,z)$. Assim, $I$ satisfaz $(I2)$. Dado $I(0,0) = I(N_I^{-1}(N_I(0)), 0) = I(N_I^{-1}(0), N_I(0)) = I(1,1) = 1$. Então $I(1,0) \overset{\text{(NP)}}{=} 0$. Logo, $I$ satisfaz $(I3*)$, $(I4*)$ e $(I5)$. Por conta disto, $I$ é uma implicação *fuzzy*. Além disto, pelo Lema 2, $GG_I(x,y) = I(N_I^{-1}(x), y)$ é uma FGG, então: $I_{GG_I,N_I}(x,y) = GG_I(N_I(x), y) = I(N_I^{-1}(N_I(x)), y) = I(x,y)$ $\forall x, y \in [0,1]$. Portanto, $I$ é uma $(GG,N)$-implicação, com $N = N_I$ sendo estrita. Consequentemente, pela Proposição 7, 0 é o elemento neutro de $GG_I$. $\square$

## 5 Conclusões

Neste trabalho foi investigada uma generalização das funções *grouping*, as FGG, permitindo que elas sejam aplicadas em problemas com mais de duas entradas (dimensionalidade $n$). Uma sequência natural desse estudo é a extensão desses operadores para o contexto intervalar, fornecendo uma flexibilidade ainda maior para esses conectivos. Futuros estudos levarão em consideração outras funções de implicação derivadas das funções *grouping* e *overlap* generalizadas (intervalarmente valoradas), como as implicações residuadas, as QL- e D-implicações e suas intersecções. Vislumbramos possíveis aplicações em áreas como (i) tomada de decisão com múlltiplos critérios com relações de preferência fuzzy incompletas, heterogêneas e n-árias, (ii) agrupamento de fluxo dados fuzzy [25], que utiliza dispersão fuzzy e (dis)similaridade fuzzy.


## Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio do CNPq (301618/2019-4, 311429/2020-3), FAPERGS (17/2551- 0000872-3, 19/2551-0001279-9, 19/ 2551-0001660-3) e PNPD/CAPES (464880/2019-00).


## Referências


1. Baczyński, M., Jayaram, B.: Fuzzy Implications, Studies in Fuzziness and Soft Computing, vol. 231. Springer (2008)
2. Barzilai, J.: Consistency measures for pairwise comparison matrices. Journal of Multi-Criteria Decision Analysis **7**(3), 123–132 (1998). https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1360(199805)7:3<123::AID-MCDA181>3.0.CO;2-8
3. Bedregal, B.C., Dimuro, G.P., Bustince, H., Barrenechea, E.: New results on overlap and grouping functions. Information Sciences **249**, 148–170 (2013)
4. Beliakov, G., Pradera, A., Calvo, T.: Aggregation Functions: A Guide for Practitioners. Springer, Berlin (2007)
5. Bustince, H., Fernandez, J., Mesiar, R., Montero, J., Orduna, R.: Overlap functions. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications **72**(3-4), 1488–1499 (2010)
6. Bustince, H., Pagola, M., Mesiar, R., Hüllermeier, E., Herrera, F.: Grouping, overlaps, and generalized bientropic functions for fuzzy modeling of pairwise comparisons. IEEE Trans. on Fuzzy Systems **20**(3), 405–415 (2012). https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2011.2173581

