

# Contents

<b>computational complexity</b>	<b>5</b>
def: problema in computer science . . . . .	5
tipologie di problema . . . . .	5
complessità degli algoritmi e dei problemi . . . . .	5
esempio: codice . . . . .	6
def: tempo di esecuzione dell'algoritmo $A$ . . . . .	6
def: complessità temporale dell'algoritmo $A$ . . . . .	6
def: complessità di un problema . . . . .	6
problemi di decisione e classi di complessità . . . . .	7
def: un algoritmo $A$ risolve $\pi$ . . . . .	7
def: classe dei problemi $TIME(g(n))$ . . . . .	7
algoritmi non-deterministici per i problemi di decisione . . . . .	7
def: un algoritmo non-deterministico $A$ risolve $\pi$ . . . . .	7
def: classe dei problemi $NTIME(g(n))$ . . . . .	8
esempio: algoritmo non-deterministico per il problema della clique . . .	8
osservazioni (algoritmi deterministici e non-deterministici) . . . . .	8
corollario: $TIME(g(n)) \subseteq NTIME(g(n))$ . . . . .	8
efficienza e trattabilità . . . . .	8
efficienza e trattabilità: ragione 1 . . . . .	8
efficienza e trattabilità: ragione 2 . . . . .	9
osservazione: macchina di turing non-deterministica . . . . .	9
def: codici polinomialmente correlati . . . . .	9
dimensione dell'input (def: codici correlati polinomialmente) . . . . .	9
esempio: codici correlati polinomialmente . . . . .	9
esempio: codifica non naturale . . . . .	10
def: modelli computazionali simulabili in modo polinomiale . . . . .	10
classi $P$ e $NP$ . . . . .	10
problemi $NP$ -completi . . . . .	10
<b>optimization problems</b>	<b>11</b>
def: problema di ottimizzazione . . . . .	11
osservazioni (problemi di ottimizzazione) . . . . .	11
esempio: descrizione formale di un problema di ottimizzazione (max clique)	11
def: soluzione ottima . . . . .	12
problema decisionale sottostante . . . . .	12
esempio: descrizione formale di un problema decisionale sottostante (max clique) . . . . .	12
osservazioni (problema decisionale sottostante) . . . . .	12
classi di complessità dei problemi di ottimizzazione: $PO$ . . . . .	13
classi di complessità dei problemi di ottimizzazione: $NPO$ . . . . .	13
$PO$ e $NPO$ : nella pratica . . . . .	13
def: relazione $NPO \not\subseteq NP-HARD$ . . . . .	13
teorema: relazione tra $P \neq NP$ e risolvibilità polinomiale dei problemi $NP-HARD$ . . . . .	13
teorema: relazione tra $P = NP$ e $PO = NPO$ . . . . .	13
<b>approximation</b>	<b>14</b>
introduzione . . . . .	14
def: algoritmo di $r$ -approssimazione per problemi di minimizzazione . . .	14
def: algoritmo di $r$ -approssimazione per problemi di massimizzazione . . .	14
determinazione del fattore di approssimazione $r$ . . . . .	14

min (analogo per max) fattore di approssimazione $r$ . . . . .	15
algoritmo: Approx-Cover per min vertex cover . . . . .	15
lemma: Approx-Cover forma un matching al termine dell'esecuzione . . . . .	15
teorema: Approx-Cover é 2-approssimante . . . . .	15
<b>algorithmic techniques: greedy</b> . . . . .	<b>16</b>
caratteristiche . . . . .	16
problema: max 0-1 knapsack . . . . .	16
max 0-1 knapsack: descrizione della scelta greedy . . . . .	16
algoritmo: Greedy-Knapsack . . . . .	17
teorema: $\forall r < 1$ Greedy-Knapsack non é $r$ -approssimante . . . . .	17
miglioramento algoritmo: Greedy-Knapsack . . . . .	17
Greedy-Knapsack modificato . . . . .	18
lemma 1: Greedy-Knapsack modificato . . . . .	18
lemma 2: Greedy-Knapsack modificato . . . . .	18
teorema: Greedy-Knapsack modificato é $\frac{1}{2}$ -approssimante . . . . .	18
problema: min multiprocessor scheduling . . . . .	19
algoritmo: Greedy-Graham . . . . .	19
teorema: Greedy-Graham é $\frac{2-1}{h}$ -approssimante . . . . .	19
teorema: Greedy-Graham non é $r$ -approssimante per $r < \frac{2-1}{h}$ . . . . .	21
migliorare il rapporto di approssimazione $r$ per Greedy-Graham . . . . .	21
Greedy-Graham, primo miglioramento . . . . .	22
algoritmo: Ordered-Greedy . . . . .	22
lemma: Ordered-Greedy . . . . .	22
teorema: Ordered-Greedy é $(\frac{3}{2} - \frac{1}{2h})$ -approssimante . . . . .	23
problema: max cut . . . . .	23
algoritmo: Greedy-Max-Cut . . . . .	23
teorema: Greedy-Max-Cut é $\frac{1}{2}$ -approssimante . . . . .	24
conclusioni sulla tecnica greedy . . . . .	24
<b>algorithmic techniques: local search</b> . . . . .	<b>25</b>
caratteristiche . . . . .	25
schema di un algoritmo di ricerca locale . . . . .	25
complessità . . . . .	25
approssimazione . . . . .	25
definizione dell'intorno . . . . .	25
definizione dell'intorno: casi estremi . . . . .	26
problema: max cut (già definito precedentemente) . . . . .	26
algoritmo di ricerca locale per max cut . . . . .	26
complessità (algoritmo di ricerca locale per max cut) . . . . .	26
approssimazione (algoritmo di ricerca locale per max cut) . . . . .	27
fatto (approssimazione (algoritmo di ricerca locale per max cut)) . . . . .	27
teorema: l'algoritmo di ricerca locale é $\frac{1}{2}$ -approssimante . . . . .	27
TODO: esempio esecuzione algoritmo di ricerca locale su grafo . . . . .	28
conclusioni sulla tecnica della ricerca locale . . . . .	28
<b>algorithmic techniques: linear programming (rounding)</b> . . . . .	<b>29</b>
caratteristiche . . . . .	29
rounding: caratteristiche . . . . .	29
problema: min weighted vertex cover . . . . .	29
ILP: min weighted vertex cover . . . . .	30
LP: min weighted vertex cover (rilassamento lineare) . . . . .	30
algoritmo: Round-Vertex-Cover . . . . .	30

teorema: l'algoritmo Round-Vertex-Cover é 2-approssimante . . . . .	30
problema: min weighted set cover . . . . .	31
ILP: min weighted set cover . . . . .	31
LP: min weighted set cover (rilassamento lineare) . . . . .	31
algoritmo: Round-Set-Cover . . . . .	32
teorema: l'algoritmo Round-Set-Cover é $f$ -approssimante ( $f \geq 1$ ) . . . . .	32
<b>algorithmic techniques: dynamic programming (part 1)</b>	<b>33</b>
caratteristiche . . . . .	33
uno sguardo piú ravvicinato... . . . .	33
algoritmo: Fibonacci . . . . .	33
algoritmo: Fibonacci 2 . . . . .	34
algoritmo: Fibonacci 3 . . . . .	34
riassumendo . . . . .	34
top-down vs. bottom-up . . . . .	35
divide-and-conquer vs. dynamic programming . . . . .	35
<b>algorithmic techniques: dynamic programming (part 2)</b>	<b>35</b>
progettazione di algoritmi di programmazione dinamica . . . . .	35
complessità degli algoritmi di programmazione dinamica . . . . .	36
problema: max 0-1 knapsack (già definito precedentemente) . . . . .	36
algoritmo brute force . . . . .	36
progettazione dell'algoritmo di programmazione dinamica . . . . .	36
definizione ricorsiva per $OPT$ . . . . .	37
definizione ricorsiva per la misura $m$ della soluzione ottima $OPT(i, w)$ . . . . .	37
riepilogo definizioni ricorsive per $m$ e $OPT$ . . . . .	37
algoritmo: Progr-Dyn-Knapsack . . . . .	38
algoritmo: Progr-Dyn-Knapsack (trovare gli oggetti inseriti) . . . . .	38
teorema: l'algoritmo Progr-Dyn-Knapsack ha complessità temporale $O(nb)$ . . . . .	38
domanda: l'algoritmo Progr-Dyn-Knapsack é polinomiale? . . . . .	39
algoritmo Progr-Dyn-Knapsack-Dual: approccio duale . . . . .	39
definizione ricorsiva per $OPT$ (duale) . . . . .	39
definizione ricorsiva per la misura $m$ della soluzione ottima $OPT(i, w)$ . . . . .	39
algoritmo: Progr-Dyn-Knapsack-Dual . . . . .	40
teorema: l'algoritmo Progr-Dyn-Knapsack-Dual ha complessità temporale $O(n^2 p_{\max})$ . . . . .	40
<b>approximation schemes: polynomial time approximation scheme (PTAS)</b>	<b>41</b>
definizione: PTAS . . . . .	41
problema: min multiprocessor scheduling (già definito precedentemente) . . . . .	41
richiamiamo l'algoritmo Greedy-Graham . . . . .	41
ottenere un PTAS... . . . .	42
lemma: $t_i \leq \frac{T}{i}$ . . . . .	42
PTAS: idea sottostante . . . . .	43
algoritmo: PTAS-Scheduling . . . . .	43
teorema: l'algoritmo PTAS-Scheduling ritorna sempre una soluzione $(1 + \epsilon)$ -approssimata . . . . .	43
problema: min $h$ -processor scheduling . . . . .	44
teorema: l'algoritmo PTAS-Scheduling é un PTAS per il problema min $h$ -processor scheduling . . . . .	44
problema: min partition . . . . .	45
ottenere un PTAS per il problema min partition . . . . .	45

lemma: algoritmo di programmazione dinamica polinomiale (schedule approssimato per i primi $q$ jobs) . . . . .	45
teorema: esiste un PTAS per il problema min multiprocessor scheduling .	45

# computational complexity

## def: problema in computer science

un problema  $\pi$  é una relazione

$$\pi \subseteq I_\pi \times S_\pi$$

dove:

- $I_\pi$  = insieme delle istanze di input del problema
- $S_\pi$  = insieme delle soluzioni del problema

## tipologie di problema

### • decisione:

- si verifica se una data proprietà é valida per un determinato input
- $S_\pi = \{true, false\}$  o semplicemente  $S_\pi = \{0,1\}$  e la relazione  $\pi \subseteq I_\pi \times S_\pi$  corrisponde ad una funzione

$$f : I_\pi \rightarrow \{0,1\}$$

- esempi: soddisfacibilità, test di connettività di un grafo, etc....

### • ricerca:

- data un'istanza  $x \in I_\pi$ , si chiede di determinare una soluzione  $y \in S_\pi$  tale che la coppia  $(x,y) \in \pi$  appartengono alla relazione che definisce il problema
- esempi: soddisfacibilità, clique, vertex cover, nei quali chiediamo in output un assegnamento di verità soddisfacente, rispettivamente una clique o un vertex cover, invece di semplicemente "si" o "no"

### • ottimizzazione

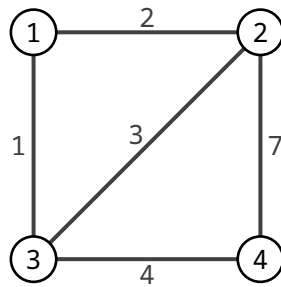
- data un'istanza  $x \in I_\pi$ , si chiede di determinare una soluzione  $y \in S_\pi$  ottimizzando una data misura della funzione costo
- esempi: min spanning tree, max SAT, max clique, min vertex cover, min TSP, etc....

