Matemática II - Biología

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Universidad de Buenos Aires

Segundo Cuatrimestre 2020

Cadenas de Markov

Dada una cadena de Markov con matriz P.
Preguntas que nos haciamos para las cadenas de Markov:

¿Habrá algún **estado de equilibrio?**

Definición: Estado de equilibrio

Decimos que $\mathbf{v}^* \in \mathcal{V}$ *es un estado de equilibrio si*

$$P\mathbf{v}^* = \mathbf{v}^*$$

donde $\mathcal{V}$ es el espacio de estados:

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : 0 \leq v_j \leq 1, 1 \leq j \leq n, \text{ y además} \sum_{j=1}^{n} v_j = 1\}$$

Como respuesta a este interrogante teníamos el siguiente resultado:

Proposición

Para cualquier matriz de Markov P se tiene que

1. $\lambda = 1$ *es autovalor de P y existe un autovector asociado a $\lambda = 1$ que es un estado de equilibrio.*
2. $|\lambda| \leq 1$ *para todo λ autovalor de P.*
3. *si $\lambda \neq 1$ es autovalor entonces su autovector asociado $\mathbf{w}$ cumple que $\sum_{j=1}^{n} w_j = 0$*

Nota: A partir del resultado del item 3) podemos afirmar que no hay autovectores asociados a autovalores $\lambda \neq 1$ que esten en $\mathcal{V}$.

Recordemos que al estudiar autovalores y autovectores se define la dimensión algebraica y la dimensión geométrica.

$m_\lambda =$ dimensión algebraica $=$ multiplicidad del autovalor como raíz del polinomio característico.

$\dim \varepsilon_\lambda =$ dimensión geométrica $=$ dimensión del autoespacio asociado al autovalor (o sea la cantidad de autovectores linealmente independientes asociados al autovalor)

Se tiene que siempre $\dim \varepsilon_\lambda \leq m_\lambda$.

Una matriz es diagonalizable cuando $\dim \varepsilon_\lambda = m_\lambda$, $\forall \lambda$.

Nota: en particular, si todos sus autovalores son distintos entonces es diagonalizable (en principio en $\mathbb{C}$ y si son todos reales en $\mathbb{R}$)

Proposición

En toda matriz de Markov se tiene que si λ es tal que $|\lambda| = 1$ entonces $\dim \varepsilon_\lambda = m_\lambda$

Nota: para los λ con $|\lambda| < 1$ podríamos tener $\dim \varepsilon_\lambda \neq m_\lambda$. Así que una matriz de Markov no es necesariamente diagonalizable.

Nota: Esto que vale en Markov para los autovalores de modulo 1 no vale en general.
Por ejemplo la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

tiene autovalores $\lambda = 1$ doble y $\lambda = 2$ simple. Aqui $m_{\lambda=1} = 2$ pero $\dim \varepsilon_{\lambda=1} = 1$. En particular, A no es diagonalizable.

Un interrogante que tenemos aún es:

¿Dado un estado inicial, habrá algún **estado límite**?

Definición: Estado límite para el estado inicial $\mathbf{v}(0)$.

Si para $\mathbf{v}(0)$ *tenemos que:*

$$\lim_{k\to+\infty} \mathbf{v}(k) = \lim_{k\to+\infty} P^k \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}^\infty$$

decimos que $\mathbf{v}^\infty \in \mathcal{V}$ *es un estado límite de* $\mathbf{v}(0)$

Nota: Si $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ es un estado límite entonces debe ser un estado de equilibrio

Estudiando el espectro de la matriz podemos determinar si hay o no estado límite.

Sobre la existencia de estado límite

- *Si el único autovalor de P de módulo 1 es $\lambda = 1$ entonces hay estado límite para cualquier dato inicial $\mathbf{v}(0)$. O sea que todos los $\mathbf{v}(0) \in \mathcal{V}$ tienen estado límite.*
  Dicho estado límite varía según el dato inicial $\mathbf{v}(0)$ pero está en el $\varepsilon_{\lambda=1}$, o sea que es una combinación lineal de autovectores asociados a $\lambda = 1$.

- *Si además $\lambda = 1$ es un autovalor simple, i.e., $m_\lambda = 1$ entonces el estado límite $\mathbf{v}^\infty$ es único. O sea que tendremos un solo estado limite independientemente de cual sea el vector inicial.*

En el ejemplo de las Flores $P = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
cuyos autovalores son $\lambda = 1, \lambda = 0$ y $\lambda = \frac{1}{2}$.
Por la proposición anterior sabemos que hay estado límite y corresponde al autovector asociado a $\lambda = 1$ esto es el $\mathbf{v}^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Por lo tanto,

$$\mathbf{v}^\infty = \mathbf{v}^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

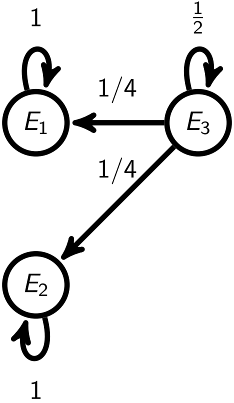
Mirando el estado límite puedo concluir que **en el limite todas las flores son genotipo AA, o sea que son todas ROJAS independientemente del vector inicial.**

Así si por ejemplo si miramos un cultivo de 30 flores y tenemos 10 rosas y 20 blancas $\mathbf{v}(0) = (0, 10/30, 20/30) = (0, 1/3, 2/3)$ tendremos $\mathbf{v}^{\infty} = (1, 0, 0)$. Esto nos dice que en el limite tendremos 30 flores rojas.

