UBA – Facultad de Ciencias Exactas y Naturales – Departamento de Computación – Algoritmos y Estructuras de Datos I

Primer parcial – Segundo cuatrimestre de 2022

1a	1b	2a	2b	3a	3b

Apellido .... Nombre ....

LU .... Cant. de hojas entregadas ..3..

100

JG

El parcial se aprueba con 65 puntos.

Ejercicio 1. [20 puntos] Dados los siguientes predicados y programas.

- pred $ordenada(l : seq\langle\mathbb{Z}\rangle)\{|l| > 0 \land (\forall i : \mathbb{Z})(1 \leq i < |l| \longrightarrow_L l[i-1] \leq l[i])\}$
- pred $masChicoAlPrincipio(l : seq\langle\mathbb{Z}\rangle)\{|l| > 0 \land_L (\forall i : \mathbb{Z})(1 \leq i < |l| \longrightarrow_L l[0] \leq l[i]\}$
- pred $unoSolo(l : seq\langle\mathbb{Z}\rangle)\{|l| = 1\}$

```
int programa1(vector<int> v) {
  return v[v.size()-1];
}
```

```
int programa2(vector<int> v) {
  return v[0];
}
```

a) [10 puntos] ¿Cuál es la relación de fuerza entre los predicados? ¿Cuál es el más débil y cuál el más fuerte? Justificar.

b) [5 puntos] ¿Cuál de los predicados dados es la precondición más débil que puede darse para que programa1 sea correcto si se devuelve un entero res y la postcondición es $(\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |l| \longrightarrow_L res \geq l[i])$? Justifique.

c) [5 puntos] ¿Cuál de los predicados dados es la precondición más débil que puede darse para que programa2 sea correcto si se devuelve un entero res y la postcondición es $(\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |l| \longrightarrow_L res \leq l[i])$? Justifique.

Ejercicio 2. [40 puntos] Se llama *tripla pitagórica* a tres números enteros a, b, y c que satisfacen la ecuación del teorema de Pitágoras ($a^2 + b^2 = c^2$). Especificaremos estas triplas como tuplas de 3 elementos tales que $t_0 \leq t_1 \leq t_2$. Por ejemplo, (9, 12, 15) y (12,16,20) son triplas pitagóricas. La tupla $t = (12, 9, 15)$ no lo es porque $t_1 < t_0$.

a) [10 puntos] Especificar el predicado esTriplaPitagorica($t : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$) que indica si t cumple las propiedades necesarias para ser una tripla pitagórica.

b) [30 puntos] Especificar el problema armarTriplasPitagoricas(in s: $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$, out res: $seq\langle\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\rangle$), que dada una secuencia de enteros s devuelve una secuencia que contiene todas las triplas pitagóricas contenidas en s. Por ejemplo, dada $s = \langle 4, 4, 5, 3, 1 \rangle$ debería devolver $\langle (3, 4, 5) \rangle$, y dado $s = \langle 20, 16, 7, 12, 9, 15, 8 \rangle$ se podría devolver $\langle (12, 16, 20), (9, 12, 15) \rangle$. Notar que los elementos de la secuencia original pueden estar en más de una tripla pitagórica.

Ejercicio 3. [40 puntos] El señor X tiene un local en el que vende productos que compra a un mayorista agregando un margen de ganancia. Por ejemplo, puede comprar cierto producto a \$40 y venderlo a \$50, ganando \$10. El mayorista le pasa la lista de precios y el señor X arma otro listado en el cual registra a qué precio puede vender cada producto. Por ejemplo, la secuencia $\langle (10, 11), (10, 12), (15, 17) \rangle$ indica que puede conseguir 2 productos a \$10, y puede vender uno de ellos a \$11 y el otro a \$12. Además, hay otro producto que puede comprar a \$15 y vender a \$17.