## complessità degli algoritmi e dei problemi

- espressa in funzione della taglia dell'input (denotata come  $|x|, \forall x \in I_\pi$ )
- taglia dell'istanza  $x$ 
  - quantità di memoria necessaria a memorizzare  $x$  in un computer
  - lunghezza  $|x|_c$  della stringa che codifica  $x$  in un particolare codice naturale  $c : I_\pi \rightarrow \Sigma$ , dove  $\Sigma$  é l'alfabeto del codice  $c$
- codice naturale
  - conciso: le stringhe che codificano le istanze non devono essere ridondanti o allungate inutilmente
  - numeri espressi in base  $\geq 2$

## esempio: codice

- istanza: grafo  $G$



- codice per  $G$ 
  - $\Sigma = \{\{, \}, , 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  (simboli)
  - $c(G) = \{1, 2, 3, 4, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, 2, 1, 3, 7, 4\}$ 
    - \*  $\{1, 2, 3, 4\}$  (nodi)
    - \*  $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$  (archi)
    - \*  $\{2, 1, 3, 7, 4\}$  (pesi)
  - $|G|_c = 49$

## def: tempo di esecuzione dell'algoritmo $A$

sia  $t_A(x)$  il tempo di esecuzione dell'algoritmo  $A$  per l'input  $x$ , allora il tempo di esecuzione nel caso peggiore di  $A$  é:

$$T_A(n) = \max\{t_A(x) \mid |x| \leq n\}, \quad \forall n > 0$$

## def: complessità temporale dell'algoritmo $A$

l'algoritmo  $A$  ha complessità temporale

- $O(g(n))$  se  $T_A(n) = O(g(n))$ , ovvero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_A(n)}{g(n)} \leq c, \text{ per una costante } c > 0$$

- $\Omega(g(n))$  se  $T_A(n) = \Omega(g(n))$ , ovvero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_A(n)}{g(n)} \geq c, \text{ per una costante } c > 0$$

- $\Theta(g(n))$  se  $T_A(n) = \Theta(g(n))$ , ovvero

$$T_A(n) = \Omega(g(n)) \text{ e } T_A(n) = O(g(n))$$

## def: complessità di un problema

un problema ha complessità

- $O(g(n))$  se esiste un algoritmo che lo risolve avente complessità  $O(g(n))$
- $\Omega(g(n))$  se ogni algoritmo  $A$  che lo risolve ha complessità  $\Omega(g(n))$
- $\Theta(g(n))$  se ha complessità  $O(g(n))$  e  $\Omega(g(n))$

## problemi di decisione e classi di complessità

i problemi di decisione sono solitamente descritti da un'istanza di input (o semplicemente INPUT) e da una DOMANDA sull'input

esempi:

- soddisfacibilità
  - INPUT: CNF (Conjunctive Normal Form) formula definita su un insieme di variabili
  - DOMANDA: esiste un assegnamento di verità  $\tau: V \rightarrow \{0,1\}$  ?
- clique
  - INPUT: un grafo non orientato  $G = (V, E)$  di  $n$  nodi e un intero  $k > 0$
  - DOMANDA: esiste in  $G$  una clique di almeno  $k$  nodi ( $\geq k$ ), ovvero un sottoinsieme  $U \subseteq V$  tale che  $|U| \geq k$  e  $\{u, v\} \in E, \forall u, v \in U$  ?
- vertex cover
  - INPUT: un grafo non orientato  $G = (V, E)$  di  $n$  nodi e un intero  $k > 0$
  - DOMANDA: esiste in  $G$  un vertex cover di al massimo  $k$  nodi ( $\leq k$ ), ovvero un sottoinsieme  $U \subseteq V$  tale che  $|U| \leq k$  e  $u \in U$  o  $v \in U, \forall \{u, v\} \in E$  ?

nei problemi di decisione  $I_\pi = Y_\pi \cup N_\pi$

- $Y_\pi$  = insieme di istanze positive, ovvero con soluzione 1
- $N_\pi$  = insieme di istanze negative, ovvero con soluzione 0

**def: un algoritmo  $A$  risolve  $\pi$**

un algoritmo  $A$  risolve  $\pi \iff \forall \text{ input } x \in I_\pi, A \text{ risponde } 1 \iff x \in Y_\pi$

**def: classe dei problemi  $TIME(g(n))$**

$TIME(g(n))$  = classe dei problemi di decisione con complessità  $O(g(n))$

## algoritmi non-deterministici per i problemi di decisione

essi si compongono di 2 fasi

- fase 1
  - generano in modo non-deterministico un "certificato"  $y$
- fase 2
  - partendo dall'input  $x$  e dal certificato  $y$ , verificano se  $x$  é un'istanza positiva

**def: un algoritmo non-deterministico  $A$  risolve  $\pi$**

un algoritmo non-deterministico  $A$  risolve  $\pi$  se si ferma per ogni possibile certificato  $y$  ed esiste un certificato  $y$  per cui  $A$  risponde 1 (*true*)  $\iff x \in Y_\pi$

- complessità
  - costo della fase 2
  - espressa in funzione di  $|x|$

**def: classe dei problemi**  $NTIME(g(n))$

$NTIME(g(n))$  = classe di problemi di decisione con complessità non-deterministica  $O(g(n))$

**esempio: algoritmo non-deterministico per il problema della clique**

- fase 1
  - dato in input il grafo  $G = (V, E)$ , genera non-deterministicamente un sottoinsieme  $U \subseteq V$  di  $k$  nodi
- fase 2
  - verifica se  $U$  è una clique, ovvero se  $\{u, v\} \in E, \forall u, v \in U$ , e in tal caso risponde 1, altrimenti risponde 0
- chiaramente l'algoritmo risolve il problema della clique, in quanto si ferma per ogni possibile sottoinsieme  $U$  ed esiste un sottoinsieme  $U$  per il quale risponde 1 se e solo se esiste una clique di  $k$  nodi in  $G$ , ovvero  $\iff (G, k) \in Y_{clique}$
- complessità:  $O(n^2)$ , poiché  $|U| \leq |V| = n$

**osservazioni (algoritmi deterministici e non-deterministici)**

- un algoritmo deterministico è meno potente di uno non-deterministico poiché non può eseguire la fase 1
- se esiste un algoritmo deterministico  $A$  che risolve  $\pi$ , allora esiste anche un algoritmo non-deterministico  $A'$  che risolve  $\pi$  con la stessa complessità come segue:
  - esso esegue al fase 1 e coincide con  $A$  nella fase 2, ignorando il certificato  $y$

**corollario:**  $TIME(g(n)) \subseteq NTIME(g(n))$

$$TIME(g(n)) \subseteq NTIME(g(n))$$

- dove:
  - $TIME(g(n))$  = classe dei problemi deterministicamente risolvibili in tempo  $O(g(n))$
  - $NTIME(g(n))$  = classe dei problemi non-deterministicamente risolvibili in tempo  $O(g(n))$

**efficienza e trattabilità**

- un problema è trattabile se può essere risolto efficientemente (deterministicamente)
- sono considerati trattabili o efficientemente risolvibili tutti i problemi aventi complessità limitata da un polinomio della dimensione dell'input

$$TRATTABILITÀ \equiv EFFICIENZA \equiv POLINOMIALITÀ$$

**efficienza e trattabilità: ragione 1**

la crescita delle funzioni polinomiali rispetto a quelle esponenziali (sia per ciò che riguarda il tempo di esecuzione sia per ciò che riguarda la dimensione delle istanze risolvibili entro un certo tempo di esecuzione)



## efficienza e trattabilità: ragione 2

- la composizione di polinomi é un polinomio e dunque la risolvibilità in tempo polinomiale di un problema é indipendente da
  - il codice naturale utilizzato, poiché tutti i codici naturali sono correlati in maniera polinomiale
  - il modello computazionale adottato, se ragionevole (cioé costruibile nella pratica o meglio in grado di eseguire un lavoro limitato costante per step), in quanto tali modelli sono polinomialmente correlati, ovvero possono simularsi l'un l'altro in tempo polinomiale

## osservazione: macchina di turing non-deterministica

la macchina di turing non-deterministica non é un modello di calcolo ragionevole, poiché la quantità di lavoro svolto in ogni fase (ciascun livello dell'albero delle computazioni) cresce in modo esponenziale

## def: codici polinomialmente correlati

- 2 codici  $c_1$  e  $c_2$  per un problema  $\pi$  sono correlati polinomialmente se esistono 2 polinomi  $p_1$  e  $p_2$  tali che,  $\forall x \in I_\pi$ :
  - $|x|_{c_1} \leq p_1(|x|_{c_2})$
  - $|x|_{c_2} \leq p_2(|x|_{c_1})$
- se la complessità rispetto a  $c_1$  é  $O(q_1(|x|_{c_1}))$  per un dato polinomio  $q_1$ , allora rispetto a  $c_2$  é  $O(q_1(p_1(|x|_{c_2}))) = O(q_2(|x|_{c_2}))$  dove  $q_2$  é il polinomio tale che  $\forall \lambda \ q_2(\lambda) = q_1(p_1(\lambda))$
- tutti i codici naturali sono correlati polinomialmente, ovvero la risolvibilità polinomiale non dipende dal particolare codice utilizzato

## dimensione dell'input (def: codici correlati polinomialmente)

qualsiasi quantità polinomialmente correlata ad un codice naturale é dunque correlata ad un qualsiasi codice naturale possibile, dato che tutti i codici naturali sono correlati polinomialmente e che la composizione di polinomi é un polinomio

## esempio: codici correlati polinomialmente

- assumiamo che per ogni grafo  $G$  di  $n$  nodi
  - $|G|_{c_1} = 10n^2$
  - $|G|_{c_2} = n^3$
- se  $p_1(\lambda) = 10\lambda$  e  $p_2(\lambda) = \lambda^2$  abbiamo che:
  - $|G|_{c_1} = 10n^2 \leq 10n^3 = p_1(|G|_{c_2})$
  - $|G|_{c_2} = n^3 \leq 100n^4 = p_2(|G|_{c_1})$
- dunque i 2 codici sono correlati polinomialmente
- regola pratica:
  - 2 quantità sono polinomialmente correlate se sono polinomi sulle stesse variabili

## **esempio: codifica non naturale**

- test di primalità
  - INPUT: un numero intero  $n > 0$
  - DOMANDA:  $n$  é un numero primo?
  - ALGORITMO (banale):
    - \* scansiona tutti i numeri da 2 a  $n-1$  e risponde 1 (*true*) se nessuno di essi lo divide
  - COMPLESSITÀ:  $O(n)$ , polinomiale?
  - CODICE  $c_1$  (naturale):  $n$  espresso in base 2, ovvero  $|n|_{c_1} = \log_2 n$
  - CODICE  $c_2$  (non naturale):  $n$  espresso in base 1, ovvero  $|n|_{c_2} = n$
- dunque la complessità dell'algoritmo é:
  - $O(2^{|n|_{c_1}})$  rispetto a  $c_1$ , che é esponenziale
  - $O(|n|_{c_2})$  rispetto a  $c_2$ , che é polinomiale!
- dimensione dell'input
  - correlata polinomialmente ai codici naturali  $|n|_{c_1} = \log_2 n$

## **def: modelli computazionali simulabili in modo polinomiale**

- 2 modelli computazionali  $M_1$  e  $M_2$  sono mutualmente simulabili in modo polinomiale se esistono 2 polinomi  $p_1$  a  $p_2$  tali che:
  1. ogni algoritmo  $A$  per  $M_1$  con complessità  $T_A(n)$  può essere simulato su  $M_2$  in tempo  $p_1(T_A(n))$
  2. ogni algoritmo  $A$  per  $M_2$  con complessità  $T_A(n)$  può essere simulato su  $M_1$  in tempo  $p_2(T_A(n))$
- dunque se  $A$  é polinomiale in  $M_1$  allora é polinomiale anche in  $M_2$  e viceversa
- tutti i modelli computazionali ragionevoli sono mutualmente simulabili in modo polinomiale, ovvero la risolvibilità polinomiale non dipende dal particolare modello utilizzato

## **classi $P$ e $NP$**

- $P$  = classe di tutti i problemi risolvibili deterministicamente in tempo polinomiale, ovvero

$$P = \cup_{k=0}^{\infty} TIME(n^k)$$

- $NP$  = classe di tutti i problemi risolvibili non-deterministicamente in tempo polinomiale, ovvero

$$NP = \cup_{k=0}^{\infty} NTIME(n^k)$$

- $P = NP$  ? nessuno lo a dimostrato

## **problemi $NP$ -completi**

- i problemi più difficili di  $NP$  e tali che se  $P \neq NP$  non appartengono a  $P$ , viceversa, se 1 di essi appartiene a  $P$ , allora  $P = NP$
- finora nessuno é riuscito a trovare un algoritmo polinomiale deterministico per nessun problema  $NP$ -completo
- congettura:  $P \neq NP$

# optimization problems

## def: problema di ottimizzazione

un problema di ottimizzazione  $\pi$  é una quadrupla  $(I_\pi, S_\pi, m_\pi, goal_\pi)$  con:

- $I_\pi$  = insieme delle istanze di input di  $\pi$
- $S_\pi(x)$  = insieme delle soluzioni ammissibili dell'istanza  $x \in I_\pi$
- $m_\pi(x, y)$  = misura della soluzione ammissibile  $y \in S_\pi(x)$  per l'input  $x \in I_\pi$  (intera)
- $goal_\pi \in \{\min, \max\}$  = specifica se abbiamo un problema di minimizzazione o di massimizzazione

## osservazioni (problemi di ottimizzazione)

- assumiamo che  $m_\pi(x, y)$  é sempre un numero intero
  - i nostri modelli computazionali possono trattare solo l'approssimazione razionale dei reali
  - scalando tali reali possiamo ottenere numeri interi equivalenti
  - i valori interi rivelano già le difficoltà intrinseche dei problemi
- quando sono chiari dal contesto (in seguito):
  - $\pi$  sarà omissa
  - $m(x, y)$  = sarà denotato semplicemente come  $m$

## esempio: descrizione formale di un problema di ottimizzazione (max clique)

- $I$  = grafo  $G = (V, E)$
- $S = \{U \subseteq V \mid \{u, v\} \in E, \forall u, v \in U\}$
- $m(G, U) = |U|$
- $goal = \max$

possiamo descrivere i problemi di ottimizzazione nella seguente forma, più semplice e informale

