unipampa Universidade Federal do Pampa
CRICTE2014
XXVI CONGRESSO REGIONAL DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA & TECNOLÓGICA EM ENGENHARIA

ESPERANÇA INTERVALAR DAS DISTRIBUIÇÕES EXPONENCIAL, PARETO E UNIFORME

Lucas Mendes Tortelli
Acadêmico do curso de Ciência da Computação da Universidade Federal de Pelotas – UFPel
lmtortelli@inf.ufpel.edu.br

Maurício Dorneles Caldeira Balboni
Acadêmico do curso de Ciência da Computação da Universidade Federal de Pelotas – UFPel
mdcbalboni@inf.ufpel.edu.br

Alice Fonseca Finger
Professora do Curso de Ciência da Computação da Universidade Federal do Pampa - UNIPAMPA
alicefinger@gmail.com

Aline Brum Loreto
Professora do Curso de Ciência da Computação da Universidade Federal de Pelotas - UFPel
aline.loreto@inf.ufpel.edu.br

Resumo. *A computação científica demanda de grande exatidão. Ao se utilizar o sistema de ponto flutuante, os resultados podem ser afetados por erros. Estes erros inviabilizam a confiabilidade nos resultados alcançados, com isto surge a necessidade da utilização da matemática intervalar. Esta cria limites que serão os extremos do intervalo onde o valor real x está contido. O cálculo de valor esperado como está ligado ao ramo estatístico, necessita de grande exatidão devido ao grande processamento de dados. O presente trabalho tem como objetivo definir a esperança intervalar das funções de densidade de probabilidade com distribuições Exponencial, Pareto e Uniforme.*

Palavras-chave: *esperança intervalar, intervalos, computação científica.*

1. INTRODUÇÃO

A computação científica é utilizada quando há necessidade de fornecer garantidas de exatidão e confiabilidade nos cálculos realizados (CAMPOS, 2002). Ao representar dados numéricos no sistema de ponto flutuante, estes são aproximados para um subconjunto finito dos números reais (RATSCHEK, 1988). Através desta aproximação erros são gerados pela impossibilidade da máquina de representar todos os valores reais com toda a sua exatidão, estes erros podem ser tanto por falha humana, falha nos instrumentos de medida para obtenção dos dados ou pelos próprios erros gerados pelo sistema de ponto flutuante (arredondamento e truncamento). O erro total obtido será o acúmulo dos erros nos resultados intermediários (RUGIERO, 2004).

A matemática intervalar proposta por Moore (MOORE, 1966) surge para automatizar o cálculo do erro computacional científico com limites confiáveis. Nesta forma de representação numérica os valores pontuais são representados por um intervalo X que os contenha. Todo erro originado para tratamento dos valores como o arredondamento e truncamento, para adequar o valor pontual a ser representado pela máquina, são tratados pela aritmética intervalar e pelos arredondamentos direcionados. O tamanho do intervalo é utilizado como medida de qualidade (RATSCHEK, 1988).

Quando um experimento contém grande número de dados para serem analisados, para facilitar a compreensão utilizam-se variáveis aleatórias para representar estes valores (FELLER, 1968). Em particular é necessário descobrir o comportamento das distribuições que é dado pelo valor Esperado ou esperança matemática.

A esperança matemática é comumente designada como a média da variável aleatória em questão. Consiste em obter uma estimativa dos possíveis resultados da probabilidade da distribuição (FELLER, 1968).

O presente trabalho visa obter maior exatidão realizando a Extensão Intervalar para as Esperanças matemáticas das Distribuições Exponencial, Pareto e Uniforme. Posteriormente implementa-se no ambiente de programação intervalar IntPy (INTPY) as novas expressões obtidas. No IntPy obteve-se os melhores resultados quanto a exatidão, cálculo de erro absoluto, erro relativo e diâmetro de intervalo, quando comparado aos seus semelhantes (BALBONI, 2014).

2. METODOLOGIA

Uma distribuição de probabilidade descreve a forma de organização dos indivíduos de uma população, cada estudo de população contém sua função analítica que estuda o seu conjunto de dados. O valor esperado denotado por E(x) ou μ, é utilizado para determinar a forma em que esta população está distribuída e onde ocorre o maior agrupamento de dados.

Cada variável contém sua função real para determinação do seu valor esperado, no qual utiliza somente as características relevantes da distribuição probabilística analisada quanto as características de sua população. Como estes cálculos são realizados com um grande número de dados, há necessidade de apresentar resultados mais confiáveis e com maior exatidão, disto surge a necessidade de representar estes valores pontuais em um intervalo X de tal forma que $x_1 \leq x \leq x_2$, sendo x_1 e x_2 os limites inferiores e superiores do intervalo X.

