

Contents

computational complexity	5
def: problema in computer science	5
tipologie di problema	5
complessità degli algoritmi e dei problemi	5
esempio: codice	6
def: tempo di esecuzione dell'algoritmo A	6
def: complessità temporale dell'algoritmo A	6
def: complessità di un problema	6
problemi di decisione e classi di complessità	7
def: un algoritmo A risolve π	7
def: classe dei problemi $TIME(g(n))$	7
algoritmi non-deterministici per i problemi di decisione	7
def: un algoritmo non-deterministico A risolve π	7
def: classe dei problemi $NTIME(g(n))$	8
esempio: algoritmo non-deterministico per il problema della clique . . .	8
osservazioni (algoritmi deterministici e non-deterministici)	8
corollario: $TIME(g(n)) \subseteq NTIME(g(n))$	8
efficienza e trattabilità	8
efficienza e trattabilità: ragione 1	8
efficienza e trattabilità: ragione 2	9
osservazione: macchina di turing non-deterministica	9
def: codici polinomialmente correlati	9
dimensione dell'input (def: codici correlati polinomialmente)	9
esempio: codici correlati polinomialmente	9
esempio: codifica non naturale	10
def: modelli computazionali simulabili in modo polinomiale	10
classi P e NP	10
problemi NP -completi	10
optimization problems	11
def: problema di ottimizzazione	11
osservazioni (problemi di ottimizzazione)	11
esempio: descrizione formale di un problema di ottimizzazione (max clique)	11
def: soluzione ottima	12
problema decisionale sottostante	12
esempio: descrizione formale di un problema decisionale sottostante (max clique)	12
osservazioni (problema decisionale sottostante)	12
classi di complessità dei problemi di ottimizzazione: PO	13
classi di complessità dei problemi di ottimizzazione: NPO	13
PO e NPO : nella pratica	13
def: relazione $NPO \neq NP-HARD$	13
teorema: relazione tra $P \neq NP$ e risolvibilità polinomiale dei problemi $NP-HARD$	13
teorema: relazione tra $P = NP$ e $PO = NPO$	13
approximation	14
introduzione	14
def: algoritmo di r -approssimazione per problemi di minimizzazione . . .	14
def: algoritmo di r -approssimazione per problemi di massimizzazione . . .	14
determinazione del fattore di approssimazione r	14

min (analogo per max) fattore di approssimazione r	15
algoritmo: Approx-Cover per min vertex cover	15
lemma: Approx-Cover forma un matching al termine dell'esecuzione	15
teorema: Approx-Cover é 2-approssimante	15
algorithmic techniques: greedy	16
caratteristiche	16
problema: max 0-1 knapsack	16
max 0-1 knapsack: descrizione della scelta greedy	16
algoritmo: Greedy-Knapsack	17
teorema: $\forall r < 1$ Greedy-Knapsack non é r -approssimante	17
miglioramento algoritmo: Greedy-Knapsack	17
Greedy-Knapsack modificato	18
lemma 1: Greedy-Knapsack modificato	18
lemma 2: Greedy-Knapsack modificato	18
teorema: Greedy-Knapsack modificato é $\frac{1}{2}$ -approssimante	18
problema: min multiprocessor scheduling	19
algoritmo: Greedy-Graham	19
teorema: Greedy-Graham é $\frac{2-1}{h}$ -approssimante	19
teorema: Greedy-Graham non é r -approssimante per $r < \frac{2-1}{h}$	21
migliorare il rapporto di approssimazione r per Greedy-Graham	21
Greedy-Graham, primo miglioramento	22
algoritmo: Ordered-Greedy	22
lemma: Ordered-Greedy	22
teorema: Ordered-Greedy é $(\frac{3}{2} - \frac{1}{2h})$ -approssimante	23
problema: max cut	23
algoritmo: Greedy-Max-Cut	23
teorema: Greedy-Max-Cut é $\frac{1}{2}$ -approssimante	24
conclusioni sulla tecnica greedy	24
algorithmic techniques: local search	25
caratteristiche	25
schema di un algoritmo di ricerca locale	25
complessità	25
approssimazione	25
definizione dell'intorno	25
definizione dell'intorno: casi estremi	26
problema: max cut (già definito precedentemente)	26
algoritmo di ricerca locale per max cut	26
complessità (algoritmo di ricerca locale per max cut)	26
approssimazione (algoritmo di ricerca locale per max cut)	27
fatto (approssimazione (algoritmo di ricerca locale per max cut))	27
teorema: l'algoritmo di ricerca locale é $\frac{1}{2}$ -approssimante	27
TODO: esempio esecuzione algoritmo di ricerca locale su grafo	28
conclusioni sulla tecnica della ricerca locale	28
algorithmic techniques: linear programming (rounding)	29
caratteristiche	29
rounding: caratteristiche	29
problema: min weighted vertex cover	29
ILP: min weighted vertex cover	30
LP: min weighted vertex cover (rilassamento lineare)	30
algoritmo: Round-Vertex-Cover	30

teorema: l'algoritmo Round-Vertex-Cover é 2-approssimante	30
problema: min weighted set cover	31
ILP: min weighted set cover	31
LP: min weighted set cover (rilassamento lineare)	31
algoritmo: Round-Set-Cover	32
teorema: l'algoritmo Round-Set-Cover é f -approssimante ($f \geq 1$)	32
algorithmic techniques: dynamic programming (part 1)	33
caratteristiche	33
uno sguardo piú ravvicinato...	33
algoritmo: Fibonacci	33
algoritmo: Fibonacci 2	34
algoritmo: Fibonacci 3	34
riassumendo	34
top-down vs. bottom-up	35
divide-and-conquer vs. dynamic programming	35
algorithmic techniques: dynamic programming (part 2)	35
progettazione di algoritmi di programmazione dinamica	35
complessità degli algoritmi di programmazione dinamica	36
problema: max 0-1 knapsack (già definito precedentemente)	36
algoritmo brute force	36
progettazione dell'algoritmo di programmazione dinamica	36
definizione ricorsiva per OPT	37
definizione ricorsiva per la misura m della soluzione ottima $OPT(i, w)$	37
riepilogo definizioni ricorsive per m e OPT	37
algoritmo: Progr-Dyn-Knapsack	38
algoritmo: Progr-Dyn-Knapsack (trovare gli oggetti inseriti)	38
teorema: l'algoritmo Progr-Dyn-Knapsack ha complessità temporale $O(nb)$	38
domanda: l'algoritmo Progr-Dyn-Knapsack é polinomiale?	39
algoritmo Progr-Dyn-Knapsack-Dual: approccio duale	39
definizione ricorsiva per OPT (duale)	39
definizione ricorsiva per la misura m della soluzione ottima $OPT(i, w)$	39
algoritmo: Progr-Dyn-Knapsack-Dual	40
teorema: l'algoritmo Progr-Dyn-Knapsack-Dual ha complessità temporale $O(n^2 p_{\max})$	40
approximation schemes: polynomial time approximation scheme (PTAS)	41
definizione: PTAS	41
problema: min multiprocessor scheduling (già definito precedentemente)	41
richiamiamo l'algoritmo Greedy-Graham	41
ottenere un PTAS...	42
lemma: $t_i \leq \frac{T}{i}$	42
PTAS: idea sottostante	43
algoritmo: PTAS-Scheduling	43
teorema: l'algoritmo PTAS-Scheduling ritorna sempre una soluzione $(1 + \epsilon)$ -approssimata	43
problema: min h -processor scheduling	44
teorema: l'algoritmo PTAS-Scheduling é un PTAS per il problema min h -processor scheduling	44
problema: min partition	45
ottenere un PTAS per il problema min partition	45

lemma: algoritmo di programmazione dinamica polinomiale (schedule approssimato per i primi q jobs)	45
teorema: esiste un PTAS per il problema min multiprocessor scheduling .	45
approximation schemes: fully polynomial time approximation scheme (FPTAS)	46
definizione: FPTAS	46
FPTAS-Knapsack	46
algoritmo: FPTAS-Knapsack	47
lemma: $m \geq m^* - n \cdot k$ (FPTAS-Knapsack)	47
teorema: FPTAS-Knapsack é un FPTAS per il problema max 0-1 knapsack . .	47
é possibile ridurre la complessit� temporale?	48
come migliorare i <i>bound</i> per m^*	48
algoritmo: New-FPTAS-Knapsack	49
alternative approaches	50
performance garantite	50
restrizione dell'insieme delle istanze	50
media o analisi probabilistica	50
euristiche	50
algoritmi randomizzati	51
algoritmi randomizzati	51
definizione: algoritmi randomizzati e r -approssimazione	51
problema: max weighted cut	51
algoritmo: Random-Cut	52
teorema: Random-Cut é $\frac{1}{2}$ -approssimante	52
problema: min weighted set cover (gi� definito precedentemente)	52
algoritmo greedy per il problema min weighted set cover	53
scelta greedy	53
algoritmo: Greedy-Min-Weighted-Set-Cover	53
lemma: $m = \sum_{S_j \in \hat{C}} c_j = \sum_{i=1}^n price(o_i)$	54
lemma: $price'(o_i) \geq eff(S'_j)$	54
lemma: $price(o_i) \leq \frac{m^*}{n-i+1}$	54
teorema: Greedy-Min-Weighted-Set-Cover é H_n -approssimante	55
esempio: $H_n \cdot m^*$!	55

computational complexity

def: problema in computer science

un problema π é una relazione

$$\pi \subseteq I_\pi \times S_\pi$$

dove:

- I_π = insieme delle istanze di input del problema
- S_π = insieme delle soluzioni del problema

tipologie di problema

• decisione:

- si verifica se una data proprietà é valida per un determinato input
- $S_\pi = \{true, false\}$ o semplicemente $S_\pi = \{0,1\}$ e la relazione $\pi \subseteq I_\pi \times S_\pi$ corrisponde ad una funzione

$$f : I_\pi \rightarrow \{0,1\}$$

- esempi: soddisfacibilità, test di connettività di un grafo, etc....