- MAX CLIQUE
  - INPUT: grafo  $G = (V, E)$
  - SOLUZIONE:  $U \subseteq V \mid \{u, v\} \in E, \forall u, v \in U$
  - MISURA:  $|U|$
- MIN VERTEX COVER
  - INPUT: grafo  $G = (V, E)$
  - SOLUZIONE:  $U \subseteq V \mid \forall \{u, v\} \in E, u \in U \vee v \in U$
  - MISURA:  $|U|$
- MIN TSP (Traveling Salesman Problem, problema del commesso viaggiatore)
  - INPUT:
    - \* insieme di città  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$
    - \* distanza  $d(c_i, c_j) \in \mathbb{N}$ , per ogni coppia di città  $(c_i, c_j) \in C$

- SOLUZIONE: un tour di tutte le città, ovvero una permutazione  $\langle c_{p(1)}, c_{p(2)}, \dots, c_{p(n)} \rangle$  che descriva l'ordine di visita delle città
- MISURA: lunghezza del tour, ovvero

$$\left( \sum_{i=1}^{n-1} d(c_{p(i)}, c_{p(i+1)}) \right) + d(c_{p(n)}, c_{p(1)})$$

### def: soluzione ottima

- data un'istanza  $x \in I_\pi$ , una soluzione  $y^* \in S_\pi(x)$  è ottima per  $x$  se  $m(x, y^*) = \text{goal}\{m(x, y) \mid y \in S(x)\}$
- la misura di una soluzione ottima (o in modo analogo di tutte le soluzioni ottime) di  $x$  è denotata come  $m^*(x)$  o semplicemente  $m^*$

### problema decisionale sottostante

ogni problema di ottimizzazione ha un problema decisionale sottostante che può essere ottenuto introducendo un intero  $k$  nell'istanza di input e chiedendo se esiste una soluzione ammissibile di misura  $\leq k$  (per min) e  $\geq k$  (per max)

- problema di ottimizzazione:
  - dato un input  $x$ , trova  $y \in S(x) \mid m(x, y)$  sia min o max (secondo il goal)
- problema decisionale sottostante:
  - dato un input  $x$  e un intero  $k \geq 0$ , esiste  $y \in S(x) \mid m(x, y) \leq k$  (min) o  $\geq k$  (max)

### esempio: descrizione formale di un problema decisionale sottostante (max clique)

- MAX CLIQUE
  - INPUT: grafo  $G = (V, E)$
  - SOLUZIONE:  $U \subseteq V \mid \{u, v\} \in E, \forall u, v \in U$
  - MISURA:  $|U|$
- problema decisionale sottostante:
  - INPUT: grafo  $G = (V, E)$  e un intero  $k > 0$
  - DOMANDA: esiste una clique  $U$  in  $G$  tale che  $|U| \geq k$

### osservazioni (problema decisionale sottostante)

- se esiste un algoritmo polinomiale  $A$  per il problema di ottimizzazione, allora esiste un algoritmo polinomiale anche per il problema decisionale sottostante che funziona come segue:
  1. esegue  $A$  per determinare la soluzione ottime  $y^*$  per l'input  $x$
  2. risponde 1 (*true*) se  $m(x, y^*) \leq k$  (min) o  $\geq k$  (max)
- il problema di ottimizzazione è difficile almeno quanto il problema decisionale sottostante

## **classi di complessità dei problemi di ottimizzazione: $PO$**

- un problema di ottimizzazione  $\pi$  appartiene alla classe  $PO$  se:
  - per ogni input  $x$ ,  $x \in I$  può essere verificato in tempo polinomiale
  - esiste un polinomio  $p \mid \forall x \in I$  e  $y \in S(x)$  vale  $|y| \leq p(|x|)$
  - $\forall x \in I$  e  $y \in S(x)$ ,  $m(x, y)$  può essere calcolata in tempo polinomiale (rispetto a  $|x|$ )
  - $\forall x \in I$ , una soluzione ottima  $y^*$  può essere calcolata in tempo polinomiale
- esempi: shortest path fra 2 nodi, min spanning tree, ecc...

## **classi di complessità dei problemi di ottimizzazione: $NPO$**

un problema di ottimizzazione  $\pi$  appartiene alla classe  $NPO$  se:

- per ogni input  $x$ ,  $x \in I$  può essere verificato in tempo polinomiale
- esiste un polinomio  $p \mid \forall x \in I$  e  $y \in S(x)$  vale  $|y| \leq p(|x|)$
- $\forall x \in I$  e  $y \in S(x)$ ,  $m(x, y)$  può essere calcolata in tempo polinomiale (rispetto a  $|x|$ )

esempi: max clique, min vertex cover, min TSP, ecc...

## **$PO$ e $NPO$ : nella pratica**

- $PO$ : classe dei problemi di ottimizzazione il cui problema decisionale sottostante appartiene a  $P$
- $NPO$ : classe dei problemi di ottimizzazione il cui problema decisionale sottostante appartiene a  $NP$
- chiaramente  $PO \subseteq NPO$

## **def: relazione $NPO$ - $NP$ -HARD**

un problema di ottimizzazione in  $NPO$  è  $NP$ -HARD se il problema decisionale sottostante è  $NP$ -Completo

## **teorema: relazione tra $P \neq NP$ e risolubilità polinomiale dei problemi $NP$ -HARD**

se  $P \neq NP$ , un problema di ottimizzazione  $NP$ -HARD non può essere risolto in tempo polinomiale (poiché è difficile almeno quanto il problema decisionale sottostante)

## **teorema: relazione tra $P = NP$ e $PO = NPO$**

se  $P = NP$  allora  $PO = NPO$

- quasi tutti i problemi che verranno presentati in seguito sono  $NP$ -HARD, ovvero non efficientemente risolubili
- verranno progettati algoritmi per tali problemi che restituiscono soluzioni "vicine" a quelle ottime

# approximation

## introduzione

- DOMANDA: supponiamo di dover risolvere un problema NP-HARD, cosa dovremmo fare?
- RISPOSTA: sacrificare 1 delle 3 caratteristiche desiderate
  1. risolvere istanze arbitrarie del problema
  2. risolvere il problema di ottimalità
  3. risolvere il problema in tempo polinomiale
- STRATEGIE:
  1. progettare algoritmi per casi speciali del problema
  2. progettare algoritmi di approssimazione o euristiche
  3. progettare algoritmi che possono richiedere tempo esponenziale
- d'ora in poi ci concentreremo sui problemi di ottimizzazione NP-HARD, ovvero problemi che non possono essere risolti in modo efficiente (a meno che  $P = NP$ )
- per tali problemi verranno progettati algoritmi in grado di determinare soluzioni prossime a quelle ottime, ovvero "buone approssimazioni"

## def: algoritmo di r-approssimazione per problemi di minimizzazione

dato un problema di minimizzazione  $\pi$  e un numero  $r \geq 1$ , un algoritmo  $A$  é un algoritmo di r-approssimazione per  $\pi$  se per ogni input  $x \in I$  restituisce sempre una soluzione r-approssimata, ovvero una soluzione ammissibile  $y \in S(x)$  tale che

$$\frac{m(x, y)}{m^*(x)} \leq r$$

## def: algoritmo di r-approssimazione per problemi di massimizzazione

dato un problema di massimizzazione  $\pi$  e un numero  $r \leq 1$ , un algoritmo  $A$  é un algoritmo di r-approssimazione per  $\pi$  se per ogni input  $x \in I$  restituisce sempre una soluzione r-approssimata, ovvero una soluzione ammissibile  $y \in S(x)$  tale che

$$\frac{m(x, y)}{m^*(x)} \geq r$$

## determinazione del fattore di approssimazione $r$

- come possiamo determinare il fattore di approssimazione  $r$  se non conosciamo il valore  $m^*$  di una soluzione ottima?
- per problemi di minimizzazione (rispettivamente massimizzazione), confrontiamo il valore della soluzione restituita  $m(x, y)$  con un lower bound (rispettivamente upper bound) appropriato  $l(x)$  (rispettivamente  $u(x)$ ) di  $m^*(x)$
- se il loro rapporto é al massimo  $r$  ( $\leq$ ) per min o almeno  $r$  ( $\geq$ ) per max, allora l'algoritmo é r-approssimante

min (analogo per max) fattore di approssimazione  $r$

- se

$$\frac{m(x,y)}{l(x)} \leq r$$

- allora

$$\frac{m(x,y)}{m^*(x)} \leq \frac{m(x,y)}{l(x)} \leq r$$

**algoritmo: Approx-Cover per min vertex cover**

---

**Algorithm 1** Approx-Cover

---

```
// M = archi scelti dall'algoritmo
M = ∅
// U = nodi scelti nel cover
U = ∅
repeat
  seleziona un arco  $\{u,v\} \in E$ 
   $U = U \cup \{u,v\}$ 
   $E = E \setminus \{e \in E \mid e \text{ é incidente a } u \text{ o a } v\}$ 
   $M = M \cup \{\{u,v\}\}$ 
until ( $E = \emptyset$ )
return  $U$ 
```

---

**lemma: Approx-Cover forma un matching al termine dell'esecuzione**

al termine dell'esecuzione dell'algoritmo di approssimazione Approx-Cover,  $M$  forma un matching, ovvero gli archi in  $M$  non condividono alcun nodo

**dimostrazione:**

- banalmente, ogni volta che un arco  $e$  é selezionato in  $M$ , tutti gli archi con un nodo in comune con  $e$  vengono eliminati da  $E$
- pertanto nei passi successivi nessun arco con un nodo in comune con  $e$  può essere selezionato dall'algoritmo

□

**teorema: Approx-Cover é 2-approssimante**

Approx-Cover é 2-approssimante

**dimostrazione:**

- il valore della soluzione restituita dall'algoritmo é

$$m = |U| = 2|M|$$

- sia  $U^*$  il cover ottimo.  
Poiché gli archi in  $M$  non condividono alcun nodo ( $M$  é un matching) e poiché ciascuno di essi deve avere un nodo in  $U^*$

$$m^* = |U^*| \geq |M|$$

- dunque:

$$\frac{m}{m^*} \leq \frac{2|M|}{|M|} = 2$$

□

# algorithmic techniques: greedy

## caratteristiche

- la soluzione viene determinata in step
- ad ogni step l'algoritmo esegue la scelta che sembra essere la migliore in quello step, senza considerare le possibili conseguenze nei futuri step

## problema: max 0-1 knapsack

- INPUT:
  - un insieme finito di oggetti  $O$
  - un profitto intero  $p_i, \forall o_i \in O$
  - un volume intero  $a_i, \forall o_i \in O$
  - un intero positivo  $b$  ( $b > 0$ )
- SOLUZIONE:
  - un sottoinsieme di oggetti  $Q \subseteq O$  tale che  $\sum_{o_i \in Q} a_i \leq b$
- MISURA:
  - profitto totale degli oggetti scelti, ovvero  $\sum_{o_i \in Q} p_i$
- senza perdere di generalità, in seguito, assumeremo sempre che:
  - $a_i \leq b, \forall o_i \in O$
  - $p_i > 0, \forall o_i \in O$

## max 0-1 knapsack: descrizione della scelta greedy

- nella scelta greedy:
  - non possiamo considerare solo il profitto degli oggetti, in quanto il loro volume potrebbe essere troppo grande
  - non possiamo considerare solo il volume degli oggetti, in quanto il loro profitto potrebbe essere troppo basso
- idea: consideriamo gli oggetti in base al profitto per unità di volume, ovvero in base al rapporto
$$\frac{p_i}{a_i}, \forall o_i \in O$$
- l'algoritmo greedy seleziona gli oggetti in ordine decrescente di profitto per volume



## algoritmo: Greedy-Knapsack

---

**Algorithm 2** Greedy-Knapsack

---

```
// Q = insieme degli oggetti scelti
Q = ∅
// v = volume del sottoinsieme corrente degli oggetti scelti
v = 0
ordina gli oggetti in ordine decrescente di profitto per volume  $\frac{p_i}{a_i}$ 
siano  $o_1, \dots, o_n$  gli oggetti elencati secondo tale ordine
for  $i = 1$  to  $n$  do
  if  $v + a_i \leq b$  then
     $Q = Q \cup \{o_i\}$ 
     $v = v + a_i$ 
  end if
end for
return  $Q$ 
```

---

## teorema: $\forall r < 1$ Greedy-Knapsack non é r-approssimante

$\forall r < 1$  dato, Greedy-Knapsack non é r-approssimante

### dimostrazione:

- dato un intero  $k = \lceil \frac{1}{r} \rceil$ , consideriamo la seguente istanza di max 0-1 knapsack
- $\forall n \geq 2$ 
  - $b = kn$  é il volume del knapsack
  - $n - 1$  oggetti con profitto  $p_i = 1$  e volume  $a_i = 1$
  - 1 oggetto con profitto  $b - 1$  e volume  $b$
- soluzione restituita:
  - l'insieme dei primi  $n - 1$  oggetti, ovvero  $m = n - 1$
- soluzione ottima
  - l'insieme contenente solo l' $n$ -esimo oggetto, ovvero

$$m^* = b - 1 = kn - 1$$

- quindi:

$$\frac{m}{m^*} = \frac{n - 1}{kn - 1}$$

- cosí che:

(<) poiché  $\frac{1}{r} > 1$

$$\frac{m}{m^*} = \frac{n - 1}{kn - 1} \leq \frac{n - 1}{\frac{n}{r} - 1} < \frac{n - 1}{\frac{n}{r} - \frac{1}{r}} = \frac{n - 1}{\frac{1}{r}(n - 1)} = r$$

