Álgebra Lineal Computacional

Segundo Cuatrimestre 2022

Práctica N° 5: Métodos iterativos para sistemas lineales.

Ejercicio 1. Escribir un programa que implemente el método de Jacobi y otro que implemente el método de Gauss-Seidel para la resolución de un sistema lineal $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, con las siguientes condiciones:

- que finalice si el método se estaciona,
- que finalice con una advertencia si se excede cierto tope de iteraciones.

Sugerencia: investigar los comandos np. tril , np. triu y np.diag.

Ejercicio 2. El objetivo de este ejercicio es probar que el radio espectral de una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ acota inferiormente a toda norma de $\boldsymbol{A}$, sin utilizar normas complejas.

Dada $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sea $\lambda = a+ib$ un autovalor de $\boldsymbol{A}$ y sea $\boldsymbol{u}+i\boldsymbol{v}$ el autovector correspondiente, con $a, b \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$.

a) Calcular $\boldsymbol{Au}$ y $\boldsymbol{Av}$ y probar que:

$$\|\boldsymbol{Au}\|_2^2 + \|\boldsymbol{Av}\|_2^2 = (a^2 + b^2)(\|\boldsymbol{u}\|_2^2 + \|\boldsymbol{v}\|_2^2).$$

b) Concluir que:

$$|\lambda| \leq \|\boldsymbol{A}\|_2.$$

c) Probar que dada una norma cualquiera $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^{n\times n}$ vale que

$$|\lambda| \leq \|\boldsymbol{A}\|.$$

Sugerencia: Usar la equivalencia de normas. Notar que si $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^m$, entonces λ^m es autovalor de $\boldsymbol{B}$.

Ejercicio 3. Considerar el sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ para $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 64 & -6 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{b} = (1, 2)^t$.

a) Demostrar que el método de Jacobi converge para todo dato inicial. Verificar, sin embargo, que la matriz no es diagonal dominante.

b) Sea $\boldsymbol{J}$ la matriz de iteración. Hallar las normas 1, ∞ y 2 de $\boldsymbol{J}$.
¿Contradice la convergencia del método?

c) Hallar una norma $\| \ \|$ en la cual $\|\boldsymbol{J}\|$ sea < 1.
Sugerencia: Considerar una base de autovectores de $\boldsymbol{J}$.

Ejercicio 4. Decidir para cada uno de los siguientes sistemas, si los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel son convergentes. En caso afirmativo usarlos para resolver el sistema. Si ambos métodos convergen, determinar cuál converge más rápido ¿Es la matriz del sistema diagonal dominante? ¿Y simétrica y definida positiva?

$$\text{a)}\quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \text{b)}\quad \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 32 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5.

a) Mostrar que toda matriz $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con $|\det(\boldsymbol{B})| > 1$ tiene un autovalor λ, real o complejo, con $|\lambda| > 1$.

b) Decidir si el método de Jacobi converge o no para un sistema dado por la matriz
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 6. Probar que el método de Jacobi converge para todo sistema de 2×2 dado por una matriz simétrica y definida positiva.

Ejercicio 7. Sean $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ las matrices

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ c & a & c \\ 0 & c & a \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ b & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Probar que $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{B}^n = 0$ si y sólo si $|b| < \sqrt{2}/2$.

b) Dar condiciones necesarias y suficientes sobre $a, c \in \mathbb{R}$ para la convergencia del método de Jacobi aplicado a la resolución de $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}$.