Segundo FERSON et. al. (2002), historicamente o primeiro método para computar o intervalo solução é o método chamado de extensão intervalar. Nele repete-se a computação formando o programa passo-a-passo, substituindo cada operação elementar de números reais pela correspondente operação da aritmética intervalar.

2.1 Valor Esperado da Distribuição Exponencial

A distribuição Exponencial visa descrever a forma que uma população se organiza quando há uma taxa de falhas constante, muito utilizada para média de tempo de vida de produtos e materiais (WALPOLE, 2007).

Sua esperança possui a seguinte expressão (1) com variáveis reais, onde α é o tempo médio de vida da população estudada.

$$E(x) = \alpha \int_{0}^{+\infty} x e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} \qquad (1)$$

Substituindo todos os valores reais por intervalos, para aplicar o método de extensão intervalar, e conjuntamente substituindo todas as operações reais pelas respectivas intervalares conforme definidas por Moore (MOORE, 1966), obtém-se a esperança intervalar da exponencial, Eq. (2):

$$E(X) = \frac{1}{A} = \left[\frac{1}{\underline{a}}; \frac{1}{\overline{a}}\right] \qquad (2)$$

onde A=$[\underline{a}, \overline{a}]$ é o intervalo que representa o valor real do parâmetro α e $\underline{a}$ e $\overline{a}$ correspondem aos limites inferior e superior do intervalo A.

2.2 Valor Esperado da Distribuição Pareto

A Distribuição de Pareto muito utilizada no ramo econômico, visa o estudo de causa e proporção. Este princípio também chamado de 80/20 advêm da forma em que a variável se distribui, onde 80 % das consequências ocorrem através de 20 % das causas (LORENZ, 1905).

A função real de valor esperado, em que α é o parâmetro de forma e β é o parâmetro de escala, é a que segue, Eq. (3):

$$E(x) = \frac{\alpha\beta}{\alpha - 1} \tag{3}$$

Realizando a substituição de todas as variáveis reais para intervalos e todas as operações aritméticas pelas respectivas intervalares (MOORE, 1966) na Eq.(3), tem-se a seguinte expressão para a esperança intervalar de Pareto, Eq. (4):

$$E(X) = \left[\frac{AB}{A-1}\right] = \left[\frac{\underline{a}\underline{b}}{\underline{a}-1}; \frac{\overline{a}\overline{b}}{\overline{a}-1}\right] \tag{4}$$

onde A=$[\underline{a}, \overline{a}]$ é o intervalo que representa o valor real do parâmetro α, $\underline{a}$ e $\overline{a}$ correspondem aos limites inferior e superior do intervalo A; B=$[\underline{b}, \overline{b}]$ é o intervalo que representa o valor real do parâmetro β e $\underline{b}$ e $\overline{b}$ os extremos do intervalo B.

2.3 Valor Esperado da Distribuição Uniforme

Uma distribuição de probabilidade Uniforme tem uma importante característica na qual a probabilidade de acontecer um fenômeno de mesmo comprimento é a mesma.

Esta distribuição Uniforme contém a seguinte fórmula real de seu valor esperado, Eq. (5):

$$E(x) = \frac{a+b}{2} \tag{5}$$

onde a é o parâmetro de deslocamento e b corresponde ao parâmetro de dispersão.

Utilizando-se da extensão intervalar, todos os valores reais são substituídos por intervalos, obtendo assim o valor esperado intervalar da distribuição Uniforme, Eq. (6),

$$E(X) = \left[\frac{A+B}{2}\right] = \left[\frac{\underline{a}+\underline{b}}{2}; \frac{\overline{a}+\overline{b}}{2}\right] \tag{6}$$

onde A=$[\underline{a}, \overline{a}]$ é o intervalo que representa o valor real do parâmetro a, $\underline{a}$ e $\overline{a}$ correspondem aos limites inferior e superior do intervalo A; B=$[\underline{b}, \overline{b}]$ é o intervalo que representa o valor real do parâmetro b e $\underline{b}$ e $\overline{b}$ os extremos do intervalo B.

As equações Eq.(2), Eq.(4) e Eq.(6) são implementadas no IntPy e, a partir dai, aplicam-se medidas de qualidade a fim de comprovar a maior exatidão e confiabilidade nos resultados obtidos.