Si tuvieramos inicialmente 10 de cada tipo: $\mathbf{v}(0) = (1/3, 1/3, 1/3)$ tendremos también $\mathbf{v}^{\infty} = (1, 0, 0)$.

Nota: este es un ejemplo donde $\lambda = 1$ fue el único autovalor de módulo 1 y además simple. Tenemos estado límite y no depende de cual sea el estado inicial. **El estado límite es único.**

Ejemplo: La **migración de tres poblaciones**, está regida por el siguiente diagrama de estados:



Queremos determinar como son los estados de equilibrio y si existe estado límite

La matriz de transición es

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

sus autovalores son $\lambda = 1$ doble y $\lambda = \frac{1}{2}$.
Autovectores:

Para $\lambda = 1$ tenemos $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (autovectores en el espacio de estados $\mathcal{V}$)

Para $\lambda = 1/2$, tenemos $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (notar que sus componnetes suman 0).

Estados de equilibrio:
Cualquier vector de la forma

$$\mathbf{v} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

es autovector asociado a $\lambda = 1$ y para que este en el espacio de estados debe ser $\alpha, \beta \geq 0$ y $\alpha + \beta = 1$.
Cualquier

$$\mathbf{v}^* = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 - \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{con } \alpha \in [0, 1]$$

es estado de equilibrio pues cumple $\mathbf{v}^* \in \mathcal{V}$ y $P\mathbf{v}^* = \mathbf{v}^*$.

Nota: Como $m_{\lambda=1} = \dim \varepsilon_{\lambda=1} = 2$ podemos afirmar que se pueden encontrar dos estados de equilibrio linealmente indpendientes. Además en este caso P es diagonalizable.

Como $\lambda = 1$ es el único autovalor de modulo 1 por la proposición anterior sabemos que hay estado límite.

Como $\lambda = 1$ no es simple, el estado limite no es único. Dicho estado será una combinación lineal de los autovectores asociados a $\lambda = 1$. y dependerá del vector de estados inicial.

Supongamos que tenemos un vector inicial, en miles de individuos, $\mathbf{u}(0) = (30, 20, 10)$, que podemos representar como vector en el espacio de estados como $\mathbf{v}(0) = (1/2, 1/3, 1/6)$. Queremos predecir la distribución de la población a largo plazo.

¿Como hacemos para determinar el estado límite para este estado inicial?

Escribimos el vector de estado inicial como combinación lineal de los autovectores:

$$\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{pmatrix} = \frac{7}{12}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{5}{12}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{v}(n) = P^n \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{pmatrix} = \frac{7}{12}1^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{5}{12}1^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{12}(\frac{1}{2})^n \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Haciendo $n \to \infty$ concluimos que el estado limite es $\mathbf{v}^\infty = (7/12, 5/12, 0)$. Podemos verificar que $P\mathbf{v}^\infty = \mathbf{v}^\infty$.

Entonces asintóticamente los 60 mil individuos se reparten $60\frac{7}{12} = 35$ mil en 1, $60\frac{5}{12} = 25$ mil en 2 y 0 en 3.

Veamos otra forma de llegar al estado límite.
Notamos que la matriz P es diagonalizable en $\mathbb{R}$. De hecho podemos escribir

$$P = \mathrm{V} D \mathrm{V}^{-1}$$

donde

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad V^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Entonces como

$$P^k = \mathrm{V} D^k \mathrm{V}^{-1} = \mathrm{V} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1/2)^k \end{pmatrix} \mathrm{V}^{-1}$$

es sencillo ver como será en el límite

$$\lim_{k\to+\infty} P^k = \mathrm{V}\,(\lim_{k\to+\infty} D^k)\,\mathrm{V}^{-1} = \mathrm{V}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\mathrm{V}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P^\infty$$

Podemos encontrar el estado limite usando P^∞.
Para el estado inicial $\mathbf{v}(0) = (1/2, 1/3, 1/6)$ nos queda

$$\mathbf{v}^\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/12 \\ 5/12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que nos decia que a la larga de los 60 mil individuos tendremos 35 mil en la población 1 y 25 mil en la ciudad 2 y o en la ciudad 3.

Si por el contrario el vector inicial es $\mathbf{u}(0) = (0, 30, 30)$, que como vector de estados es $\mathbf{v}(0) = (0, 1/2, 1/2)$ y queremos predecir la distribución de la población a largo tiempo...

$$\mathbf{v}^{\infty} = P^{\infty}\mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Verificamos que $P\mathbf{v}^{\infty} = \mathbf{v}^{\infty}$.
Esto nos dice que a la larga de los 60 mil individuos tendremos 15 mil en el estado 1 y 45 mil en el estado 2.