a) [10 puntos] Escribir un predicado que dada una lista s de productos con sus precios de compra y venta, y un presupuesto p indique si es posible comprar en el mayorista todos los productos de la lista. Por ejemplo, dados $s = \langle (10, 11), (10, 12), (15, 17) \rangle$ y $p = 38$, el predicado es verdadero. Pero dados $s = \langle (10, 11), (10, 12), (15, 17) \rangle$ y $p = 21$ el predicado es falso.

b) [30 puntos] Especificar un problema que dado un presupuesto y una lista de precios de compra y venta de productos que generan ganancia, indique cuál es la mayor ganancia que podría obtener el señor X. Por ejemplo, dados $p = 22$ y $s = \langle (10, 11), (10, 12), (17, 19) \rangle$ la mayor ganancia que puede obtener es 3 (comprando los primeros 2 productos), pero si el presupuesto fuera 18, la mayor ganancia sería 2 (comprando el segundo o el último). Y si el presupuesto fuera 27 la mayor gancia sería 4 (comprando los dos últimos).

(Hoja 1)

1) A) La relación de fuerza entre predicados es:

unoSolo(l) $\Rightarrow$ ordenado(l) $\Rightarrow$ masChicoAlPrincipio(l)
(más fuerte) (más débil)

- unoSolo(l) establece que la secuencia está formada por un único elemento. Por lo tanto, el orden para esta secuencia es único (por eso implica a ordenado(l), como tiene un elemento, ya está ordenado) y también el elemento más chico está al principio (pues ya está ordenado y el elemento más chico es el único elemento).
- Que la secuencia esté ordenada implica que el elemento más chico al principio
- Así, decir que una secuencia tiene un único elemento es más fuerte que decir que está ordenada, y a su vez, decir que está ordenada es más fuerte que pedir que el elemento más chico esté al principio

B) Si Post$\{(\forall i:\mathbb{Z})(0 \leq i < |l| \rightarrow_L res \geq l[i])\}$, como el programa 1 retorna al último elemento del Vector, lo mínimo que se debe pedir es que la lista esté ordenada, para que así c/elemento sea más chico que el anterior y por lo tanto el último elemento cumple post.
?
No
sea
el programa

Entonces, Pre{ordenado(V)} es precondición más débil.

C) Si Post$\{(\forall i:\mathbb{Z})(0 \leq i < |l| \rightarrow res \leq l[i])\}$, como el programa 2 retorna al primer elemento del Vector, lo mínimo que se debe pedir es que el elemento más chico esté al principio, para que así c/elemento sea más grande que V[0], sin importar el orden de los demás y entonces con el primer elemento el programa cumple Post.

Entonces, Pre{masChicoAlPrincipio(V)} es precondición más débil.

Hoja 2

2) A)

pred esTriplaPitagorica $(t: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ {
$t_0 \leq t_1 \leq t_2 \ \wedge \ t_0^2 + t_1^2 = t_2^2$ ✓
}

B) proc armarTriplasPitagoricas (in $s: seq\langle\mathbb{Z}\rangle$, out $res: seq\langle\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\rangle$) {

En todo momento se asume que los elem de s son mayores a 0.

Pre { $|s| \geq 3$ $\wedge$ todoElementoPositivo (s) }

→ No es necesario

Post { $(\forall t: \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ $(t \in res \longrightarrow$ (esTriplaPitagorica (t) $\wedge$ elementosDeTriplaEnS (t, s))) $\wedge$ noHayElementosRepetidos (res) $\wedge$ todasLasTriplasPitagoricasContenidas (res, s) }
}

→ Chequea si la secuencia res tiene contenidas todas las triplas posibles de formar a partir de s

pred todasLasTriplasPitagoricasContenidas ($res: seq\langle\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\rangle$, $s: seq\langle\mathbb{Z}\rangle$) {
$\neg(\exists t: \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ $(((t_0 \in s \wedge t_1 \in s \wedge t_2 \in s) \wedge$ esTriplaPitagorica$(t)) \wedge$
$t \notin res)$ ✓
}

