Contents

computational complexity

def: problema in computer science

un problema π é una relazione

$$\pi \subseteq I_\pi \times S_\pi$$

dove:

- $I_\pi =$ insieme delle istanze di input del problema
- $S_\pi =$ insieme delle soluzioni del problema

tipologie di problema

- **decisione:**
  - si verifica se una data proprietá é valida per un determinato input
  - $S_\pi = \{true, false\}$ o semplicemente $S_\pi = \{0, 1\}$ e la relazione $\pi \subseteq I_\pi \times S_\pi$ corrisponde ad una funzione

    $$f : I_\pi \to \{0, 1\}$$

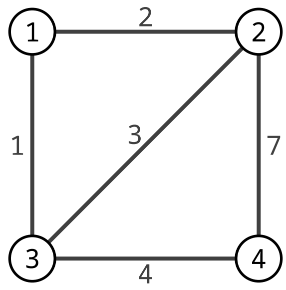
  - esempi: soddisfacibilitá, test di connettivitá di un grafo, etc....
- **ricerca:**
  - data un'istanza $x \in I_\pi$, si chiede di determinare una soluzione $y \in S_\pi$ tale che la coppia $(x, y) \in \pi$ appartengono alla relazione che definisce il problema
  - esempi: soddisfacibilitá, clique, vertex cover, nei quali chiediamo in output un assegnamento di veritá soddisfacente, rispettivamente una clique o un vertex cover, invece di semplicemente "si" o "no"
- **ottimizzazione**
  - data un'istanza $x \in I_\pi$, si chiede di determinare una soluzione $y \in S_\pi$ ottimizzando una data misura della funzione costo
  - esempi: min spanning tree, max SAT, max clique, min vertex cover, min TSP, etc....

complessitá degli algoritmi e dei problemi

- espressa in funzione della taglia dell'input (denotata come $|x|, \forall x \in I_\pi$)
- taglia dell'istanza x
  - quantitá di memoria necessaria a memorizzare x in un computer
  - lunghezza $|x|_c$ della stringa che codifica x in un particolare codice naturale $c : I_\pi \to \Sigma$, dove Σ é l'alfabeto del codice c
- codice naturale
  - conciso: le stringhe che codificano le istanze non devono essere ridondanti o allungate inutilmente
  - numeri espressi in base ≥ 2

esempio: codice

- istanza: grafo G



- codice per G
  - $\Sigma = \{\{,\},,,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ (simboli)
  - $c(G) = \{1,2,3,4,\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\},2,1,3,7,4\}$
    * $\{1,2,3,4\}$ (nodi)
    * $\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$ (archi)
    * $\{2,1,3,7,4\}$ (pesi)
  - $|G|_c = 49$

def: tempo di esecuzione dell'algoritmo A

sia $t_A(x)$ il tempo di esecuzione dell'algoritmo A per l'input x, allora il tempo di esecuzione nel caso peggiore di A é:

$$T_A(n) = \max\{t_A(x) \mid |x| \leq n\}, \qquad \forall n > 0$$

def: complessitá temporale dell'algoritmo A

l'algoritmo A ha complessitá temporale

- $O(g(n))$ se $T_A(n) = O(g(n))$, ovvero

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_A(n)}{g(n)} \leq c, \text{ per una costante } c > 0$$

- $\Omega(g(n))$ se $T_A(n) = \Omega(g(n))$, ovvero

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_A(n)}{g(n)} \geq c, \text{ per una costante } c > 0$$

- $\Theta(g(n))$ se $T_A(n) = \Theta(g(n))$, ovvero

$$T_A(n) = \Omega(g(n)) \text{ e } T_A(n) = O(g(n))$$

def: complessitá di un problema

un problema ha complessitá

- $O(g(n))$ se esiste un algoritmo che lo risolve avente complessitá $O(g(n))$
- $\Omega(g(n))$ se ogni algoritmo A che lo risolve ha complessitá $\Omega(g(n))$
- $\Theta(g(n))$ se ha complessitá $O(g(n))$ e $\Omega(g(n))$

problemi di decisione e classi di complessitá

i problemi di decisione sono solitamente descritti da un'istanza di input (o semplicemente INPUT) e da una DOMANDA sull'input

esempi:

- soddisfacibilitá
  - INPUT: CNF (Conjunctive Normal Form) formula definita su un insieme di variabili
  - DOMANDA: esiste un assegnamento di veritá $\tau : V \to \{0,1\}$?
- clique
  - INPUT: un grafo non orientato $G = (V, E)$ di n nodi e un intero $k > 0$
  - DOMANDA: esiste in G una clique di almeno k nodi ($\geq k$), ovvero un sottoinsieme $U \subseteq V$ tale che $|U| \geq k$ e $\{u, v\} \in E, \forall u, v \in U$?
- vertex cover
  - INPUT: un grafo non orientato $G = (V, E)$ di n nodi e un intero $k > 0$
  - DOMANDA: esiste in G un vertex cover di al massimo k nodi ($\leq k$), ovvero un sottoinsieme $U \subseteq V$ tale che $|U| \leq k$ e $u \in U$ o $v \in U$, $\forall \{u, v\} \in E$?

nei problemi di decisione $I_\pi = Y_\pi \cup N_\pi$

- $Y_\pi =$ insieme di istanze positive, ovvero con soluzione 1
- $N_\pi =$ insieme di istanze negative, ovvero con soluzione 0

def: un algoritmo A risolve π

un algoritmo A risolve $\pi \iff \forall$ input $x \in I_\pi$, A risponde $1 \iff x \in Y_\pi$

def: classe dei problemi $TIME(g(n))$

$TIME(g(n)) =$ classe dei problemi di decisione con complessitá $O(g(n))$

algoritmi non-deterministici per i problemi di decisione

essi si compongono di 2 fasi

- fase 1
  - generano in modo non-deterministico un "certificato" y
- fase 2
  - partendo dall'input x e dal certificato y, verificano se x é un'istanza positiva

def: un algoritmo non-deterministico A risolve π

un algoritmo non-deterministico A risolve π se si ferma per ogni possibile certificato y ed esiste un certificato y per cui A risponde 1 ($true$) $\iff x \in Y_\pi$

- complessitá
  - costo della fase 2
  - espressa in funzione di $|x|$

def: classe dei problemi $NTIME(g(n))$

$NTIME(g(n)) =$ classe di problemi di decisione con complessitá non-deterministica $O(g(n))$

esempio: algoritmo non-deterministico per il problema della clique

- fase 1
    - dato in input il grafo $G = (V, E)$, genera non-deterministicamente un sottoinsieme $U \subseteq V$ di k nodi
- fase 2
    - verifica se U é una clique, ovvero se $\{u, v\} \in E, \forall u, v \in U$, e in tal caso risponde 1, altrimenti risponde 0
- chiaramente l'algoritmo risolve il problema della clique, in quanto si ferma per ogni possibile sottoinsieme U ed esiste un sottoinsieme U per il quale risponde 1 se e solo se esiste una clique di k nodi in G, ovvero $\iff (G, k) \in Y_{clique}$
- complessitá: $O(n^2)$, poiché $|U| \leq |V| = n$

osservazioni (algoritmi deterministici e non-deterministici)

- un algoritmo deterministico é meno potente di uno non-deterministico poiché non puó eseguire la fase 1
- se esiste un algoritmo deterministico A che risolve π, allora esiste anche un algoritmo non-deterministico A' che risolve π con la stessa complessitá come segue:
    - esso esegue al fase 1 e coincide con A nella fase 2, ignorando il certificato y

corollario: $TIME(g(n)) \subseteq NTIME(g(n))$

$$TIME(g(n)) \subseteq NTIME(g(n))$$

- dove:
    - $TIME(g(n)) =$ classe dei problemi deterministicamente risolvibili in tempo $O(g(n))$
    - $NTIME(g(n)) =$ classe dei problemi non-deterministicamente risolvibili in tempo $O(g(n))$

efficienza e trattabilitá

- un problema é trattabile se puó essere risolto efficientemente (deterministicamente)
- sono considerati trattabili o efficientemente risolvibili tutti i problemi aventi complessitá limitata da un polinomio della dimensione dell'input

$$\text{TRATTABILITÁ} \equiv \text{EFFICIENZA} \equiv \text{POLINOMIALITÁ}$$

efficienza e trattabilitá: ragione 1

la crescita delle funzioni polinomiali rispetto a quelle esponenziali (sia per ció che riguarda il tempo di esecuzione sia per ció che riguarda la dimensione delle istanze risolvibili entro un certo tempo di esecuzione)