- $\forall r < 1 \rightarrow \frac{m}{m^*} \leq r$ , invece di  $\forall r \leq 1 \rightarrow \frac{m}{m^*} \geq r$

□

## miglioramento algoritmo: Greedy-Knapsack

- osservazione:
  - intuitivamente, Greedy-Knapsack non restituisce una buona approssimazione, poiché ignora l'oggetto avente il profitto massimo

## Greedy-Knapsack modificato

- calcola una soluzione greedy  $Q_{GR}$  e sia  $m_{GR}$  la misura di quest'ultima
- considera l'oggetto  $O_{\max}$  avente il massimo profitto  $p_{\max}$
- se  $m_{GR} \geq p_{\max}$  restituisci  $Q_{GR}$  altrimenti restituisci  $Q = \{O_{\max}\}$

## lemma 1: Greedy-Knapsack modificato

- sia  $o_j$  il primo oggetto che l'algoritmo Greedy-Knapsack non inserisce nel knapsack e sia:

$$m_j = \sum_{i=1}^{j-1} p_i$$

- allora:

$$m^* \leq m_j + p_j$$

### dimostrazione:

- $m^* \leq m_j + p_j$  deriva direttamente osservando semplicemente che, denotando con  $v$  la somma dei volumi dei primi  $j-1$  oggetti scelti,  $m_j + p_j$  é il valore della soluzione ottima dell'istanza in cui il volume del knapsack é  $v + a_j > b$

□

## lemma 2: Greedy-Knapsack modificato

- $m^* \leq m_{GR} + p_{\max}$

### dimostrazione:

- diretta conseguenza del precedente lemma osservando che  $m_j \leq m_{GR}$  e  $p_j \leq p_{\max}$ , e quindi:

$$m^* \leq m_j + p_j \leq m_{GR} + p_{\max}$$

- intuizione: l'algoritmo restituisce una soluzione di valore  $\max\{m_{GR}, p_{\max}\}$ , che é almeno la metà di  $m_{GR} + p_{\max}$ , ovvero la metà di un upper bound di  $m^*$

$$\max\{m_{GR}, p_{\max}\} \geq \frac{m_{GR} + p_{\max}}{2}$$

□

## teorema: Greedy-Knapsack modificato é $\frac{1}{2}$ -approssimante

Greedy-Knapsack modificato é  $\frac{1}{2}$ -approssimante

### dimostrazione:

- $m_{Mod} \geq \max\{m_{GR}, p_{\max}\} \geq \frac{(m_{GR} + p_{\max})}{2} \geq \frac{m^*}{2}$

□

## problema: min multiprocessor scheduling

- INPUT:

- insieme di  $n$  jobs  $P$
- numero di processori  $h$
- tempo di esecuzione  $t_j$ ,  $\forall p_j \in P$

- SOLUZIONE:

- uno schedule per  $P$ , ovvero una funzione

$$f: P \rightarrow \{1, \dots, h\}$$

- MISURA:

- *makespan* o tempo di completamento di  $f$ , ovvero

$$\max_{i \in [1, \dots, h]} \sum_{p_j \in P \mid f(p_j) = i} t_j$$

## algoritmo: Greedy-Graham

- scelta greedy: ad ogni step assegna un job al processore meno carico
- $T_i(j)$ :
  - tempo di completamento (somma dei tempi di esecuzione dei jobs assegnati) del processore  $i$  al termine del tempo  $j$ , ovvero una volta schedulati i primi  $j$  jobs (in qualunque ordine)

---

### Algorithm 3 Greedy-Graham

---

siano  $p_1, \dots, p_n$  i jobs elencati in un qualsiasi ordine

**for**  $j = 1$  **to**  $n$  **do**

    assegna  $p_j$  al processore  $i$  avente il minimo  $T_i(j-1)$  ovvero  $f(p_j) = i$

**end for**

**return** schedule  $i$

---

- osservazione:

- se i jobs vengono schedulati in accordo con il tempo di arrivo, l'algoritmo assegna ciascun job senza conoscere quelli futuri, ovvero ONLINE

## teorema: Greedy-Graham é $\frac{2-1}{h}$ -approssimante

l'algoritmo Greedy-Graham é  $\frac{2-1}{h}$ -approssimante, dove  $h$  é il numero di processori

### fatto:

- dato  $s \geq 0$  e  $h$  numeri  $a_1, \dots, a_h \mid a_1 + \dots + a_h = s$ , allora esiste  $j$ ,  $1 \leq j \leq h$ , tale che

$$a_j \geq \frac{s}{h}$$

- altrimenti, contraddizione ( $a_1 + \dots + a_h < h \frac{s}{h} = s$ )
- analogamente, esiste  $j'$ ,  $1 \leq j' \leq h$ , tale che  $a_{j'} \leq \frac{s}{h}$
- in altre parole, un numero é al massimo uguale alla media e uno maggiore o uguale alla media

- pertanto,  $\min_j a_j \leq \frac{s}{h}$  e  $\max_j a_j \geq \frac{s}{h}$

**dimostrazione:**

- sia  $T$  la somma di tutti i tempi di esecuzione dei job, ovvero

$$T = \sum_{j=1}^n t_j$$

- siano  $T_1^*, T_2^*, \dots, T_h^*$  i tempi di completamento degli  $h$  processori nella soluzione ottima
- poiché  $T_1^* + T_2^* + \dots + T_h^* = T$  dal precedente 'fatto', esiste  $j$  tale che  $T_j^* \geq \frac{T}{h}$
- quindi:

$$m^* \geq T_j^* \geq \frac{T}{h}$$

- sia  $k$  il processore con il massimo tempo di completamento nello schedule  $f$  restituito dall'algoritmo, ovvero con  $T_k(n)$  massimo
- in più sia  $p_l$  l'ultimo job assegnato al processore  $k$
- dato che, per la scelta greedy,  $p_l$  è stato assegnato ad uno dei processori meno carichi all'inizio dello step  $l$ , sempre per il 'fatto' precedente, abbiamo:

$$T_k(l-1) \leq \frac{\sum_{j < l} t_j}{h} \leq \frac{T - t_l}{h}$$

- dato che la somma dei tempi di esecuzione di tutti i jobs assegnati prima di  $p_l$  è al massimo ( $\leq$ )  $T - t_l$
- pertanto:

$$\begin{aligned} m = T_k(n) &= T_k(l-1) + t_l \leq \frac{T - t_l}{h} + t_l = \\ &= \frac{T - t_l + ht_l}{h} = \frac{T}{h} - \frac{1+h}{h}t_l = \frac{T}{h} + \frac{h-1}{h}t_l \leq \dots \end{aligned}$$

- poiché  $\frac{T}{h} \leq m^*$  e  $t_l \leq m^*$

$$\begin{aligned} \dots &\leq m^* + \frac{h-1}{h}m^* = \frac{hm^* + (h-1)m^*}{h} = \frac{hm^* + hm^* - m^*}{h} = \\ &= \frac{2hm^* - m^*}{h} = \frac{2h-1}{h}m^* = (2 - \frac{1}{h})m^* \end{aligned}$$

- e quindi:

$$\frac{m}{m^*} \leq 2 - \frac{1}{h}$$

□

- osservazioni:

- quando  $h$  cresce, il rapporto di approssimazione  $\frac{2-1}{h}$  tende a 2
- l'analisi è stretta, ovvero vale il seguente teorema

**teorema: Greedy-Graham non é  $r$ -approssimante per  $r < \frac{2-1}{h}$**

Greedy-Graham non é  $r$ -approssimante per  $r < \frac{2-1}{h}$

**dimostrazione:**

- considera la seguente istanza:
  - $h(h-1)$  jobs con tempo di esecuzione 1
  - 1 job con tempo di esecuzione  $h$
- Greedy-Graham assegna i jobs nella seguente maniera:
- e quindi:

$$m = 2(h-1)$$

- la soluzione ottima può essere ottenuta assegnando il job più lungo ad un processore e distribuendo ugualmente i jobs più corti tra i processori restanti:
- e quindi:

$$m^* = h$$

- in conclusione:

$$\frac{m}{m^*} = \frac{2(h-1)}{h} = 2 - \frac{1}{h} \quad (\text{diverso da } \leq 2 - \frac{1}{h})$$

□

**migliorare il rapporto di approssimazione  $r$  per Greedy-Graham**

- DOMANDA: come possiamo migliorare il rapporto di approssimazione  $r$
- richiamiamo rapidamente gli step base della dimostrazione del rapporto di approssimazione di Greedy-Graham
- abbiamo utilizzato i seguenti *lower bounds* per il valore della soluzione ottima:
  - $m^* \geq \frac{T}{h}$ , come in qualsiasi soluzione almeno 1 processore deve avere tempo di completamento  $\frac{T}{h}$  (richiamiamo che  $T = \sum_j t_j$ )
  - $m^* \geq t_j$ , per ogni job  $p_j$ , come in qualsiasi soluzione uno dei processori deve eseguire  $p_j$
- abbiamo utilizzato il seguente *upper bound* per il valore della soluzione restituita:
  - per limitare superiormente il valore della soluzione restituita, se  $k$  é uno dei processori più carichi e  $p_l$  é l'ultimo job assegnato a  $k$ , per la scelta greedy:

$$T_k(l-1) \leq \frac{\sum_{j < l} t_j}{h} \leq \frac{T - t_l}{h}$$

- quindi possiamo derivare la seguente disuguaglianza:

$$\begin{aligned} m = T_k(n) &= T_k(l-1) + t_l \leq \frac{T - t_l}{h} + t_l = \\ &= \frac{T - t_l + ht_l}{h} = \frac{T}{h} - \frac{1+h}{h}t_l = \frac{T}{h} + \frac{h-1}{h}t_l \leq \dots \end{aligned}$$

- poiché  $\frac{T}{h} \leq m^*$  e  $t_l \leq m^*$

$$\begin{aligned} \dots &\leq m^* + \frac{h-1}{h}m^* = \frac{hm^* + (h-1)m^*}{h} = \frac{hm^* + hm^* - m^*}{h} = \\ &= \frac{2hm^* - m^*}{h} = \frac{2h-1}{h}m^* = (2 - \frac{1}{h})m^* \end{aligned}$$

- idea per il miglioramento: decrementa  $t_l$  il più possibile e trova un rapporto di approssimazione migliore sfruttando le disuguaglianze

$$m \leq \frac{T}{h} + \frac{h-1}{h}t_l \leq m^* + \frac{h-1}{h}t_l$$

- modificando l'algoritmo e/o migliorando l'analisi vedremo come limitare superiormente  $t_l$  progressivamente con:

- $\frac{m^*}{2}$  ( $\frac{3}{2}$ -approssimante),
- $\frac{m^*}{3}$  ( $\frac{4}{3}$ -approssimante),
- e arbitrariamente piccolo, ovvero  $\epsilon m^*$  ( $(1+\epsilon)$ -approssimante), cioè un PTAS

## Greedy-Graham, primo miglioramento

- assegnare i jobs dal più lungo al più corto
- ciò ci consente di evitare il caso peggiore dell'algoritmo di Graham, ovvero il fatto che un job lungo arrivi alla fine, sbilanciando significativamente il carico dei processori

## algoritmo: Ordered-Greedy

---

### Algorithm 4 Ordered-Greedy

---

```
siano  $p_1, p_2, \dots, p_n$  i job elencati in ordine decrescente di tempo di esecuzione,
ovvero tale che  $t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n$ 
for  $j=1$  to  $n$  do
  assegna  $p_j$  al processore  $i$  con il minimo  $T_i(j-1)$ , ovvero  $f(p_j)=i$ 
end for
return schedule  $f$ 
```

---

- vediamo un'analisi più semplice che porta ad un rapporto di approssimazione di circa  $\frac{3}{2}$

## lemma: Ordered-Greedy

se  $n > h$ , allora  $t_{h+1} \leq \frac{m^*}{2}$

### dimostrazione:

- dall'ordinamento dei jobs, i primi  $h+1$  hanno tutti un tempo di esecuzione  $\geq t_{h+1}$
- ma allora  $m^* \geq 2t_{h+1}$ , poiché in ogni schedule almeno 1 degli  $h$  processori deve ricevere almeno 2 dei primi  $h+1$  job

□

## teorema: Ordered-Greedy é $(\frac{3}{2} - \frac{1}{2h})$ -approssimante

Ordered-Greedy é  $(\frac{3}{2} - \frac{1}{2h})$ -approssimante

### dimostrazione:

- di nuovo sia  $k$  uno dei processori piú carichi (alla fine)
- se  $k$  ha 1 solo job, allora chiaramente la soluzione ritornata é ottima
- altrimenti considera l'ultimo job  $p_l$  assegnato a  $k$
- dato che  $p_l$  non é il primo job assegnato a  $k$ ,  $l \geq h+1$  e quindi  $t_l \leq t_{h+1} \leq \frac{m^*}{2}$ , e cosí:

$$\begin{aligned} m &\leq \frac{T}{h} + \frac{h-1}{h} t_l \leq m^* + \frac{h-1}{h} \frac{m^*}{2} = \\ &= m^* + \frac{m^*(h-1)}{2h} = \frac{2hm^* + m^*(h-1)}{2h} = \frac{2hm^* + hm^* - m^*}{2h} = \\ &= \frac{3hm^* - m^*}{2h} = \left(\frac{3h-1}{2h}\right)m^* = \left(\frac{3h}{2h} - \frac{1}{2h}\right)m^* = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2h}\right)m^* \end{aligned}$$

