Contents

computational complexity

def: problema in computer science

un problema π é una relazione

$$\pi \subseteq I_\pi \times S_\pi$$

dove:

- $I_\pi =$ insieme delle istanze di input del problema
- $S_\pi =$ insieme delle soluzioni del problema

tipologie di problema

- **decisione:**
  - si verifica se una data proprietá é valida per un determinato input
  - $S_\pi = \{true, false\}$ o semplicemente $S_\pi = \{0,1\}$ e la relazione $\pi \subseteq I_\pi \times S_\pi$ corrisponde ad una funzione

    $$f : I_\pi \to \{0,1\}$$

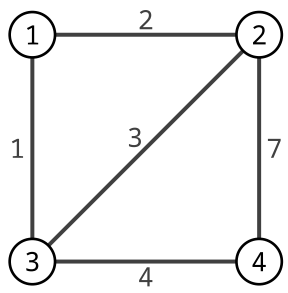
  - esempi: soddisfacibilitá, test di connettivitá di un grafo, etc....
- **ricerca:**
  - data un'istanza $x \in I_\pi$, si chiede di determinare una soluzione $y \in S_\pi$ tale che la coppia $(x,y) \in \pi$ appartengono alla relazione che definisce il problema
  - esempi: soddisfacibilitá, clique, vertex cover, nei quali chiediamo in output un assegnamento di veritá soddisfacente, rispettivamente una clique o un vertex cover, invece di semplicemente "si" o "no"
- **ottimizzazione**
  - data un'istanza $x \in I_\pi$, si chiede di determinare una soluzione $y \in S_\pi$ ottimizzando una data misura della funzione costo
  - esempi: min spanning tree, max SAT, max clique, min vertex cover, min TSP, etc....

complessitá degli algoritmi e dei problemi

- espressa in funzione della taglia dell'input (denotata come $|x|, \forall x \in I_\pi$)
- taglia dell'istanza x
  - quantitá di memoria necessaria a memorizzare x in un computer
  - lunghezza $|x|_c$ della stringa che codifica x in un particolare codice naturale $c : I_\pi \to \Sigma$, dove Σ é l'alfabeto del codice c
- codice naturale
  - conciso: le stringhe che codificano le istanze non devono essere ridondanti o allungate inutilmente
  - numeri espressi in base ≥ 2

esempio: codice

- istanza: grafo G



- codice per G
  - $\Sigma = \{\{,\},,,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ (simboli)
  - $c(G) = \{1,2,3,4,\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\},2,1,3,7,4\}$
    * $\{1,2,3,4\}$ (nodi)
    * $\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$ (archi)
    * $\{2,1,3,7,4\}$ (pesi)
  - $|G|_c = 49$

def: tempo di esecuzione dell'algoritmo A

sia $t_A(x)$ il tempo di esecuzione dell'algoritmo A per l'input x, allora il tempo di esecuzione nel caso peggiore di A é:

$$T_A(n) = \max\{t_A(x) \mid |x| \leq n\}, \qquad \forall n > 0$$

def: complessitá temporale dell'algoritmo A

l'algoritmo A ha complessitá temporale

- $O(g(n))$ se $T_A(n) = O(g(n))$, ovvero
$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_A(n)}{g(n)} \leq c, \text{ per una costante } c > 0$$
- $\Omega(g(n))$ se $T_A(n) = \Omega(g(n))$, ovvero
$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_A(n)}{g(n)} \geq c, \text{ per una costante } c > 0$$
- $\Theta(g(n))$ se $T_A(n) = \Theta(g(n))$, ovvero
$$T_A(n) = \Omega(g(n)) \text{ e } T_A(n) = O(g(n))$$

def: complessitá di un problema

un problema ha complessitá

- $O(g(n))$ se esiste un algoritmo che lo risolve avente complessitá $O(g(n))$
- $\Omega(g(n))$ se ogni algoritmo A che lo risolve ha complessitá $\Omega(g(n))$
- $\Theta(g(n))$ se ha complessitá $O(g(n))$ e $\Omega(g(n))$

problemi di decisione e classi di complessitá

i problemi di decisione sono solitamente descritti da un'istanza di input (o semplicemente INPUT) e da una DOMANDA sull'input

esempi:

- soddisfacibilitá
  - INPUT: CNF (Conjunctive Normal Form) formula definita su un insieme di variabili
  - DOMANDA: esiste un assegnamento di veritá $\tau : V \to \{0,1\}$?
- clique
  - INPUT: un grafo non orientato $G = (V, E)$ di n nodi e un intero $k > 0$
  - DOMANDA: esiste in G una clique di almeno k nodi ($\geq k$), ovvero un sottoinsieme $U \subseteq V$ tale che $|U| \geq k$ e $\{u, v\} \in E, \; \forall u, v \in U$?
- vertex cover
  - INPUT: un grafo non orientato $G = (V, E)$ di n nodi e un intero $k > 0$
  - DOMANDA: esiste in G un vertex cover di al massimo k nodi ($\leq k$), ovvero un sottoinsieme $U \subseteq V$ tale che $|U| \leq k$ e $u \in U$ o $v \in U$, $\forall \{u, v\} \in E$?

nei problemi di decisione $I_\pi = Y_\pi \cup N_\pi$

- $Y_\pi =$ insieme di istanze positive, ovvero con soluzione 1
- $N_\pi =$ insieme di istanze negative, ovvero con soluzione 0

def: un algoritmo A risolve π

un algoritmo A risolve $\pi \iff \forall$ input $x \in I_\pi$, A risponde $1 \iff x \in Y_\pi$

def: classe dei problemi $TIME(g(n))$

$TIME(g(n)) =$ classe dei problemi di decisione con complessitá $O(g(n))$

algoritmi non-deterministici per i problemi di decisione

essi si compongono di 2 fasi

- fase 1
  - generano in modo non-deterministico un "certificato" y
- fase 2
  - partendo dall'input x e dal certificato y, verificano se x é un'istanza positiva

def: un algoritmo non-deterministico A risolve π

un algoritmo non-deterministico A risolve π se si ferma per ogni possibile certificato y ed esiste un certificato y per cui A risponde 1 ($true$) $\iff x \in Y_\pi$

- complessitá
  - costo della fase 2
  - espressa in funzione di $|x|$

def: classe dei problemi $NTIME(g(n))$

$NTIME(g(n)) =$ classe di problemi di decisione con complessitá non-deterministica $O(g(n))$

esempio: algoritmo non-deterministico per il problema della clique

- fase 1
  - dato in input il grafo $G = (V, E)$, genera non-deterministicamente un sottoinsieme $U \subseteq V$ di k nodi
- fase 2
  - verifica se U é una clique, ovvero se $\{u, v\} \in E, \forall u, v \in U$, e in tal caso risponde 1, altrimenti risponde 0
- chiaramente l'algoritmo risolve il problema della clique, in quanto si ferma per ogni possibile sottoinsieme U ed esiste un sottoinsieme U per il quale risponde 1 se e solo se esiste una clique di k nodi in G, ovvero $\iff (G, K) \in Y_{clique}$
- complessitá: $O(n^2)$, poiché $|U| \leq |V| = n$

osservazioni (algoritmi deterministici e non-deterministici)

- un algoritmo deterministico é meno potente di uno non-deterministico poiché non puó eseguire la fase 1
- se esiste un algoritmo deterministico A che risolve π, allora esiste anche un algoritmo non-deterministico A' che risolve π con la stessa complessitá come segue:
  - esso esegue al fase 1 e coincide con A nella fase 2, ignorando il certificato y

corollario: $TIME(g(n)) \subseteq NTIME(g(n))$

$$TIME(g(n)) \subseteq NTIME(g(n))$$

- dove:
  - $TIME(g(n)) =$ classe dei problemi deterministicamente risolvibili in tempo $O(g(n))$
  - $NTIME(g(n)) =$ classe dei problemi non-deterministicamente risolvibili in tempo $O(g(n))$

efficienza e trattabilitá

- un problema é trattabile se puó essere risolto efficientemente (deterministicamente)
- sono considerati trattabili o efficientemente risolvibili tutti i problemi aventi complessitá limitata da un polinomio della dimensione dell'input