• ricerca:

- data un'istanza $x \in I_\pi$, si chiede di determinare una soluzione $y \in S_\pi$ tale che la coppia $(x,y) \in \pi$ appartengono alla relazione che definisce il problema
- esempi: soddisfacibilità, clique, vertex cover, nei quali chiediamo in output un assegnamento di verità soddisfacente, rispettivamente una clique o un vertex cover, invece di semplicemente "si" o "no"

• ottimizzazione

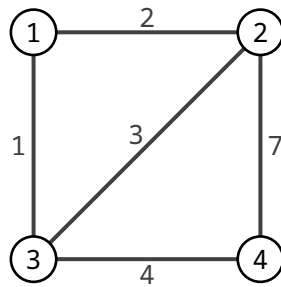
- data un'istanza $x \in I_\pi$, si chiede di determinare una soluzione $y \in S_\pi$ ottimizzando una data misura della funzione costo
- esempi: min spanning tree, max SAT, max clique, min vertex cover, min TSP, etc....

complessità degli algoritmi e dei problemi

- espressa in funzione della taglia dell'input (denotata come $|x|, \forall x \in I_\pi$)
- taglia dell'istanza x
 - quantità di memoria necessaria a memorizzare x in un computer
 - lunghezza $|x|_c$ della stringa che codifica x in un particolare codice naturale $c : I_\pi \rightarrow \Sigma$, dove Σ é l'alfabeto del codice c
- codice naturale
 - conciso: le stringhe che codificano le istanze non devono essere ridondanti o allungate inutilmente
 - numeri espressi in base ≥ 2

esempio: codice

- istanza: grafo G



- codice per G
 - $\Sigma = \{\{, \}, , 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ (simboli)
 - $c(G) = \{1, 2, 3, 4, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, 2, 1, 3, 7, 4\}$
 - * $\{1, 2, 3, 4\}$ (nodi)
 - * $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$ (archi)
 - * $\{2, 1, 3, 7, 4\}$ (pesi)
 - $|G|_c = 49$

def: tempo di esecuzione dell'algoritmo A

sia $t_A(x)$ il tempo di esecuzione dell'algoritmo A per l'input x , allora il tempo di esecuzione nel caso peggiore di A é:

$$T_A(n) = \max\{t_A(x) \mid |x| \leq n\}, \quad \forall n > 0$$

def: complessità temporale dell'algoritmo A

l'algoritmo A ha complessità temporale

- $O(g(n))$ se $T_A(n) = O(g(n))$, ovvero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_A(n)}{g(n)} \leq c, \text{ per una costante } c > 0$$

- $\Omega(g(n))$ se $T_A(n) = \Omega(g(n))$, ovvero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_A(n)}{g(n)} \geq c, \text{ per una costante } c > 0$$

- $\Theta(g(n))$ se $T_A(n) = \Theta(g(n))$, ovvero

$$T_A(n) = \Omega(g(n)) \text{ e } T_A(n) = O(g(n))$$

def: complessità di un problema

un problema ha complessità

- $O(g(n))$ se esiste un algoritmo che lo risolve avente complessità $O(g(n))$
- $\Omega(g(n))$ se ogni algoritmo A che lo risolve ha complessità $\Omega(g(n))$
- $\Theta(g(n))$ se ha complessità $O(g(n))$ e $\Omega(g(n))$

problemi di decisione e classi di complessità

i problemi di decisione sono solitamente descritti da un'istanza di input (o semplicemente INPUT) e da una DOMANDA sull'input

esempi:

- soddisfacibilità
 - INPUT: CNF (Conjunctive Normal Form) formula definita su un insieme di variabili
 - DOMANDA: esiste un assegnamento di verità $\tau: V \rightarrow \{0,1\}$?
- clique
 - INPUT: un grafo non orientato $G=(V,E)$ di n nodi e un intero $k > 0$
 - DOMANDA: esiste in G una clique di almeno k nodi ($\geq k$), ovvero un sottoinsieme $U \subseteq V$ tale che $|U| \geq k$ e $\{u,v\} \in E, \forall u,v \in U$?
- vertex cover
 - INPUT: un grafo non orientato $G=(V,E)$ di n nodi e un intero $k > 0$
 - DOMANDA: esiste in G un vertex cover di al massimo k nodi ($\leq k$), ovvero un sottoinsieme $U \subseteq V$ tale che $|U| \leq k$ e $u \in U$ o $v \in U, \forall \{u,v\} \in E$?

nei problemi di decisione $I_\pi = Y_\pi \cup N_\pi$

- Y_π = insieme di istanze positive, ovvero con soluzione 1
- N_π = insieme di istanze negative, ovvero con soluzione 0

def: un algoritmo A risolve π

un algoritmo A risolve $\pi \iff \forall \text{ input } x \in I_\pi, A \text{ risponde } 1 \iff x \in Y_\pi$

def: classe dei problemi $TIME(g(n))$

$TIME(g(n))$ = classe dei problemi di decisione con complessità $O(g(n))$

algoritmi non-deterministici per i problemi di decisione

essi si compongono di 2 fasi

- fase 1
 - generano in modo non-deterministico un "certificato" y
- fase 2
 - partendo dall'input x e dal certificato y , verificano se x é un'istanza positiva

def: un algoritmo non-deterministico A risolve π

un algoritmo non-deterministico A risolve π se si ferma per ogni possibile certificato y ed esiste un certificato y per cui A risponde 1 (*true*) $\iff x \in Y_\pi$

- complessità
 - costo della fase 2
 - espressa in funzione di $|x|$

def: classe dei problemi $NTIME(g(n))$

$NTIME(g(n))$ = classe di problemi di decisione con complessità non-deterministica $O(g(n))$

esempio: algoritmo non-deterministico per il problema della clique

- fase 1
 - dato in input il grafo $G = (V, E)$, genera non-deterministicamente un sottoinsieme $U \subseteq V$ di k nodi
- fase 2
 - verifica se U è una clique, ovvero se $\{u, v\} \in E, \forall u, v \in U$, e in tal caso risponde 1, altrimenti risponde 0
- chiaramente l'algoritmo risolve il problema della clique, in quanto si ferma per ogni possibile sottoinsieme U ed esiste un sottoinsieme U per il quale risponde 1 se e solo se esiste una clique di k nodi in G , ovvero $\iff (G, k) \in Y_{clique}$
- complessità: $O(n^2)$, poiché $|U| \leq |V| = n$

osservazioni (algoritmi deterministici e non-deterministici)

- un algoritmo deterministico è meno potente di uno non-deterministico poiché non può eseguire la fase 1
- se esiste un algoritmo deterministico A che risolve π , allora esiste anche un algoritmo non-deterministico A' che risolve π con la stessa complessità come segue:
 - esso esegue al fase 1 e coincide con A nella fase 2, ignorando il certificato y

corollario: $TIME(g(n)) \subseteq NTIME(g(n))$

$$TIME(g(n)) \subseteq NTIME(g(n))$$

- dove:
 - $TIME(g(n))$ = classe dei problemi deterministicamente risolvibili in tempo $O(g(n))$
 - $NTIME(g(n))$ = classe dei problemi non-deterministicamente risolvibili in tempo $O(g(n))$

efficienza e trattabilità

- un problema è trattabile se può essere risolto efficientemente (deterministicamente)
- sono considerati trattabili o efficientemente risolvibili tutti i problemi aventi complessità limitata da un polinomio della dimensione dell'input

$$TRATTABILITÀ \equiv EFFICIENZA \equiv POLINOMIALITÀ$$

efficienza e trattabilità: ragione 1

la crescita delle funzioni polinomiali rispetto a quelle esponenziali (sia per ciò che riguarda il tempo di esecuzione sia per ciò che riguarda la dimensione delle istanze risolvibili entro un certo tempo di esecuzione)

efficienza e trattabilità: ragione 2

- la composizione di polinomi é un polinomio e dunque la risolvibilità in tempo polinomiale di un problema é indipendente da
 - il codice naturale utilizzato, poiché tutti i codici naturali sono correlati in maniera polinomiale
 - il modello computazionale adottato, se ragionevole (cioé costruibile nella pratica o meglio in grado di eseguire un lavoro limitato costante per step), in quanto tali modelli sono polinomialmente correlati, ovvero possono simularsi l'un l'altro in tempo polinomiale

osservazione: macchina di turing non-deterministica

la macchina di turing non-deterministica non é un modello di calcolo ragionevole, poiché la quantità di lavoro svolto in ogni fase (ciascun livello dell'albero delle computazioni) cresce in modo esponenziale

def: codici polinomialmente correlati

- 2 codici c_1 e c_2 per un problema π sono correlati polinomialmente se esistono 2 polinomi p_1 e p_2 tali che, $\forall x \in I_\pi$:
 - $|x|_{c_1} \leq p_1(|x|_{c_2})$
 - $|x|_{c_2} \leq p_2(|x|_{c_1})$
- se la complessità rispetto a c_1 é $O(q_1(|x|_{c_1}))$ per un dato polinomio q_1 , allora rispetto a c_2 é $O(q_1(p_1(|x|_{c_2}))) = O(q_2(|x|_{c_2}))$ dove q_2 é il polinomio tale che $\forall \lambda \ q_2(\lambda) = q_1(p_1(\lambda))$
- tutti i codici naturali sono correlati polinomialmente, ovvero la risolvibilità polinomiale non dipende dal particolare codice utilizzato

dimensione dell'input (def: codici correlati polinomialmente)

qualsiasi quantità polinomialmente correlata ad un codice naturale é dunque correlata ad un qualsiasi codice naturale possibile, dato che tutti i codici naturali sono correlati polinomialmente e che la composizione di polinomi é un polinomio

esempio: codici correlati polinomialmente

- assumiamo che per ogni grafo G di n nodi
 - $|G|_{c_1} = 10n^2$
 - $|G|_{c_2} = n^3$
- se $p_1(\lambda) = 10\lambda$ e $p_2(\lambda) = \lambda^2$ abbiamo che:
 - $|G|_{c_1} = 10n^2 \leq 10n^3 = p_1(|G|_{c_2})$
 - $|G|_{c_2} = n^3 \leq 100n^4 = p_2(|G|_{c_1})$
- dunque i 2 codici sono correlati polinomialmente
- regola pratica:
 - 2 quantità sono polinomialmente correlate se sono polinomi sulle stesse variabili

esempio: codifica non naturale

- test di primalità
 - INPUT: un numero intero $n > 0$
 - DOMANDA: n é un numero primo?
 - ALGORITMO (banale):
 - * scansiona tutti i numeri da 2 a $n-1$ e risponde 1 (*true*) se nessuno di essi lo divide
 - COMPLESSITÀ: $O(n)$, polinomiale?
 - CODICE c_1 (naturale): n espresso in base 2, ovvero $|n|_{c_1} = \log_2 n$
 - CODICE c_2 (non naturale): n espresso in base 1, ovvero $|n|_{c_2} = n$
- dunque la complessità dell'algoritmo é:
 - $O(2^{|n|_{c_1}})$ rispetto a c_1 , che é esponenziale
 - $O(|n|_{c_2})$ rispetto a c_2 , che é polinomiale!
- dimensione dell'input
 - correlata polinomialmente ai codici naturali $|n|_{c_1} = \log_2 n$

