

Obliczeniowe badanie oczekiwanego zachowania  
dzielników pierwszych  
liczb naturalnych

Maciej Dębski

10 stycznia 2016

# Podstawy teoretyczne

Jak wiadomo z podstaw teorii liczb, każdą liczbę naturalną  $n \in \mathbb{N}$  można przedstawić jako

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_k, \quad p_i \in \mathbb{P}.$$

Będziemy tutaj rozpatrywać podobne przedstawienie, tylko uporządkowane według rozmiaru  $p_i$  i uzupełnione jedynekami do stałej długości  $K$ :

$$n = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_K, \quad a_i \in \mathbb{P} \cup \{1\}, a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_K.$$

Takie przedstawienie zawsze istnieje dla odpowiednio dużego  $K$ , np. dla  $K > \log_2(n)$ .

Będę badał średni rozmiar dzielników  $a_i$  w porównaniu z  $n$ . W szczególności ciekawe wyniki daje badanie ich logarytmów o podstawie  $n$ . Możemy zapisać

$$n = n^{\gamma_1} \cdot \dots \cdot n^{\gamma_K}, \quad \gamma_i = \log_n a_i.$$

Oczywiście, po zlogarytmowaniu stronami otrzymujemy

$$1 = \gamma_1 + \dots + \gamma_K. \tag{1}$$

Zdefiniujmy teraz badane średnie. Niech  $\gamma_i(n), i \in \{1, \dots, K\}$  oznacza odpowiednią wartość z rozkładu  $n$ , jak powyżej. Dla ustalonego  $N$ , przyjmijmy

$$\bar{\gamma}_i = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \gamma_i(n).$$

Obliczenia wskazują, że dla każdego  $i$ , ciąg  $\bar{\gamma}_i$  jest zbieżny dla  $N \rightarrow \infty$ . Ponadto, suma tych ciągów wydaje się szybko zbiegać do 1, co jest odpowiednikiem równości (1) dla średnich.

# Metoda obliczeń

Obliczenia przeprowadziłem dla  $N = 10^9$  i  $K = 30$ , na pojedynczym komputerze z procesorem i7-3537U (2.00GHz) i 10GB pamięci RAM. Program napisałem w C++, a następnie mocno zoptymalizowałem i sprofilowałem - początkowe wersje działały kilka rzędów wielkości wolniej. Ostateczne obliczenia trwały poniżej 10 minut. Kod programu oraz dane wynikowe jest dostępny w repozytorium projektu: <https://github.com/mdebski/at1>

## Algorytm

Jednym z głównych problemów przy pisaniu programu było kontrolowanie zużycia pamięci. Tablica liczb (`uint32_t`) wielkości  $N = 10^9$  zajmuje 4GB pamięci, i dwie takie tablice już się nie mieściły, przy standardowym zużyciu pamięci przez system. Stąd na przykład niemożliwe było zapisanie pełnego rozkładu na czynniki pierwsze wszystkich rozpatrywanych liczb.

Problem podzieliłem na dwie części. W pierwszej za pomocą sita znajdowałem pewien dzielnik pierwszy dla każdej z liczb. Sprytna implementacja sita pozwoliła na osiągnięcie gwarancji że jest to najmniejszy dzielnik pierwszy, bez ograniczania prędkości sita. Następnie łatwo obliczyć największy dzielnik pierwszy - przechodząc dynamicznie tablicę od najmniejszych liczb, możemy obliczyć:

$$MaxPrimeDivisor[n] = \max(MinPrimeDivisor[n], MaxPrimeDivisor[n/MinPrimeDivisor[n]]).$$

W następnym etapie korzystając z obliczonej tablicy największych dzielników obliczałem  $\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_K$ . Warto zauważyć, że wszystkie dzielniki pierwsze  $n$ , wraz z krotnościami, uporządkowane od największego, to:

$$\begin{aligned} p_1 &= MaxPrimeDivisor[n] \\ p_2 &= MaxPrimeDivisor[n/p_1] \\ p_3 &= MaxPrimeDivisor[n/p_2] \\ &\dots \end{aligned}$$

W ten sposób dla każdej liczby obliczałem wszystkie dzielniki i odpowiednie wyrażenia  $\log(p_i)/\log(n)$  i dodawałem je do akumulatorów.

