

泰勒展開式 (Taylor Series) 與函數逼近論

微積分

- 簡介
- 函數
- 極限
- 微分
- 積分
- 微分與積分
- 公理化
- 無窮級數
- 泰勒展開式
- 傅立葉級數
- 拉氏轉換
- z 轉換
- 小波轉換
- 多變量微積分
- 向量與函數
- 向量分析
- 複變函數
- 偏微分
- Jacobian
- 多重積分
- 微分方程
- 偏微分方程
- 向量場
- 對偶空間
- 張量
- 梯度
- 線積分
- 散度

文章

留言

授權

相關文章

1. 尤拉數e在微積分中的角色與用途
2. 泰勒展開式與函數逼近論
3. 傅立葉轉換在影像處理中的用途

簡介

微積分概念中的微分，具有許多神奇的應用，其中基於多項式不斷微分概念的泰勒級數，更成為函數逼近論的基礎，函數逼近方法中最重要的傅立葉轉換，更成為影像處理的神奇工具，本文將說明微積分、泰勒級數、函數逼近、傅立葉轉換在影像處理中的地位與用途。

微分與泰勒級數

一般的連續函數通常可以不斷的進行微分，因此、就可以用多項式來逼近該函數，其背後的想法是：

『如果我想用一個多項式來逼近函數，應該如何做呢？』

關於這個問題、如果我們直接將函數表示成多項式，可改寫如下：

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_kx^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} c_kx^k$$

(1)

然而、這些 c_0, c_1, \dots 等係數，到底應該是多少呢？關於這個問題，必需使用函數逼近法，所謂的函數逼近法，就是利用微分的概念，對於一個指定函數 $f(x)$ ，在某特定點附近不斷取微分的方法。

根據算式 (1) 不斷進行微分，可以導出下列算式：

(2)

英文用語

GeoGebra

習題

相關書籍

應用數學

微積分

離散數學

線性代數

機率統計

訊息

相關網站

參考文獻

最新修改

簡體版

English



$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \frac{df'(x)}{dx} = c_2 * 2 * 1 + c_3 * 3 * 2 * x + c_4 * 4 * 3 * x^2 + \dots \\
 f'''(x) &= \frac{df''(x)}{dx} = c_3 * 3 * 2 * 1 + c_4 * 4 * 3 * 2 * x + \dots \\
 &\dots \\
 f^k(x) &= \frac{df^{k-1}(x)}{dx} = c_k k! + c_{k+1} (k+1)! x + \dots
 \end{aligned}$$

於是、根據上述最後一個通用算式，若在 x 趨近於 0 時，可捨棄具有 x 的項目(因為 x 非常接近 0 ， $x, x^2 \dots$ 都很小、捨棄一點點無所謂啦)，於是我們就發現下列關係：

$$c_k = \frac{f^k(0)}{k!} \quad (3)$$

於是、我們就可以將這些係數 c_k 套回算式 (1)，而得到下列算式 (4)：

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \dots + \frac{f^k(0)}{k!} x^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(0)}{k!} x^k \quad (4)$$

這就是所謂的泰勒級數，又稱泰勒展開式 (請注意，通常我們稱泰勒展開式是在 $x=c$ 點的微分式，上述公式乃是取 $x=0$ 附近的微分式，這種在零點的泰勒展開式又稱為麥克羅林級數 Maclaurin Seires)。

上述的論述是針對函數 $f(x)$ 在接近 0 的地方進行逼近的結果，對於在接近 a 的地方，泰勒級數將修改如下：

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \dots + \frac{f^k(a)}{k!} (x-a)^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(a)}{k!} (x-a)^k \quad (5)$$

注意

泰勒展開式要能夠逼近函數 $f(x)$ ，則 $f(x)$ 必須滿足兩個條件，這兩個條件是 $f(x)$ 必須是連續函數，而且 $f(x)$ 可以微分 (在任何一點上)，也就是 $f(x)$ 必須是連續且可微分的函數。

參考文獻

1. 維基百科：泰勒級數 — [http://zh.wikipedia.org/zh-](http://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E6%B3%B0%E5%8B%92%E7%BA%A7%E6%95%B0)

[tw/%E6%B3%B0%E5%8B%92%E7%BA%A7%E6%95%B0](http://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E6%B3%B0%E5%8B%92%E7%BA%A7%E6%95%B0)