□

## problema: max cut

- INPUT: grafo  $G = (V, E)$
- SOLUZIONE: una partizione di  $V$  in 2 sottoinsiemi  $V_1$  e  $V_2$ , ovvero tale che:

$$V_1 \cup V_2 = V \text{ e } V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

- MISURA: la cardinalitá del taglio, ovvero il numero di archi con un estremo (nodo) in  $V_1$  e un estremo in  $V_2$ , cioé:

$$|\{\{u, v\} \mid u \in V_1 \text{ e } v \in V_2\}|$$

## algoritmo: Greedy-Max-Cut

---

### Algorithm 5 Greedy-Max-Cut

---

```
 $V_1 = V_2 = \emptyset$ 
for  $i = 1$  to  $n$  do
  //  $\Delta_i$  = set di archi tra  $i$  e i nodi  $j < i$  (adiacenti)
   $\Delta_i = \{\{i, j\} \in E \mid j < i\}$ 
  //  $U_i$  = set di nodi già inseriti (adiacenti ad  $i$ , all'inizio dello step  $i$ )
   $U_i = \{j \mid \{i, j\} \in \Delta_i\}$ 
   $\delta_i = |\Delta_i| = |U_i|$ 
   $\delta_{1i} = |V_1 \cap U_i|$ 
   $\delta_{2i} = |V_2 \cap U_i|$ 
  // chiaramente  $\delta_{1i} + \delta_{2i} = \delta_i$ 
  if  $\delta_{1i} > \delta_{2i}$  then
     $V_2 = V_2 \cup \{i\}$ 
  else
     $V_1 = V_1 \cup \{i\}$ 
  end if
end for
return  $V_1, V_2$ 
```

---

- per semplicità sia  $V = \{1, \dots, n\}$
- l'algoritmo ad ogni step inserisce un nuovo nodo in  $V_1$  o in  $V_2$
- scelta greedy:
  - allo step  $i$ , il nodo  $i$  viene inserito in modo da massimizzare il numero di archi nuovi nel taglio, ovvero in  $V_1$  se il numero di archi che ha verso i nodi già inseriti in  $V_2$  è maggiore ( $\geq$ ) del numero di archi che ha verso quelli in  $V_1$ , altrimenti in  $V_2$  ( $<$ )

### teorema: Greedy-Max-Cut é $\frac{1}{2}$ -approssimante

Greedy-Max-Cut é  $\frac{1}{2}$ -approssimante

#### dimostrazione:

- chiaramente poiché quel taglio può solo contenere un sottoinsieme di tutti gli archi in  $E$

$$m^* \leq |E|$$

- mostriamo ora che la misura  $m$  del taglio restituita dall'algoritmo é almeno la metà del numero totale di archi, ovvero:

$$m \geq \frac{|E|}{2}$$

- ciò implica chiaramente l'affermazione, poiché

$$\frac{m}{m^*} \geq \frac{\frac{|E|}{2}}{|E|} = \frac{1}{2}$$

- poiché gli insiemi  $\Delta_i$  determinati dall'algoritmo formano una partizione di  $E$  e per definizione  $\delta_i = |\Delta_i|$ :

$$\sum_{i=1}^n \delta_i = \sum_{i=1}^n |\Delta_i| = |E|$$

- inoltre, il numero di archi aggiunti al taglio durante lo step  $i$ , ovvero con un estremo in  $V_1$  e l'altro in  $V_2$  (dopo l'esecuzione dell' $i$ -esima iterazione dell'istruzione *for*), é:

$$\max(\delta_{1i}, \delta_{2i}) \geq \frac{(\delta_{1i} + \delta_{2i})}{2} = \frac{\delta_i}{2}$$

- quindi:

$$m = \sum_{i=1}^n \max(\delta_{1i}, \delta_{2i}) \geq \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{2} = \frac{|E|}{2}$$

□

### conclusioni sulla tecnica greedy

- tutti gli algoritmi visti fin ora hanno complessità temporale polinomiale
- gli algoritmi greedy hanno buone performance in pratica poiché possono essere implementati in modo semplice
- ma come abbiamo visto, compiere la scelta che sembra migliore a ciascun singolo step, senza badare alle conseguenze future, in generale non permette di trovare la soluzione ottima



# algorithmic techniques: local search

## caratteristiche

- definiamo, per ogni soluzione ammissibile  $y$ , un sottoinsieme di soluzioni ammissibili "vicine" chiamato intorno di  $y$  o semplicemente  $neighborhood(y)$
- partendo da una soluzione iniziale, si passa ripetutamente ad una soluzione migliore nell'intorno corrente, finché possibile

## schema di un algoritmo di ricerca locale

- risolve una soluzione iniziale  $y$  ammissibile per l'input  $x$  (di solito una banale)
- fintanto che esiste una  $y' \in neighborhood(y)$  migliore di  $y$ 
  - sia  $y = y'$
- ritorna  $y$
- per definire un algoritmo di ricerca locale per un determinato problema é quindi sufficiente definire:
  - la soluzione iniziale
  - l'intorno delle soluzioni ammissibili

## complessità

- per ottenere una complessità temporale polinomiale:
  - la soluzione iniziale deve essere determinata in tempo polinomiale
  - il test della condizione di guardia del *while* e l'eventuale conseguente determinazione di una soluzione migliore nell'intorno deve essere eseguito in tempo polinomiale
  - NOTA: l'intorno può avere una cardinalità esponenziale rispetto alla dimensione dell'input!
  - il numero di iterazioni del *while* deve essere polinomiale

## approssimazione

- OTTIMO LOCALE: la soluzione  $y$  restituita é la migliore nell'intorno considerato
- per limitare il rapporto di approssimazione é sufficiente limitare il rapporto tra il valore di un qualsiasi ottimo locale con quello della misura di una soluzione ottima globale

## definizione dell'intorno

- $neighborhood(y)$ :
  - sufficientemente "ricco", per ottenere buone soluzioni (ottimi locali)
  - sufficientemente "povero", per garantire una complessità temporale polinomiale

## definizione dell'intorno: casi estremi

- $neighborhood(y) = \emptyset$ 
  - tempo di esecuzione polinomiale (se la soluzione iniziale viene determinata in tempo polinomiale)
  - cattiva approssimazione (ogni soluzione é un ottimo locale)
- $neighborhood(y) = S(x)$ , ovvero l'insieme di tutte le soluzioni ammissibili per  $x$ 
  - tempo di esecuzione non polinomiale (se il problema é NP-HARD)
  - buona approssimazione (poiché ogni ottimo locale é anche un ottimo globale)

## problema: max cut (giá definito precedentemente)

- INPUT: grafo  $G = (V, E)$
- SOLUZIONE: una partizione di  $V$  in 2 sottoinsiemi  $V_1$  e  $V_2$ , ovvero tale che:

$$V_1 \cup V_2 = V \text{ e } V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

- MISURA: la cardinalitá del taglio, ovvero il numero di archi con un estremo (nodo) in  $V_1$  e un estremo in  $V_2$ , cioè:

$$|\{ \{u, v\} \mid u \in V_1 \text{ e } v \in V_2 \}|$$

## algoritmo di ricerca locale per max cut

- per definire l'algoritmo di ricerca locale, é sufficiente determinare:
  - la soluzione iniziale:

$$V_1 = V, V_2 = \emptyset$$

- l'intorno:

\* dati  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  e  $V_1, V_2$ , le soluzioni dell'intorno di  $(V_1, V_2)$  sono tutte le coppie  $(V_{1i}, V_{2i})$  con  $1 \leq i \leq n$  che possono essere ottenute muovendo un nodo  $v_i$  da  $V_1$  a  $V_2$  o viceversa, ovvero:

$$\begin{aligned} \text{if } (v_i \in V_1) \quad & V_{1i} = V_1 \setminus \{v_i\} \text{ e } V_{2i} = V_2 \cup \{v_i\} \\ \text{else } (v_i \in V_2) \quad & V_{1i} = V_1 \cup \{v_i\} \text{ e } V_{2i} = V_2 \setminus \{v_i\} \end{aligned}$$

## complessitá (algoritmo di ricerca locale per max cut)

- la soluzione iniziale viene banalmente ottenuta in tempo polinomiale
- il test della guardia *while* e l'eventuale determinazione di una migliore soluzione nell'intorno viene effettuata in tempo polinomiale come segue:
  - per ciascuna delle  $n$  soluzioni dell'intorno ( $n$  iterazioni), controlla se la soluzione corrente é migliore ( $n^2$  iterazioni)  $\rightarrow O(n^3)$
- le iterazioni nel *while* sono al massimo  $(\leq) |E| = O(n^2)$ , poiché ogni iterazione migliora la soluzione corrente, ovvero aumenta almeno di 1 il numero di archi del taglio, e vi sono  $|E|$  archi nel taglio (al massimo)
- quindi l'algoritmo ha complessitá temporale:

$$O(n^3 n^2) = O(n^5)$$

## approssimazione (algoritmo di ricerca locale per max cut)

- vediamo una proprietà utile a mostrare il rapporto di approssimazione dell'algoritmo:

## fatto (approssimazione (algoritmo di ricerca locale per max cut))

dato un grafo  $G = (V, E)$ , sia  $\delta_i$  il grado di un generico nodo  $v_i \in V$ , allora:

$$\sum_{i=1}^n \delta_i = 2|E|$$

### dimostrazione:

- banalmente vero, poiché ogni arco viene contato 2 volte nella somma, ovvero incrementa la somma di 2

□

## teorema: l'algoritmo di ricerca locale è $\frac{1}{2}$ -approssimante

l'algoritmo di ricerca locale è  $\frac{1}{2}$ -approssimante

### dimostrazione:

- mostriamo che ogni ottimo locale  $(V_1, V_2)$  ha misura:

$$m \geq \frac{|E|}{2}$$

- ciò implica:

$$\frac{m}{m^*} \geq \frac{\frac{|E|}{2}}{|E|} = \frac{1}{2}$$

- poiché  $m^* \leq |E|$
- dato un ottimo locale  $(V_1, V_2)$  denotiamo con  $h$  il numero di archi interni, ovvero con entrambi gli estremi in  $V_1$  o in  $V_2$
- chiaramente,  $m + h = |E|$
- per ogni nodo  $v_i \in V$  definiamo i gradi interni ed esterni del nodo come segue:

- $\delta_i^{int}$  = numero di archi che  $v_i$  ha verso i nodi nella sua stessa partizione, ovvero:

$$\delta_i^{int} = |\{v_k | \{v_i, v_k\} \in E \text{ e } (v_i, v_k \in V_1) \text{ o } (v_i, v_k \in V_2)\}|$$

- $\delta_i^{ext}$  = numero di archi che  $v_i$  ha verso i nodi nell'altra partizione, ovvero:

$$\delta_i^{ext} = |\{v_k | \{v_i, v_k\} \in E \text{ e } (v_i \in V_1, v_k \in V_2) \text{ o } (v_i \in V_2, v_k \in V_1)\}|$$

- poiché la soluzione nell'intorno  $(V_1, V_2)$  ha misura non maggiore ( $\leq$ ) di quella di  $(V_1, V_2)$  (ottimo locale), abbiamo:

$$m - \delta_i^{ext} + \delta_i^{int} \leq m$$

- e quindi:

$$\delta_i^{int} - \delta_i^{ext} \leq 0$$

- riassunto, su tutti i nodi, abbiamo:

$$\sum_{v_i \in V} \delta_i^{int} - \sum_{v_i \in V} \delta_i^{ext} = \sum_{v_i \in V} (\delta_i^{int} - \delta_i^{ext}) \leq 0$$

- dal fatto precedente:

$$\sum_{v_i \in V} \delta_i^{int} = 2h$$

(perché é come sommare i gradi dei nodi del grafo contenente solo gli archi interni)

- e (sempre dal fatto precedente):

$$\sum_{v_i \in V} \delta_i^{ext} = 2m$$

(perché é come sommare i gradi dei nodi del grafo contenente solo gli archi esterni)

- quindi:

$$0 \geq \sum_{v_i \in V} \delta_i^{int} - \sum_{v_i \in V} \delta_i^{ext} = 2h - 2m$$

- ovvero  $m \geq h$

- quindi (aggiungendo  $m$  su entrambi i lati e dividendo per 2), otteniamo:

$$\frac{2m}{2} \geq \frac{(m+h)}{2} = m \geq \frac{(m+h)}{2} = \frac{|E|}{2}$$

□

## **TODO: esempio esecuzione algoritmo di ricerca locale su grafo**

### **conclusioni sulla tecnica della ricerca locale**

- come gli algoritmi greedy, gli algoritmi di ricerca locale hanno buone performance nella pratica e portano alla determinazione di buone euristiche (algoritmi che eseguono bene nella pratica ma che di solito non hanno prestazioni garantite in termini di tempo o approssimazione)