def: modelli computazionali simulabili in modo polinomiale

- 2 modelli computazionali M_1 e M_2 sono mutualmente simulabili in modo polinomiale se esistono 2 polinomi p_1 a p_2 tali che:
 1. ogni algoritmo A per M_1 con complessità $T_A(n)$ può essere simulato su M_2 in tempo $p_1(T_A(n))$
 2. ogni algoritmo A per M_2 con complessità $T_A(n)$ può essere simulato su M_1 in tempo $p_2(T_A(n))$
- dunque se A é polinomiale in M_1 allora é polinomiale anche in M_2 e viceversa
- tutti i modelli computazionali ragionevoli sono mutualmente simulabili in modo polinomiale, ovvero la risolvibilità polinomiale non dipende dal particolare modello utilizzato

classi P e NP

- P = classe di tutti i problemi risolvibili deterministicamente in tempo polinomiale, ovvero

$$P = \cup_{k=0}^{\infty} TIME(n^k)$$

- NP = classe di tutti i problemi risolvibili non-deterministicamente in tempo polinomiale, ovvero

$$NP = \cup_{k=0}^{\infty} NTIME(n^k)$$

- $P = NP$? nessuno lo a dimostrato

problemi NP -completi

- i problemi più difficili di NP e tali che se $P \neq NP$ non appartengono a P , viceversa, se 1 di essi appartiene a P , allora $P = NP$
- finora nessuno é riuscito a trovare un algoritmo polinomiale deterministico per nessun problema NP -completo
- congettura: $P \neq NP$

optimization problems

def: problema di ottimizzazione

un problema di ottimizzazione π é una quadrupla $(I_\pi, S_\pi, m_\pi, goal_\pi)$ con:

- I_π = insieme delle istanze di input di π
- $S_\pi(x)$ = insieme delle soluzioni ammissibili dell'istanza $x \in I_\pi$
- $m_\pi(x, y)$ = misura della soluzione ammissibile $y \in S_\pi(x)$ per l'input $x \in I_\pi$ (intera)
- $goal_\pi \in \{\min, \max\}$ = specifica se abbiamo un problema di minimizzazione o di massimizzazione

osservazioni (problemi di ottimizzazione)

- assumiamo che $m_\pi(x, y)$ é sempre un numero intero
 - i nostri modelli computazionali possono trattare solo l'approssimazione razionale dei reali
 - scalando tali reali possiamo ottenere numeri interi equivalenti
 - i valori interi rivelano già le difficoltà intrinseche dei problemi
- quando sono chiari dal contesto (in seguito):
 - π sarà omesso
 - $m(x, y)$ = sarà denotato semplicemente come m

esempio: descrizione formale di un problema di ottimizzazione (max clique)

- I = grafo $G = (V, E)$
- $S = \{U \subseteq V \mid \{u, v\} \in E, \forall u, v \in U\}$
- $m(G, U) = |U|$
- $goal = \max$

possiamo descrivere i problemi di ottimizzazione nella seguente forma, più semplice e informale

- MAX CLIQUE
 - INPUT: grafo $G = (V, E)$
 - SOLUZIONE: $U \subseteq V \mid \{u, v\} \in E, \forall u, v \in U$
 - MISURA: $|U|$
- MIN VERTEX COVER
 - INPUT: grafo $G = (V, E)$
 - SOLUZIONE: $U \subseteq V \mid \forall \{u, v\} \in E, u \in U \vee v \in U$
 - MISURA: $|U|$
- MIN TSP (Traveling Salesman Problem, problema del commesso viaggiatore)
 - INPUT:
 - * insieme di città $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$
 - * distanza $d(c_i, c_j) \in \mathbb{N}$, per ogni coppia di città $(c_i, c_j) \in C$

- SOLUZIONE: un tour di tutte le città, ovvero una permutazione $\langle c_{p(1)}, c_{p(2)}, \dots, c_{p(n)} \rangle$ che descriva l'ordine di visita delle città
- MISURA: lunghezza del tour, ovvero

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} d(c_{p(i)}, c_{p(i+1)}) \right) + d(c_{p(n)}, c_{p(1)})$$

def: soluzione ottima

- data un'istanza $x \in I_\pi$, una soluzione $y^* \in S_\pi(x)$ è ottima per x se $m(x, y^*) = \text{goal}\{m(x, y) \mid y \in S(x)\}$
- la misura di una soluzione ottima (o in modo analogo di tutte le soluzioni ottime) di x è denotata come $m^*(x)$ o semplicemente m^*

problema decisionale sottostante

ogni problema di ottimizzazione ha un problema decisionale sottostante che può essere ottenuto introducendo un intero k nell'istanza di input e chiedendo se esiste una soluzione ammissibile di misura $\leq k$ (per min) e $\geq k$ (per max)

- problema di ottimizzazione:
 - dato un input x , trova $y \in S(x) \mid m(x, y)$ sia min o max (secondo il goal)
- problema decisionale sottostante:
 - dato un input x e un intero $k \geq 0$, esiste $y \in S(x) \mid m(x, y) \leq k$ (min) o $\geq k$ (max)

esempio: descrizione formale di un problema decisionale sottostante (max clique)

- MAX CLIQUE
 - INPUT: grafo $G = (V, E)$
 - SOLUZIONE: $U \subseteq V \mid \{u, v\} \in E, \forall u, v \in U$
 - MISURA: $|U|$
- problema decisionale sottostante:
 - INPUT: grafo $G = (V, E)$ e un intero $k > 0$
 - DOMANDA: esiste una clique U in G tale che $|U| \geq k$

osservazioni (problema decisionale sottostante)

- se esiste un algoritmo polinomiale A per il problema di ottimizzazione, allora esiste un algoritmo polinomiale anche per il problema decisionale sottostante che funziona come segue:
 1. esegue A per determinare la soluzione ottima y^* per l'input x
 2. risponde 1 (*true*) se $m(x, y^*) \leq k$ (min) o $\geq k$ (max)
- il problema di ottimizzazione è difficile almeno quanto il problema decisionale sottostante

classi di complessità dei problemi di ottimizzazione: PO

- un problema di ottimizzazione π appartiene alla classe PO se:
 - per ogni input x , $x \in I$ può essere verificato in tempo polinomiale
 - esiste un polinomio $p \mid \forall x \in I$ e $y \in S(x)$ vale $|y| \leq p(|x|)$
 - $\forall x \in I$ e $y \in S(x)$, $m(x, y)$ può essere calcolata in tempo polinomiale (rispetto a $|x|$)
 - $\forall x \in I$, una soluzione ottima y^* può essere calcolata in tempo polinomiale
- esempi: shortest path fra 2 nodi, min spanning tree, ecc...

classi di complessità dei problemi di ottimizzazione: NPO

un problema di ottimizzazione π appartiene alla classe NPO se:

- per ogni input x , $x \in I$ può essere verificato in tempo polinomiale
- esiste un polinomio $p \mid \forall x \in I$ e $y \in S(x)$ vale $|y| \leq p(|x|)$
- $\forall x \in I$ e $y \in S(x)$, $m(x, y)$ può essere calcolata in tempo polinomiale (rispetto a $|x|$)

esempi: max clique, min vertex cover, min TSP, ecc...

PO e NPO : nella pratica

- PO : classe dei problemi di ottimizzazione il cui problema decisionale sottostante appartiene a P
- NPO : classe dei problemi di ottimizzazione il cui problema decisionale sottostante appartiene a NP
- chiaramente $PO \subseteq NPO$

def: relazione NPO - NP -HARD

un problema di ottimizzazione in NPO è NP -HARD se il problema decisionale sottostante è NP -Completo

teorema: relazione tra $P \neq NP$ e risolvibilità polinomiale dei problemi NP -HARD

se $P \neq NP$, un problema di ottimizzazione NP -HARD non può essere risolto in tempo polinomiale (poiché è difficile almeno quanto il problema decisionale sottostante)

teorema: relazione tra $P = NP$ e $PO = NPO$

se $P = NP$ allora $PO = NPO$

- quasi tutti i problemi che verranno presentati in seguito sono NP -HARD, ovvero non efficientemente risolvibili
- verranno progettati algoritmi per tali problemi che restituiscono soluzioni "vicine" a quelle ottime

approximation

introduzione

- DOMANDA: supponiamo di dover risolvere un problema NP-HARD, cosa dovremmo fare?
- RISPOSTA: sacrificare 1 delle 3 caratteristiche desiderate
 1. risolvere istanze arbitrarie del problema
 2. risolvere il problema di ottimalità
 3. risolvere il problema in tempo polinomiale
- STRATEGIE:
 1. progettare algoritmi per casi speciali del problema
 2. progettare algoritmi di approssimazione o euristiche
 3. progettare algoritmi che possono richiedere tempo esponenziale
- d'ora in poi ci concentreremo sui problemi di ottimizzazione NP-HARD, ovvero problemi che non possono essere risolti in modo efficiente (a meno che $P = NP$)
- per tali problemi verranno progettati algoritmi in grado di determinare soluzioni prossime a quelle ottime, ovvero "buone approssimazioni"

def: algoritmo di r-approssimazione per problemi di minimizzazione

dato un problema di minimizzazione π e un numero $r \geq 1$, un algoritmo A é un algoritmo di r-approssimazione per π se per ogni input $x \in I$ restituisce sempre una soluzione r-approssimata, ovvero una soluzione ammissibile $y \in S(x)$ tale che

$$\frac{m(x, y)}{m^*(x)} \leq r$$

def: algoritmo di r-approssimazione per problemi di massimizzazione

dato un problema di massimizzazione π e un numero $r \leq 1$, un algoritmo A é un algoritmo di r-approssimazione per π se per ogni input $x \in I$ restituisce sempre una soluzione r-approssimata, ovvero una soluzione ammissibile $y \in S(x)$ tale che

$$\frac{m(x, y)}{m^*(x)} \geq r$$

determinazione del fattore di approssimazione r

- come possiamo determinare il fattore di approssimazione r se non conosciamo il valore m^* di una soluzione ottima?
- per problemi di minimizzazione (rispettivamente massimizzazione), confrontiamo il valore della soluzione restituita $m(x, y)$ con un lower bound (rispettivamente upper bound) appropriato $l(x)$ (rispettivamente $u(x)$) di $m^*(x)$
- se il loro rapporto é al massimo r (\leq) per min o almeno r (\geq) per max, allora l'algoritmo é r-approssimante

min (analogo per max) fattore di approssimazione r

- se

$$\frac{m(x,y)}{l(x)} \leq r$$

- allora

$$\frac{m(x,y)}{m^*(x)} \leq \frac{m(x,y)}{l(x)} \leq r$$

algoritmo: Approx-Cover per min vertex cover

Algorithm 1 Approx-Cover

```
// M = archi scelti dall'algoritmo
M = ∅
// U = nodi scelti nel cover
U = ∅
repeat
  seleziona un arco  $\{u,v\} \in E$ 
   $U = U \cup \{u,v\}$ 
   $E = E \setminus \{e \in E \mid e \text{ é incidente a } u \text{ o a } v\}$ 
   $M = M \cup \{\{u,v\}\}$ 
until ( $E = \emptyset$ )
return  $U$ 
```

lemma: Approx-Cover forma un matching al termine dell'esecuzione

al termine dell'esecuzione dell'algoritmo di approssimazione Approx-Cover, M forma un matching, ovvero gli archi in M non condividono alcun nodo

dimostrazione:

- banalmente, ogni volta che un arco e é selezionato in M , tutti gli archi con un nodo in comune con e vengono eliminati da E
- pertanto nei passi successivi nessun arco con un nodo in comune con e può essere selezionato dall'algoritmo

□

teorema: Approx-Cover é 2-approssimante

Approx-Cover é 2-approssimante

dimostrazione:

- il valore della soluzione restituita dall'algoritmo é

$$m = |U| = 2|M|$$

- sia U^* il cover ottimo.
Poiché gli archi in M non condividono alcun nodo (M é un matching) e poiché ciascuno di essi deve avere un nodo in U^*

$$m^* = |U^*| \geq |M|$$

- dunque:

$$\frac{m}{m^*} \leq \frac{2|M|}{|M|} = 2$$

□

algorithmic techniques: greedy

caratteristiche

- la soluzione viene determinata in step
- ad ogni step l'algoritmo esegue la scelta che sembra essere la migliore in quello step, senza considerare le possibili conseguenze nei futuri step

problema: max 0-1 knapsack

- INPUT:
 - un insieme finito di oggetti O
 - un profitto intero $p_i, \forall o_i \in O$
 - un volume intero $a_i, \forall o_i \in O$
 - un intero positivo b ($b > 0$)
- SOLUZIONE:
 - un sottoinsieme di oggetti $Q \subseteq O$ tale che $\sum_{o_i \in Q} a_i \leq b$
- MISURA:
 - profitto totale degli oggetti scelti, ovvero $\sum_{o_i \in Q} p_i$
- senza perdere di generalità, in seguito, assumeremo sempre che:
 - $a_i \leq b, \forall o_i \in O$
 - $p_i > 0, \forall o_i \in O$

max 0-1 knapsack: descrizione della scelta greedy

- nella scelta greedy:
 - non possiamo considerare solo il profitto degli oggetti, in quanto il loro volume potrebbe essere troppo grande
 - non possiamo considerare solo il volume degli oggetti, in quanto il loro profitto potrebbe essere troppo basso
- idea: consideriamo gli oggetti in base al profitto per unità di volume, ovvero in base al rapporto
$$\frac{p_i}{a_i}, \forall o_i \in O$$
- l'algoritmo greedy seleziona gli oggetti in ordine decrescente di profitto per volume

algoritmo: Greedy-Knapsack

Algorithm 2 Greedy-Knapsack

```
// Q = insieme degli oggetti scelti
Q = ∅
// v = volume del sottoinsieme corrente degli oggetti scelti
v = 0
ordina gli oggetti in ordine decrescente di profitto per volume  $\frac{p_i}{a_i}$ 
siano  $o_1, \dots, o_n$  gli oggetti elencati secondo tale ordine
for  $i = 1$  to  $n$  do
  if  $v + a_i \leq b$  then
     $Q = Q \cup \{o_i\}$ 
     $v = v + a_i$ 
  end if
end for
return  $Q$ 
```

teorema: $\forall r < 1$ Greedy-Knapsack non é r-approssimante

$\forall r < 1$ dato, Greedy-Knapsack non é r-approssimante

dimostrazione:

- dato un intero $k = \lceil \frac{1}{r} \rceil$, consideriamo la seguente istanza di max 0-1 knapsack
- $\forall n \geq 2$
 - $b = kn$ é il volume del knapsack
 - $n - 1$ oggetti con profitto $p_i = 1$ e volume $a_i = 1$
 - 1 oggetto con profitto $b - 1$ e volume b
- soluzione restituita:
 - l'insieme dei primi $n - 1$ oggetti, ovvero $m = n - 1$
- soluzione ottima
 - l'insieme contenente solo l' n -esimo oggetto, ovvero

$$m^* = b - 1 = kn - 1$$

- quindi:

$$\frac{m}{m^*} = \frac{n - 1}{kn - 1}$$

- cosí che:

($<$) poiché $\frac{1}{r} > 1$

$$\frac{m}{m^*} = \frac{n - 1}{kn - 1} \leq \frac{n - 1}{\frac{n}{r} - 1} < \frac{n - 1}{\frac{n}{r} - \frac{1}{r}} = \frac{n - 1}{\frac{1}{r}(n - 1)} = r$$

- $\forall r < 1 \rightarrow \frac{m}{m^*} \leq r$, invece di $\forall r \leq 1 \rightarrow \frac{m}{m^*} \geq r$

□

miglioramento algoritmo: Greedy-Knapsack

- osservazione:
 - intuitivamente, Greedy-Knapsack non restituisce una buona approssimazione, poiché ignora l'oggetto avente il profitto massimo

Greedy-Knapsack modificato

- calcola una soluzione greedy Q_{GR} e sia m_{GR} la misura di quest'ultima
- considera l'oggetto O_{\max} avente il massimo profitto p_{\max}
- se $m_{GR} \geq p_{\max}$ restituisci Q_{GR} altrimenti restituisci $Q = \{O_{\max}\}$

lemma 1: Greedy-Knapsack modificato

- sia o_j il primo oggetto che l'algoritmo Greedy-Knapsack non inserisce nel knapsack e sia:

$$m_j = \sum_{i=1}^{j-1} p_i$$

- allora:

$$m^* \leq m_j + p_j$$

dimostrazione:

- $m^* \leq m_j + p_j$ deriva direttamente osservando semplicemente che, denotando con v la somma dei volumi dei primi $j-1$ oggetti scelti, $m_j + p_j$ é il valore della soluzione ottima dell'istanza in cui il volume del knapsack é $v + a_j > b$

□

lemma 2: Greedy-Knapsack modificato

- $m^* \leq m_{GR} + p_{\max}$

dimostrazione:

- diretta conseguenza del precedente lemma osservando che $m_j \leq m_{GR}$ e $p_j \leq p_{\max}$, e quindi:

$$m^* \leq m_j + p_j \leq m_{GR} + p_{\max}$$

- intuizione: l'algoritmo restituisce una soluzione di valore $\max\{m_{GR}, p_{\max}\}$, che é almeno la metà di $m_{GR} + p_{\max}$, ovvero la metà di un upper bound di m^*

$$\max\{m_{GR}, p_{\max}\} \geq \frac{m_{GR} + p_{\max}}{2}$$

□

teorema: Greedy-Knapsack modificato é $\frac{1}{2}$ -approssimante

Greedy-Knapsack modificato é $\frac{1}{2}$ -approssimante

dimostrazione:

- $m_{Mod} \geq \max\{m_{GR}, p_{\max}\} \geq \frac{(m_{GR} + p_{\max})}{2} \geq \frac{m^*}{2}$

□

problema: min multiprocessor scheduling

- INPUT:

- insieme di n jobs P
- numero di processori h
- tempo di esecuzione $t_j, \forall p_j \in P$

- SOLUZIONE:

- uno schedule per P , ovvero una funzione

$$f: P \rightarrow \{1, \dots, h\}$$

- MISURA:

- *makespan* o tempo di completamento di f , ovvero

$$\max_{i \in [1, \dots, h]} \sum_{p_j \in P \mid f(p_j) = i} t_j$$

algoritmo: Greedy-Graham

- scelta greedy: ad ogni step assegna un job al processore meno carico
- $T_i(j)$:
 - tempo di completamento (somma dei tempi di esecuzione dei jobs assegnati) del processore i al termine del tempo j , ovvero una volta schedulati i primi j jobs (in qualunque ordine)

Algorithm 3 Greedy-Graham

siano p_1, \dots, p_n i jobs elencati in un qualsiasi ordine

for $j = 1$ **to** n **do**

 assegna p_j al processore i avente il minimo $T_i(j-1)$ ovvero $f(p_j) = i$

end for

return schedule i

- osservazione:

- se i jobs vengono schedulati in accordo con il tempo di arrivo, l'algoritmo assegna ciascun job senza conoscere quelli futuri, ovvero ONLINE

teorema: Greedy-Graham é $\frac{2-1}{h}$ -approssimante

l'algoritmo Greedy-Graham é $\frac{2-1}{h}$ -approssimante, dove h é il numero di processori

fatto:

- dato $s \geq 0$ e h numeri $a_1, \dots, a_h \mid a_1 + \dots + a_h = s$, allora esiste $j, 1 \leq j \leq h$, tale che

$$a_j \geq \frac{s}{h}$$

- altrimenti, contraddizione ($a_1 + \dots + a_h < h \frac{s}{h} = s$)
- analogamente, esiste $j', 1 \leq j' \leq h$, tale che $a_{j'} \leq \frac{s}{h}$
- in altre parole, un numero é al massimo uguale alla media e uno maggiore o uguale alla media

- pertanto, $\min_j a_j \leq \frac{s}{h}$ e $\max_j a_j \geq \frac{s}{h}$

dimostrazione:

- sia T la somma di tutti i tempi di esecuzione dei job, ovvero

$$T = \sum_{j=1}^n t_j$$

- siano $T_1^*, T_2^*, \dots, T_h^*$ i tempi di completamento degli h processori nella soluzione ottima
- poiché $T_1^* + T_2^* + \dots + T_h^* = T$ dal precedente 'fatto', esiste j tale che $T_j^* \geq \frac{T}{h}$
- quindi:

$$m^* \geq T_j^* \geq \frac{T}{h}$$

- sia k il processore con il massimo tempo di completamento nello schedule f restituito dall'algoritmo, ovvero con $T_k(n)$ massimo
- in più sia p_l l'ultimo job assegnato al processore k
- dato che, per la scelta greedy, p_l è stato assegnato ad uno dei processori meno carichi all'inizio dello step l , sempre per il 'fatto' precedente, abbiamo:

$$T_k(l-1) \leq \frac{\sum_{j < l} t_j}{h} \leq \frac{T - t_l}{h}$$

- dato che la somma dei tempi di esecuzione di tutti i jobs assegnati prima di p_l è al massimo (\leq) $T - t_l$
- pertanto:

$$\begin{aligned} m = T_k(n) &= T_k(l-1) + t_l \leq \frac{T - t_l}{h} + t_l = \\ &= \frac{T - t_l + ht_l}{h} = \frac{T}{h} - \frac{1+h}{h}t_l = \frac{T}{h} + \frac{h-1}{h}t_l \leq \dots \end{aligned}$$