efficienza e trattabilitá: ragione 2

- la composizione di polinomi é un polinomio e dunque la risolvibilitá in tempo polinomiale di un problema é indipendente da
  - il codice naturale utilizzato, poiché tutti i codici naturali sono correlati in maniera polinomiale
  - il modello computazionale adottato, se ragionevole (cioé costruibile nella pratica o meglio in grado di eseguire un lavoro limitato costante per step), in quanto tali modelli sono polinomialmente correlati, ovvero possono simularsi l'un l'altro in tempo polinomiale

osservazione: macchina di turing non-deterministica

la macchina di turing non-deterministica non é un modello di calcolo ragionevole, poiché la quantitá di lavoro svolto in ogni fase (ciascun livello dell'albero delle computazioni) cresce in modo esponenziale

def: codici polinomialmente correlati

- 2 codici c_1 e c_2 per un problema π sono correlati polinomialmente se esistono 2 polinomi p_1 e p_2 tali che, $\forall x \in I_\pi$:
  - $|x|_{c_1} \leq p_1(|x|_{c_2})$
  - $|x|_{c_2} \leq p_2(|x|_{c_1})$
- se la complessitá rispetto a c_1 é $O(q_1(|x|_{c_1}))$ per un dato polinomio q_1, allora rispetto a c_2 é $O(q_1(p_1(|x|_{c_2}))) = O(q_2(|x|_{c_2}))$ dove q_2 é il polinomio tale che $\forall \lambda \; q_2(\lambda) = q_1(p_1(\lambda))$
- tutti i codici naturali sono correlati polinomialmente, ovvero la risolvibilitá polinomiale non dipende dal particolare codice utilizzato

dimensione dell'input (def: codici correlati polinomialmente)

qualsiasi quantitá polinomialmente correlata ad un codice naturale é dunque correlata ad un qualsiasi codice naturale possibile, dato che tutti i codici naturali sono correlati polinomialmente e che la composizione di polinomi é un polinomio

esempio: codici correlati polinomialmente

- assumiamo che per ogni grafo G di n nodi
  - $|G|_{c_1} = 10n^2$
  - $|G|_{c_2} = n^3$
- se $p_1(\lambda) = 10\lambda$ e $p_2(\lambda) = \lambda^2$ abbiamo che:
  - $|G|_{c_1} = 10n^2 \leq 10n^3 = p_1(|G|_{c_2})$
  - $|G|_{c_2} = n^3 \leq 100n^4 = p_2(|G|_{c_1})$
- dunque i 2 codici sono correlati polinomialmente

- regola pratica:
  - 2 quantitá sono polinomialmente correlate se sono polinomi sulle stesse variabili

esempio: codifica non naturale

- test di primalitá
  - INPUT: un numero intero $n > 0$
  - DOMANDA: n é un numero primo?
  - ALGORITMO (banale):
    * scansiona tutti i numeri da 2 a $n-1$ e risponde 1 ($true$) se nessuno di essi lo divide
  - COMPLESSITÁ: $O(n)$, polinomiale?
  - CODICE c_1 (naturale): n espresso in base 2, ovvero $|n|_{c_1} = \log_2 n$
  - CODICE c_2 (non naturale): n espresso in base 1, ovvero $|n|_{c_2} = n$
- dunque la complessitá dell'algoritmo é:
  - $O(2^{|n|_{c_1}})$ rispetto a c_1, che é esponenziale
  - $O(|n|_{c_2})$ rispetto a c_2, che é polinomiale!
- dimensione dell'input
  - correlata polinomialmente ai codici naturali $|n|_{c_1} = \log_2 n$

def: modelli computazionali simulabili in modo polinomiale

- 2 modelli computazionali M_1 e M_2 sono mutualmente simulabili in modo polinomiale se esistono 2 polinomi p_1 a p_2 tali che:
  1. ogni algoritmo A per M_1 con complessitá $T_A(n)$ puó essere simulato su M_2 in tempo $p_1(T_A(n))$
  2. ogni algoritmo A per M_2 con complessitá $T_A(n)$ puó essere simulato su M_1 in tempo $p_2(T_A(n))$
- dunque se A é polinomiale in M_1 allora é polinomiale anche in M_2 e viceversa
- tutti i modelli computazionali ragionevoli sono mutualmente simulabili in modo polinomiale, ovvero la risolvibilitá polinomiale non dipende dal particolare modello utilizzato

classi P e NP

- $P =$ classe di tutti i problemi risolvibili deterministicamente in tempo polinomiale, ovvero
$$P = \cup_{k=0}^{\infty} TIME(n^k)$$
- $NP =$ classe di tutti i problemi risolvibili non-deterministicamente in tempo polinomiale, ovvero
$$NP = \cup_{k=0}^{\infty} NTIME(n^k)$$
- $P = NP$? nessuno lo a dimostrato

problemi NP-completi

- i problemi piú difficili di NP e tali che se $P \neq NP$ non appartengono a P, viceversa, se 1 di essi appartiene a P, allora $P = NP$
- finora nessuno é riuscito a trovare un algoritmo polinomiale deterministico per nessun problema NP-completo
- congettura: $P \neq NP$

optimization problems

def: problema di ottimizzazione

un problema di ottimizzazione π é una quadrupla $(I_\pi, S_\pi, m_\pi, goal_\pi)$ con:

- $I_\pi =$ insieme delle istanze di input di π
- $S_\pi(x) =$ insieme delle soluzioni ammissibili dell'istanza $x \in I_\pi$
- $m_\pi(x, y) =$ misura della soluzione ammissibile $y \in S_\pi(x)$ per l'input $x \in I_\pi$ (intera)
- $goal_\pi \in \{\min, \max\} =$ specifica se abbiamo un problema di minimizzazione o di massimizzazione

osservazioni (problemi di ottimizzazione)

- assumiamo che $m_\pi(x, y)$ é sempre un numero intero
  - i nostri modelli computazionali possono trattare solo l'approssimazione razionale dei reali
  - scalando tali reali possiamo ottenere numeri interi equivalenti
  - i valori interi rivelano giá le difficoltá intrinseche dei problemi
- quando sono chiari dal contesto (in seguito):
  - π sará omesso
  - $m_(x, y) =$ sará denotato semplicemente come m

esempio: descrizione formale di un problema di ottimizzazione (max clique)

- $I =$ grafo $G = (V, E)$
- $S = \{U \subseteq V \mid \{u, v\} \in E,\ \forall u, v \in U\}$
- $m(G, U) = |U|$
- $goal = \max$

possiamo descrivere i problemi di ottimizzazione nella seguente forma, piú semplice e informale

- MAX CLIQUE
  - INPUT: grafo $G = (V, E)$
  - SOLUZIONE: $U \subseteq V \mid \{u, v\} \in E,\ \forall u, v \in U$
  - MISURA: $|U|$
- MIN VERTEX COVER
  - INPUT: grafo $G = (V, E)$
  - SOLUZIONE: $U \subseteq V \mid \forall \{u, v\} \in E,\ u \in U \vee v \in U$
  - MISURA: $|U|$
- MIN TSP (Traveling Salesman Problem, problema del commesso viaggiatore)
  - INPUT:
    * insieme di cittá $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$
    * distanza $d(c_i, c_j) \in \mathbb{N}$, per ogni coppia di cittá $(c_i, c_j) \in C$

- SOLUZIONE: un tour di tutte le cittá, ovvero una permutazione $< c_{p(1)}, c_{p(2)}, \dots, c_{p(n)} >$ che descriva l'ordine di visita delle cittá
- MISURA: lunghezza del tour, ovvero

$$(\sum_{i=1}^{n-1} d(c_{p(i)}, c_{p(i+1)})) + d(c_{p(n)}, c_{p(1)})$$

def: soluzione ottima

- data un'istanza $x \in I_\pi$, una soluzione $y^* \in S_\pi(x)$ é ottima per x se $m(x, y^*) = goal\{m(x,y) \mid y \in S(x)\}$
- la misura di una soluzione ottima (o in modo analogo di tutte le soluzioni ottime) di x é denotata come $m^*(x)$ o semplicemente m^*

problema decisionale sottostante

ogni problema di ottimizzazione ha un problema decisionale sottostante che puó essere ottenuto introducendo un intero k nell'istanza di input e chiedendo se esiste una soluzione ammissibile di misura $\leq k$ (per $\min$) e $\geq k$ (per $\max$)

- problema di ottimizzazione:
  - dato un input x, trova $y \in S(x) \mid m(x,y)$ sia $\min$ o $\max$ (secondo il $goal$)
- problema decisionale sottostante:
  - dato un input x e un intero $k \geq 0$, esiste $y \in S(x) \mid m(x,y) \leq k$ $(\min)$ o $\geq k$ $(\max)$

esempio: descrizione formale di un problema decisionale sottostante (max clique)