TRATTABILITÁ $\equiv$ EFFICIENZA $\equiv$ POLINOMIALITÁ

efficienza e trattabilitá: ragione 1

la crescita delle funzioni polinomiali rispetto a quelle esponenziali (sia per ció che riguarda il tempo di esecuzione sia per ció che riguarda la dimensione delle istanze risolvibili entro un certo tempo di esecuzione)

efficienza e trattabilitá: ragione 2

- la composizione di polinomi é un polinomio e dunque la risolvibilitá in tempo polinomiale di un problema é indipendente da
  - il codice naturale utilizzato, poiché tutti i codici naturali sono correlati in maniera polinomiale
  - il modello computazionale adottato, se ragionevole (cioé costruibile nella pratica o meglio in grado di eseguire un lavoro limitato costante per step), in quanto tali modelli sono polinomialmente correlati, ovvero possono simularsi l'un l'altro in tempo polinomiale

osservazione: macchina di turing non-deterministica

la macchina di turing non-deterministica non é un modello di calcolo ragionevole, poiché la quantitá di lavoro svolto in ogni fase (ciascun livello dell'albero delle computazioni) cresce in modo esponenziale

def: codici polinomialmente correlati

- 2 codici c_1 e c_2 per un problema π sono correlati polinomialmente se esistono 2 polinomi p_1 e p_2 tali che, $\forall x \in I_\pi$:
  - $|x|_{c_1} \leq p_1(|x|_{c_2})$
  - $|x|_{c_2} \leq p_2(|x|_{c_1})$
- se la complessitá rispetto a c_1 é $O(q_1(|x|_{c_1}))$ per un dato polinomio q_1, allora rispetto a c_2 é $O(q_1(p_1(|x|_{c_2}))) = O(q_2(|x|_{c_2}))$ dove q_2 é il polinomio tale che $\forall\lambda\ q_2(\lambda) = q_1(p_1(\lambda))$
- tutti i codici naturali sono correlati polinomialmente, ovvero la risolvibilitá polinomiale non dipende dal particolare codice utilizzato

dimensione dell'input (def: codici correlati polinomialmente)

qualsiasi quantitá polinomialmente correlata ad un codice naturale é dunque correlata ad un qualsiasi codice naturale possibile, dato che tutti i codici naturali sono correlati polinomialmente e che la composizione di polinomi é un polinomio

esempio: codici correlati polinomialmente

- assumiamo che per ogni grafo G di n nodi
  - $|G|_{c_1} = 10n^2$
  - $|G|_{c_2} = n^3$
- se $p_1(\lambda) = 10\lambda$ e $p_2(\lambda) = \lambda^2$ abbiamo che:
  - $|G|_{c_1} = 10n^2 \leq 10n^3 = p_1(|G|_{c_2})$
  - $|G|_{c_2} = n^3 \leq 100n^4 = p_2(|G|_{c_1})$
- dunque i 2 codici sono correlati polinomialmente

- regola pratica:
  - 2 quantitá sono polinomialmente correlate se sono polinomi sulle stesse variabili

esempio: codifica non naturale

- test di primalitá
  - INPUT: un numero intero $n > 0$
  - DOMANDA: n é un numero primo?
  - ALGORITMO (banale):
    * scansiona tutti i numeri da 2 a $n-1$ e risponde 1 ($true$) se nessuno di essi lo divide
  - COMPLESSITÁ: $O(n)$, polinomiale?
  - CODICE c_1 (naturale): n espresso in base 2, ovvero $|n|_{c_1} = \log_2 n$
  - CODICE c_2 (non naturale): n espresso in base 1, ovvero $|n|_{c_2} = n$
- dunque la complessitá dell'algoritmo é:
  - $O(2^{|n|_{c_1}})$ rispetto a c_1, che é esponenziale
  - $O(|n|_{c_2})$ rispetto a c_2, che é polinomiale!
- dimensione dell'input
  - correlata polinomialmente ai codici naturali $|n|_{c_1} = \log_2 n$

def: modelli computazionali simulabili in modo polinomiale

- 2 modelli computazionali M_1 e M_2 sono mutualmente simulabili in modo polinomiale se esistono 2 polinomi p_1 a p_2 tali che:
  1. ogni algoritmo A per M_1 con complessitá $T_A(n)$ puó essere simulato su M_2 in tempo $p_1(T_A(n))$
  2. ogni algoritmo A per M_2 con complessitá $T_A(n)$ puó essere simulato su M_1 in tempo $p_2(T_A(n))$
- dunque se A é polinomiale in M_1 allora é polinomiale anche in M_2 e viceversa
- tutti i modelli computazionali ragionevoli sono mutualmente simulabili in modo polinomiale, ovvero la risolvibilitá polinomiale non dipende dal particolare modello utilizzato