OK

→ Chequea si los elementos de las triplas pitagóricas de res son elementos de s.

pred elementosDeTriplaEnS ($t: \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, $s: seq\langle\mathbb{Z}\rangle$) {
$t_i \in res \rightarrow (t_0 \in s \wedge t_1 \in s \wedge t_2 \in s)$ ✓—
}

No necesario

No definido (No se recibe como parámetro)

→ Chequea si las triplas pitagóricas aparecen sólo una vez.

pred noHayElementosRepetidos ($res: seq\langle\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\rangle$) {
$(\forall t: \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})(t \in res \longrightarrow_L \#apariciones(t, res) = 1)$ ✓
}

pred todoElementoPositivo ($s: seq\langle\mathbb{Z}\rangle$) { ✓
$(\forall i: \mathbb{Z})(0 \leq i < |s| \rightarrow_L s[i] > 0)$
}

→

Definir #apariciones

Lo defino como tipo T pues lo utilizo de nuevo en el próximo ejercicio

aux #apariciones $(e: T; s: seq\langle T\rangle): \mathbb{Z} =$

$$\sum_{i=0}^{|s|-1} \text{If } (s[i] = e) \text{ then } 1 \text{ else } 0 \text{ fi};$$

✓

Hoja 3

3) A) pred elPresupuestoAlcanza $(s: seq\langle \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\rangle, p: \mathbb{Z})\{$
sumaDePreciosDeCompra$(s) \leq p$ ✓
}

aux sumaDePreciosDeCompra $(s: seq\langle \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\rangle): \mathbb{Z} = \sum_{i=0}^{|s|-1} s[i]_0$; ✓

(ganancia)

B) proc maximizarGanancia (in $s: seq\langle \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\rangle$, in $p: \mathbb{Z}$, out $g: \mathbb{Z}$) {
Pre{ secuenciaValida(s) $\wedge$ $p > 0$} ✓
Post{ $(\exists$ sublista$: seq\langle \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\rangle)($ sePuedeComprar(sublista, s, p)
$\wedge$ $(\forall x: seq\langle \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\rangle)((x \neq$ sublista $\wedge$ sePuedeComprar$(x, s, p))$
$\rightarrow_L$ (gananciaPosible$(x) \leq$ gananciaPosible(sublista)) $\wedge$
$g =$ gananciaPosible(sublista))}
}

Se usan las dos fórmulas del ej anterior

ej:
$s = \langle(10,11),(10,11),(12,13)\rangle$
$r = \langle(10,11),(12,13)\rangle$; $r = s$
y tomo dos veces (10,11)

pred todoElementoContenidoEnListaOriginal$(r, s: seq\langle \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\rangle)\{$
$(\forall t: \mathbb{Z}\times\mathbb{Z})(t \in r \rightarrow (t \in s \wedge$ #apariciones$(t,s) \geq$ #apariciones$(t,r)))$
}

Excelente! → si hay elementos repetidos en s, podrás tomarlos en r menos veces o igual veces, pero nunca más. ✓

aux gananciaPosible $(x: seq\langle \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\rangle): \mathbb{Z} =$
sumaDePreciosDeVenta(x) − sumaDePreciosDeCompra(x) ; ✓

aux sumaDePreciosDeVenta $(s: seq\langle \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\rangle): \mathbb{Z} = \sum_{i=0}^{|s|-1} s[i]_1$; ✓

pred secuenciaValida $(s: seq\langle \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\rangle)\{$
$(\forall i: \mathbb{Z})(0 \leq i < |s| \rightarrow_L 0 < s[i]_0 < s[i]_1)$ ✓
}

pred sePuedeComprar$(x, s: seq\langle \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\rangle, p: \mathbb{Z})\{$ ✓
todoElementoContenidoEnListaOriginal(x, s) $\wedge$ elPresupuestoAlcanza(x, p)
$\wedge$ secuenciaValida(x)
}
No necesario porque lo pediste en la Pre