- MAX CLIQUE
  - INPUT: grafo $G = (V, E)$
  - SOLUZIONE: $U \subseteq V \mid \{u, v\} \in E,\ \forall u, v \in U$
  - MISURA: $|U|$
- problema decisionale sottostante:
  - INPUT: grafo $G = (V, E)$ e un intero $k > 0$
  - DOMANDA: esiste una clique U in G tale che $|U| \geq k$

osservazioni (problema decisionale sottostante)

- se esiste un algoritmo polinomiale A per il problema di ottimizzazione, allora esiste un algoritmo polinomiale anche per il problema decisionale sottostante che funziona come segue:
  1. esegue A per determinare la soluzione ottime y^* per l'input x
  2. risponde 1 $(true)$ se $m(x, y^*) \leq k$ $(\min)$ o $\geq k$ $(\max)$
- il problema di ottimizzazione é difficile almeno quanto il problema decisionale sottostante

classi di complessitá dei problemi di ottimizzazione: PO

- un problema di ottimizzazione π appartiene alla classe PO se:
  - per ogni input x, $x \in I$ puó essere verificato in tempo polinomale
  - esiste un polinomio $p \mid \forall x \in I$ e $y \in S(x)$ vale $|y| \leq p(|x|)$
  - $\forall x \in I$ e $y \in S(x)$, $m(x, y)$ puó essere calcolata in tempo polinomale (rispetto a $|x|$)
  - $\forall x \in I$, una soluzione ottima y^* puó essere calcolata in tempo polinomiale
- esempi: shortest path fra 2 nodi, min spanning tree, ecc...

classi di complessitá dei problemi di ottimizzazione: NPO

un problema di ottimizzazione π appartiene alla classe NPO se:

- per ogni input x, $x \in I$ puó essere verificato in tempo polinomale
- esiste un polinomio $p \mid \forall x \in I$ e $y \in S(x)$ vale $|y| \leq p(|x|)$
- $\forall x \in I$ e $y \in S(x)$, $m(x, y)$ puó essere calcolata in tempo polinomale (rispetto a $|x|$)

esempi: max clique, min vertex cover, min TSP, ecc...

PO e NPO: nella pratica

- PO: classe dei problemi di ottimizzazione il cui problema decisionale sottostante appartiene a P
- NPO: classe dei problemi di ottimizzazione il cui problema decisionale sottostante appartiene a NP
- chiaramente $PO \subseteq NPO$

def: relazione NPO - NP-$HARD$

un problema di ottimizzazione in NPO é NP-$HARD$ se il problema decisonale sottostante é NP-$Completo$

teorema: relazione tra $P \neq NP$ e risolvibilitá polinomiale dei problemi NP-$HARD$

se $P \neq NP$, un problema di ottimizzazione NP-$HARD$ non puó essere risolto in tempo polinomiale (poiché é difficile almeno quanto il problema decisionale sottostante)

teorema: relazione tra $P = NP$ e $PO = NPO$

se $P = NP$ allora $PO = NPO$

- quasi tutti i problemi che verranno presentati in seguito sono NP-$HARD$, ovvero non efficientemente risolvibili
- verranno progettati algoritmi per tali problemi che restituiscono soluzioni "vicine" a quelle ottime

approximation

introduzione

- DOMANDA: supponiamo di dover risolvere un problema NP-HARD, cosa dovremmo fare?
- RISPOSTA: sacrificare 1 delle 3 caratteristiche desiderate
  1. risolvere istanze arbitrarie del problema
  2. risolvere il problema di ottimalitá
  3. risolvere il problema in tempo polinomiale
- STRATEGIE:
  1. progettare algoritmi per casi speciali del problema
  2. progettare algoritmi di approssimazione o euristiche
  3. progettare algoritmi che possono richiedere tempo esponenziale
- d'ora in poi ci concentreremo sui problemi di ottizzazione NP-HARD, ovvero problemi che non possono essere risolti in modo efficiente (a meno che $P = NP$)
- per tali problemi verranno progettati algoritmi in grado di determinare soluzioni prossime a quelle ottime, ovvero "buone approssimazioni"

def: algorimo di r-approssimazione per problemi di minimizzazione

dato un problema di minimizzazione π e un numero $r \geq 1$, un algoritmo A é un algoritmo di r-approssimazione per π se per ogni input $x \in I$ restituisce sempre una soluzione r-approssimata, ovvero una soluzione ammissibile $y \in S(x)$ tale che

$$\frac{m(x,y)}{m^*(x)} \leq r$$

def: algorimo di r-approssimazione per problemi di massimizzazione

dato un problema di massimizzazione π e un numero $r \leq 1$, un algoritmo A é un algoritmo di r-approssimazione per π se per ogni input $x \in I$ restituisce sempre una soluzione r-approssimata, ovvero una soluzione ammissibile $y \in S(x)$ tale che

$$\frac{m(x,y)}{m^*(x)} \geq r$$

determinazione del fattore di approssimazione r

- come possiamo determinare il fattore di approssimazione r se non conosciamo il valore m^* di una soluzione ottima?
- per problemi di minimizzazione (rispettivamente massimizzazione), confrontiamo il valore della soluzione restituita $m(x,y)$ con un lower bound (rispettivamente upper bound) appropriato $l(x)$ (rispettivamente $u(x)$) di $m^*(x)$
- se il loro rapporto é al massimo r ($\leq$) per $\min$ o almeno r ($\geq$) per $\max$, allora l'algoritmo é r-approssimante

$\min$ **(analogo per** $\max$**) fattore di approssimazione** r

- se

$$\frac{m(x,y)}{l(x)} \leq r$$

- allora

$$\frac{m(x,y)}{m^*(x)} \leq \frac{m(x,y)}{l(x)} \leq r$$

algoritmo: Approx-Cover per min vertex cover

Algorithm 1 Approx-Cover

```
// M = archi scelti dall'algoritmo
M = ∅
// U = nodi scelti nel cover
U = ∅
repeat
  seleziona un arco {u, v} ∈ E
  U = U ∪ {u, v}
  E = E \ {e ∈ E} | e é incidente a u o a v
  M = M ∪ {{u, v}}
until (E = ∅)
return U
```

lemma: Approx-Cover forma un matching al termine dell'esecuzione

al termine dell'esecuzione dell'algoritmo di approssimazione Approx-Cover, M forma un matching, ovvero gli archi in M non condividono alcun nodo

dimostrazione:

- banalmente, ogni volta che un arco e é selezionato in M, tutti gli archi con un nodo in comune con e vegono eliminati da E
- pertanto nei passi successivi nessun arco con un nodo in comune con e puó essere selezionato dall'algoritmo

$\square$

teorema: Approx-Cover é 2-approssimante

Approx-Cover é 2-approssimante

dimostrazione:

- il valore della soluzione restituita dall'algoritmo é

$$m = |U| = 2|M|$$

- sia U^* il cover ottimo.
  Poiché gli archi in M non condividono alcun nodo (M é un matching) e poiché ciascuno di essi deve avere un nodo in U^*

$$m^* = |U^*| \geq |M|$$

- dunque:

$$\frac{m}{m^*} \leq \frac{2|M|}{|M|} = 2$$

$\square$

algorithmic techniques: greedy

caratteristiche

- la soluzione viene determinata in step
- ad ogni step l'algoritmo esegue la scelta che sembra essere la migliore in quello step, senza considerare le possibili conseguenze nei futuri step

problema: max 0-1 knapsack

- INPUT:
  - un insieme finito di oggetti O
  - un profitto intero p_i, $\forall o_i \in O$
  - un volume intero a_i, $\forall o_i \in O$
  - un intero positivo b ($b > 0$)
- SOLUZIONE:
  - un sottoinsieme di oggetti $Q \subseteq O$ tale che $\sum_{o_i \in Q} a_i \leq b$
- MISURA:
  - profitto totale degli oggetti scelti, ovvero $\sum_{o_i \in Q} p_i$

