Obliczeniowe badanie oczekiwanego zachowania dzielników pierwszych liczb naturalnych

Maciej Dębski

8 stycznia 2016

Podstawy teoretyczne

Jak wiadomo z podstaw teorii liczb, każdą liczbę naturalną $n \in \mathbb{N}$ można przedstawić jako

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_k, \quad p_i \in \mathbb{P}.$$

Będziemy tutaj rozpatrywać podobne przedstawienie, tylko uporządkowane według rozmiaru p_i i uzupełnione jedynkami do stałej długości K:

$$n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_K, \quad a_i \in \mathbb{P} \cup \{1\}, a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_K.$$

Takie przedstawienie zawsze istnieje dla odpowiednio dużego K, np. dla $K > \log_2(n)$.

Będę badał średni rozmiar dzielników a_i w porównaniu z n. W szczególności ciekawe wyniki daje badanie ich logarytmów o podstawie n. Możemy zapisać

$$n = n^{\gamma_1} \cdot \ldots n^{\gamma_K}, \quad \gamma_i = \log_n a_i.$$

Oczywiście, po zlogarytmowaniu stronami otrzymujemy

$$1 = \gamma_1 + \ldots + \gamma_K. \tag{1}$$

Zdefiniujmy teraz badane średnie. Niech $\gamma_i(n), i \in \{1, \ldots, K\}$ oznacza odpowiednią wartość z rozkładu n, jak powyżej. Dla ustalonego N, przyjmijmy

$$\bar{\gamma}_i = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \gamma_i(n).$$

Obliczenia wskazują, że dla każdego i, ciąg $\bar{\gamma}_i$ jest zbieżny dla $N \to \infty$. Ponadto, suma tych ciągów wydaje się szybko zbiegać do 1, co jest odpowiednikiem równości (1) dla średnych.