## Optymalizacje

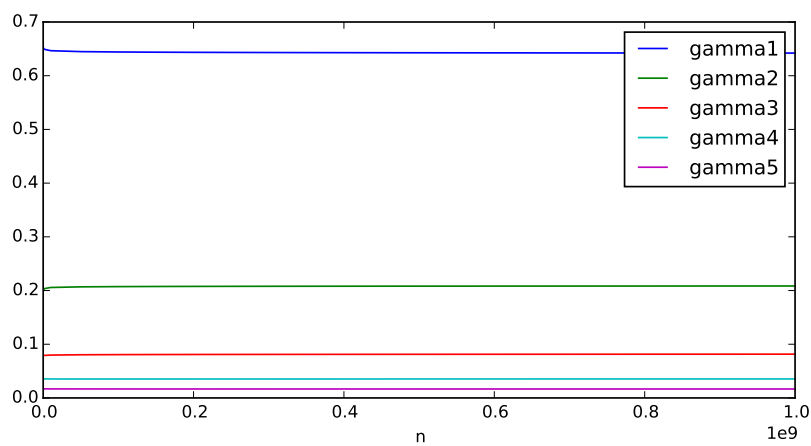
W pierwszej części zoptymalizowałem zużycie pamięci rezygnując z pamiętania całej tabeli dla sita - zamiast tego, trzymałem tylko dzielniki dla liczb względnie pierwszych z  $15 = \gcd(2, 3, 5)$ , a dla pozostałych obliczałem je na bieżąco - dzieląc przez 2, 3, 5. Pozwoliło to na zużycie  $15/\phi(15) \simeq 4$  razy mniej pamięci. Dla przyspieszenia poprzez zwiększenie lokalności odwołań do pamięci użyłem sita segmentowanego, według [http://primesieve.org/segmented\\_sieve.html](http://primesieve.org/segmented_sieve.html).

W drugiej części istotną część kosztu stanowiło obliczanie logarytmów. Z tego powodu wpierw stablicowałem wartości logarytmów liczb pierwszych mniejszych od  $10^9$ . Jako że jest ich tylko około  $5 \cdot 10^7$  nie stanowiło to dużego narzutu pamięciowego. Do ich przechowywania istotnie lepiej zadziałała mapa `boost::container::flat_map` niż `std::map`. Ponadto, zmodyfikowałem wewnętrzną pętlę by nie obliczała  $\log(n)$  dla każdego  $p_i$ , a tylko jednokrotnie. Oczekiwałem że kompilator sam to zrobi w ramach optymalizacji wspólnych podwyrażeń, ale się przeliczyłem.

# Wyniki

## Szacowanie $\bar{\gamma}_i$

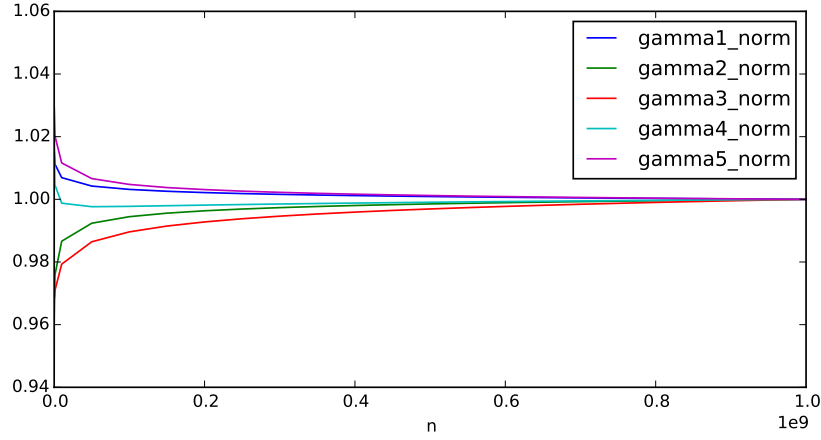
Najpierw przedstawię wyniki dotyczące poszczególnych  $\bar{\gamma}_i$ . Jak widać na poniższym wykresie dla kilku pierwszych  $i$ , wartości te zbiegają do stałych.



Dla  $N = 10^9$  przybliżone wartości kilku pierwszych  $\bar{\gamma}$  przedstawione są w poniższej tabeli.