# algorithmic techniques: linear programming (rounding)

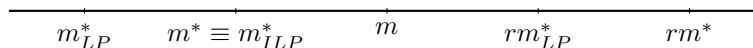
## caratteristiche

- il problema é formulato come un programma lineare intero (ILP: integer linear program)
- programma lineare intero: programmi lineare + vincoli di interezza
- esiste un algoritmo con complessità temporale polinomiale (algoritmo ellissoide) per risolvere problemi lineari, ma...
- risolvere un programma lineare intero é un problema NP-HARD
- la formulazione come ILP consente di utilizzare potenti mezzi generali che, in base alle proprietà dell'ILP, sono in grado di fornire algoritmi con buona approssimazione:
  - rounding (arrotondamento)
  - primal-dual (primale-duale)

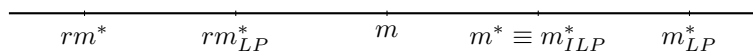
## rounding: caratteristiche

- il problema é formulato come un programma lineare
- il rilassamento lineare (LP) viene ottenuto dall'ILP rilassando i vincoli d'interezza, ovvero sostituendoli con adeguati vincoli lineari (sugli interi)
- la soluzione ottenuta (ottima per LP) é arrotondata ad una vicina soluzione intera ammissibile per ILP
- la misura  $m$  della soluzione ottenuta é in seguito confrontata con quella della soluzione ottima LP, ovvero  $m_{LP}^*$ , cioè un limite inferiore (min) o superiore (max) per  $m^*$

### min problems



### max problems



## problema: min weighted vertex cover

- INPUT:
  - un grafo  $G = (V, E)$
  - un costo intero  $c_j$  associato ad ogni  $v_j \in V$
- SOLUZIONE:
$$U \subseteq V \mid v_j \in U \vee v_k \in U, \forall \{v_j, v_k\} \in E$$
- MISURA: costo totale di  $U$ , ovvero

$$\sum_{v_j \in U} c_j$$

## ILP: min weighted vertex cover

- funzione obiettivo:  $\min \sum_{j=1}^n c_j x_j$
- vincoli:  $x_j + x_k \geq 1, \forall \{v_j, v_k\} \in E$
- vincoli interi:  $x_j \in \{0,1\}, \forall v_j \in V, \forall j \text{ con } 1 \leq j \leq n$

## LP: min weighted vertex cover (rilassamento lineare)

- $\min \sum_{j=1}^n c_j x_j$
- $x_j + x_k \geq 1, \forall \{v_j, v_k\} \in E$
- ~~$x_j \leq 1, \forall v_j \in V$~~  (superfluo)
- $x_j \geq 0, \forall v_j \in V$

## algoritmo: Round-Vertex-Cover

---

### Algorithm 6 Round-Vertex-Cover

---

determina l'ILP associato all'istanza in input

risolvi il rilassamento lineare LP dell'ILP

sia  $\langle x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^* \rangle$  la risultante soluzione ottima dell'LP

$\forall v_j$  sia  $x_j = 1$  se  $x_j^* \geq \frac{1}{2}$  e  $x_j = 0$  se  $x_j^* < \frac{1}{2}$

**return** il cover  $U$  associato a  $\langle x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^* \rangle$ , ovvero tale che  $U = \{v_j \in V \mid x_j = 1\}$

---

## teorema: l'algoritmo Round-Vertex-Cover é 2-approssimante

l'algoritmo Round-Vertex-Cover é 2-approssimante

### dimostrazione:

- é sufficiente mostrare che:
  1.  $x_1, x_2, \dots, x_n$  é ammissibile per l'ILP (esso soddisfa tutti i vincoli), ovvero  $U$  é un cover
  2.  $\frac{m}{m_{LP}^*} \leq 2$  e quindi anche  $\frac{m}{m^*} \leq \frac{m}{m_{LP}^*} \leq 2$
- DIMOSTRIAMO 1.
  - dall'ammissibilitá di  $\langle x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^* \rangle$  per LP, per ogni arco  $\{v_j, v_k\} \in E$  vale  $x_j^* + x_k^* \geq 1$
  - ovvero  $x_j^* \geq 0.5$  o  $x_k^* \geq 0.5$ , cosí che  $x_j = 1$  o  $x_k = 1$ , e quindi  $x_j + x_k \geq 1$  é soddisfatto in ILP
- DIMOSTRIAMO 2.

$$m = \sum_{j=1}^n c_j x_j \dots$$

- (dall'arrotondamento:  $x_j \leq 2x_j^*$ )

$$m = \sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{j=1}^n c_j 2x_j^* = 2 \sum_{j=1}^n c_j x_j^* \dots$$

$$- (\sum_{j=1}^n c_j x_j^* = m_{LP}^*)$$

$$m = \sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{j=1}^n c_j 2x_j^* = 2 \sum_{j=1}^n c_j x_j^* = 2m_{LP}^*$$

- ovvero:

$$\frac{m}{m^*} \leq \frac{m}{m_{LP}^*} \leq 2$$

■

□

## problema: min weighted set cover

• INPUT:

- un universo  $U = \{o_1, o_2, \dots, o_n\}$  di  $n$  oggetti
- una famiglia  $\hat{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_h\}$  di  $h$  sottoinsiemi di  $U$
- un costo intero  $c_j$  associato ad ogni  $S_j \in \hat{S}$

• SOLUZIONE: un cover di  $U$ , ovvero una sottofamiglia  $\hat{C} \subseteq \hat{S}$  tale che:

$$\cup_{S_j \in \hat{C}} S_j = U$$

• MISURA: costo totale del cover, ovvero

$$\sum_{S_j \in \hat{C}} c_j$$

- $f$  = frequenza massima di un oggetto nel sottoinsieme  $\hat{S}$ , ovvero ciascun oggetto occorre in al massimo  $f$  sottoinsiemi
- dato un insieme di  $n$  elementi  $\{1, 2, \dots, n\}$  (chiamato universo) e una collezione  $S$  di  $m$  insiemi, la cui unione eguaglia l'universo, il problema del set cover consiste nell'identificare il più piccolo sottoinsieme di  $S$  la cui unione eguaglia l'universo

## ILP: min weighted set cover

- funzione obiettivo:  $\min \sum_{j=1}^h c_j x_j$
- vincoli:  $\sum_{S_j | o_i \in S_j} x_j \geq 1, \forall o_i \in U$
- vincoli interi:  $x_j \in \{0, 1\}, \forall S_j \in \hat{S}$

## LP: min weighted set cover (rilassamento lineare)

- $\min \sum_{j=1}^h c_j x_j$
- $\sum_{S_j | o_i \in S_j} x_j \geq 1, \forall o_i \in U$
- $x_j \leq 1, \forall S_j \in \hat{S}$  (superfluo)
- $x_j \geq 0, \forall S_j \in \hat{S}$

## algoritmo: Round-Set-Cover

---

**Algorithm 7** Round-Set-Cover

---

determina l'ILP associato all'istanza in input  
risolvi il rilassamento lineare LP dell'ILP  
sia  $\langle x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^* \rangle$  la risultante soluzione ottima dell'LP  
 $\forall S_j$  sia  $x_j = 1$  se  $x_j^* \geq \frac{1}{f}$  e  $x_j = 0$  se  $x_j^* < \frac{1}{f}$   
**return** il cover risultante, ovvero  $\hat{C} = \{S_j \in \hat{S} \mid x_j = 1\}$

---

**teorema: l'algoritmo Round-Set-Cover é  $f$ -approssimante ( $f \geq 1$ )**

l'algoritmo Round-Set-Cover é  $f$ -approssimante ( $f \geq 1$ )

**dimostrazione:**

• é sufficiente mostrare che:

1.  $x_1, x_2, \dots, x_n$  é ammissibile per l'ILP
2.  $\frac{m}{m_{LP}^*} \leq f$  e quindi anche  $\frac{m}{m^*} \leq \frac{m}{m_{LP}^*} \leq f$

• DIMOSTRIAMO 1.

- dall'ammissibilit  di  $\langle x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^* \rangle$  per LP,  $\forall o_i \in U$

$$\sum_{S_j | o_i \in S_j} x_j^* \geq 1$$

- e poich  la somma ha al massimo ( $\leq$ )  $f$  termini, deve esistere  $S_j$  contenente  $o_i$  tale che  $x_j^* \geq \frac{1}{f}$ , ovvero tale che  $x_j = 1$ , e quindi:

$$\sum_{S_j | o_i \in S_j} x_j \geq 1$$

■

• DIMOSTRIAMO 2.

$$m = \sum_{j=1}^h c_j x_j \dots$$

- (dall'arrotondamento:  $x_j \leq f x_j^*$ )

$$m = \sum_{j=1}^h c_j x_j \leq \sum_{j=1}^h c_j f x_j^* = f \sum_{j=1}^h c_j x_j^* \dots$$

- ( $\sum_{j=1}^h c_j x_j^* = m_{LP}^*$ )

$$m = \sum_{j=1}^h c_j x_j \leq \sum_{j=1}^h c_j f x_j^* = f \sum_{j=1}^h c_j x_j^* = f m_{LP}^*$$

- ovvero:

$$\frac{m}{m^*} \leq \frac{m}{m_{LP}^*} \leq f$$

■

□



# algorithmic techniques: dynamic programming (part 1)

## caratteristiche

- come nel paradigma divide-and-conquer, suddividi il problema in sottoproblemi piú piccoli, risolvi ricorsivamente ciasun sottoproblema e combina le soluzioni dei sottoproblemi per formare la soluzione al problema originale
- ricorrenza facile da calcolare che consente di determinare la soluzione ad un sottoproblema dalla soluzione di sottoproblemi piú piccoli
- differentemente da divide-and-conquer, i sottoproblemi non sono indipendenti, ma si sovrappongono, ovvero durante le decomposizioni occorrono frequentemente gli stessi sottoproblemi
- idea: ciascun sottoproblema viene risolto solo una volta, ciò riduce la complessitá temporale
- differentemente da divide-and-conquer, di solito é con approccio bottom-up invece che top-down, ovvero partendo da sottoproblemi piú piccoli e risolvendo progressivamente quelli piú grandi, fino al problema iniziale

## uno sguardo piú ravvicinato...

- il paradigma divide-and-conquer é basato sulla decomposizione dei problemi in sottoproblemi piú piccoli:
  - risolvi ricorsivamente i sottoproblemi
  - combina le soluzioni dei sottoproblemi per determinare la soluzione del problema iniziale
- se un problema di taglia  $n$  é decomposto in  $k$  sottoproblemi di taglie  $n_1, n_2, \dots, n_k < n$ , rispettivamente, allora la complessitá temporale può essere espressa dall ricorrenza

$$T(n) = T(n_1) + T(n_2) + \dots + T(n_k) + C(n)$$

con  $C(n)$  = tempo per combinare le  $k$  sottosoluzioni

- la ricorrenza può essere risolta con metodi differenti, come ad esempio il ricorso al celebre Master Theorem
- un classico esempio di applicazione di divide-and-conquer é il calcolo dei numeri di Fibonacci
- l'algoritmo deriva direttamente dalla definizione ricorsiva di tali numeri

## algoritmo: Fibonacci

- caso base:  $(n \leq 2) \ F(1) = F(2) = 1$
- caso induttivo:  $(n > 2) \ F(n) = F(n-1) + F(n-2), n$

---

### Algorithm 8 Fibonacci

---

```
if  $n = 1$  or  $n = 2$  then
    return 1
else
    return Fibonacci( $n-1$ )+Fibonacci( $n-2$ )
end if
```

---

- complessità temporale:

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + \Theta(1)$$

- che restituisce:

$$T(n) = O(2^n)$$

- albero delle chiamate ricorsive:

- nota:

- \* inefficiente: gli stessi sottoproblemi vengono risolti ripetutamente per molte volte

## algoritmo: Fibonacci 2

- programmazione dinamica:

- memorizza la soluzione di ciascun sottoproblema in una tabella o in un array, così da evitare di risolverli ripetutamente
- nell'algoritmo risultante,  $F$  é un array esterno globale visibile a tutte le chiamate ricorsive

- nuovo albero delle chiamate ricorsive

---

### Algorithm 9 Fibonacci 2

---

```

if  $n = 1$  or  $n = 2$  then
   $F[n] = 1$ 
  return  $F[n]$ 
else
  if  $F[n]$  é stato già assegnato then
    return  $F[n]$ 
  else
     $F[n] = \text{Fibonacci}(n-1) + \text{Fibonacci}(n-2)$ 
    return  $F[n]$ 
  end if
end if

```

---

## algoritmo: Fibonacci 3

---

### Algorithm 10 Fibonacci 3

---

```

 $F[1] = 1$ 
 $F[2] = 1$ 
for  $i = 3$  to  $n$  do
   $F[i] = F[i-1] + F[i-2]$ 
end for
return  $F[n]$ 

```

---

## riassumendo

- in programmazione dinamica:

- il problema iniziale può essere ricorsivamente decomposto in sottoproblemi
- gli stessi sottoproblemi occorrono molte volte e sono risolti una volta soltanto

- la soluzione di un sottoproblema può essere ottenuta combinando quelle dei sottoproblemi più piccoli
- 2 possibili implementazioni:
  - top-down (con annotazione in tabella)
  - bottom-up