classi P e NP

- $P =$ classe di tutti i problemi risolvibili deterministicamente in tempo polinomiale, ovvero
$$P = \cup_{k=0}^{\infty} TIME(n^k)$$
- $NP =$ classe di tutti i problemi risolvibili non-deterministicamente in tempo polinomiale, ovvero
$$NP = \cup_{k=0}^{\infty} NTIME(n^k)$$
- $P = NP$? nessuno lo a dimostrato

problemi NP-completi

- i problemi piú difficili di NP e tali che se $P \neq NP$ non appartengono a P, viceversa, se 1 di essi appartiene a P, allora $P = NP$
- finora nessuno é riuscito a trovare un algoritmo polinomiale deterministico per nessun problema NP-completo
- congettura: $P \neq NP$

optimization problems

def: problema di ottimizzazione

un problema di ottimizzazione π é una quadrupla $(I_\pi, S_\pi, m_\pi, goal_\pi)$ con:

- $I_\pi =$ insieme delle istanze di input di π
- $S_\pi(x) =$ insieme delle soluzioni ammissibili dell'istanza $x \in I_\pi$
- $m_\pi(x, y) =$ misura della soluzione ammissibile $y \in S_\pi(x)$ per l'input $x \in I_\pi$ (intera)
- $goal_\pi \in \{\min, \max\} =$ specifica se abbiamo un problema di minimizzazione o di massimizzazione

osservazioni (problemi di ottimizzazione)

- assumiamo che $m_\pi(x, y)$ é sempre un numero intero
  - i nostri modelli computazionali possono trattare solo l'approssimazione razionale dei reali
  - scalando tali reali possiamo ottenere numeri interi equivalenti
  - i valori interi rivelano giá le difficoltá intrinseche dei problemi
- quando sono chiari dal contesto (in seguito):
  - π sará omesso
  - $m_(x, y) =$ sará denotato semplicemente come m

esempio: descrizione formale di un problema di ottimizzazione (max clique)

- $I =$ grafo $G = (V, E)$
- $S = \{U \subseteq V \mid \{u, v\} \in E,\ \forall u, v \in U\}$
- $m(G, U) = |U|$
- $goal = \max$

possiamo descrivere i problemi di ottimizzazione nella seguente forma, piú semplice e informale

- MAX CLIQUE
  - INPUT: grafo $G = (V, E)$
  - SOLUZIONE: $U \subseteq V \mid \{u, v\} \in E,\ \forall u, v \in U$
  - MISURA: $|U|$

def: soluzione ottima

- data un'istanza $x \in I_\pi$, una soluzione $y^* \in S_\pi$ é ottima per x se $m(x, y^*) = goal\{m(x, y) \mid y \in S(x)\}$
- la misura di una soluzione ottima (o in modo analogo di tutte le soluzioni ottime) di x é denotata come $m^*(x)$ o semplicemente m^*

problema decisionale sottostante

ogni problema di ottimizzazione ha un problema decisionale sottostante che puó essere ottenuto introducendo un intero k nell'istanza di input e chiedendo se esiste una soluzione ammissibile di misura $\leq k$ (per $\min$) e $\geq k$ (per $\max$)

- problema di ottimizzazione:
  - dato un input x, trova $y \in S(x) \mid m(x, y)$ sia $\min$ o $\max$ (secondo il $goal$)
- problema decisionale sottostante:
  - dato un input x e un intero $k \geq 0$, esiste $y \in S(x) \mid m(x, y) \leq k$ $(\min)$ o $\geq k$ $(\max)$

esempio: descrizione formale di un problema decisionale sottostante (max clique)

- MAX CLIQUE
  - INPUT: grafo $G = (V, E)$
  - SOLUZIONE: $U \subseteq V \mid \{u, v\} \in E,\ \forall u, v \in U$
  - MISURA: $|U|$
- problema decisionale sottostante:
  - INPUT: grafo $G = (V, E)$ e un intero $k > 0$
  - DOMANDA: esiste una clique U in G tale che $|U| \geq k$

approximation body

greedy body

local search body

rounding body

primal dual body

dynamic programming body

approximation schemes body

alternative approaches body

social networks and bibliography body

centrality measures body

spectral analysis and prestige index body

link analysis body

web structure body

search and advertising body

matching markets body

auctions body

vcg mechanism body

gsp mechanism body

glossario

- **problema**: min vertex cover
- **algoritmo**: approx-cover
- **lemma**: alla fine dell'esecuzione di approx-cover, M forma un matching
- **dimostrazione**
- **teorema**: approx-cover è 2 approssimante
- **dimostrazione**