$\bar{\gamma}_1$	0.64214
$\bar{\gamma}_2$	0.20846
$\bar{\gamma}_3$	0.08150
$\bar{\gamma}_4$	0.03534
$\bar{\gamma}_5$	0.16639

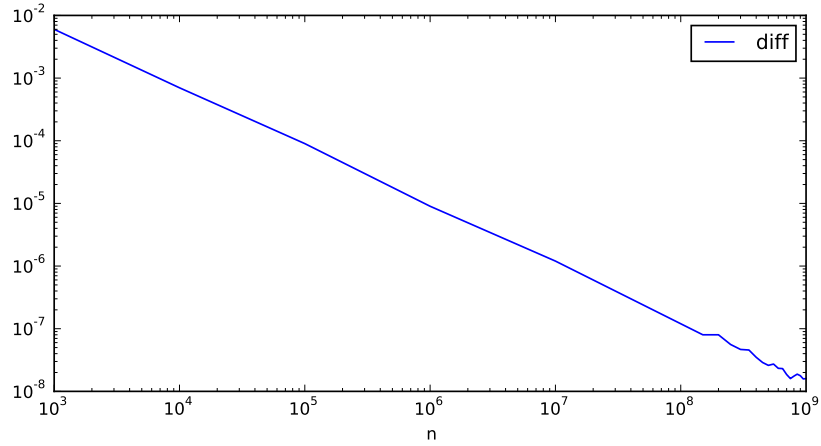
Celem oszacowania tempa zbieżności, przedstawiłem na poniższym wykresie stosunek  $\bar{\gamma}_i(n)/\bar{\gamma}_i(N)$ .



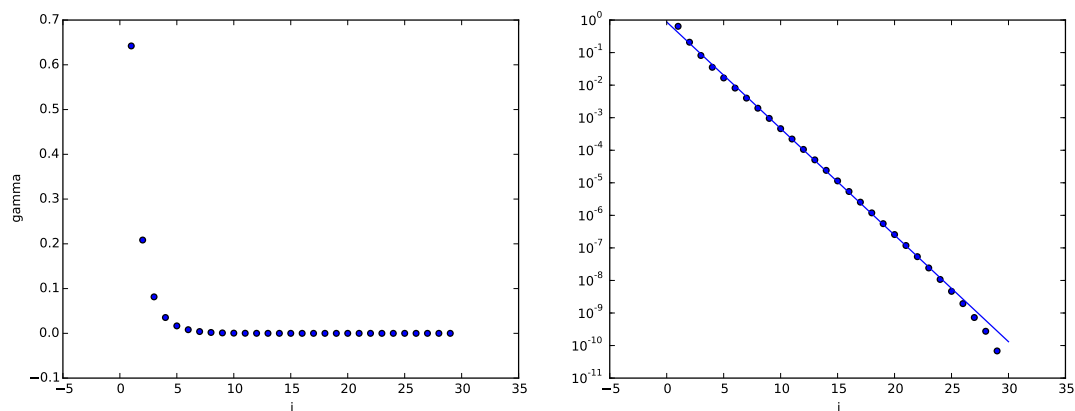
Wygląda na to, że zbieżność zachodzi dosyć szybko, różnice pomiędzy obliczonymi wartościami dla  $10^9$  i  $9 \cdot 10^8$  są rzędu  $10^{-5}$ . Interesującym wydaje się fakt, że obliczenia wskazują iż zbieżność jest monotoniczna, ale w różnych kierunkach w zależności od  $i$ . Nie udało mi się znaleźć regularności w tym zachowaniu.

### Zależności pomiędzy $\bar{\gamma}_i$

Ciekawsze wyniki można uzyskać badając zależności pomiędzy tymi wartościami. Po pierwsze, zgodnie z oczekiwaniem, także po uśrednieniu, suma wartości  $\gamma_i$  dąży do jedynki. Poniższy wykres przedstawia różnicę pomiędzy  $\bar{\gamma}_1(n) + \dots + \bar{\gamma}_K(n)$  a jedynką, na skalach logarytmicznych. Widać, że błąd jest rzędu  $1/n$ . Nieregularności na końcu wykresu wynikają najprawdopodobniej z niewystarczającej dokładności użytego typu zmiennoprzecinkowego double.



Zbadałem także jak eksperymentalna wartość granicy  $\bar{\gamma}_i$  zależy od  $i$ . Wykres po lewej pokazuje dokładnie tę zależność, a wykres po prawej pokazuje ją z logarytmiczną skalą  $y$ .



Na drugim wykresie punkty ewidentnie układają się wzdłuż prostej. Odchylenie na końcu wykresu wynika prawdopodobnie z niedostatecznej dokładności oszacowania - niewiele liczb z analizowanego wykresu ma ponad 25 dzielników pierwszych, więc dalsze  $\bar{\gamma}_i$  mogą być niedoszacowane. Przedstawiona na rysunku prosta, dopasowana do punktów od 1 do 24, ma równanie

$$y = -0.327418x + -0.059270,$$

co odpowiada zależności

$$\bar{\gamma}(i) = 10^{-0.327418i - 0.059270} \simeq 0.87 \cdot 0.47^i.$$