- senza perdere di generalitá, in seguito, assumeremo sempre che:
  - $a_i \leq b$, $\forall o_i \in O$
  - $p_i > 0$, $\forall o_i \in O$

max 0-1 knapsack: descrizione della scelta greedy

- nella scelta greedy:
  - non possiamo considerare solo il profitto degli oggetti, in quanto il loro volume potrebbe essere troppo grande
  - non possiamo considerare solo il volume degli oggetti, in quanto il loro profitto potrebbe essere troppo basso
- idea: consideriamo gli oggetti in base al profitto per unitá di volume, ovvero in base al rapporto
$$\frac{p_i}{a_i}, \ \forall o_i \in O$$
- l'algoritmo greedy seleziona gli oggetti in ordine decrescente di profitto per volume

algoritmo: Greedy-Knapsack

Algorithm 2 Greedy-Knapsack

```
// Q = insieme degli oggetti scelti
Q = ∅
// v = volume del sottoinsieme corrente degli oggetti scelti
v = 0
ordina gli oggetti in ordine decrescente di profitto per volume p_i/a_i
siano o_1, ..., o_n gli oggetti elencati secondo tale ordine
for i = 1 to n do
  if v + a_i ≤ b then
    Q = Q ∪ {o_i}
    v = v + a_i
  end if
end for
return Q
```

teorema: $\forall r < 1$ Greedy-Knapsack non é r-approssimante

$\forall r < 1$ dato, Greedy-Knapsack non é r-approssimante

dimostrazione:

- dato un intero $k = \lceil \frac{1}{r} \rceil$, consideriamo la seguente istanza di max 0-1 knapsack
- $\forall n \geq 2$
  - $b = kn$ é il volume del knapsack
  - $n - 1$ oggetti con profitto $p_i = 1$ e volume $a_i = 1$
  - 1 oggetto con profitto $b - 1$ e volume b
- soluzione restituita:
  - l'insieme dei primi $n - 1$ oggetti, ovvero $m = n - 1$
- soluzione ottima
  - l'insieme contenente solo l'n-esimo oggetto, ovvero

$$m^* = b - 1 = kn - 1$$

- quindi:

$$\frac{m}{m^*} = \frac{n-1}{kn-1}$$

- cosí che:

$$\frac{m}{m^*} = \frac{n-1}{kn-1} \leq \frac{n-1}{\frac{n}{r}-1} \overset{(<) \text{ poiché } \frac{1}{r} > 1}{<} \frac{n-1}{\frac{n}{r}-\frac{1}{r}} = \frac{n-1}{\frac{1}{r}(n-1)} = r$$

- $\forall r < 1 \to \frac{m}{m^*} \leq r$, invece di $\forall r \leq 1 \to \frac{m}{m^*} \geq r$

□

miglioramento algoritmo: Greedy-Knapsack

- osservazione:
  - intuitivamente, Greedy-Knapsack non restituisce una buona approssimazione, poiché ignora l'oggetto avente il profitto massimo

Greedy-Knapsack modificato

- calcola una soluzione greedy Q_{GR} e sia m_{GR} la misura di quest'ultima
- considera l'oggetto $O_{\max}$ avente il massimo profitto $p_{\max}$
- se $m_{GR} \geq p_{\max}$ restituisci Q_{GR} altrimenti restituisci $Q = \{O_{\max}\}$

lemma 1: Greedy-Knapsack modificato

- sia o_j il primo oggetto che l'algoritmo Greedy-Knapsack non inserisce nel knapsack e sia:

$$m_j = \sum_{i=1}^{j-1} p_i$$

- allora:

$$m^* \leq m_j + p_j$$

dimostrazione:

- $m^* \leq m_j + p_j$ deriva direttamente osservando semplicemente che, denotando con v la somma dei volumi dei primi $j-1$ oggetti scelti, $m_j + p_j$ é il valore della soluzione ottima dell'istanza in cui il volume del knapsack é $v + a_j > b$

lemma 2: Greedy-Knapsack modificato

- $m^* \leq m_{GR} + p_{\max}$

dimostrazione:

- diretta conseguenza del procedente lemma osservando che $m_j \leq m_{GR}$ e $p_j \leq p_{\max}$, e quindi:

$$m^* \leq m_j + p_j \leq m_{GR} + p_{\max}$$

- intuizione: l'algoritmo restituisce una soluzione di valore $\max\{m_{GR}, p_{\max}\}$, che é almeno la metá di $m_{GR} + p_{\max}$, ovvero la metá di un upper bound di m^*

$$\max\{m_{GR}, p_{\max}\} \geq \frac{m_{GR} + p_{\max}}{2}$$

teorema: Greedy-Knapsack modificato é $\frac{1}{2}$-approssimante

Greedy-Knapsack modificato é $\frac{1}{2}$-approssimante

dimostrazione:

- $m_{Mod} \geq \max\{m_{GR}, p_{\max}\} \geq \frac{(m_{GR}+p_{\max})}{2} \geq \frac{m^*}{2}$

problema: min multiprocessor scheduling

- INPUT:
  - insieme di n jobs P
  - numero di processori h
  - tempo di esecuzione t_j, $\forall p_j \in P$
- SOLUZIONE:
  - uno schedule per P, ovvero una funzione

$$f : P \to \{1, \ldots, h\}$$

- MISURA:
  - $makespan$ o tempo di completamento di f, ovvero

$$\max_{i \in [1,\ldots,h]} \sum_{p_j \in P \mid f(p_j)=i} t_j$$

algoritmo: Greedy-Graham

- scelta greedy: ad ogni step assegna un job al processore meno carico
- $T_i(j)$:
  - tempo di completamento (somma dei tempi di esecuzione dei jobs assegnati) del processore i al termine del tempo j, ovvero una volta schedulati i primi j jobs (in qualunque ordine)

Algorithm 3 Greedy-Graham

siano $p_1, \ldots, p_n$ i jobs elencati in un qualsiasi ordine
for $j = 1$ to n **do**
  assegna p_j al processore i avente il minimo $T_i(j-1)$ ovvero $f(p_j) = i$
end for
return schedule i

- osservazione:
  - se i jobs vengono schedulati in accordo con il tempo di arrivo, l'algoritmo assegna ciascun job senza conoscere quelli futuri, ovvero ONLINE

teorema: Greedy-Graham é $\frac{2-1}{h}$-approssimante

l'algoritmo Greedy-Graham é $\frac{2-1}{h}$-approssimante, dove h é il numero di processori

fatto:

- dato $s \geq 0$ e h numeri $a_1, \ldots, a_h \mid a_1 + \ldots + a_h = s$, allora esiste j, $1 \leq j \leq h$, tale che

$$a_j \geq \frac{s}{h}$$

- altrimenti, contraddizione ($a_1 + \ldots + a_h < h\frac{s}{h} = s$)
- analogamente, esiste j', $1 \leq j' \leq h$, tale che $a_{j'} \leq \frac{s}{h}$
- in altre parole, un numero é al massimo uguale alla media e uno maggiore o uguale alla media
- pertanto, $\min_j a_j \leq \frac{s}{h}$ e $\max_j a_j \geq \frac{s}{h}$

dimostrazione:

- sia T la somma di tutti i tempi di esecuzione dei job, ovvero

$$T = \sum_{j=1}^{n} t_j$$

- siano $T_1^*, T_2^*, \ldots, T_h^*$ i tempi di completamento degli h processori nella soluzione ottima

- poiché $T_1^* + T_2^* + \ldots + T_h^* = T$ dal precedente 'fatto', esiste j tale che $T_j^* \geq \frac{T}{h}$
- quindi:

$$m^* \geq T_j^* \geq \frac{T}{h}$$

- sia k il processore con il massimo tempo di completamento nello schedule f restituito dall'algoritmo, ovvero con $T_k(n)$ massimo
- in piú sia p_l l'ultimo job assegnato al processore k
- dato che, per la scelta greedy, p_l é stato assegnato ad uno dei processori meno carichi all'inizio dello step l, sempre per il 'fatto' precedente, abbiamo:

$$T_k(l-1) \leq \frac{\sum_{j<l} t_j}{h} \leq \frac{T - t_l}{h}$$

- dato che la somma dei tempi di esecuzione di tutti i jobs assegnati prima di p_l é al massimo ($\leq$) $T - t_l$
- pertanto:

$$m = T_k(n) = T_k(l-1) + t_l \leq \frac{T - t_l}{h} + t_l =$$

$$= \frac{T - t_l + ht_l}{h} = \frac{T}{h} - \frac{1+h}{h} t_l = \frac{T}{h} + \frac{h-1}{h} t_l \leq \ldots$$

- poiché $\frac{T}{h} \leq m^*$ e $t_l \leq m^*$

$$\ldots \leq m^* + \frac{h-1}{h} m^* = \frac{hm^* + (h-1)m^*}{h} = \frac{hm^* + hm^* - m^*}{h} =$$

$$= \frac{2hm^* - m^*}{h} = \frac{2h-1}{h} m^* = (2 - \frac{1}{h}) m^*$$

- e quindi:

$$\frac{m}{m^*} \leq 2 - \frac{1}{h}$$

□

- osservazioni:
  - quando h cresce, il rapporto di approssimazione $\frac{2-1}{h}$ tende a 2
  - l'analisi é stretta, ovvero vale il seguente teorema

teorema: Greedy-Graham non é r-approssimante per $r < \frac{2-1}{h}$

Greedy-Graham non é r-approssimante per $r < \frac{2-1}{h}$

dimostrazione:

- considera la seguente istanza:
  - $h(h-1)$ jobs con tempo di esecuzione 1
  - 1 job con tempo di esecuzione h
- Greedy-Graham assegna i jobs nella seguente maniera:
- e quindi:

$$m = 2(h-1)$$

- la soluzione ottima puó essere ottenuta assegnando il job piú lungo ad un processore e distribuendo ugualmente i jobs piú corti tra i processori restanti:
- e quindi:
$$m^* = h$$
- in conclusione:
$$\frac{m}{m^*} = \frac{2(h-1)}{h} = 2 - \frac{1}{h} \qquad \text{(diverso da } \leq 2 - \frac{1}{h}\text{)}$$

$\square$

migliorare il rapporto di approssimazione r per Greedy-Graham

- DOMANDA: come possiamo migliorare il rapporto di approssimazione r
- richiamiamo rapidamente gli step base della dimostrazione del rapporto di approssimazione di Greedy-Graham
- abbiamo utilizzato i seguenti *lower bounds* per il valore della soluzione ottima:
  - $m^* \geq \frac{T}{h}$, come in qualsiasi soluzione almeno 1 processore deve avere tempo di completamento $\frac{T}{h}$ (richiamiamo che $T = \sum_j t_j$)
  - $m^* \geq t_j$, per ogni job p_j, come in qualsiasi soluzione uno dei processori deve eseguire p_j
- abbiamo utilizzato il seguente *upper bound* per il valore della soluzione restituita:
  - per limitare superiormente il valore della soluzione restituita, se k é uno dei processori piú carichi e p_l é l'ultimo job assegnato a k, per la scelta greedy:
$$T_k(l-1) \leq \frac{\sum_{j<l} t_j}{h} \leq \frac{T - t_l}{h}$$
- quindi possiamo derivare la seguente disuguaglianza:
$$m = T_k(n) = T_k(l-1) + t_l \leq \frac{T - t_l}{h} + t_l =$$
$$= \frac{T - t_l + ht_l}{h} = \frac{T}{h} - \frac{1+h}{h} t_l = \frac{T}{h} + \frac{h-1}{h} t_l \leq \dots$$
- poiché $\frac{T}{h} \leq m^*$ e $t_l \leq m^*$
$$\dots \leq m^* + \frac{h-1}{h} m^* = \frac{hm^* + (h-1)m^*}{h} = \frac{hm^* + hm^* - m^*}{h} =$$
$$= \frac{2hm^* - m^*}{h} = \frac{2h-1}{h} m^* = (2 - \frac{1}{h}) m^*$$
- idea per il miglioramento: decrementa t_l il piú possibile e trova un rapporto di approssimazione migliore sfruttando le disuguaglianze
$$m \leq \frac{T}{h} + \frac{h-1}{h} t_l \leq m^* + \frac{h-1}{h} t_l$$
- modificando l'algoritmo e/o migliorando l'analisi vedremo come limitare superiormente t_l progressivamente con:
  - $\frac{m^*}{2}$ ($\frac{3}{2}$-approssimante),
  - $\frac{m^*}{3}$ ($\frac{4}{3}$-approssimante),
  - e arbitrariamente piccolo, ovvero ϵm^* ($(1+\epsilon)$-approssimante), cioé un PTAS

Greedy-Graham, primo miglioramento

- assegnare i jobs dal piú lungo al piú corto
- ció ci consente di evitare il caso peggiore dell'algoritmo di Graham, ovvero il fatto che un job lungo arrivi alla fine, sbilanciando significativamente il carico dei processori

algoritmo: Ordered-Greedy

Algorithm 4 Ordered-Greedy

siano $p_1, p_2, \dots, p_n$ i job elencati in ordine decrescente di tempo di esecuzione, ovvero tale che $t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n$
for $j = 1$ to n **do**
  assegna p_j al processore i con il minimo $T_i(j-1)$, ovvero $f(p_j) = i$
end for
return schedule f

- vediamo un'analisi piú semplice che porta ad un rapporto di approssimazione di circa $\frac{3}{2}$

lemma: Ordered-Greedy

se $n > h$, allora $t_{h+1} \leq \frac{m^*}{2}$

dimostrazione:

- dall'ordinamento dei jobs, i primi $h+1$ hanno tutti un tempo di esecuzione $\geq t_{h+1}$
- ma allora $m^* \geq 2t_{h+1}$, poiché in ogni schedule almeno 1 degli h processori deve ricevere almeno 2 dei primi $h+1$ job

$\square$

teorema: Ordered-Greedy é $(\frac{3}{2} - \frac{1}{2h})$-approssimante

Ordered-Greedy é $(\frac{3}{2} - \frac{1}{2h})$-approssimante

dimostrazione:

- di nuovo sia k uno dei processori piú carichi (alla fine)
- se k ha 1 solo job, allora chiaramente la soluzione ritornata é ottima
- altrimenti considera l'ultimo job p_l assegnato a k
- dato che p_l non é il primo job assegnato a k, $l \geq h+1$ e quindi $t_l \leq t_{h+1} \leq \frac{m^*}{2}$, e cosí:

$$m \leq \frac{T}{h} + \frac{h-1}{h} t_l \leq m^* + \frac{h-1}{h}\frac{m^*}{2} =$$

$$= m^* + \frac{m^*(h-1)}{2h} = \frac{2hm^* + m^*(h-1)}{2h} = \frac{2hm^* + hm^* - m^*}{2h} =$$

$$= \frac{3hm^* - m^*}{2h} = (\frac{3h-1}{2h})m^* = (\frac{3h}{2h} - \frac{1}{2h})m^* = (\frac{3}{2} - \frac{1}{2h})m^*$$

$\square$

problema: max cut

- INPUT: grafo $G = (V, E)$
- SOLUZIONE: una partizione di V in 2 sottoinsiemi V_1 e V_2, ovvero tale che:

$$V_1 \cup V_2 = V \text{ e } V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

- MISURA: la cardinalitá del taglio, ovvero il numero di archi con un estremo (nodo) in V_1 e un estremo in V_2, cioé:

$$|\{\{u, v\} \mid u \in V_1 \text{ e } v \in V_2\}|$$

algoritmo: Greedy-Max-Cut

Algorithm 5 Greedy-Max-Cut

```
V1 = V2 = ∅
for i = 1 to n do
  // Δi = set di archi tra i e i nodi j < i (adiacenti)
  Δi = {{i, j} ∈ E | j < i}
  // Ui = set di nodi giá inseriti (adiacenti ad i, all'inizio dello step i)
  Ui = {j | {i, j} ∈ Δi}
  δi = |Δi| = |Ui|
  δ1i = |V1 ∩ Ui|
  δ2i = |V2 ∩ Ui|
  // chiaramente δ1i + δ2i = δi
  if δ1i > δ2i then
    V2 = V2 ∪ {i}
  else
    V1 = V1 ∪ {i}
  end if
end for
return V1, V2
```

- per semplicitá sia $V = \{1, \ldots, n\}$
- l'algoritmo ad ogni step inserisce un nuovo nodo in V_1 o in V_2
- scelta greedy:
  - allo step i, il nodo i viene inserito in modo da massimizzare il numero di archi nuovi nel taglio, ovvero in V_1 se il numero di archi che ha verso i nodi giá inseriti in V_2 é maggiore ($\geq$) del numero di archi che ha verso quelli in V_1, altrimenti in V_2 ($<$)

teorema: Greedy-Max-Cut é $\frac{1}{2}$-approssimante

Greedy-Max-Cut é $\frac{1}{2}$-approssimante

dimostrazione:

- chiaramente poiché quel taglio puó solo contenere un sottoinsieme di tutti gli archi in E

$$m^* \leq |E|$$

- mostriamo ora che la misura m del taglio restituita dall'algoritmo é almeno la metá del numero totale di archi, ovvero:

$$m \geq \frac{|E|}{2}$$

- ció implica chiaramente l'affermazione, poiché

$$\frac{m}{m^*} \geq \frac{\frac{|E|}{2}}{|E|} = \frac{1}{2}$$

- poiché gli insiemi Δ_i determinati dall'algoritmo formano una partizione di E e per definizione $\delta_i = |\Delta_i|$:

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i = \sum_{i=1}^{n} |\Delta_i| = |E|$$