3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

A partir de todas as expressões intervalares definidas, apresenta-se um exemplo de aplicação para cada distribuição, a fim de confirmar a qualidade dos resultados intervalares obtidos em relação a solução real. Esta qualidade é medida através do diâmetro do intervalo, Eq. (7):

$$w(X) = |\overline{x} - \underline{x}| \tag{7}$$

onde X=$[\underline{x}, \overline{x}]$ é o intervalo X e $\underline{x}$ e $\overline{x}$ respectivos limites.

Exemplo Uniforme: Qual é a esperança de haver pane em um ponto de uma rede telefônica de 7km?

A Tabela 1 apresenta as soluções real e intervalar.

Tabela 1: Valor esperado da distribuição uniforme

Real	Intervalar
3.5	[3.4999899999999999, 3.5000100000000000]

Exemplo Pareto: Numa população os ingressos são distribuídos segundo uma distribuição de Pareto, com α = 3 e β = 1000. Qual é o valor médio de ingressos distribuídos para esta população?

A Tabela 2 contém as soluções real e intervalar.

Tabela 2:Valor esperado da distribuição de Pareto

Real	Intervalar
1500	[1499.98748506, 1500.012515062]

Exemplo Exponencial: Suponha que o tempo de vida de uma determinada espécie de inseto tenha uma distribuição exponencial de parâmetro $\alpha = 1/12$. Qual a esperança média de vida deste inseto?
A Tabela 3 apresenta as soluções real e intervalar.

Tabela 3:Esperança da distribuição Exponencial

Real	Intervalar
12	[11.998560172779264,12.001440172820741]

A partir dos resultados apresentados nas Tabelas 1, 2 e 3, verifica-se que os intervalos gerados pelas definições intervalares contêm o valor real para cada variável. Assim, calcula-se o diâmetro de cada intervalo solução, com a finalidade de avaliar a qualidade dos mesmos.

Tabela 4: Diâmetros dos intervalos dos exemplos.

Diâmetro Uniforme	0,00002
Diâmetro Pareto	0,0250300000016
Diâmetro Exponencial	0,0028800000414

Analisando os valores da Tabela 4, verifica-se que os intervalos são de boa qualidade, uma vez que a diferença entre o limite superior e o limite inferior é pequena para todas as distribuições.

4. CONCLUSÃO

O cálculo de valor esperado é de suma importância para a descrição mais detalhada sobre a organização de uma população. Através da Tabela 4 verifica-se resultados de qualidade obtidos a partir da utilização de intervalos.

Como objetivo de continuidade de trabalho se realizará a extensão intervalar nos valores esperados das demais funções de densidade de probabilidade como Gama, Normal, etc., bem como se analisará a qualidade dos intervalos solução.

5. REFERÊNCIAS

BALNONI, M. D. C.; TORTELLI, L. M.; LORINI, M.; FURLAN, V. S.; FINGER, A.F.; LORETO, A.B. Critérios para Análise e Escolha de Ambientes Intervalares, Revista Jr. de Iniciação Científica em Ciências Exatas e Engenharia, FURG,nº7, Rio-Grande, 2014.

CAMPOS, M. A., DIMURO, G. P., ARÁUJO, J. F. F. and DIAS, A. M., "Probabilidade intervalar e cadeias de markov intervalares no maple", Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, vol. 3, no. 2, pp.53-62, 2002.

FELLER, W., An Introduction to Probability and Its Applications. 3th.ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1968.

FERSON, S.l, GINZBURG, L., KREINOVICH, V. “Absolute bounds on the mean of sum, product, etc.: A probabilistic extension of interval arithmetic”, SIAM WORKSHOP ON VALIDATED COMPUTING, Toronto, 2002.

INTPY. Interval Arithmetic package Online. Disponível em: https://pypi.python.org/pypi/IntPy Acessado em: 24/08/2014.

LORENZ, M.O. Methods of measuring the concentration of wealth, Publications of the American Statistical Association 9; p.209-219, 1905.

MOORE, R. E. Interval Analysis. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1966.

RATSCHEK, H.; ROKNE, J. New Computer Methods for Global Optimization, Ellis Horwood, 1988.

RUGGIERO, M.A. G.; LOPES, V.L. R. Cálculo Numérico: aspectos Teóricos e Computacionais. 2. ed. São Paulo: Makron Books do Brasil, 2004.

WALPOLE, Ronald E.; MYERS, Raymond H.; MYERS, Sharon L. e YE, Keying. Probability & Statistics for Engineers & Scientists. Pearson Education International, 2007, p.196.