| 1 | 2 | 3 | Calificación |
|---|---|---|---|
| | | | |

Nombre y apellido:

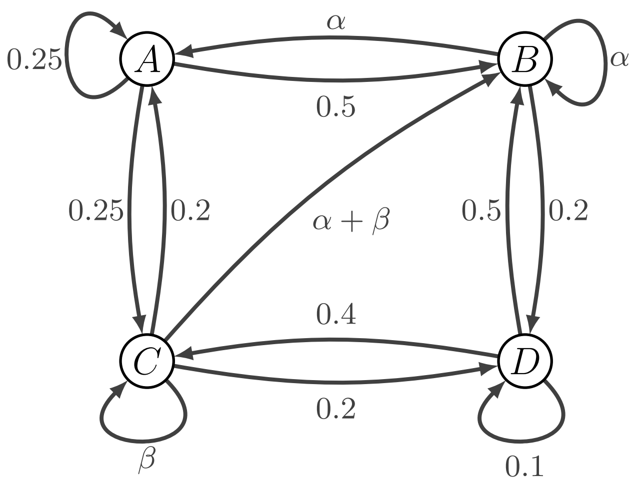
Número de libreta:

# Álgebra Lineal Computacional

Segundo Parcial – 8 de julio de 2022

*Para aprobar el parcial deberá obtenerse un puntaje mayor o igual que 4.*

**Ejercicio 1.** En un país existen cuatro destinos turísticos importantes: $A$, $B$, $C$ y $D$. El siguiente esquema muestra la dinámica de viaje diario de los turistas. El valor en cada flecha representa qué proporción de turistas viajan diariamente. Por ejemplo, por día el 50% de los turistas que se encuentran en $A$ viajan a $B$, mientras que el 25% decide permanecer en $A$.




a) (1 pt.) Escribir la matriz de transición $P$.

b) (0.5 pts.) Si inicialmente hay 400 turistas en $A$, 500 en $B$, 500 en $C$ y 600 en $D$. Luego de 3 días, ¿aproximadamente cuántos turistas habrá en $A$? ¿Cuántos habrá en $D$ luego de 5 días?

c) (0.5 pts.) Decidir si para el estado inicial correspondiente a la situación del ítem b) existe estado límite. En caso afirmativo, calcularlo.

d) (1 pt.) Decidir si existe $P^\infty$. En caso afirmativo, calcularla.

**Ejercicio 2.** Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, notamos $A = D + L + U$, donde $D$ es diagonal, $L$ triangular inferior estricta y $U$ triangular superior estricta. Sea $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matriz identidad.

a) (0.5 pts.) Mostrar que si la siguiente iteración converge a $x^*$, entonces $x^*$ es solución de $Ax = b$:

$$(2D + I)\, x^{(k+1)} = (-L + I - U + D)\, x^{(k)} + b$$

b) (1 pt.) Considerar el método iterativo del ítem anterior:

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$$

donde $B = (2D + I)^{-1}(-L + I - U + D)$ y $c = (2D + I)^{-1}\, b$.
Mostrar que $\lambda$ es autovalor de $B$ si y sólo si $\lambda$ cumple:

$$\det\left(-L + I - U + D - \lambda(2D + I)\right) = 0$$

c) (1.5 pts.) Considerar la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

Hallar para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ el método propuesto en b) converge.

d) (1 pt.) Fijando $\alpha = 0.5$, decidir si el método de Gauss-Seidel converge. En caso afirmativo, ¿converge en general más rápido que el método del ítem b)?

**Ejercicio 3.** A los largo de los años, en un río cercano a un complejo industrial se han tomado muestras de agua para medir la presencia de cierto contaminante. Los datos han sido resumidos en la siguiente tabla, donde $x$ representa el año desde el inicio de la toma de las muestras e $y$ representa la concentración del contaminante en $mg/L$:

| $x$ | 0.0 | 1.0 | 2.0 | 3.0 | 4.0 | 5.0 | 6.0 | 7.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0.13 | 0.68 | 1.49 | 1.6 | 1.85 | 1.96 | 2.2 | 2.27 |

a) (1 pt.) Hallar el polinomio $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$ que mejor ajusta a los datos en sentido de cuadrados mínimos. Graficar conjuntamente los datos y la función obtenida.

b) (1.5 pts.) Ajustar una función de la forma $g(x) = \ln(d_0 + d_1x)$ aplicando cuadrados mínimos sobre la función transformada convenientemente. Graficar conjuntamente los datos y la función obtenida.

c) (0.5 pts.) Para cada uno de los ajustes obtenidos, ¿cuánto contaminante se espera hallar en el año 8?