Ejercicio 8.

a) Sean $\boldsymbol{M}, \mathbf{N} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, con $\boldsymbol{M}$ inversible. Probar que los autovalores de $-\boldsymbol{M}^{-1}N$ son las raíces del polinomio $\det(\lambda\boldsymbol{M} + \mathbf{N})$

b) Sean
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1+\frac{1}{\alpha} \\ 1 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 1+\frac{1}{\alpha} & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Para resolver un sistema $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ se propone el método iterativo:
$$\boldsymbol{x}_{n+1} = -\boldsymbol{M}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_n + \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{b}, \tag{1}$$
Siendo $\mathbf{N} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{M}$. Probar que si el método (1) converge a $\boldsymbol{x}$, entonces $\boldsymbol{x}$ es solución del sistema $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

c) Hallar todos los valores de α para los cuales el método propuesto converge.

d) ¿Qué restricción impondrían sobre α si se quiere garantizar que el error $\mathbf{e}_n = \boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}$ satisfaga:

$$\|\mathbf{e}_n\| < \left(\frac{1}{2}\right)^n \|\mathbf{e}_0\|,$$

para alguna norma $\|\cdot\|$?

Ejercicio 9. Utilizar la iteración de Gauss-Seidel para resolver el sistema $\boldsymbol{A}_n x = \boldsymbol{b}_n$ para

$$\boldsymbol{A}_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 + \frac{1}{n^2} \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{b}_n = (1, 2 - \frac{1}{n^2})^t.$$

¿Cómo es la convergencia? ¿Tiene esto que ver con el mal condicionamiento de $\boldsymbol{A}$? Dar un ejemplo de una matriz mal condicionada para la cual la convergencia sea rápida.

Ejercicio 10. (método SOR) Dada $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con $a_{ii} \neq 0$, $1 \leq i \leq n$, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{D} + \boldsymbol{U}$.

a) Demostrar que el sistema $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ es equivalente al sistema $(\boldsymbol{D} + \omega\boldsymbol{L})\boldsymbol{x} = ((1-\omega)\boldsymbol{D} - \omega\boldsymbol{U})\boldsymbol{x} + \omega\boldsymbol{b}$, cualquiera sea $\omega \neq 0$.

b) Considere el método iterativo $\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{B}(\omega)\boldsymbol{x}^k + c$ con

$$\boldsymbol{B}(\omega) = (\boldsymbol{D} + \omega\boldsymbol{L})^{-1}((1-\omega)\boldsymbol{D} - \omega\boldsymbol{U}).$$

Probar que $\det(\boldsymbol{B}(\omega)) = (1-\omega)^n$ y concluir que si el método converge $\Rightarrow \omega \in (0,2)$.

c) Sea

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Compare los métodos para $\omega = \frac{3}{2}$ y $\omega = 1$ ¿ Cuál elegiría y por qué ?

Ejercicio 11. Considerar la forma cuadrática $f(x,y) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy + \delta x + \varepsilon y + \eta$.

a) Probar que si $\boldsymbol{x} = (x,y)^t$, entonces f puede escribirse en forma matricial como:

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\boldsymbol{x} + \eta,$$

para cierta $\boldsymbol{A}$ simétrica.

b) Probar que los puntos críticos de f son las soluciones del sistema $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

c) Probar que f tiene un mínimo (único) si y sólo si $\boldsymbol{A}$ es definida positiva (estricta). Inversamente: f tiene un máximo (único) si y sólo si $\boldsymbol{A}$ es definida negativa.

d) Probar que si $\boldsymbol{A}$ tiene autovalores $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ entonces f tiene un punto silla (hallar una dirección en la que tenga un máximo y una dirección en la que tenga un mínimo).

e) ¿Cambia algo si la cuadrática está definida sobre n variables $x_1, \ldots, x_n$?

Ejercicio 12. Dada la analogía delineada en el ejercicio anterior, cuando $\boldsymbol{A}$ es simétrica y definida positiva, tiene sentido pensar el problema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ como un problema de minimización. Los métodos de descenso toman un vector inicial $\boldsymbol{x}^{(0)}$ y realizan la iteración: $\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + t^k \boldsymbol{v}^{(k)}$, donde $\boldsymbol{v}^{(k)}$ es una *dirección de descenso* elegida en cada paso y t^k es un parámetro que indica cuánto moverse lo largo de la dirección $\boldsymbol{v}^{(k)}$.