### **top-down vs. bottom-up**

- top-down
  - sfrutta l'annotazione in tabella
  - PRO: risolve solo i sottoproblemi strettamente necessari
  - CON: overhead derivante dalla catena di chiamate ricorsive
- bottom-up
  - é la scelta tipica nella programmazione dinamica
  - PRO: é in ogni caso generalmente più efficiente perché elimina il peso della ricorsione, il quale incide maggiormente sulle prestazioni
  - CON: risolve anche i problemi non necessari

### **divide-and-conquer vs. dynamic programming**

- divide-and-conquer
  - tecnica ricorsiva
  - approccio top-down (problemi divisi in sottoproblemi)
  - utile quando i sottoproblemi sono indipendenti (ovvero differenti)
  - altrimenti, gli stessi sottoproblemi vengono risolti più volte
- dynamic programming
  - tecnica iterativa
  - tipicamente approccio bottom-up
  - utile quando i sottoproblemi si sovrappongono (ovvero coincidono)
  - ciascun sottoproblema viene risolto una volta soltanto

## **algorithmic techniques: dynamic programming (part 2)**

### **progettazione di algoritmi di programmazione dinamica**

- fornire una decomposizione ricorsiva dei sottoproblemi
- calcolare le sottosoluzioni in maniera bottom-up, ovvero partendo dai sottoproblemi di taglia più piccola
  - utilizzare una tabella per memorizzare i risultati dei sottoproblemi
  - evitare il calcolo delle stesse soluzioni sfruttando la tabella
- combinare le soluzioni dei sottoproblemi già risolti per costruire quelle dei sottoproblemi di taglia maggiore, fino alla risoluzione del problema originale

## complessità degli algoritmi di programmazione dinamica

- consideriamo la seguente tabella:
  - $n$  = taglia dei sottoproblemi  $(1, 2, \dots, n)$
  - $k$  = parametri dei sottoproblemi  $(p_1, p_2, \dots, p_k)$
- taglia della tabella = numero di sottoproblemi =  $nk$
- complessità:
  - [ taglia della tabella ]  $\times$  [ tempo per combinare le soluzioni ]
  - il tempo per combinare le soluzioni é sempre banalmente polinomiale
  - la complessità é polinomiale se la tabella ha taglia polinomiale, ovvero se é presente un numero polinomiale di differenti sottoproblemi

## problema: max 0-1 knapsack (giá definito precedentemente)

- INPUT:
  - un insieme finito di oggetti  $O$
  - un profitto intero  $p_i, \forall o_i \in O$
  - un peso intero  $w_i, \forall o_i \in O$
  - un intero positivo  $b$  ( $b > 0$ )
- SOLUZIONE:
  - un sottoinsieme di oggetti  $Q \subseteq O$  tale che  $\sum_{o_i \in Q} w_i \leq b$
- MISURA:
  - profitto totale degli oggetti scelti, ovvero  $\sum_{o_i \in Q} p_i$
- senza perdere di generalità, in seguito, assumeremo sempre che:
  - $w_i \leq b, \forall o_i \in O$
  - $p_i > 0, \forall o_i \in O$

## algoritmo brute force

- semplice algoritmo che enumera tutti i possibili  $2^n$  sottoinsiemi degli  $n$  elementi
- sceglie la migliore combinazione (miglior profitto)
- l'algoritmo di programmazione solitamente ha performance migliori

## progettazione dell'algoritmo di programmazione dinamica

- definizione:
  - $OPT(i, w)$  = sottoinsieme con profitto massimo di oggetti  $1, 2, \dots, i$  con limite di peso  $w$
- fatto:
  - $OPT(n, b)$  = soluzione ottima del problema iniziale
- le seguenti alternative possono occorrere per  $OPT(i, w)$ :
  1.  $OPT$  non seleziona l'oggetto  $i$

- $OPT$  seleziona il migliore tra  $\{1, 2, \dots, i-1\}$  utilizzando il limite di peso  $w$
- 2.  $OPT$  seleziona l'oggetto  $i$ 
  - $OPT$  seleziona il migliore tra  $\{1, 2, \dots, i-1\}$  utilizzando il limite di peso  $w - w_i$
- assumiamo che  $OPT(k, w)$  sia la soluzione ottima per gli elementi  $\{o_1, o_2, \dots, o_k\}$
- nota: la soluzione ottima  $OPT(k+1, w)$  potrebbe non corrispondere a  $OPT(k, w)$
- anche perché  $OPT(k+1, w)$  potrebbe non essere un superset di  $OPT(k, w)$

### **definizione ricorsiva per $OPT$**

- possiamo dunque fornire la seguente definizione ricorsiva per  $OPT$ :
  - $OPT(i, w) = \emptyset$  se  $i = 0$
  - $OPT(i, w) = OPT(i-1, w)$  se  $w_i > w$
  - $OPT(i, w) =$  scelta migliore tra  $OPT(i-1, w)$  e  $OPT(i-1, w - w_i) \cup \{o_i\}$  (altrimenti)

### **definizione ricorsiva per la misura $m$ della soluzione ottima $OPT(i, w)$**

- in termini di misura  $m(i, w)$  della soluzione ottima  $OPT(i, w)$ 
  - $m(i, w) = 0$  se  $i = 0$
  - $m(i, w) = m(i-1, w)$  se  $w_i > w$
  - $m(i, w) = \max\{m(i-1, w), m(i-1, w - w_i) + p_i\}$  (altrimenti)
- chiaramente,  $m^* = m(n, b)$

### **riepilogo definizioni ricorsive per $m$ e $OPT$**

- come risultato, questo significa che il miglior sottoinsieme di  $k$  oggetti con vincolo di peso  $w$  è (mutua esclusione):
  - il miglior sottoinsieme di  $(k-1)$  oggetti con peso totale  $w$
  - il miglior sottoinsieme di  $(k-1)$  oggetti con peso totale  $w - w_k$ , più il contributo (il suo profitto) del  $k$ -esimo oggetto
  - quindi per quando riguarda la seguente formula ricorsiva:
    - \*  $OPT(i, w) = \emptyset$  se  $i = 0$
    - \*  $OPT(i, w) = OPT(i-1, w)$  se  $w_i > w$
    - \*  $OPT(i, w) =$  scelta migliore tra  $OPT(i-1, w)$  e  $OPT(i-1, w - w_i) \cup \{o_i\}$  (altrimenti)
  - o il  $k$ -esimo oggetto non può essere parte della soluzione (poiché il suo solo peso è così grande che l'oggetto stesso non entra nel knapsack)
  - altrimenti, scegliamo la soluzione migliore tra:
    - \* la soluzione che include il nuovo oggetto
    - \* la soluzione migliore che non include il nuovo oggetto

---

**Algorithm 11** Progr-Dyn-Knapsack

---

```
// inizializzazione a 0 della prima riga dell'array bidimensionale  $M$  (da 1 a  $b$ )
for  $w = 1$  to  $b$  do
     $M[0, w] = 0$ 
end for
// inizializzazione a 0 della prima colonna dell'array bidimensionale  $M$  (da 0 a  $n$ )
for  $i = 0$  to  $n$  do
     $M[i, 0] = 0$ 
end for
for  $i = 1$  to  $n$  do
    for  $w = 1$  to  $b$  do
        if  $w_i > w$  then
             $M[i, w] = M[i - 1, w]$ 
        else
             $M[i, w] = \max\{M[i - 1, w], M[i - 1, w - w_i] + p_i\}$ 
        end if
    end for
end for
return  $M[n, b]$ 
```

---

**algoritmo: Progr-Dyn-Knapsack**

- l'algoritmo Progr-Dyn-Knapsack per il problema max 0-1 knapsack, trova il massimo valore che può essere inserito dentro il knapsack
- il valore viene memorizzato in  $M[n, b]$  al termine della procedura
- per scoprire quali sono gli oggetti che sono stati inseriti nella soluzione ottima, bisogna tornare indietro nella tabella:
  - dobbiamo memorizzare in qualche modo ciascun oggetto aggiunto

**algoritmo: Progr-Dyn-Knapsack (trovare gli oggetti inseriti)**

---

**Algorithm 12** Progr-Dyn-Knapsack (trovare gli oggetti inseriti)

---

```
 $i = n$ 
 $k = w$ 
if  $M[i, k] \neq M[i - 1, k]$  then
    marca l'oggetto  $i$  come 'inserito nel knapsack'
     $i = i - 1$ 
     $k = k - w_i$ 
else
    // assumi che l'oggetto  $i$ -esimo non sia stato inserito nel knapsack
     $i = i - 1$ 
end if
```

---

**teorema: l'algoritmo Progr-Dyn-Knapsack ha complessità temporale  $O(nb)$**

la complessità temporale dell'algoritmo Progr-Dyn-Knapsack é  $O(nb)$

**dimostrazione:**

- l'algoritmo impiega  $O(1)$  per ciascuna entry della tabella
- vi sono  $O(nb)$  entry nella tabella

- dopo aver calcolato i valori possiamo risalire per trovare la soluzione ottima:
  - prendi l'elemento  $o_i$  in  $OPT(i, w) \iff M[i-1, w] < M[i, w]$

□

### domanda: l'algoritmo Progr-Dyn-Knapsack é polinomiale?

l'algoritmo Progr-Dyn-Knapsack é polinomiale?  
(suggerimento: considera il caso in cui  $b = 2^n$ )

### risposta:

- per essere polinomiale, la complessità dovrebbe essere polinomiale nel logaritmo dei valori codificati nell'istanza in input, ovvero rispetto a  $\log b$
- questa complessità é chiamata **pseudo-polinomiale**, ovvero polinomiale nella dimensione e nei valori in input, non solo nella dimensione dell'input

### algoritmo Progr-Dyn-Knapsack-Dual: approccio duale

- definizione:
  - $OPT(i, p)$  = sottoinsieme di peso minimo di oggetti  $1, 2, \dots, i$  con profitto almeno pari a  $p$  ( $\geq$ )
- domanda: quale sottoproblema corrisponde alla soluzione ottima?
- le seguenti alternative possono occorrere per  $OPT(i, p)$ :
  1.  $OPT$  non seleziona l'oggetto  $i$ 
    - $OPT$  seleziona il migliore tra  $\{1, 2, \dots, i-1\}$  utilizzando il limite di profitto  $p$
  2.  $OPT$  seleziona l'oggetto  $i$ 
    - $OPT$  seleziona il migliore tra  $\{1, 2, \dots, i-1\}$  utilizzando il limite di profitto  $p - p_i$

### definizione ricorsiva per $OPT$ (duale)

- possiamo dunque fornire la seguente definizione ricorsiva per  $OPT$ :
  - $OPT(i, p)$  = non definito se  $i = 0$
  - $OPT(i, p)$  = scelta migliore tra  $OPT(i-1, p)$  e  $\{o_i\}$  se  $p_i \geq p$
  - $OPT(i, p)$  = scelta migliore tra  $OPT(i-1, p)$  e  $OPT(i-1, p - p_i) \cup \{o_i\}$  (altrimenti, non definito se entrambi non sono definiti)

### definizione ricorsiva per la misura $v$ della soluzione ottima $OPT(i, p)$

- in termini di peso  $v(i, p)$  della soluzione ottima  $OPT(i, p)$ 
  - $v(i, p) = \infty$  se  $i = 0$
  - $v(i, p) = \min\{v(i-1, p), w_i\}$  se  $p_i \geq p$
  - $v(i, p) = \min\{v(i-1, p), v(i-1, p - p_i) + w_i\}$  (altrimenti)

## algoritmo: Progr-Dyn-Knapsack-Dual

---

**Algorithm 13** Progr-Dyn-Knapsack-Dual

---

```
// inizializzazione a  $\infty$  della prima riga dell'array bidimensionale  $V$  (da 1 a  $P$ )
for  $p = 1$  to  $P$  do
     $V[0, p] = \infty$ 
end for
// inizializzazione a  $\infty$  della prima colonna dell'array bidimensionale  $V$  (da 0 a  $n$ )
for  $i = 0$  to  $n$  do
     $V[i, 0] = \infty$ 
end for
for  $i = 1$  to  $n$  do
    for  $p = 1$  to  $P$  do
        if  $p_i \geq p$  then
             $V[i, p] = \min\{V[i-1, p], w_i\}$ 
        else
             $V[i, p] = \min\{V[i-1, p], V[i-1, p-p_i] + w_i\}$ 
        end if
    end for
end for
return  $\max p \mid V[n, p] \leq b$ 
```

---

- problema: come dovremmo scegliere  $P$ ?
- risposta: grande abbastanza da includere l'ottimo, ovvero qualunque *upper bound* di  $m^*$ , cioè  $P \geq m^*$
- scelta:

$$P = np_{\max} \geq \sum_{i=1}^n p_i \geq m^*, \quad (p_{\max} = \max p_j)$$

**teorema: l'algoritmo Progr-Dyn-Knapsack-Dual ha complessità temporale  $O(n^2 p_{\max})$**

l'algoritmo Progr-Dyn-Knapsack-Dual ha complessità temporale  $O(n^2 p_{\max})$

**dimostrazione:**

- l'algoritmo impiega  $O(1)$  per ogni entry della tabella
- vi sono  $O(nP) = O(n^2 p_{\max})$  entry nella tabella
- dopo il calcolo dei valori, possiamo risalire per trovare la soluzione ottima:
  - prendi l'elemento  $o_i$  in  $OPT(i, p) \iff V[i-1, p] > V[i, p]$