- poiché $\frac{T}{h} \leq m^*$ e $t_l \leq m^*$

$$\begin{aligned} \dots &\leq m^* + \frac{h-1}{h}m^* = \frac{hm^* + (h-1)m^*}{h} = \frac{hm^* + hm^* - m^*}{h} = \\ &= \frac{2hm^* - m^*}{h} = \frac{2h-1}{h}m^* = (2 - \frac{1}{h})m^* \end{aligned}$$

- e quindi:

$$\frac{m}{m^*} \leq 2 - \frac{1}{h}$$

□

- osservazioni:

- quando h cresce, il rapporto di approssimazione $\frac{2-1}{h}$ tende a 2
- l'analisi è stretta, ovvero vale il seguente teorema

teorema: Greedy-Graham non é r -approssimante per $r < \frac{2-1}{h}$

Greedy-Graham non é r -approssimante per $r < \frac{2-1}{h}$

dimostrazione:

- considera la seguente istanza:
 - $h(h-1)$ jobs con tempo di esecuzione 1
 - 1 job con tempo di esecuzione h
- Greedy-Graham assegna i jobs nella seguente maniera:
- e quindi:

$$m = 2(h-1)$$

- la soluzione ottima può essere ottenuta assegnando il job più lungo ad un processore e distribuendo ugualmente i jobs più corti tra i processori restanti:
- e quindi:

$$m^* = h$$

- in conclusione:

$$\frac{m}{m^*} = \frac{2(h-1)}{h} = 2 - \frac{1}{h} \quad (\text{diverso da } \leq 2 - \frac{1}{h})$$

□

migliorare il rapporto di approssimazione r per Greedy-Graham

- DOMANDA: come possiamo migliorare il rapporto di approssimazione r
- richiamiamo rapidamente gli step base della dimostrazione del rapporto di approssimazione di Greedy-Graham
- abbiamo utilizzato i seguenti *lower bounds* per il valore della soluzione ottima:
 - $m^* \geq \frac{T}{h}$, come in qualsiasi soluzione almeno 1 processore deve avere tempo di completamento $\frac{T}{h}$ (richiamiamo che $T = \sum_j t_j$)
 - $m^* \geq t_j$, per ogni job p_j , come in qualsiasi soluzione uno dei processori deve eseguire p_j
- abbiamo utilizzato il seguente *upper bound* per il valore della soluzione restituita:
 - per limitare superiormente il valore della soluzione restituita, se k é uno dei processori più carichi e p_l é l'ultimo job assegnato a k , per la scelta greedy:

$$T_k(l-1) \leq \frac{\sum_{j < l} t_j}{h} \leq \frac{T - t_l}{h}$$

- quindi possiamo derivare la seguente disuguaglianza:

$$\begin{aligned} m = T_k(n) &= T_k(l-1) + t_l \leq \frac{T - t_l}{h} + t_l = \\ &= \frac{T - t_l + h t_l}{h} = \frac{T}{h} - \frac{1+h}{h} t_l = \frac{T}{h} + \frac{h-1}{h} t_l \leq \dots \end{aligned}$$

- poiché $\frac{T}{h} \leq m^*$ e $t_l \leq m^*$

$$\begin{aligned} \dots &\leq m^* + \frac{h-1}{h}m^* = \frac{hm^* + (h-1)m^*}{h} = \frac{hm^* + hm^* - m^*}{h} = \\ &= \frac{2hm^* - m^*}{h} = \frac{2h-1}{h}m^* = (2 - \frac{1}{h})m^* \end{aligned}$$

- idea per il miglioramento: decrementa t_l il più possibile e trova un rapporto di approssimazione migliore sfruttando le disuguaglianze

$$m \leq \frac{T}{h} + \frac{h-1}{h}t_l \leq m^* + \frac{h-1}{h}t_l$$

- modificando l'algoritmo e/o migliorando l'analisi vedremo come limitare superiormente t_l progressivamente con:

- $\frac{m^*}{2}$ ($\frac{3}{2}$ -approssimante),
- $\frac{m^*}{3}$ ($\frac{4}{3}$ -approssimante),
- e arbitrariamente piccolo, ovvero ϵm^* ($(1+\epsilon)$ -approssimante), cioè un PTAS

Greedy-Graham, primo miglioramento

- assegnare i jobs dal più lungo al più corto
- ciò ci consente di evitare il caso peggiore dell'algoritmo di Graham, ovvero il fatto che un job lungo arrivi alla fine, sbilanciando significativamente il carico dei processori

algoritmo: Ordered-Greedy

Algorithm 4 Ordered-Greedy

```
siano  $p_1, p_2, \dots, p_n$  i job elencati in ordine decrescente di tempo di esecuzione,
ovvero tale che  $t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n$ 
for  $j=1$  to  $n$  do
  assegna  $p_j$  al processore  $i$  con il minimo  $T_i(j-1)$ , ovvero  $f(p_j)=i$ 
end for
return schedule  $f$ 
```

- vediamo un'analisi più semplice che porta ad un rapporto di approssimazione di circa $\frac{3}{2}$

lemma: Ordered-Greedy

se $n > h$, allora $t_{h+1} \leq \frac{m^*}{2}$

dimostrazione:

- dall'ordinamento dei jobs, i primi $h+1$ hanno tutti un tempo di esecuzione $\geq t_{h+1}$
- ma allora $m^* \geq 2t_{h+1}$, poiché in ogni schedule almeno 1 degli h processori deve ricevere almeno 2 dei primi $h+1$ job

□

teorema: Ordered-Greedy é $(\frac{3}{2} - \frac{1}{2h})$ -approssimante

Ordered-Greedy é $(\frac{3}{2} - \frac{1}{2h})$ -approssimante

dimostrazione:

- di nuovo sia k uno dei processori piú carichi (alla fine)
- se k ha 1 solo job, allora chiaramente la soluzione ritornata é ottima
- altrimenti considera l'ultimo job p_l assegnato a k
- dato che p_l non é il primo job assegnato a k , $l \geq h+1$ e quindi $t_l \leq t_{h+1} \leq \frac{m^*}{2}$, e cosí:

$$\begin{aligned} m &\leq \frac{T}{h} + \frac{h-1}{h} t_l \leq m^* + \frac{h-1}{h} \frac{m^*}{2} = \\ &= m^* + \frac{m^*(h-1)}{2h} = \frac{2hm^* + m^*(h-1)}{2h} = \frac{2hm^* + hm^* - m^*}{2h} = \\ &= \frac{3hm^* - m^*}{2h} = \left(\frac{3h-1}{2h}\right)m^* = \left(\frac{3h}{2h} - \frac{1}{2h}\right)m^* = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2h}\right)m^* \end{aligned}$$

□

problema: max cut

- INPUT: grafo $G = (V, E)$
- SOLUZIONE: una partizione di V in 2 sottoinsiemi V_1 e V_2 , ovvero tale che:

$$V_1 \cup V_2 = V \text{ e } V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

- MISURA: la cardinalitá del taglio, ovvero il numero di archi con un estremo (nodo) in V_1 e un estremo in V_2 , cioé:

$$|\{\{u, v\} \mid u \in V_1 \text{ e } v \in V_2\}|$$

algoritmo: Greedy-Max-Cut

Algorithm 5 Greedy-Max-Cut

```
 $V_1 = V_2 = \emptyset$ 
for  $i = 1$  to  $n$  do
  //  $\Delta_i$  = set di archi tra  $i$  e i nodi  $j < i$  (adiacenti)
   $\Delta_i = \{\{i, j\} \in E \mid j < i\}$ 
  //  $U_i$  = set di nodi già inseriti (adiacenti ad  $i$ , all'inizio dello step  $i$ )
   $U_i = \{j \mid \{i, j\} \in \Delta_i\}$ 
   $\delta_i = |\Delta_i| = |U_i|$ 
   $\delta_{1i} = |V_1 \cap U_i|$ 
   $\delta_{2i} = |V_2 \cap U_i|$ 
  // chiaramente  $\delta_{1i} + \delta_{2i} = \delta_i$ 
  if  $\delta_{1i} > \delta_{2i}$  then
     $V_2 = V_2 \cup \{i\}$ 
  else
     $V_1 = V_1 \cup \{i\}$ 
  end if
end for
return  $V_1, V_2$ 
```

- per semplicità sia $V = \{1, \dots, n\}$
- l'algoritmo ad ogni step inserisce un nuovo nodo in V_1 o in V_2
- scelta greedy:
 - allo step i , il nodo i viene inserito in modo da massimizzare il numero di archi nuovi nel taglio, ovvero in V_1 se il numero di archi che ha verso i nodi già inseriti in V_2 è maggiore (\geq) del numero di archi che ha verso quelli in V_1 , altrimenti in V_2 ($<$)

teorema: Greedy-Max-Cut é $\frac{1}{2}$ -approssimante

Greedy-Max-Cut é $\frac{1}{2}$ -approssimante

dimostrazione:

- chiaramente poiché quel taglio può solo contenere un sottoinsieme di tutti gli archi in E

$$m^* \leq |E|$$

- mostriamo ora che la misura m del taglio restituita dall'algoritmo é almeno la metà del numero totale di archi, ovvero:

$$m \geq \frac{|E|}{2}$$

- ciò implica chiaramente l'affermazione, poiché

$$\frac{m}{m^*} \geq \frac{\frac{|E|}{2}}{|E|} = \frac{1}{2}$$

- poiché gli insiemi Δ_i determinati dall'algoritmo formano una partizione di E e per definizione $\delta_i = |\Delta_i|$:

$$\sum_{i=1}^n \delta_i = \sum_{i=1}^n |\Delta_i| = |E|$$

- inoltre, il numero di archi aggiunti al taglio durante lo step i , ovvero con un estremo in V_1 e l'altro in V_2 (dopo l'esecuzione dell' i -esima iterazione dell'istruzione *for*), é:

$$\max(\delta_{1i}, \delta_{2i}) \geq \frac{(\delta_{1i} + \delta_{2i})}{2} = \frac{\delta_i}{2}$$

- quindi:

$$m = \sum_{i=1}^n \max(\delta_{1i}, \delta_{2i}) \geq \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{2} = \frac{|E|}{2}$$