- **problema**: max 0-1 knapsack
- **algoritmo**: greedy-knapsack
- **teorema**: per ogni $r < 1$, greedy-knapsack non è r-approssimante
- **dimostrazione**

(greedy-knapsack non è una buona approssimazione perchè ignora l'oggetto con profitto massimo)

- **algoritmo**: modified-greedy
- **lemma**: sia o_j il primo oggetto che l'algoritmo greedy-kanpsack non mette nello zaino e sia $m_j = \sum_{i=1}^{j-1} p_i$, allora $m^* \leq m_j + p_j$
- **lemma2**: $m^* \leq m_{gr} + p_{max}$

(algoritmo ritorna una soluzione di valore $max(m_{gr}, p_{max})$), essa è almeno la metà di $m_{gr} + p_{max}$, possiamo sfruttare il lemma 2

- **teorema**: modified-greedy è $\frac{1}{2}$-approssimante
- **dimostrazione**

- **problema**: min multiprocessor scheduling
- **algoritmo**: algoritmo greedy di Graham
- **fatto**: dato $s \geq 0$ e h numeri $a_1, \ldots, a_h$ tali che $a_1 + \cdots + a_h = s$, esiste j tale che $a_j \geq \frac{s}{h}$ ed esiste j' tale che $a_{j'} \leq \frac{s}{h}$
- **teorema**: l'algoritmo greedy di Graham è $(2 - \frac{1}{h})$-approssimante
- **dimostrazione**
- **teorema**: l'algoritmo greedy di Graham non è r-approssimante per $r < (2 - \frac{1}{h})$

(possiamo migliorare il rapporto di approssimazione, abbiamo usato 2 lower bounds ad m^*: $\frac{T}{h} \leq m^*$ e $t_l \leq m^*$, diminuiamo ancora t_l per trovare un miglior rapporto di approssimazione, progettiamo un algoritmo che eviti il caso peggiore dell'algoritmo di Graham assegnando i jobs dal più grande al più piccolo)

- **algoritmo**: ordered-greedy
- **lemma**: se $n > h$ allora $t_{h+1} \leq \frac{m^*}{2}$
- **dimostrazione**
- **teorema**: ordered-greedy è $(\frac{3}{2} - \frac{1}{2h})$-approssimante
- **dimostrazione**

- **problema**: max cut

- **algoritmo**: greedy-max-cut
- **teorema**: greedy-max-cut è $\frac{1}{2}$-approssimante
- **dimostrazione**
- **algoritmo**: local-search-max-cut
- **fatto**: dato un grafo $G = (V, E)$, sia δ_i il grado di un generico nodo $v_i \in V$. Allora: $\sum_{i=1}^{n} \delta_i = 2|E|$
- **dimostrazione**
- **teorema**: l'algoritmo local-search-max-cut è $\frac{1}{2}$-approssimante
- **dimostrazione**
- **problema**: min weighted vertex cover
- **algoritmo**: round-vertex-cover
- **teorema**: round-vertex-cover è 2-approssimante
- **dimostrazione**
- **problema**: min weighted set cover
- **algoritmo**: round-set-cover
- **teorema**: round-set-cover è f-approssimante (per $f \geq 1$)
- **dimostrazione**
- **problema**: fibonacci
- **algoritmo**: fibonacci(n)
- **algoritmo**: fibonacci2(n)
- **algoritmo**: fibonacci3(n)
- **problema (recall)**: max 0-1 knapsack
- **definizione** $OPT(i, w)$ **ed** $m(i, w)$
- **algoritmo**: progr-dyn-knapsack
- **algoritmo per esercizio knapsack**
- **algoritmo per scoprire oggetti inseriti nello knapsack**
- **teorema**: la complessità temporale di progr-dyn-knapsack è $O(nb)$
- **dimostrazione**
- **definizione duale** $OPT(i, p)$ **e** $v(i, p)$
- **algoritmo**: progr-dyn-knapsack-dual
- **teorema**: la complessità di progr-dyn-knapsack-dual è $O(n^2 p_{max})$
- **dimostrazione**
- **problema (recall)**: min multiprocessor scheduling
- **lemma**: se $t_1, \ldots, t_n$ sono ordinati in ordine non-crescente, allora $\forall i$, $1 \leq i \leq n$: $t_i \leq \frac{T}{i}$
- **dimostrazione**
- **algoritmo**: PTAS-scheduling