- inoltre, il numero di archi aggiunti al taglio durante lo step i, ovvero con un estremo in V_1 e l'altro in V_2 (dopo l'esecuzione dell' i-esima iterazione dell'istruzione for), é:

$$\max(\delta_{1i}, \delta_{2i}) \geq \frac{(\delta_{1i} + \delta_{2i})}{2} = \frac{\delta_i}{2}$$

- quindi:

$$m = \sum_{i=1}^{n} \max(\delta_{1i}, \delta_{2i}) \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{2} = \frac{|E|}{2}$$

□

conclusioni sulla tecnica greedy

- tutti gli algoritmi visti fin ora hanno complessitá temporale polinomiale
- gli algoritmi greedy hanno buone performance in pratica poiché possono essere implementati in modo semplice
- ma come abbiamo visto, compiere la scelta che sembra migliore a ciascun singolo step, senza badare alle conseguenze future, in generale non permette di trovare la soluzione ottima

algorithmic techniques: local search

caratteristiche

- definiamo, per ogni soluzione ammissibile y, un sottoinsieme di soluzioni ammissibili "vicine" chiamato intorno di y o semplicemente $neighborhood(y)$
- partendo da una soluzione iniziale, si passa ripetutamente ad una soluzione migliore nell'intorno corrente, finché possibile

schema di un algoritmo di ricerca locale

- risolve una soluzione iniziale y ammissibile per l'input x (di solito una banale)
- fintanto che esiste una $y' \in neighborhood(y)$ migliore di y
  - sia $y = y'$
- ritorna y
- per definire un algoritmo di ricerca locale per un determinato problema é quindi sufficiente definire:
  - la soluzione iniziale
  - l'intorno delle soluzioni ammissibili

complessitá

- per ottenere una complessitá temporale polinomiale:
  - la soluzione iniziale deve essere determinata in tempo polinomiale
  - il test della condizione di guardia del $while$ e l'eventuale conseguente determinazione di una soluzione migliore nell'intorno deve essere eseguito in tempo polinomiale
  - NOTA: l'intorno puó avere una cardinalitá esponenziale rispetto alla dimensione dell'input!
  - il numero di iterazioni del $while$ deve essere polinomiale

approssimazione

- OTTIMO LOCALE: la soluzione y restituita é la migliore nell'intorno considerato
- per limitare il rapporto di approssimazione é sufficiente limitare il rapporto tra il valore di un qualsiasi ottimo locale con quello della misura di una soluzione ottima globale

definizione dell'intorno

- $neighborhood(y)$:
  - sufficientemente "ricco", per ottenere buone soluzioni (ottimi locali)
  - sufficientemente "povero", per garantire una complessitá temporale polinomiale

definizione dell'intorno: casi estremi

- $neighborhood(y) = \emptyset$
  - tempo di esecuzione polinomiale (se la soluzione iniziale viene determinata in tempo polinomiale)
  - cattiva approssimazione (ogni soluzione é un ottimo locale)
- $neighborhood(y) = S(x)$, ovvero l'insieme di tutte le soluzioni ammissibili per x
  - tempo di esecuzione non polinomiale (se il problema é NP-HARD)
  - buona approssimazione (poiché ogni ottimo locale é anche un ottimo globale)

problema: max cut (giá definito precedentemente)

- INPUT: grafo $G = (V, E)$
- SOLUZIONE: una partizione di V in 2 sottoinsiemi V_1 e V_2, ovvero tale che:

$$V_1 \cup V_2 = V \text{ e } V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

- MISURA: la cardinalitá del taglio, ovvero il numero di archi con un estremo (nodo) in V_1 e un estremo in V_2, cioé:

$$|\{\{u, v\} \mid u \in V_1 \text{ e } v \in V_2\}|$$

algoritmo di ricerca locale per max cut

- per definire l'algoritmo di ricerca locale, é sufficiente determinare:
  - la soluzione iniziale:
    $$V_1 = V\,,\ V_2 = \emptyset$$
  - l'intorno:
    * dati $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e V_1, V_2, le soluzioni dell'intorno di (V_1, V_2) sono tutte le coppie (V_{1i}, V_{2i}) con $1 \leq i \leq n$ che possono essere ottenute muovendo un nodo v_i da V_1 a V_2 o viceversa, ovvero:

$$\text{if } (v_i \in V_1)\ V_{1i} = V_1 \setminus \{v_i\} \text{ e } V_{2i} = V_2 \cup \{v_i\}$$

$$\text{else } (v_i \in V_2)\ V_{1i} = V_1 \cup \{v_i\} \text{ e } V_{2i} = V_2 \setminus \{v_i\}$$

complessitá (algoritmo di ricerca locale per max cut)

- la soluzione iniziale viene banalmente ottenuta in tempo polinomiale
- il test della guardia $while$ e l'eventuale determinazione di una migliore soluzione nell'intorno viene effettuata in tempo polinomale come segue:
  - per ciascuna delle n soluzioni dell'intorno (n iterazioni), controlla se la soluzione corrente é migliore (n^2 iterazioni) $\rightarrow O(n^3)$
- le iterazioni nel $while$ sono al massimo ($\leq$) $|E| = O(n^2)$,poiché ogni iterazione migliora la soluzione corrente, ovvero aumenta almeno di 1 il numero di archi del taglio, e vi sono $|E|$ archi nel taglio (al massimo)
- quindi l'algoritmo ha complessitá temporale:

$$O(n^3 n^2) = O(n^5)$$

approssimazione (algoritmo di ricerca locale per max cut)

- vediamo una proprietá utile a mostrare il rapporto di approssimazione dell'algoritmo:

fatto (approssimazione (algoritmo di ricerca locale per max cut))

dato un grafo $G = (V, E)$, sia δ_i il grado di un generico nodo $v_i \in V$, allora:

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i = 2|E|$$

dimostrazione:

- banalmente vero, poiché ogni arco viene contato 2 volte nella somma, ovvero incrementa la somma di 2

$\square$

teorema: l'algoritmo di ricerca locale é $\frac{1}{2}$-approssimante

l'algoritmo di ricerca locale é $\frac{1}{2}$-approssimante

dimostrazione:

- mostriamo che ogni ottimo locale (V_1, V_2) ha misura:

$$m \geq \frac{|E|}{2}$$

- ció implica:

$$\frac{m}{m^*} \geq \frac{\frac{|E|}{2}}{|E|} = \frac{1}{2}$$

- poiché $m^* \leq |E|$
- dato un ottimo locale (V_1, V_2) denotiamo con h il numero di archi interni, ovvero con entrambi gli estremi in V_1 o in V_2
- chiaramente, $m + h = |E|$
- per ogni nodo $v_i \in V$ definiamo i gradi interni ed esterni del nodo come segue:
  - $\delta_i^{int} =$ numero di archi che v_i ha verso i nodi nella sua stessa partizione, ovvero:

$$\delta_i^{int} = |\{v_k | \{v_i, v_k\} \in E \text{ e } (v_i, v_k \in V_1) \text{ o } (v_i, v_k \in V_2)\}|$$

  - $\delta_i^{ext} =$ numero di archi che v_i ha verso i nodi nell'altra partizione, ovvero:

$$\delta_i^{ext} = |\{v_k | \{v_i, v_k\} \in E \text{ e } (v_i \in V_1, v_k \in V_2) \text{ o } (v_i \in V_2, v_k \in V_1)\}|$$

- poiché la soluzione nell'intorno (V_{1i}, V_{2i}) ha misura non maggiore ($\leq$) di quella di (V_1, V_2) (ottimo locale), abbiamo:

$$m - \delta_i^{ext} + \delta_i^{int} \leq m$$

- e quindi:

$$\delta_i^{int} - \delta_i^{ext} \leq 0$$

- riassumento, su tutti i nodi, abbiamo:

$$\sum_{v_i \in V} \delta_i^{int} - \sum_{v_i \in V} \delta_i^{ext} = \sum_{v_i \in V} (\delta_i^{int} - \delta_i^{ext}) \leq 0$$

- dal fatto precedente:

$$\sum_{v_i \in V} \delta_i^{int} = 2h$$

  (perché é come sommare i gradi dei nodi del grafo contenente solo gli archi interni)
- e (sempre dal fatto precedente):

$$\sum_{v_i \in V} \delta_i^{ext} = 2m$$

  (perché é come sommare i gradi dei nodi del grafo contenente solo gli archi esterni)
- quindi:

$$0 \geq \sum_{v_i \in V} \delta_i^{int} - \sum_{v_i \in V} \delta_i^{ext} = 2h - 2m$$