□

conclusioni sulla tecnica greedy

- tutti gli algoritmi visti fin ora hanno complessità temporale polinomiale
- gli algoritmi greedy hanno buone performance in pratica poiché possono essere implementati in modo semplice
- ma come abbiamo visto, compiere la scelta che sembra migliore a ciascun singolo step, senza badare alle conseguenze future, in generale non permette di trovare la soluzione ottima

algorithmic techniques: local search

caratteristiche

- definiamo, per ogni soluzione ammissibile y , un sottoinsieme di soluzioni ammissibili "vicine" chiamato intorno di y o semplicemente $neighborhood(y)$
- partendo da una soluzione iniziale, si passa ripetutamente ad una soluzione migliore nell'intorno corrente, finché possibile

schema di un algoritmo di ricerca locale

- risolve una soluzione iniziale y ammissibile per l'input x (di solito una banale)
- fintanto che esiste una $y' \in neighborhood(y)$ migliore di y
 - sia $y = y'$
- ritorna y
- per definire un algoritmo di ricerca locale per un determinato problema é quindi sufficiente definire:
 - la soluzione iniziale
 - l'intorno delle soluzioni ammissibili

complessità

- per ottenere una complessità temporale polinomiale:
 - la soluzione iniziale deve essere determinata in tempo polinomiale
 - il test della condizione di guardia del *while* e l'eventuale conseguente determinazione di una soluzione migliore nell'intorno deve essere eseguito in tempo polinomiale
 - NOTA: l'intorno può avere una cardinalità esponenziale rispetto alla dimensione dell'input!
 - il numero di iterazioni del *while* deve essere polinomiale

approssimazione

- OTTIMO LOCALE: la soluzione y restituita é la migliore nell'intorno considerato
- per limitare il rapporto di approssimazione é sufficiente limitare il rapporto tra il valore di un qualsiasi ottimo locale con quello della misura di una soluzione ottima globale

definizione dell'intorno

- $neighborhood(y)$:
 - sufficientemente "ricco", per ottenere buone soluzioni (ottimi locali)
 - sufficientemente "povero", per garantire una complessità temporale polinomiale

definizione dell'intorno: casi estremi

- $neighborhood(y) = \emptyset$
 - tempo di esecuzione polinomiale (se la soluzione iniziale viene determinata in tempo polinomiale)
 - cattiva approssimazione (ogni soluzione é un ottimo locale)
- $neighborhood(y) = S(x)$, ovvero l'insieme di tutte le soluzioni ammissibili per x
 - tempo di esecuzione non polinomiale (se il problema é NP-HARD)
 - buona approssimazione (poiché ogni ottimo locale é anche un ottimo globale)

problema: max cut (giá definito precedentemente)

- INPUT: grafo $G = (V, E)$
- SOLUZIONE: una partizione di V in 2 sottoinsiemi V_1 e V_2 , ovvero tale che:

$$V_1 \cup V_2 = V \text{ e } V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

- MISURA: la cardinalitá del taglio, ovvero il numero di archi con un estremo (nodo) in V_1 e un estremo in V_2 , cioè:

$$|\{ \{u, v\} \mid u \in V_1 \text{ e } v \in V_2 \}|$$

algoritmo di ricerca locale per max cut

- per definire l'algoritmo di ricerca locale, é sufficiente determinare:
 - la soluzione iniziale:

$$V_1 = V, V_2 = \emptyset$$

- l'intorno:

* dati $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ e V_1, V_2 , le soluzioni dell'intorno di (V_1, V_2) sono tutte le coppie (V_{1i}, V_{2i}) con $1 \leq i \leq n$ che possono essere ottenute muovendo un nodo v_i da V_1 a V_2 o viceversa, ovvero:

$$\text{if } (v_i \in V_1) \ V_{1i} = V_1 \setminus \{v_i\} \text{ e } V_{2i} = V_2 \cup \{v_i\}$$

$$\text{else } (v_i \in V_2) \ V_{1i} = V_1 \cup \{v_i\} \text{ e } V_{2i} = V_2 \setminus \{v_i\}$$

complessitá (algoritmo di ricerca locale per max cut)

- la soluzione iniziale viene banalmente ottenuta in tempo polinomiale
- il test della guardia *while* e l'eventuale determinazione di una migliore soluzione nell'intorno viene effettuata in tempo polinomiale come segue:
 - per ciascuna delle n soluzioni dell'intorno (n iterazioni), controlla se la soluzione corrente é migliore (n^2 iterazioni) $\rightarrow O(n^3)$
- le iterazioni nel *while* sono al massimo $(\leq) |E| = O(n^2)$, poiché ogni iterazione migliora la soluzione corrente, ovvero aumenta almeno di 1 il numero di archi del taglio, e vi sono $|E|$ archi nel taglio (al massimo)
- quindi l'algoritmo ha complessitá temporale:

$$O(n^3 n^2) = O(n^5)$$

approssimazione (algoritmo di ricerca locale per max cut)

- vediamo una proprietà utile a mostrare il rapporto di approssimazione dell'algoritmo:

fatto (approssimazione (algoritmo di ricerca locale per max cut))

dato un grafo $G = (V, E)$, sia δ_i il grado di un generico nodo $v_i \in V$, allora:

$$\sum_{i=1}^n \delta_i = 2|E|$$

dimostrazione:

- banalmente vero, poiché ogni arco viene contato 2 volte nella somma, ovvero incrementa la somma di 2

□

teorema: l'algoritmo di ricerca locale è $\frac{1}{2}$ -approssimante

l'algoritmo di ricerca locale è $\frac{1}{2}$ -approssimante

dimostrazione:

- mostriamo che ogni ottimo locale (V_1, V_2) ha misura:

$$m \geq \frac{|E|}{2}$$

- ciò implica:

$$\frac{m}{m^*} \geq \frac{\frac{|E|}{2}}{|E|} = \frac{1}{2}$$

- poiché $m^* \leq |E|$
- dato un ottimo locale (V_1, V_2) denotiamo con h il numero di archi interni, ovvero con entrambi gli estremi in V_1 o in V_2
- chiaramente, $m + h = |E|$
- per ogni nodo $v_i \in V$ definiamo i gradi interni ed esterni del nodo come segue:

- δ_i^{int} = numero di archi che v_i ha verso i nodi nella sua stessa partizione, ovvero:

$$\delta_i^{int} = |\{v_k | \{v_i, v_k\} \in E \text{ e } (v_i, v_k \in V_1) \text{ o } (v_i, v_k \in V_2)\}|$$

- δ_i^{ext} = numero di archi che v_i ha verso i nodi nell'altra partizione, ovvero:

$$\delta_i^{ext} = |\{v_k | \{v_i, v_k\} \in E \text{ e } (v_i \in V_1, v_k \in V_2) \text{ o } (v_i \in V_2, v_k \in V_1)\}|$$

- poiché la soluzione nell'intorno (V_1, V_2) ha misura non maggiore (\leq) di quella di (V_1, V_2) (ottimo locale), abbiamo:

$$m - \delta_i^{ext} + \delta_i^{int} \leq m$$

- e quindi:

$$\delta_i^{int} - \delta_i^{ext} \leq 0$$

- riassunto, su tutti i nodi, abbiamo:

$$\sum_{v_i \in V} \delta_i^{int} - \sum_{v_i \in V} \delta_i^{ext} = \sum_{v_i \in V} (\delta_i^{int} - \delta_i^{ext}) \leq 0$$

- dal fatto precedente:

$$\sum_{v_i \in V} \delta_i^{int} = 2h$$

(perché é come sommare i gradi dei nodi del grafo contenente solo gli archi interni)

- e (sempre dal fatto precedente):

$$\sum_{v_i \in V} \delta_i^{ext} = 2m$$

(perché é come sommare i gradi dei nodi del grafo contenente solo gli archi esterni)

- quindi:

$$0 \geq \sum_{v_i \in V} \delta_i^{int} - \sum_{v_i \in V} \delta_i^{ext} = 2h - 2m$$

- ovvero $m \geq h$

- quindi (aggiungendo m su entrambi i lati e dividendo per 2), otteniamo:

$$\frac{2m}{2} \geq \frac{(m+h)}{2} = m \geq \frac{(m+h)}{2} = \frac{|E|}{2}$$

□

TODO: esempio esecuzione algoritmo di ricerca locale su grafo

conclusioni sulla tecnica della ricerca locale

- come gli algoritmi greedy, gli algoritmi di ricerca locale hanno buone performance nella pratica e portano alla determinazione di buone euristiche (algoritmi che eseguono bene nella pratica ma che di solito non hanno prestazioni garantite in termini di tempo o approssimazione)

algorithmic techniques: linear programming (rounding)

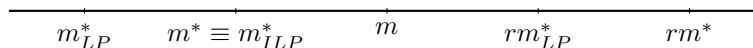
caratteristiche

- il problema é formulato come un programma lineare intero (ILP: integer linear program)
- programma lineare intero: programmi lineare + vincoli di interezza
- esiste un algoritmo con complessità temporale polinomale (algoritmo ellissoide) per risolvere problemi lineari, ma...
- risolvere un programma lineare intero é un problema NP-HARD
- la formulazione come ILP consente di utilizzare potenti mezzi generali che, in base alle proprietà dell'ILP, sono in grado di fornire algoritmi con buona approssimazione:
 - rounding (arrotondamento)
 - primal-dual (primale-duale)

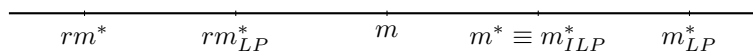
rounding: caratteristiche

- il problema é formulato come un programma lineare
- il rilassamento lineare (LP) viene ottenuto dall'ILP rilassando i vincoli d'interezza, ovvero sostituendoli con adeguati vincoli lineari (sugli interi)
- la soluzione ottenuta (ottima per LP) é arrotondata ad una vicina soluzione intera ammissibile per ILP
- la misura m della soluzione ottenuta é in seguito confrontata con quella della soluzione ottima LP, ovvero m_{LP}^* , cioè un limite inferiore (min) o superiore (max) per m^*

min problems



max problems



problema: min weighted vertex cover

- INPUT:
 - un grafo $G = (V, E)$
 - un costo intero c_j associato ad ogni $v_j \in V$
- SOLUZIONE:
$$U \subseteq V \mid v_j \in U \vee v_k \in U, \forall \{v_j, v_k\} \in E$$
- MISURA: costo totale di U, ovvero

$$\sum_{v_j \in U} c_j$$

ILP: min weighted vertex cover

- funzione obiettivo: $\min \sum_{j=1}^n c_j x_j$
- vincoli: $x_j + x_k \geq 1, \forall \{v_j, v_k\} \in E$
- vincoli interi: $x_j \in \{0,1\}, \forall v_j \in V, \forall j \text{ con } 1 \leq j \leq n$