□



## approximation schemes: polynomial time approximation scheme (PTAS)

### definizione: PTAS

- un algoritmo  $A$  per un problema di ottimizzazione  $\pi \in NPO$ , è un polynomial time approximation scheme per  $\pi$  se, data un'istanza in input  $x \in I_\pi$  e un numero razionale  $\epsilon > 0$ , esso ritorna una soluzione  $(1+\epsilon)$ -approssimata (per min) o  $(1-\epsilon)$ -approssimata (per max) in tempo polinomiale rispetto alla dimensione dell'istanza  $x$
- **nota:** la complessità temporale può essere esponenziale in  $\frac{1}{\epsilon}$  (esempio  $O(n^{\frac{1}{\epsilon}})$ )
- la complessità di un PTAS può crescere 'drammaticamente' quando  $\epsilon$  decresce
- **nota:** per ogni valore fisso di  $\epsilon$ , un PTAS corrisponde ad un algoritmo di  $(1+\epsilon)$ -approssimazione di tempo polinomiale (o  $(1-\epsilon)$ )

### problema: min multiprocessor scheduling (già definito precedentemente)

- INPUT:
  - insieme di  $n$  jobs  $P$
  - numero di processori  $h$
  - tempo di esecuzione  $t_j$ ,  $\forall p_j \in P$
- SOLUZIONE:
  - una schedule per  $P$ , ovvero una funzione
- MISURA:
  - *makespan* o tempo di completamento di  $f$ , ovvero

$$f : P \rightarrow \{1, \dots, h\}$$

$$\max_{i \in [1, \dots, h]} \sum_{p_j \in P \mid f(p_j)=i} t_j$$

### richiamiamo l'algoritmo Greedy-Graham

- scelta greedy:
  - ad ogni step assegna un job ad uno dei processori correntemente meno carichi
- richiamiamo rapidamente gli step base della dimostrazione del rapporto di approssimazione di Greedy-Graham
  - $T_i(j)$  = tempo di completamento del processore  $i$  alla fine del tempo  $j$  ( $h$  = numero di processori)
- abbiamo utilizzato i seguenti *lower bounds* per  $m^*$ :
  - $m^* \geq \frac{T}{h}$ , in qualsiasi soluzione almeno 1 processore deve avere tempo di completamento  $\frac{T}{h}$  (richiamiamo che  $T = \sum_j t_j$ )
  - $m^* \geq t_j$ , per ogni job  $p_j$ , in qualsiasi soluzione uno dei processori deve eseguire  $p_j$
- abbiamo utilizzato il seguente *upper bound* per il valore della soluzione restituita:

- per limitare superiormente il valore della soluzione restituita, se  $k$  é uno dei processori piú carichi e  $p_l$  é l'ultimo job assegnato a  $k$ , per la scelta greedy:

$$T_k(l-1) \leq \frac{\sum_{j < l} t_j}{h} \leq \frac{T - t_l}{h}$$

- quindi possiamo derivare la seguente disuguaglianza:

$$\begin{aligned} m = T_k(n) &= T_k(l-1) + t_l \leq \frac{T - t_l}{h} + t_l = \\ &= \frac{T - t_l + ht_l}{h} = \frac{T}{h} - \frac{1+h}{h}t_l = \frac{T}{h} + \frac{h-1}{h}t_l \leq \dots \end{aligned}$$

- poiché  $\frac{T}{h} \leq m^*$  e  $t_l \leq m^*$

$$\begin{aligned} \dots &\leq m^* + \frac{h-1}{h}m^* = \frac{hm^* + (h-1)m^*}{h} = \frac{hm^* + hm^* - m^*}{h} = \\ &= \frac{2hm^* - m^*}{h} = \frac{2h-1}{h}m^* = (2 - \frac{1}{h})m^* \end{aligned}$$

- idea per il miglioramento: decrementa  $t_l$  il piú possibile e trova un rapporto di approssimazione migliore sfruttando le disuguaglianze

$$m \leq \frac{T}{h} + \frac{h-1}{h}t_l \leq m^* + \frac{h-1}{h}t_l$$

- modificando l'algoritmo e/o migliorando l'analisi vedremo come limitare superiormente  $t_l$  progressivamente con:
  - $\frac{m^*}{2}$  ( $\frac{3}{2}$ -approssimante),
  - $\frac{m^*}{3}$  ( $\frac{4}{3}$ -approssimante),
  - e arbitrariamente piccolo, ovvero  $\epsilon m^*$  ( $(1+\epsilon)$ -approssimante), cioè un PTAS
- mostriamo ora come far diventare  $t_l$  arbitrariamente piccolo, cioè  $\epsilon m^*$ , ottenendo una  $(1+\epsilon)$ -approssimazione, ovvero un PTAS

## ottenere un PTAS...

- proviamo a far diventare  $t_l$  piú piccolo possibile
- possiamo sfruttare il seguente lemma:

**lemma:**  $t_i \leq \frac{T}{i}$

se  $t_1, t_2, \dots, t_n$  sono ordinati in maniera decrescente e  $t_1 + t_2 + \dots + t_n = T$ , allora:

$$\forall i, 1 \leq i \leq n \quad t_i \leq \frac{T}{i}$$

**dimostrazione:**

- assumiamo per contraddizione che  $t_i > \frac{T}{i}$ , allora:

$$t_1 + t_2 + \dots + t_n \geq i \cdot t_i > i \cdot \frac{T}{i} = T$$

- contraddizione, poiché  $T = \sum_{i=1}^n t_i$

□

## PTAS: idea sottostante

- calcola la soluzione ottima per i primi  $q$  jobs
- completa assegnando in maniera greedy i restanti jobs
- se otteniamo  $t_l \leq \epsilon \cdot m^*$ , allora:

$$m \leq \frac{T}{h} + \left(\frac{h-1}{h}\right) \cdot t_l < \frac{T}{h} + t_l \leq m^* + \epsilon \cdot m^* = (1 + \epsilon)m^*$$

- partendo dal lemma precedente, é sufficiente assegnare  $q$  in modo tale che, poiché  $l > q$
- questo vale per

$$q = \left\lceil \frac{h}{\epsilon} \right\rceil$$

- anzi, le disuguaglianze

$$t_l \leq \frac{T}{l} \leq \frac{T}{q+1} \leq \epsilon \cdot \frac{T}{h} \leq \epsilon \cdot m^*$$

sono vere se consideriamo

$$q \geq \frac{h}{\epsilon} - 1$$

## algoritmo: PTAS-Scheduling

---

### Algorithm 14 PTAS-Scheduling

---

```
ordina i jobs in modo decrescente rispetto ai tempi di esecuzione  $t_i$ 
sia  $p_1, p_2, \dots, p_n$  la risultante sequenza ordinata con  $t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n$ 
calcola lo schedule ottimo  $f$  per i primi  $q = \lceil \frac{h}{\epsilon} \rceil$  jobs
for  $j = q+1$  to  $n$  do
    assegna  $p_j$  al processore  $i$  con minimo  $T_i(j-1)$  // ovvero  $f(p_j) = i$ 
end for
return schedule  $f$ 
```

---

## teorema: l'algoritmo PTAS-Scheduling ritorna sempre una soluzione $(1 + \epsilon)$ -approssimata

l'algoritmo PTAS-Scheduling ritorna sempre una soluzione  $(1 + \epsilon)$ -approssimata

### dimostrazione:

- sia  $t \leq m^*$  il tempo di completamento della soluzione ottima per i primi  $q$  jobs
  - se  $m \leq t$ , ovvero la fase greedy non ha incrementato il tempo di completamento, allora l'algoritmo ritorna la soluzione ottima
  - se  $m > t$ , allora nuovamente, denotando con  $k$  il processore più carico al termine dell'algoritmo e con  $p_l$  l'ultimo job assegnato a  $k$  nella fase greedy:

$$m = T_k(n) = T_k(l-1) + t_l \leq \frac{T - t_l}{h} + t_l = \frac{T}{h} + \frac{h-1}{h} t_l < \frac{T}{h} + t_l \leq m^* + \epsilon \cdot m^* = (1 + \epsilon)m^*$$

- ovvero

$$\frac{m}{m^*} \leq 1 + \epsilon$$

□

- quindi l'algoritmo soddisfa il requisito di approssimazione per PTAS, ma è un PTAS?
- complessità:
  - l'ordinamento iniziale richiede  $O(n \cdot \log n)$  step temporali
  - la ricerca esaustiva di una soluzione ottima per i primi  $q$  jobs richiede al massimo  $O(h^{\frac{1}{\epsilon}})$ , poiché vi sono al massimo  $h^q \approx h^{\frac{1}{\epsilon}}$  possibili soluzioni ( $h$  possibili scelte per ciascuno dei  $q$  jobs)
  - l'ultimo *for* esegue al massimo  $n$  iterazioni, ciascuna delle quali richiede  $O(h)$
  - quindi, la complessità temporale generale è:

$$O(n \cdot \log n + h^{\frac{1}{\epsilon}} + n \cdot h)$$

- tale complessità è esponenziale in  $h$ , e dunque può essere esponenziale nella dimensione dell'input (per esempio se  $h = n$ )
- quindi **non abbiamo un PTAS**, a meno che non fissiamo  $h$  in modo tale che sia un valore costante dato (ad esempio:  $h = 2, h = 3, \dots, h = 100, \dots$ )
- fissare  $h$  costante è equivalente a dire che  $h$  non dipende dall'istanza di input, o analogamente che non è parte dell'input
- in altre parole esso corrisponde a considerare il seguente problema:

### problema: min $h$ -processor scheduling

- INPUT:
  - insieme di  $n$  jobs  $P$
  - tempo di esecuzione  $t_j$ ,  $\forall p_j \in P$
- SOLUZIONE:
  - una schedule per  $P$ , ovvero una funzione
- MISURA:
  - *makespan* o tempo di completamento di  $f$ , ovvero

$$\max_{i \in [1, \dots, h]} \sum_{p_j \in P \mid f(p_j) = i} t_j$$

### teorema: l'algoritmo PTAS-Scheduling è un PTAS per il problema min $h$ -processor scheduling

l'algoritmo PTAS-Scheduling è un PTAS per il problema min  $h$ -processor scheduling

#### dimostrazione:

- come già visto, la complessità temporale di PTAS-Scheduling è:

$$O(n \cdot \log n + h^{\frac{1}{\epsilon}} + n \cdot h)$$

- che è polinomiale nella dimensione dell'input (ma esponenziale in  $\frac{1}{\epsilon}$ )
- approssimazione:  $1 + \epsilon$

□

- **nota:** min  $h$ -processor scheduling con  $h = 2$  coincide con il famoso min partition problem, che a sua volta ammette un PTAS

## **problema: min partition**

- INPUT:

- insieme di oggetti  $X$
- peso intero positivo  $a_i$ ,  $\forall o_i \in X$

- SOLUZIONE:

- una partizione di  $X$  in 2 sottoinsiemi  $X_1$  e  $X_2$ , tale che

$$X_1 \cap X_2 = \emptyset \text{ e } X_1 \cup X_2 = X$$

- MISURA:

$$\max\left\{\sum_{o_i \in X_1} a_i, \sum_{o_i \in X_2} a_i\right\}$$

## **ottenere un PTAS per il problema min partition**

- chiaramente, gli oggetti corrispondono ai jobs, i pesi ai tempi di esecuzione e i 2 sottoinsiemi ai 2 processori
- é possibile estendere il precedente risultato per ottenere un PTAS per il problema min multiprocessor scheduling, ovvero per ogni (non costante) numero  $h$  di processori
- richiamiamo che nella precedente dimostrazione di approssimazione di PTAS, denotando con  $t$  il tempo di completamento dello schedule ottimo ottenuto per i primi  $q$  jobs, abbiamo 2 casi:
  1.  $m \leq t$ , ovvero la fase greedy non accresce il tempo di completamento, quindi l'algoritmo restituisce la soluzione ottima poiché  $t \leq m^*$
  2.  $m > t$ , in tal caso vengono applicati gli step abituali per la parte greedy
- idea: la dimostrazione dell'approssimazione continua ad essere valida se, invece di determinare l'ottimo per i primi  $q$  jobs, determiniamo una soluzione approssimata per questi ultimi, ovvero tale che  $t \leq (1 + \epsilon)m^*$

## **lemma: algoritmo di programmazione dinamica polinomiale (schedule approssimato per i primi $q$ jobs)**

esiste un algoritmo di programmazione dinamica che determina in tempo polinomiale uno scheduling per i primi  $q$  jobs aventi tempo di completamento  $t \leq (1 + \epsilon)m^*$

## **teorema: esiste un PTAS per il problema min multiprocessor scheduling**

esiste un PTAS per il problema min multiprocessor scheduling

alternative approaches

social networks and bibliography

centrality measures



spectral analysis and prestige index

link analysis

web structure

search and advertising

matching markets

auctions

vsg mechanism

gsp mechanism