- ovvero $m \geq h$
- quindi (aggiungendo m su entrambi i lati e dividendo per 2), otteniamo:

$$\frac{2m}{2} \geq \frac{(m+h)}{2} = m \geq \frac{(m+h)}{2} = \frac{|E|}{2}$$

$\square$

TODO: esempio esecuzione algoritmo di ricerca locale su grafo

conclusioni sulla tecnica della ricerca locale

- come gli algoritmi greedy, gli algoritmi di ricerca locale hanno buone performance nella pratica e portano alla determinazione di buone euristiche (algoritmi che eseguono bene nella pratica ma che di solito non hanno prestazioni garantite in termini di tempo o approssimazione)

algorithmic techniques: linear programming (rounding)

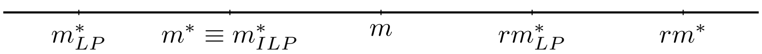
caratteristiche

- il problema é formulato come un programma lineare intero (ILP: integer linear program)
- programma lineare intero: programmi lineare + vincoli di interezza
- esiste un algoritmo con complessitá temporale polinomale (algoritmo ellissoide) per risolvere problemi lineari, ma...
- risolvere un programma lineare intero é un problema NP-HARD
- la formulazione come ILP consente di utilizzare potenti mezzi generali che, in base alle proprietá dell'ILP, sono in grado di fornire algoritmi con buona approssimazione:
  - rounding (arrotondamento)
  - primal-dual (primale-duale)

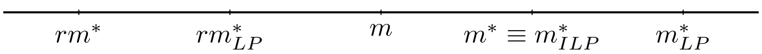
rounding: caratteristiche

- il problema é formulato come un programma lineare
- il rilassamento lineare (LP) viene ottenuto dall'ILP rilassando i vincoli d'interezza, ovvero sostituendoli con adeguati vincoli lineari (sugli interi)
- la soluzione ottenuta (ottima per LP) é arrotondata ad una vicina soluzione intera ammissibile per ILP
- la misura m della soluzione ottenuta é in seguito confrontata con quella della soluzione ottima LP, ovvero m^*_{LP}, cioé un limite inferiore ($\min$) o superiore ($\max$) per m^*

min problems



max problems



problema: min weighted vertex cover

- INPUT:
  - un grafo $G = (V, E)$
  - un costo intero c_j associato ad ogni $v_j \in V$
- SOLUZIONE:

$$U \subseteq V \;\mid\; v_j \in U \vee v_k \in U\,,\;\; \forall \{v_j, v_k\} \in E$$

- MISURA: costo totale di U, ovvero

$$\sum_{v_j \in U} c_j$$

ILP: min weighted vertex cover

- funzione obiettivo: $\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$
- vincoli: $x_j + x_k \geq 1$, $\forall \{v_j, v_k\} \in E$
- vincoli interi: $x_j \in \{0, 1\}$, $\forall v_j \in V$, $\forall j$ con $1 \leq j \leq n$

LP: min weighted vertex cover (rilassamento lineare)

- $\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$
- $x_j + x_k \geq 1$, $\forall \{v_j, v_k\} \in E$
- ~~$x_j \leq 1$, $\forall v_j \in V$~~ (superfluo)
- $x_j \geq 0$, $\forall v_j \in V$

algoritmo: Round-Vertex-Cover

Algorithm 6 Round-Vertex-Cover

```
determina l'ILP associato all'istanza in input
risolvi il rilassamento lineare LP dell'ILP
```
sia $< x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^* >$ la risultante soluzione ottima dell'LP
$\forall v_j$ sia $x_j = 1$ se $x_j^* \geq \frac{1}{2}$ e $x_j = 0$ se $x_j^* < \frac{1}{2}$
return il cover U associato a $< x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^* >$, ovvero tale che $U = \{v_j \in V \mid x_j = 1\}$

teorema: l'algoritmo Round-Vertex-Cover é 2-approssimante

l'algoritmo Round-Vertex-Cover é 2-approssimante

dimostrazione:

- é sufficiente mostrare che:
  1. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é ammissibile per l'ILP (esso soddisfa tutti i vincoli), ovvero U é un cover
  2. $\frac{m}{m_{LP}^*} \leq 2$ e quindi anche $\frac{m}{m^*} \leq \frac{m}{m_{LP}^*} \leq 2$
- DIMOSTRIAMO 1.
  - dall'ammissibilitá di $< x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^* >$ per LP, per ogni arco $\{v_j, v_k\} \in E$ vale $x_j^* + x_k^* \geq 1$
  - ovvero $x_j^* \geq 0.5$ o $x_k^* \geq 0.5$, cosí che $x_j = 1$ o $x_k = 1$, e quindi $x_j + x_k \geq 1$ é soddisfatto in ILP

∎

- DIMOSTRIAMO 2.

$$m = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ldots$$

  - (dall'arrotondamento: $x_j \leq 2x_j^*$)

$$m = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{n} c_j 2x_j^* = 2 \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* \ldots$$

- ($\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = m_{LP}^*$)

$$m = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{n} c_j 2x_j^* = 2\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = 2m_{LP}^*$$

- ovvero:

$$\frac{m}{m^*} \leq \frac{m}{m_{LP}^*} \leq 2$$

■

□

problema: min weighted set cover

- INPUT:
  - un universo $U = \{o_1, o_2, \ldots, o_n\}$ di n oggetti
  - una famiglia $\hat{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_h\}$ di h sottoinsiemi di U
  - un costo intero c_j associato ad ogni $S_j \in \hat{S}$
- SOLUZIONE: un cover di U, ovvero una sottofamiglia $\hat{C} \subseteq \hat{S}$ tale che:

$$\cup_{S_j \in \hat{C}} S_j = U$$

- MISURA: costo totale del cover, ovvero

$$\sum_{S_j \in \hat{C}} c_j$$

- $f =$ frequenza massima di un oggetto nel sottoinsieme $\hat{S}$, ovvero ciasun oggetto occorre in al massimo f sottoinsiemi
- dato un insieme di n elementi $\{1, 2, \ldots, n\}$ (chiamato universo) e una collezione S di m insiemi, la cui unione eguaglia l'universo, il problema del set cover consiste nell'identificare il piú piccolo sottoinsieme di S la cui unione eguaglia l'universo

ILP: min weighted set cover

- funzione obiettivo: $\min \sum_{j=1}^{h} c_j x_j$
- vincoli: $\sum_{S_j | o_i \in S_j} x_j \geq 1$, $\forall o_i \in U$
- vincoli interi: $x_j \in \{0, 1\}$, $\forall S_j \in \hat{S}$

LP: min weighted set cover (rilassamento lineare)

- $\min \sum_{j=1}^{h} c_j x_j$
- $\sum_{S_j | o_i \in S_j} x_j \geq 1$, $\forall o_i \in U$
- $\cancel{x_j \leq 1}$, $\cancel{\forall S_j \in \hat{S}}$ (superfluo)
- $x_j \geq 0$, $\forall S_j \in \hat{S}$

algoritmo: Round-Set-Cover

Algorithm 7 Round-Set-Cover

determina l'ILP associato all'istanza in input
risolvi il rilassamento lineare LP dell'ILP
sia $< x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^* >$ la risultante soluzione ottima dell'LP
$\forall S_j$ sia $x_j = 1$ se $x_j^* \geq \frac{1}{f}$ e $x_j = 0$ se $x_j^* < \frac{1}{f}$
return il cover risultante, ovvero $\hat{C} = \{S_j \in \hat{S} \mid x_j = 1\}$

teorema: l'algoritmo Round-Set-Cover é f-approssimante ($f \geq 1$)

l'algoritmo Round-Set-Cover é f-approssimante ($f \geq 1$)

dimostrazione:

- é sufficiente mostrare che:
  1. $x_1, x_2, \dots, x_n$ é ammissibile per l'ILP
  2. $\frac{m}{m_{LP}^*} \leq f$ e quindi anche $\frac{m}{m^*} \leq \frac{m}{m_{LP}^*} \leq f$
- DIMOSTRIAMO 1.
  - dall'ammissibilitá di $< x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^* >$ per LP, $\forall o_i \in U$

$$\sum_{S_j | o_i \in S_j} x_j^* \geq 1$$

  - e poiché la somma ha al massimo ($\leq$) f termini, deve esistere S_j contenente o_i tale che $x_j^* \geq \frac{1}{f}$, ovvero tale che $x_j = 1$, e quindi:

$$\sum_{S_j | o_i \in S_j} x_j \geq 1$$

■

- DIMOSTRIAMO 2.

$$m = \sum_{j=1}^{h} c_j x_j \dots$$

  - (dall'arrotondamento: $x_j \leq f x_j^*$)

$$m = \sum_{j=1}^{h} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{h} c_j f x_j^* = f \sum_{j=1}^{h} c_j x_j^* \dots$$