LP: min weighted vertex cover (rilassamento lineare)

- $\min \sum_{j=1}^n c_j x_j$
- $x_j + x_k \geq 1, \forall \{v_j, v_k\} \in E$
- ~~$x_j \leq 1, \forall v_j \in V$~~ (superfluo)
- $x_j \geq 0, \forall v_j \in V$

algoritmo: Round-Vertex-Cover

Algorithm 6 Round-Vertex-Cover

determina l'ILP associato all'istanza in input

risolvi il rilassamento lineare LP dell'ILP

sia $\langle x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^* \rangle$ la risultante soluzione ottima dell'LP

$\forall v_j$ sia $x_j = 1$ se $x_j^* \geq \frac{1}{2}$ e $x_j = 0$ se $x_j^* < \frac{1}{2}$

return il cover U associato a $\langle x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^* \rangle$, ovvero tale che $U = \{v_j \in V \mid x_j = 1\}$

teorema: l'algoritmo Round-Vertex-Cover é 2-approssimante

l'algoritmo Round-Vertex-Cover é 2-approssimante

dimostrazione:

- é sufficiente mostrare che:
 1. x_1, x_2, \dots, x_n é ammissibile per l'ILP (esso soddisfa tutti i vincoli), ovvero U é un cover
 2. $\frac{m}{m_{LP}^*} \leq 2$ e quindi anche $\frac{m}{m^*} \leq \frac{m}{m_{LP}^*} \leq 2$
- DIMOSTRIAMO 1.
 - dall'ammissibilit  di $\langle x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^* \rangle$ per LP, per ogni arco $\{v_j, v_k\} \in E$ vale $x_j^* + x_k^* \geq 1$
 - ovvero $x_j^* \geq 0.5$ o $x_k^* \geq 0.5$, cos  che $x_j = 1$ o $x_k = 1$, e quindi $x_j + x_k \geq 1$ é soddisfatto in ILP
- DIMOSTRIAMO 2.

$$m = \sum_{j=1}^n c_j x_j \dots$$

- (dall'arrotondamento: $x_j \leq 2x_j^*$)

$$m = \sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{j=1}^n c_j 2x_j^* = 2 \sum_{j=1}^n c_j x_j^* \dots$$

$$- (\sum_{j=1}^n c_j x_j^* = m_{LP}^*)$$

$$m = \sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{j=1}^n c_j 2x_j^* = 2 \sum_{j=1}^n c_j x_j^* = 2m_{LP}^*$$

- ovvero:

$$\frac{m}{m^*} \leq \frac{m}{m_{LP}^*} \leq 2$$

■

□

problema: min weighted set cover

• INPUT:

- un universo $U = \{o_1, o_2, \dots, o_n\}$ di n oggetti
- una famiglia $\hat{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_h\}$ di h sottoinsiemi di U
- un costo intero c_j associato ad ogni $S_j \in \hat{S}$

• SOLUZIONE: un cover di U , ovvero una sottofamiglia $\hat{C} \subseteq \hat{S}$ tale che:

$$\cup_{S_j \in \hat{C}} S_j = U$$

• MISURA: costo totale del cover, ovvero

$$\sum_{S_j \in \hat{C}} c_j$$

- f = frequenza massima di un oggetto nel sottoinsieme \hat{S} , ovvero ciascun oggetto occorre in al massimo f sottoinsiemi
- dato un insieme di n elementi $\{1, 2, \dots, n\}$ (chiamato universo) e una collezione S di m insiemi, la cui unione eguaglia l'universo, il problema del set cover consiste nell'identificare il più piccolo sottoinsieme di S la cui unione eguaglia l'universo

ILP: min weighted set cover

- funzione obiettivo: $\min \sum_{j=1}^h c_j x_j$
- vincoli: $\sum_{S_j | o_i \in S_j} x_j \geq 1, \forall o_i \in U$
- vincoli interi: $x_j \in \{0, 1\}, \forall S_j \in \hat{S}$

LP: min weighted set cover (rilassamento lineare)

- $\min \sum_{j=1}^h c_j x_j$
- $\sum_{S_j | o_i \in S_j} x_j \geq 1, \forall o_i \in U$
- $x_j \leq 1, \forall S_j \in \hat{S}$ (superfluo)
- $x_j \geq 0, \forall S_j \in \hat{S}$

algoritmo: Round-Set-Cover

Algorithm 7 Round-Set-Cover

determina l'ILP associato all'istanza in input
risolvi il rilassamento lineare LP dell'ILP
sia $\langle x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^* \rangle$ la risultante soluzione ottima dell'LP
 $\forall S_j$ sia $x_j = 1$ se $x_j^* \geq \frac{1}{f}$ e $x_j = 0$ se $x_j^* < \frac{1}{f}$
return il cover risultante, ovvero $\hat{C} = \{S_j \in \hat{S} \mid x_j = 1\}$

teorema: l'algoritmo Round-Set-Cover é f -approssimante ($f \geq 1$)

l'algoritmo Round-Set-Cover é f -approssimante ($f \geq 1$)

dimostrazione:

• é sufficiente mostrare che:

1. x_1, x_2, \dots, x_n é ammissibile per l'ILP
2. $\frac{m}{m_{LP}^*} \leq f$ e quindi anche $\frac{m}{m^*} \leq \frac{m}{m_{LP}^*} \leq f$

• DIMOSTRIAMO 1.

- dall'ammissibilità di $\langle x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^* \rangle$ per LP, $\forall o_i \in U$

$$\sum_{S_j | o_i \in S_j} x_j^* \geq 1$$

- e poiché la somma ha al massimo (\leq) f termini, deve esistere S_j contenente o_i tale che $x_j^* \geq \frac{1}{f}$, ovvero tale che $x_j = 1$, e quindi:

$$\sum_{S_j | o_i \in S_j} x_j \geq 1$$

■

• DIMOSTRIAMO 2.

$$m = \sum_{j=1}^h c_j x_j \dots$$

- (dall'arrotondamento: $x_j \leq f x_j^*$)

$$m = \sum_{j=1}^h c_j x_j \leq \sum_{j=1}^h c_j f x_j^* = f \sum_{j=1}^h c_j x_j^* \dots$$

- ($\sum_{j=1}^h c_j x_j^* = m_{LP}^*$)

$$m = \sum_{j=1}^h c_j x_j \leq \sum_{j=1}^h c_j f x_j^* = f \sum_{j=1}^h c_j x_j^* = f m_{LP}^*$$

- ovvero:

$$\frac{m}{m^*} \leq \frac{m}{m_{LP}^*} \leq f$$

■

□

algorithmic techniques: dynamic programming (part 1)

caratteristiche

- come nel paradigma divide-and-conquer, suddividi il problema in sottoproblemi piú piccoli, risolvi ricorsivamente ciasun sottoproblema e combina le soluzioni dei sottoproblemi per formare la soluzione al problema originale
- ricorrenza facile da calcolare che consente di determinare la soluzione ad un sottoproblema dalla soluzione di sottoproblemi piú piccoli
- differentemente da divide-and-conquer, i sottoproblemi non sono indipendenti, ma si sovrappongono, ovvero durante le decomposizioni occorrono frequentemente gli stessi sottoproblemi
- idea: ciascun sottoproblema viene risolto solo una volta, ciò riduce la complessitá temporale
- differentemente da divide-and-conquer, di solito é con approccio bottom-up invece che top-down, ovvero partendo da sottoproblemi piú piccoli e risolvendo progressivamente quelli piú grandi, fino al problema iniziale

uno sguardo piú ravvicinato...

- il paradigma divide-and-conquer é basato sulla decomposizione dei problemi in sottoproblemi piú piccoli:
 - risolvi ricorsivamente i sottoproblemi
 - combina le soluzioni dei sottoproblemi per determinare la soluzione del problema iniziale
- se un problema di taglia n é decomposto in k sottoproblemi di taglie $n_1, n_2, \dots, n_k < n$, rispettivamente, allora la complessitá temporale può essere espressa dall ricorrenza

$$T(n) = T(n_1) + T(n_2) + \dots + T(n_k) + C(n)$$

con $C(n)$ = tempo per combinare le k sottosoluzioni

- la ricorrenza può essere risolta con metodi differenti, come ad esempio il ricorso al celebre Master Theorem
- un classico esempio di applicazione di divide-and-conquer é il calcolo dei numeri di Fibonacci
- l'algoritmo deriva direttamente dalla definizione ricorsiva di tali numeri

algoritmo: Fibonacci

- caso base: $(n \leq 2) \ F(1) = F(2) = 1$
- caso induttivo: $(n > 2) \ F(n) = F(n-1) + F(n-2), n$

Algorithm 8 Fibonacci

```
if  $n = 1$  or  $n = 2$  then
    return 1
else
    return Fibonacci( $n-1$ )+Fibonacci( $n-2$ )
end if
```

- complessità temporale:

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + \Theta(1)$$

- che restituisce:

$$T(n) = O(2^n)$$

- albero delle chiamate ricorsive:

- nota:

- * inefficiente: gli stessi sottoproblemi vengono risolti ripetutamente per molte volte

algoritmo: Fibonacci 2

- programmazione dinamica:

- memorizza la soluzione di ciascun sottoproblema in una tabella o in un array, così da evitare di risolverli ripetutamente
- nell'algoritmo risultante, F é un array esterno globale visibile a tutte le chiamate ricorsive

- nuovo albero delle chiamate ricorsive

Algorithm 9 Fibonacci 2

```

if  $n = 1$  or  $n = 2$  then
     $F[n] = 1$ 
    return  $F[n]$ 
else
    if  $F[n]$  é stato già assegnato then
        return  $F[n]$ 
    else
         $F[n] = \text{Fibonacci}(n-1) + \text{Fibonacci}(n-2)$ 
        return  $F[n]$ 
    end if
end if

```

algoritmo: Fibonacci 3

Algorithm 10 Fibonacci 3

```

 $F[1] = 1$ 
 $F[2] = 1$ 
for  $i = 3$  to  $n$  do
     $F[i] = F[i-1] + F[i-2]$ 
end for
return  $F[n]$ 

```

riassumendo

- in programmazione dinamica:

- il problema iniziale può essere ricorsivamente decomposto in sottoproblemi
- gli stessi sottoproblemi occorrono molte volte e sono risolti una volta soltanto