a) Probar que la dirección de máximo descenso de una función f en un punto $\boldsymbol{x}^{(0)}$ está dada por: $-\nabla f(\boldsymbol{x}^{(0)})$.
Sug.: recordar la derivada direccional de f en la dirección de $\boldsymbol{v}$ puede calcularse como $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) = \nabla f(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}$.

b) Mostrar que para una función cuadrática como la del ejercicio anterior el gradiente negativo es el residuo: $-\nabla f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{r} := \boldsymbol{b} - \boldsymbol{Ax}$.

c) El método del gradiente es un método de descenso en el que se elige como dirección de descenso el gradiente negativo: $\boldsymbol{v}^{(k)} = -\nabla f(\boldsymbol{x}^{(k)}) = \mathbf{r}^{(k)}$. Probar que para f cuadrática, la función $\varphi(t) = f(\boldsymbol{x}^{(k)} + t\mathbf{r}^{(k)})$ alcanza un mínimo en $t = \frac{\mathbf{r}^{(k)t}\mathbf{r}^{(k)}}{\mathbf{r}^{(k)t}\boldsymbol{A}\mathbf{r}^{(k)}}$. [Obs.: la función φ es la cuadrática restringida a la recta con vector director $\mathbf{r}^{(k)}$ que pasa por $\boldsymbol{x}^{(k)}$].

Ejercicio 13. En el contexto del Ejercicio 12, mostrar que si la función φ se define como $\varphi(t) = f(\boldsymbol{x}^{(k)} + t\mathbf{d}^{(k)})$, donde $\mathbf{d}^{(k)}$ es una dirección cualquiera, entonces el mínimo de φ se alcanza en $t = \frac{\mathbf{r}^{(k)t}\mathbf{r}^{(k)}}{\mathbf{d}^{(k)t}\boldsymbol{A}\mathbf{d}^{(k)}}$.

Ejercicio 14. Implementar el método del gradiente descripto en el Ejercicio 12, eligiendo en cada paso el valor de t óptimo. El algoritmo debe detenerse cuando la diferencia entre dos iteraciones sucesivas es menor que una tolerancia dada. Además, debe almacenar toda la sucesión de puntos generada y devolverla en forma de matriz de $N \times n$, donde n es el tamaño del problema y N el número de iteraciones realizadas.

Ejercicio 15.

a) Aplicar el método del gradiente a la resolución del sistema: $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ siendo:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 12 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

b) Si X es la matriz que devuelve el método (cada fila es una iteración), correr el siguiente código:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
x      = np.linspace(0,6,100)
y      = np.linspace(-2,2,100)
xx,yy  = np.meshgrid(x,y)
zz     = np.zeros(xx.shape)
for i in range(xx.shape[0]):
    for j in range(yy.shape[1]):
        vec     = np.array([xx[i,j],yy[i,j]])
        zz[i,j] = 0.5*vec@A@vec - b@vec
plt.contour(xx,yy,zz)
```