7. Chiclana, F., Herrera, F., Herrera-Viedma, E.: Integrating multiplicative preference relations in a multipurpose decision-making model based on fuzzy preference relations. Fuzzy Sets and Systems **122**(2), 277 – 291 (2001)
8. Dimuro, G.P., Bedregal, B., Bustince, H., Asiáin, M.J., Mesiar, R.: On additive generators of overlap functions. Fuzzy Sets and Systems **287**, 76 – 96 (2016)
9. Dimuro, G.P., Bedregal, B., Bustince, H., Jurio, A., Baczyński, M., Miś, K.: QL-operations and QL-implication functions constructed from tuples $(O, G, N)$ and the generation of fuzzy subsethood and entropy measures. Int. J. Approximate Reasoning **82**, 170 – 192 (2017)
10. Dimuro, G.P., Bedregal, B.: Archimedean overlap functions: The ordinal sum and the cancellation, idempotency and limiting properties. Fuzzy Sets and Systems **252**, 39 – 54 (2014)
11. Dimuro, G.P., Bedregal, B.: On residual implications derived from overlap functions. Information Sciences **312**, 78 – 88 (2015). https://doi.org/10.1016/j.ins.2015.03.049
12. Dimuro, G.P., Bedregal, B., Bustince, H., Mesiar, R., Asiain, M.J.: On additive generators of grouping functions. In: Laurent, A., Strauss, O., Bouchon-Meunier, B., Yager, R.R. (eds.) IPMU, Communications in Computer and Information Science, vol. 444, pp. 252–261. Springer International Publishing (2014). https://doi.org/10.1007/978-3-319-08852-5_26
13. Dimuro, G.P., Bedregal, B., Fernandez, J., Sesma-Sara, M., Pintor, J.M., Bustince, H.: The law of o-conditionality for fuzzy implications constructed from overlap and grouping functions. International Journal of Approximate Reasoning **105**, 27 – 48 (2019)
14. Dimuro, G.P., Bedregal, B., Santiago, R.H.N.: On $(G, N)$-implications derived from grouping functions. Information Sciences **279**, 1 – 17 (2014)
15. Fodor, J., Roubens, M.: Fuzzy preference modelling and multicriteria decision support. Kluwer, New York (1994)
16. Fodor, J., Roubens, M.: Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support. Kluwer Academic Publisher, Dordrecht (1994)
17. Gómez, D., Rodríguez, J.T., Montero, J., Bustince, H., Barrenechea, E.: n-Dimensional overlap functions. Fuzzy Sets and Systems **287**, 57 – 75 (2016), theme: Aggregation Operations
18. Jurio, A., Bustince, H., Pagola, M., Pradera, A., Yager, R.: Some properties of overlap and grouping functions and their application to image thresholding. Fuzzy Sets and Syst. **229**, 69–90 (2013). https://doi.org/10.1016/j.fss.2012.12.009
19. Lourenzutti, R., Krohling, R.A., Reformat, M.Z.: Choquet based TOPSIS and TODIM for dynamic and heterogeneous decision making with criteria interaction. Information Sciences **408**, 41 – 69 (2017). https://doi.org/10.1016/j.ins.2017.04.037
20. Miguel, L.D., Gómez, D., Rodríguez, J.T., Montero, J., Bustince, H., Dimuro, G.P., Sanz, J.A.: General overlap functions. Fuzzy Sets and Systems **372**, 81 – 96 (2019), theme: Aggregation Operations
21. Qiao, J., Hu, B.Q.: On the distributive laws of fuzzy implication functions over additively generated overlap and grouping functions. IEEE Trans. Fuzzy Systems **26**(4), 2421–2433 (2018)
22. Qiao, J., Hu, B.Q.: On interval additive generators of interval overlap functions and interval grouping functions. Fuzzy Sets and Systems **323**, 19 – 55 (2017)
23. Qiao, J., Hu, B.Q.: On the migrativity of uninorms and nullnorms over overlap and grouping functions. Fuzzy Sets and Systems **346**, 1 – 54 (2018)
24. Santos, H., Dimuro, G.P., Asmus, T.C., Lucca, G., Borges, E.N., Bedregal, B., Sanz, J.A., Fernández, J., Bustince, H.: General grouping functions. In: Lesot, M.J., Vieira, S., Reformat, M.Z., Carvalho, J.P., Wilbik, A., Bouchon-Meunier, B., Yager, R.R. (eds.) IPMU'20, pp. 481–495. Springer International Publishing, Cham (2020)
25. Schick, L., de Abreu Lopes, P., de Arruda Camargo, H.: d-fuzzstream: A dispersion-based fuzzy data stream clustering. In: 2018 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE). pp. 1–8 (2018)

26. Smets, P., Magretz, P.: Implication in fuzzy logic. International Journal of Approximate Reasoning **1**(4), 327–347 (1987)
27. Ureña, R., Chiclana, F., Morente-Molinera, J., Herrera-Viedma, E.: Managing incomplete preference relations in decision making: A review and future trends. Information Sciences **302**, 14 – 32 (2015)