

Nombre y apellido:

1	2	3	4	Calificación

Número de libreta:

Álgebra Lineal Computacional

Primer Parcial – 18 de octubre de 2022

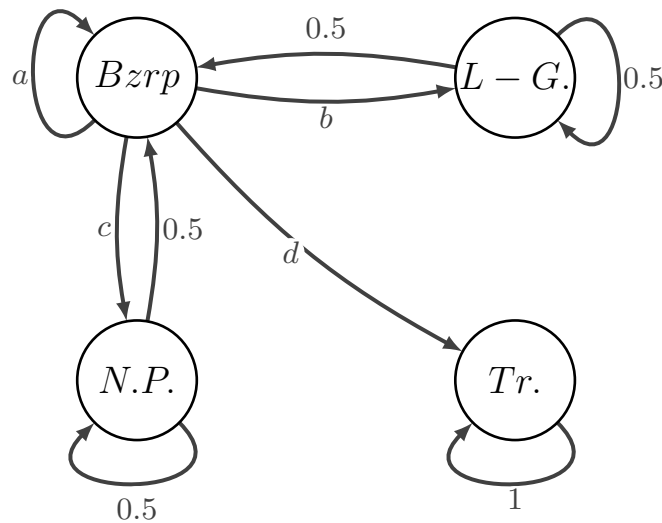
Ejercicio 1. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $A_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

$$A_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 & \cdots & n^2 \\ 0 & \frac{1}{n} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

(a) (1,5 pts.) Probar que $\text{Cond}_\infty(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$.

(b) (1 pt.) Probar que $\text{Cond}_2(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$.

Ejercicio 2. Una aplicación para escuchar música estudia un extraño comportamiento en las elecciones musicales de sus usuarios. Cada dos minutos cambian entre Trueno, Bizarrap, Nathy Peluso y L-Gante según el diagrama:



Por ejemplo, de quienes están escuchando a L-Gante keloké, en dos minutos el 50% pasará a escuchar a Bizarrap y el otro 50% seguirá escuchando a L-Gante.

Sabiendo que la matriz P que representa el proceso de transición es de Markov y que $v = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

es un estado de equilibrio,

(a) (1 pt.) Dar la matriz de transición P y determinar **si existe** P^∞ .

(b) (1,5 pts.) Si en el instante inicial del estudio hay 300 usuarios escuchando Bzrp, 100 usuarios escuchando L-Gante y 300 usuarios escuchando a Nathy Peluso ¿Cuántos usuarios aproximadamente estarán escuchando a Nathy Peluso a los 20 minutos?

Ejercicio 3. Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & \alpha + 2 & 2 \\ \alpha^2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

- (a) (1 pt.) Hallar los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para que A sea simétrica y $\lambda = 0$ sea autovalor de A .
- (b) (1,5 pts.) Para el valor de α hallado en (a), dar una base ortonormal de \mathbb{R}^3 formada con autovectores de A .

Ejercicio 4. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \times 10^{-3} \\ 1 & 1 \times 10^{-3} & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y sea $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Se quiere resolver el sistema $Ax = b$ con aritmética de punto flotante de base 10 de dos dígitos de mantisa y redondeo. Si \tilde{x} es la solución que da la máquina y $\tilde{b} = A\tilde{x}$ (exacto), se requiere que $\|\tilde{b} - b\|_\infty < 1 \times 10^{-2}$.

- (a) (1 pt.) Mostrar que si se resuelve con eliminación gaussiana sin pivoteo la solución \tilde{x} obtenida **no** cumple la condición requerida.
- (b) (1,5 pts.) Proponer una matriz de permutación P y mostrar que la solución obtenida numéricamente de $P Ax = P b$ sí satisface la cota requerida.