```
plt.plot(X[:,0],X[:,1],'*-')
plt.show()
```

Interpretar qué hace cada línea.

c) ¿Qué se muestra en el gráfico obtenido? ¿Qué se observa?

Álgebra Lineal Computacional

Primer Cuatrimestre 2022

Práctica N° 6: Valores singulares.

Ejercicio 1. Considerar la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Calcular una descomposición en valores singulares de $\boldsymbol{A}$.

(b) Dibujar el círculo unitario en $\mathbb{R}^2$ y la elipse $\{\boldsymbol{Ax} : \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2, \|\boldsymbol{x}\|_2 = 1\}$, señalando los valores singulares y los vectores singulares a izquierda y a derecha.

(c) Calcular $\|\boldsymbol{A}\|_2$ y $\text{cond}_2(\boldsymbol{A})$.

(d) Calcular $\boldsymbol{A}^{-1}$ usando la descomposición hallada.

Ejercicio 2. Determinar una descomposición en valores singulares de las siguientes matrices:

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3. Sea

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{pmatrix}$$

Probar que para todo $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$ se tiene $\|\boldsymbol{Av}\|_2 \geq 15\|\boldsymbol{v}\|_2$.

Ejercicio 4. Mostrar que $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tiene un valor singular nulo si y sólo si tiene un autovalor nulo.

Ejercicio 5. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, probar que los valores singulares de A^t, $\bar{A}$ y A^* son iguales a los de $\boldsymbol{A}$.

Ejercicio 6. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, de rango r, con valores singulares no nulos: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r$

(a) Probar que $\boldsymbol{A}$ puede escribirse como una suma de r matrices de rango 1.

(b) Probar que dado $s < r$ se pueden sumar s matrices de rango 1 matrices adecuadamente elegidas de manera de obtener una matriz $\boldsymbol{A}_s$ que satisface:

$$\|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}_s\|_2 = \sigma_{s+1}$$

Nota: $\boldsymbol{A}_s$ resulta ser la mejor aproximación a $\boldsymbol{A}$ (en norma 2), entre todas las matrices de rango s.

Ejercicio 7. Sea

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Hallar la matriz de rango 2 que mejor aproxima a $\boldsymbol{A}$ en norma 2.

(b) Hallar la matriz de rango 1 que mejor aproxima a $\boldsymbol{A}$ en norma 2.

Ejercicio 8. Dada una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$, cuya descomposición en valores singulares reducida es $\boldsymbol{A} = \hat{\boldsymbol{U}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}\hat{\boldsymbol{V}}^t$. Se define la pseudo-inversa de $\boldsymbol{A}$ como $\boldsymbol{A}^\dagger = \hat{\boldsymbol{V}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^\dagger\hat{\boldsymbol{U}}^t$, donde $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^\dagger$ es la matriz $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ con los valores singulares no nulos invertidos.

(a) Verificar que $\boldsymbol{A}^\dagger$ satisface las siguientes propiedades:

i. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$

ii. $\boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\dagger = \boldsymbol{A}^\dagger$

iii. $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\dagger)^t = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\dagger$

iv. $(\boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{A})^t = \boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{A}$

(b) Probar que si dos matrices $\boldsymbol{B}_1$ y $\boldsymbol{B}_2$ satisfacen las 4 propiedades del ítem anterior, entonces verifican $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_2$ y $\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{A}$.

(c) Probar que la pseudo inversa de A es única.

Ejercicio 9. Caracterizar geométricamente y graficar la imagen de la esfera unitaria

$$S_2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\boldsymbol{x}\| = 1\}$$

por la transformación $T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, con

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ 2 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 10. Hallar, si existe, una matriz A con coeficientes reales y del tamaño adecuado para que los valores singulares no nulos de $\boldsymbol{A}$ sean $\left\{\frac{3}{2}, 3\right\}$,