  - ($\sum_{j=1}^{h} c_j x_j^* = m_{LP}^*$)

$$m = \sum_{j=1}^{h} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{h} c_j f x_j^* = f \sum_{j=1}^{h} c_j x_j^* = f m_{LP}^*$$

  - ovvero:

$$\frac{m}{m^*} \leq \frac{m}{m_{LP}^*} \leq f$$

■

□

algorithmic techniques: dynamic programming (part 1)

caratteristiche

- come nel paradigma divide-and-conquer, suddividi il problema in sottoproblemi piú piccoli, risolvi ricorsivamente ciasun sottoproblema e combina le soluzioni dei sottoproblemi per formare la soluzione al problema originale
- ricorrenza facile da calcolare che consente di determinare la soluzione ad un sottoproblema dalla soluzione di sottoproblemi piú piccoli
- differentemente da divide-and-conquer, i sottoproblemi non sono indipendenti, ma si sovrappongono, ovvero durante le decomposizioni occorrono frequentemente gli stessi sottoproblemi
- idea: ciascun sottoproblema viene risolto solo una volta, ció riduce la complessitá temporale
- differentemente da divide-and-conquer, di solito é con approccio bottom-up invece che top-down, ovvero partendo da sottoproblemi piú piccoli e risolvendo progressivamente quelli piú grandi, fino al problema iniziale

uno sguardo piú ravvicinato...

- il paradigma divide-and-conquer é basato sulla decompozione dei problemi in sottoproblemi piú piccoli:
  - risolvi ricorsivamente i sottoproblemi
  - combina le soluzioni dei sottoproblemi per determinare la soluzione del problema iniziale
- se un problema di taglia n é decomposto in k sottoproblemi di taglie $n_1, n_2, \ldots, n_k < n$, rispettivamente, allora la complessitá temporale puó essere espressa dall ricorrenza

$$T(n) = T(n_1) + T(n_2) + \ldots + T(n_k) + C(n)$$

  con $C(n) =$ tempo per combinare le k sottosoluzioni
- la ricorrenza puó essere risolta con metodi differenti, come ad esempio il ricorso al celebre Master Theorem
- un classico esempio di applicazione di divide-and-conquer é il calcolo dei numeri di Fibonacci
- l'algoritmo deriva direttamente dalla definizione ricorsiva di tali numeri

algoritmo: Fibonacci

- caso base: $(n \leq 2)$ $F(1) = F(2) = 1$
- caso induttivo: $(n > 2)$ $F(n) = F(n-1) + F(n-2), n$

Algorithm 8 Fibonacci

```
if n = 1 or n = 2 then
  return 1
else
  return Fibonacci(n-1)+Fibonacci(n-2)
end if
```

- complessitá temporale:

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + \Theta(1)$$

- che restituisce:

$$T(n) = O(2^n)$$

- albero delle chiamate ricorsive:
  - nota:
    * inefficiente: gli stessi sottoproblemi vengono risolti ripetutamente per molte volte

algoritmo: Fibonacci 2

- programmazione dinamica:
  - memorizza la soluzione di ciascun sottoproblema in una tabella o in un array, cosí da evitare di risolverli ripetutamente
  - nell'algoritmo risultante, F é un array esterno globale visibile a tutte le chiamate ricorsive
- nuovo albero delle chiamate ricorsive

Algorithm 9 Fibonacci 2

```
if n = 1 or n = 2 then
  F[n] = 1
  return F[n]
else
  if F[n] é stato giá assegnato then
    return F[n]
  else
    F[n] = Fibonacci(n − 1) + Fibonacci(n − 2)
    return F[n]
  end if
end if
```

algoritmo: Fibonacci 3

Algorithm 10 Fibonacci 3

```
F[1] = 1
F[2] = 1
for i = 3 to n do
  F[i] = F[i − 1] + F[i − 2]
end for
return F[n]
```

riassumendo

- in programmazione dinamica:
  - il problema iniziale puó essere ricorsivamente decomposto in sottoproblemi
  - gli stessi sottoproblemi occorrono molte volte e sono risolti una volta soltanto

- la soluzione di un sottoproblema puó essere ottenuta combinando quelle dei sottoproblemi piú piccoli

- 2 possibili implementazioni:
  - top-down (con annotazione in tabella)
  - bottom-up

top-down vs. bottom-up

- top-down
  - sfrutta l’annotazione in tabella
  - PRO: risolve solo i sottoproblemi strettamente necessari
  - CON: overhead derivante dalla catena di chiamate ricorsive
- bottom-up
  - é la scelta tipica nella programmazione dinamica
  - PRO: risolve anche i problemi non necessari
  - CON: é in ogni caso generalmente piú efficiente perché elimina il peso della ricorsione, il quale incide maggiormente sulle prestazioni

divide-and-conquer vs. dynamic programming

divide-and-conquer

- tecnica ricorsiva
- approccio top-down (problemi divisi in sottoproblemi)
- utile quando i sottoproblemi sono indipendenti (ovvero differenti)
- altrimenti, gli stessi sottoproblemi vengono risolti piú volte

dynamic programming

- tecnica iterativa
- tipicamente approccio bottom-up
- utile quando i sottoproblemi si sovrapppongono (ovvero coincidono)
- ciasun sottoproblema viene risolto una volta soltanto

algorithmic techniques: dynamic programming (part 2)

progettazione di algoritmi di programmazione dinamica

- fornire una decomposizione ricorsiva dei sottoproblemi
- calcolare le sottosoluzioni in maniera bottom-up, ovvero partendo dai sottoproblemi di taglia piú piccola
  - utilizzare una tabella per memorizzare i risultati dei sottoproblemi
  - evitare il calcolo delle stesse soluzioni sfruttando la tabella
- combinare le soluzioni dei sottoproblemi giá risolti per costruire quelle dei sottoproblemi di taglia maggiore, fino alla risoluzione del problema originale

complessitá degli algoritmi di programmazione dinamica

- consideriamo la seguente tabella:
  - $n =$ taglia dei sottoproblemi ($1, 2, \ldots, n$)
  - $k =$ parametri dei sottoproblemi ($p_1, p_2, \ldots, p_k$)
- taglia della tabella $=$ numero di sottoproblemi $= nk$
- complessitá:
  - $[$ taglia della tabella $] \times [$ tempo per combinare le soluzioni $]$
  - il tempo per combinare le soluzioni é sempre banalmente polinomiale
  - la complessitá é polinomale se la tabella ha taglia polinomale, ovvero se é presente un numero polinomale di differenti sottoproblemi

problema: max 0-1 knapsack (giá definito precedentemente)

- INPUT:
  - un insieme finito di oggetti O
  - un profitto intero p_i, $\forall o_i \in O$
  - un peso intero w_i, $\forall o_i \in O$
  - un intero positivo b ($b > 0$)
- SOLUZIONE:
  - un sottoinsieme di oggetti $Q \subseteq O$ tale che $\sum_{o_i \in Q} w_i \leq b$
- MISURA:
  - profitto totale degli oggetti scelti, ovvero $\sum_{o_i \in Q} p_i$

- senza perdere di generalitá, in seguito, assumeremo sempre che:
  - $w_i \leq b$, $\forall o_i \in O$
  - $p_i > 0$, $\forall o_i \in O$

algoritmo brute force

- semplice algoritmo che enumera tutti i possibili 2^n sottoinsiemi degli n elementi
- sceglie la migliore combinazione (miglior profitto)
- l'algoritmo di programmazione solutamente ha performance migliori

progettazione dell'algoritmo di programmazione dinamica

- definizione:
  - $OPT(i, w) =$ sottoinsieme con profitto massimo di oggetti $1, 2, \ldots, n$ con limite di peso w
- fatto:
  - $OPT(n, b) =$ soluzione ottima del problema iniziale
- le seguente alternative possono occorrere per OPT:

1. OPT non seleziona l'oggetto i

- OPT seleziona il migliore tra $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ utilizzando il limite di peso w

2. OPT seleziona l'oggetto i
    - OPT seleziona il migliore tra $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ utilizzando il limite di peso $w - w_i$

- assumiamo che $OPT(k, w)$ sia la soluzione ottima per gli elementi $\{o_1, o_2, \ldots, o_k\}$
- nota: la soluzione ottima $OPT(k+1, w)$ potrebbe non corrispondere a $OPT(k, w)$
- anche perché $OPT(k+1, w)$ potrebbe non essere un superset di $OPT(k, w)$

approximation schemes

alternative approaches

social networks and bibliography

centrality measures

spectral analysis and prestige index

link analysis

web structure

search and advertising

matching markets

auctions

vcg mechanism

gsp mechanism