- **teorema**: PTAS-scheduling ritorna sempre una soluzione $(1+\epsilon)$-approssimata
- **dimostrazione**

(complessità PTAS-scheduling è esponenziale anche in h (che fa parte dell'input) $\rightarrow$ PTAS-scheduling non è un PTAS se non fissiamo h costante)

- **problema**: min h-processor scheduling
- **teorema**: PTAS-scheduling è un PTAS per min h-processor scheduling
- **dimostrazione**
- **problema**: min partition
- **lemma**: esiste un algoritmo di programmazione dinamica che determina in tempo polinomiale uno scheduling per i primi q jobs, lo scheduling ha completion time $t \leq (1+\epsilon)m^*$
- **teorema**: esiste un PTAS per min multiprocessor scheduling

(progr-dyn-knapsack-dual ha complessità pseudo-polinomiale $O(n^2 p_{max})$, scalando i profitti originali possiamo ridurre la complessità ed ottenere un'approssimazione migliore, dobbiamo scegliere k sufficientemente grande per complessità polinomiale, sufficientemente piccolo per buona approssimazione: $k = \lfloor \frac{\epsilon \cdot p_{max}}{n} \rfloor$)
(errore al più k per ogni oggetto scelto: $m \geq m^* - nk$)

- **algoritmo**: FPTAS-knapsack
- **complessità FPTAS-knapsack**
- **approssimazione FPTAS-knapsack**
- **lemma**: $m \geq m^* - nk$
- **dimostrazione**
- **teorema**: FPTAS-knapsack è un FPTAS per max 0-1 knapsack
- **dimostrazione**

($p_{max} \leq m^* \leq np_{max}$, miglioriamo i bounds per m^* usando l'algoritmo modified-greedy ($\frac{1}{2}$-approssimante))
(abbiamo che $\frac{m}{m^*} \geq \frac{1}{2}$ e dato che $m_{mg} \leq m^*$ allora $m_{mg} \leq m^* \leq 2m_{mg}$)
(consideriamo $P' = \frac{\lceil 2m_{mg}k}{\rceil}$ come profitto massimo in progr-dyn-knapsack-dual (progr-dyn-knapsack-dual modificato))
(settiamo $k = \lfloor \frac{\epsilon \cdot m_{mg}}{n} \rfloor$ ed eseguiamo progr-dyn-knapsack-dual modificato sui nuovi profitti scalati)

- **algoritmo**: FPTAS-knapsack-new
- **complessità FPTAS-knapsack-new**
- **approssimazione FPTAS-knapsack-new**
- **problema**: max weighted cut
- **algoritmo**: random-cut
- **teorema**: random-cut è $\frac{1}{2}$-approssimato
- **dimostrazione**
- **problema (recall)**: min weighted set cover
- **definizione scelta greedy (cosa è $eff(S_j)$)**

- **algoritmo**: greedy-min-weighted-set-cover
- **lemma**: $m = \sum_{S_j \in \hat{c}} c_j = \sum_{i=1}^{n} price(o_i)$
- **dimostrazione**
- **lemma**: $\forall j$, data qualsiasi scelta di sottoinsiemi $S'_j, \ldots, S'_t$ che formano un cover con i sottoinsiemi $S_1, \ldots, S_{j-1}$ scelti dall'algoritmo greedy all'inizio dello step j, $\forall$ oggetto o_i non ancora coperto all'inizio dello step j: $price'(o_i) \geq eff(S_j)$ (dove: S_j è il sottoinsieme scelto dall'algoritmo greedy nello step j, $eff(S_j)$ è la sua efficacia, $price'(o_i)$ è l'efficacia del sottoinsieme S'_l che copre o_i assumendo che, partendo dallo step j, la scelta greedy è fatta solo tra i sottoinsiemi $S'_j, \ldots, S'_t$)
- **lemma**: sia $o_1, \ldots, o_n$ gli oggetti listati nell'ordine del covering dell'algoritmo greedy, cioè tale che gli oggetti coperti durante lo step j sono listati dopo quelli coperti dagli steps precedenti e prima di quelli coperti negli steps successivi, allora $\forall i$, $1 \leq i \leq n$: $price(o_i) \leq \frac{m^*}{n-i+1}$
- **dimostrazione**
- **teorema**: greedy-min-weighted-set-cover è H_n-approssimante, dove $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$
- **dimostrazione**