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Compresión de Imágenes

El resultado del ejercicio 6 se puede aprovechar para comprimir imágenes. La idea es la siguiente: dada una imagen (en principio, en blanco y negro), se puede representar a través de una matriz en la que cada elemento indica la intensidad de color del pixel. El objetivo de los siguientes ejercicios es estudiar esta aplicación.

Ejercicio 11. Descargar la imagen `quijote.jpg` y utilizar el comando `imread` de la librería `matplotlib.pyplot` para cargarla. Imprimir el resultado. Mostrar la imagen utilizando el comando `imshow`. Probablemente, la gama de colores por defecto no sea en blanco y negro. Ejecutar el comando: `from matplotlib import cm` y volver a correr `imshow`, esta vez con la opción `cmap="gray"`. (Buscando `matplotlib colormap` se encuentran fácilmente distintos mapas de colores para graficar).

Ejercicio 12. Escribir un programa que reciba como input una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y un entero positivo r y:

- Calcule la descomposición en valores singulares $\boldsymbol{A}$, utilizando el comando `np.linalg.svd` o el comando `scipy.linalg.svd`. Ambos comandos devuelven $\boldsymbol{U} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ y $\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^{\min\{n,m\}}$, de manera tal que $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\mathrm{diag}(\boldsymbol{s})\boldsymbol{V}$.

- Devuelva: una tupla con la dimensión original de la matriz $\boldsymbol{A}$ (n, m), las matrices $\tilde{\boldsymbol{U}} \in \mathbb{R}^{n\times r}$ y $\tilde{\boldsymbol{V}} \in \mathbb{R}^{r\times m}$ que surgen de eliminar de $\boldsymbol{U}$ y $\boldsymbol{V}$ los vectores singulares con índice mayor a r y el vector de valores singulares $\tilde{\boldsymbol{s}} \in \mathbb{R}^r$, también recortado.

Ejercicio 13. Escribir un programa que recontruya la matriz a partir del output del programa anterior. Es decir, que:

- Reciba el tamaño (n, m), las matrices $\tilde{\boldsymbol{U}}$ y $\tilde{\boldsymbol{V}}$ el vector $\tilde{\boldsymbol{s}}$.

- Amplie las matrices con ceros generando $\boldsymbol{U}' \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{V}' \in \mathbb{R}^{m\times m}$; y ponga $\tilde{\boldsymbol{s}}$ en la diagonal de una matriz $\boldsymbol{\Sigma}' \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

- Devuelva la matriz $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{U}'\boldsymbol{\Sigma}'\boldsymbol{V}'$ (que es la mejor aproximación a $\boldsymbol{A}$ entre las matrices de rango r).

Ejercicio 14. Aplicar los programas anteriores a la imagen del ejemplo (y eventualmente a otras). El output del primer programa correspondería a la imagen comprimida, sólo se almacenan: una tupla con dos números ((n, m)), r vectores de longitud n, r vectores de longitud m y r valores singulares. El segundo programa *abre* los datos comprimidos y muestra la imagen. Naturalmente, la compresión implica la pérdida de información (y por lo tanto, de calidad en la imagen). Experimentar con distintos valores de r.

Se puede estudiar la calidad de la aproximación a través del error relativo:

$$\frac{\|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}_r\|_2}{\|\boldsymbol{A}\|_2} = \frac{\sigma_{r+1}}{\sigma_1}.$$

Para analizar la proporción de compresión se puede calcular el cociente entre la cantidad datos almacenados por la matriz original (mn) y los datos almacenados por las matrices comprimidas ($(m+n)r + r + 2$).

Calcular el error relativo de aproximación y la proporción de compresión para distintos valores de r.

Ejercicio 15. La misma idea puede utilizarse con imágenes en color. Al leer una imagen color, imread genera un array A tridimensional, de $n \times m \times 3$. $A[:,:,0]$, $A[:,:,1]$ y $A[:,:,2]$ son los canales RGB (en ese orden) de la imagen. Experimentar con alguna imagen color realizando la compresión en cada una de las componentes (puede ser con parámetros r_i distintos) y reensamblando el array tridimensional.

Álgebra Lineal Computacional

Segundo Cuatrimestre 2022

Práctica N° 7: Interpolación y cuadrados mínimos.

Ejercicio 1. Método de Horner Dado un polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. ¿Cuántos productos y cuántas sumas se realizan al evaluar el poliomio en un cierto x_0? Horner propone como alternativa escribir a p como $p(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \cdots + x(a_{n-1} + xa_n)))$. ¿Cuántos productos y cuántas sumas se realizan al evaluar p bajo esta forma?

Este método justifica que `Numpy` (y otros lenguajes) utilicen una notación especial para evaluar polinomios, en lugar de usar la notación usual de funciones (`f= lambda x: ...`, en el caso de Python).

Ejercicio 2. Sea una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$, cuya descomposición en valores singulares reducida es $\boldsymbol{A} = \hat{\boldsymbol{U}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}\hat{\boldsymbol{V}}^t$ y la pseudo-inversa de $\boldsymbol{A}$ es $\boldsymbol{A}^\dagger = \hat{\boldsymbol{V}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\hat{\boldsymbol{U}}^t$. Suponiendo que $\boldsymbol{A}$ tiene rango n, probar $\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{b}$ es la única solución del problema de cuadrados mínimos, o sea, mostrar que:

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2.$$

Ejercicio 3. Para cada uno de los conjuntos de datos, plantear las ecuaciones normales y calcular los polinomios de grado $1, 2$ y 3 que mejor aproximan la tabla en el sentido de cuadrados mínimos. Graficar los datos junto con los tres polinomios. ¿Qué se observa? ¿Qué se puede decir del polinomio de grado 3?

x	-1	0	2	3
y	-1	3	11	27

x	-1	0	1	2
y	-3	1	1	3

Ejercicio 4. Hallar la constante (polinomio de grado 0) que mejor aproxima en el sentido de cuadrados mínimos a una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ en n puntos $x_1, \ldots, x_n$ en $[a, b]$.

Ejercicio 5. Los siguientes datos corresponden a la población argentina (expresada en millones de habitantes):

Año	1950	1960	1970	1980	1990	2000
Hab. (millones)	17	20.5	23.9	27.9	32.6	36.9

(a) Utilizando `np.polyfit`, hallar una función f de la forma $f(x) = ax + b$ que mejor ajuste los datos en el sentido de mínimos cuadrados. Graficar en una misma figura los datos y la función f.

(b) Utilizando la función del ítem anterior, ¿qué población se puede inferir que había en Argentina en los años 1955, 1965, 1975, 1985 y 1995?

(c) La población *real* de la Argentina en los años del ítem anterior era de 18.8, 22.2, 25.9, 30.2 y 34.8 millones de habitantes respectivamente. Calcular el error que se cometió al inferir la población de estos años a partir del ajuste del ítem (a). Volver a graficar la función f del ítem (a), incorporando (en otro color) los nuevos datos.

(d) ¿Considera que la inferencia del íem (b) es razonablemente buena?

Ejercicio 6. Supongamos que se tienen puntos $x_0, x_1, \dots, x_n$ distintos, y se quiere hallar el polinomio p de grado a lo sumo n de modo que $p(x_i) = y_i$ (p *interpola* los puntos (x_i, y_i)). Plantear la matriz del problema (matriz de Vandermonde) ¿Qué tamaño tiene? Observar que p se puede ver como un caso particular de aproximación en el sentido de cuadrados mínimos.

Ejercicio 7. Interpolar la siguiente función en $n+1$ puntos equiespaciados en el intervalo $[-1, 1]$.

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}.$$

Graficar simultáneamente la función con sus respectivos interpoladores p_n para $n = 5, 10, 15$. Para valores altos de n ¿mejora o empeora la aproximación? Calcular la norma infinito de $(f - p_n)$.

Ejercicio 8. Considerar los datos del ejercicio 5.

Se quiere aproximar los datos con una función g de la forma $g(x) = e^{p(x)}$ con p un polinomio. Linealizar el problema y calcular el polinomio de grado 5 que interpola los datos.

Imprimir la expresión del polinomio en pantalla. ¿Observa algo llamativo? ¿Qué grado diría que tiene el polinomio?

Repetir el ajuste usando p de grado 1. Graficar.

Ejercicio 9. Supongamos que se deja caer un objeto desde una altura de 200 m. Mientras cae, se toman las siguientes mediciones:

tiempo	0	1	2	4	6
altura	200	195	180	120	25

Se quiere aproximar los datos en el sentido de cuadrados mínimos con una función de la forma $f(t) = at^2 + b$.

(a) Escribir la matriz del problema. ¿Se puede usar el comando `np.polyfit` con grado 2 para realizar el ajuste? ¿Qué se podría hacer para usar `np.polyfit`?

(b) Sabiendo que la altura de dicho objeto después de haber transcurrido un tiempo t viene dada por $f(t) = 200 - \frac{1}{2}gt^2$, determinar el valor aproximado de g.

Ejercicio 10. En cierta especie animal se estudia la relación entre el peso X (en kg) y el volumen pulmonar Y (en litros), obteniéndose los datos:

peso (kg)	60	85	100	150	250
vol. pulmonar (l)	2.3	4	5	9	19.5

(a) Ajustar los datos a una función $Y = aX^b$ en el sentido de cuadrados mínimos.

(b) Graficar.

(c) Predecir el volumen pulmonar de un individuo cuyo peso es de 93kg.

Ejercicio 11. Implementar un programa que reciba como input una lista de funciones $\{f_1, \dots, f_m\}$ y dos vectores $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n)$, y calcule la función $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x)$ que mejor aproxime los datos en el sentido de cuadrados mínimos.

Ejercicio 12. El archivo `humedad.csv` contiene los datos (simulados) de porcentaje de humedad diaria de Buenos Aires en 2020. Como los datos de humedad muestran periodicidad anual, se propone un modelo

$$f(t) = c_1 + c_2 \sin\left(t\frac{2\pi}{366}\right) + c_3 \sin\left(t\frac{4\pi}{366}\right).$$

Utilizando el programa del ejercicio 11, hallar los coeficientes c_1, c_2, c_3 que mejor ajustan los datos en el sentido de mínimos cuadrados. Graficar la función obtenida junto con los datos.

Ejercicio 13. En el archivo `infantesConBajoPesoAlNacer.txt` se encuentran los datos correspondientes a mediciones de 100 niños nacidos con bajo peso en Boston (Labor and deliver characteristics and the risk of germinal matrix hemorrhage in low birth weight infants. Journal of child neurology, 6(1) , 35-40, (1991))

Llamamos

Y = perímetro cefálico del bebé al nacer, en centímetros (columna headcirc).
X_1 = edad gestacional del bebé al nacer, en semanas (columna gestage).
X_2 = peso al nacer del bebé, en gramos (columna birthwt).

Se quiere predecir el perímetro cefálico de un niño al nacer.

(a) Graficar X_1 vs Y y X_2 vs Y. ¿Qué tipo de relación observa en cada caso?

(b) Plantear un modelo de regresión lineal para predecir el perímetro cefálico del bebé en función de su edad gestacional.

(c) Plantear un modelo de regresión lineal múltiple para predecir el perímetro cefálico del bebé en función de su edad gestacional y de su peso al nacer.

(d) Si en el modelo obtenido en el ítem anterior mantenemos constante la edad gestacional, cuántos centímetros de aumento en su perímetro cefálico, en promedio, se corresponde a cada incremento del peso en 10 gramos?

Ejercicio 14. El ejercicio 7 muestra que la interpolación con polinomios de grado alto puede ser mala idea. Una alternativa puede ser la de interpolar a trozos por polinomios de bajo grado (por ejemplo, lineales). Esta idea tiene múltiples aplicaciones de las que aquí veremos un ejemplo:
Considerar una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y una partición uniforme del intervalo: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, con $x_i = a + ih$, $h = \frac{b-a}{n}$.

(a) Escribir en términos de x_i, x_{i+1} y f la fórmula de una lineal que interpole a f en x_i y x_{i+1} (llamémosla p_i).

(b) Calcular de manera exacta la integral:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} p_i(x)dx.$$

(c) Mostrar que $I = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ puede aproximarse por la fórmula:

$$I \sim \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right].$$

Esta aproximación se conoce como *regla de trapecios compuesta.*

(d) Implementar una función que reciba una función f, un intervalo $[a, b]$ y un valor (opcional) n y aproxime la integral a través de la fórmula de trapecios compuesta con $n+1$ nodos. [Para pensar: ¿se puede vectorizar esta operación de modo de no aplicar explícitamente un `for`?]

(e) Calcular las siguientes integrales (usando distintos valores de n) y comparar el resultado obtenido con el valor exacto:

(i) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx.$

(ii) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(2x)dx.$

(iii) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}dx.$

(iv) $\displaystyle\int_0^{1} e^x dx.$