- la soluzione di un sottoproblema può essere ottenuta combinando quelle dei sottoproblemi più piccoli
- 2 possibili implementazioni:
 - top-down (con annotazione in tabella)
 - bottom-up

top-down vs. bottom-up

- top-down
 - sfrutta l'annotazione in tabella
 - PRO: risolve solo i sottoproblemi strettamente necessari
 - CON: overhead derivante dalla catena di chiamate ricorsive
- bottom-up
 - é la scelta tipica nella programmazione dinamica
 - PRO: é in ogni caso generalmente più efficiente perché elimina il peso della ricorsione, il quale incide maggiormente sulle prestazioni
 - CON: risolve anche i problemi non necessari

divide-and-conquer vs. dynamic programming

- divide-and-conquer
 - tecnica ricorsiva
 - approccio top-down (problemi divisi in sottoproblemi)
 - utile quando i sottoproblemi sono indipendenti (ovvero differenti)
 - altrimenti, gli stessi sottoproblemi vengono risolti più volte
- dynamic programming
 - tecnica iterativa
 - tipicamente approccio bottom-up
 - utile quando i sottoproblemi si sovrappongono (ovvero coincidono)
 - ciascun sottoproblema viene risolto una volta soltanto

algorithmic techniques: dynamic programming (part 2)

progettazione di algoritmi di programmazione dinamica

- fornire una decomposizione ricorsiva dei sottoproblemi
- calcolare le sottosoluzioni in maniera bottom-up, ovvero partendo dai sottoproblemi di taglia più piccola
 - utilizzare una tabella per memorizzare i risultati dei sottoproblemi
 - evitare il calcolo delle stesse soluzioni sfruttando la tabella
- combinare le soluzioni dei sottoproblemi già risolti per costruire quelle dei sottoproblemi di taglia maggiore, fino alla risoluzione del problema originale

complessità degli algoritmi di programmazione dinamica

- consideriamo la seguente tabella:
 - n = taglia dei sottoproblemi $(1, 2, \dots, n)$
 - k = parametri dei sottoproblemi (p_1, p_2, \dots, p_k)
- taglia della tabella = numero di sottoproblemi = nk
- complessità:
 - [taglia della tabella] \times [tempo per combinare le soluzioni]
 - il tempo per combinare le soluzioni é sempre banalmente polinomiale
 - la complessità é polinomiale se la tabella ha taglia polinomiale, ovvero se é presente un numero polinomiale di differenti sottoproblemi

problema: max 0-1 knapsack (giá definito precedentemente)

- INPUT:
 - un insieme finito di oggetti O
 - un profitto intero $p_i, \forall o_i \in O$
 - un peso intero $w_i, \forall o_i \in O$
 - un intero positivo b ($b > 0$)
- SOLUZIONE:
 - un sottoinsieme di oggetti $Q \subseteq O$ tale che $\sum_{o_i \in Q} w_i \leq b$
- MISURA:
 - profitto totale degli oggetti scelti, ovvero $\sum_{o_i \in Q} p_i$
- senza perdere di generalità, in seguito, assumeremo sempre che:
 - $w_i \leq b, \forall o_i \in O$
 - $p_i > 0, \forall o_i \in O$

algoritmo brute force

- semplice algoritmo che enumera tutti i possibili 2^n sottoinsiemi degli n elementi
- sceglie la migliore combinazione (miglior profitto)
- l'algoritmo di programmazione solitamente ha performance migliori

progettazione dell'algoritmo di programmazione dinamica

- definizione:
 - $OPT(i, w)$ = sottoinsieme con profitto massimo di oggetti $1, 2, \dots, i$ con limite di peso w
- fatto:
 - $OPT(n, b)$ = soluzione ottima del problema iniziale
- le seguenti alternative possono occorrere per $OPT(i, w)$:
 1. OPT non seleziona l'oggetto i

- OPT seleziona il migliore tra $\{1, 2, \dots, i-1\}$ utilizzando il limite di peso w
- 2. OPT seleziona l'oggetto i
 - OPT seleziona il migliore tra $\{1, 2, \dots, i-1\}$ utilizzando il limite di peso $w - w_i$
- assumiamo che $OPT(k, w)$ sia la soluzione ottima per gli elementi $\{o_1, o_2, \dots, o_k\}$
- nota: la soluzione ottima $OPT(k+1, w)$ potrebbe non corrispondere a $OPT(k, w)$
- anche perché $OPT(k+1, w)$ potrebbe non essere un superset di $OPT(k, w)$

definizione ricorsiva per OPT

- possiamo dunque fornire la seguente definizione ricorsiva per OPT :
 - $OPT(i, w) = \emptyset$ se $i = 0$
 - $OPT(i, w) = OPT(i-1, w)$ se $w_i > w$
 - $OPT(i, w) =$ scelta migliore tra $OPT(i-1, w)$ e $OPT(i-1, w - w_i) \cup \{o_i\}$ (altrimenti)

definizione ricorsiva per la misura m della soluzione ottima $OPT(i, w)$

- in termini di misura $m(i, w)$ della soluzione ottima $OPT(i, w)$
 - $m(i, w) = 0$ se $i = 0$
 - $m(i, w) = m(i-1, w)$ se $w_i > w$
 - $m(i, w) = \max\{m(i-1, w), m(i-1, w - w_i) + p_i\}$ (altrimenti)
- chiaramente, $m^* = m(n, b)$

riepilogo definizioni ricorsive per m e OPT

- come risultato, questo significa che il miglior sottoinsieme di k oggetti con vincolo di peso w è (mutua esclusione):
 - il miglior sottoinsieme di $(k-1)$ oggetti con peso totale w
 - il miglior sottoinsieme di $(k-1)$ oggetti con peso totale $w - w_k$, più il contributo (il suo profitto) del k -esimo oggetto
 - quindi per quando riguarda la seguente formula ricorsiva:
 - * $OPT(i, w) = \emptyset$ se $i = 0$
 - * $OPT(i, w) = OPT(i-1, w)$ se $w_i > w$
 - * $OPT(i, w) =$ scelta migliore tra $OPT(i-1, w)$ e $OPT(i-1, w - w_i) \cup \{o_i\}$ (altrimenti)
 - o il k -esimo oggetto non può essere parte della soluzione (poiché il suo solo peso è così grande che l'oggetto stesso non entra nel knapsack)
 - altrimenti, scegliamo la soluzione migliore tra:
 - * la soluzione che include il nuovo oggetto
 - * la soluzione migliore che non include il nuovo oggetto

Algorithm 11 Progr-Dyn-Knapsack

```
// inizializzazione a 0 della prima riga dell'array bidimensionale  $M$  (da 1 a  $b$ )
for  $w = 1$  to  $b$  do
     $M[0, w] = 0$ 
end for
// inizializzazione a 0 della prima colonna dell'array bidimensionale  $M$  (da 0 a  $n$ )
for  $i = 0$  to  $n$  do
     $M[i, 0] = 0$ 
end for
for  $i = 1$  to  $n$  do
    for  $w = 1$  to  $b$  do
        if  $w_i > w$  then
             $M[i, w] = M[i - 1, w]$ 
        else
             $M[i, w] = \max\{M[i - 1, w], M[i - 1, w - w_i] + p_i\}$ 
        end if
    end for
end for
return  $M[n, b]$ 
```

algoritmo: Progr-Dyn-Knapsack

- l'algoritmo Progr-Dyn-Knapsack per il problema max 0-1 knapsack, trova il massimo valore che può essere inserito dentro il knapsack
- il valore viene memorizzato in $M[n, b]$ al termine della procedura
- per scoprire quali sono gli oggetti che sono stati inseriti nella soluzione ottima, bisogna tornare indietro nella tabella:
 - dobbiamo memorizzare in qualche modo ciascun oggetto aggiunto

algoritmo: Progr-Dyn-Knapsack (trovare gli oggetti inseriti)

Algorithm 12 Progr-Dyn-Knapsack (trovare gli oggetti inseriti)

```
 $i = n$ 
 $k = w$ 
if  $M[i, k] \neq M[i - 1, k]$  then
    marca l'oggetto  $i$  come 'inserito nel knapsack'
     $i = i - 1$ 
     $k = k - w_i$ 
else
    // assumi che l'oggetto  $i$ -esimo non sia stato inserito nel knapsack
     $i = i - 1$ 
end if
```

teorema: l'algoritmo Progr-Dyn-Knapsack ha complessità temporale $O(nb)$

la complessità temporale dell'algoritmo Progr-Dyn-Knapsack é $O(nb)$

dimostrazione:

- l'algoritmo impiega $O(1)$ per ciascuna entry della tabella
- vi sono $O(nb)$ entry nella tabella

- dopo aver calcolato i valori possiamo risalire per trovare la soluzione ottima:
 - prendi l'elemento o_i in $OPT(i, w) \iff M[i-1, w] < M[i, w]$

□

domanda: l'algoritmo Progr-Dyn-Knapsack é polinomiale?

l'algoritmo Progr-Dyn-Knapsack é polinomiale?
(suggerimento: considera il caso in cui $b = 2^n$)

risposta:

- per essere polinomiale, la complessità dovrebbe essere polinomiale nel logaritmo dei valori codificati nell'istanza in input, ovvero rispetto a $\log b$
- questa complessità é chiamata **pseudo-polinomiale**, ovvero polinomiale nella dimensione e nei valori in input, non solo nella dimensione dell'input

algoritmo Progr-Dyn-Knapsack-Dual: approccio duale

- definizione:
 - $OPT(i, p)$ = sottoinsieme di peso minimo di oggetti $1, 2, \dots, i$ con profitto almeno pari a p (\geq)
- domanda: quale sottoproblema corrisponde alla soluzione ottima?
- le seguenti alternative possono occorrere per $OPT(i, p)$:
 1. OPT non seleziona l'oggetto i
 - OPT seleziona il migliore tra $\{1, 2, \dots, i-1\}$ utilizzando il limite di profitto p
 2. OPT seleziona l'oggetto i
 - OPT seleziona il migliore tra $\{1, 2, \dots, i-1\}$ utilizzando il limite di profitto $p - p_i$

definizione ricorsiva per OPT (duale)

- possiamo dunque fornire la seguente definizione ricorsiva per OPT :
 - $OPT(i, p)$ = non definito se $i = 0$
 - $OPT(i, p)$ = scelta migliore tra $OPT(i-1, p)$ e $\{o_i\}$ se $p_i \geq p$
 - $OPT(i, p)$ = scelta migliore tra $OPT(i-1, p)$ e $OPT(i-1, p - p_i) \cup \{o_i\}$ (altrimenti, non definito se entrambi non sono definiti)

definizione ricorsiva per la misura v della soluzione ottima $OPT(i, p)$

- in termini di peso $v(i, p)$ della soluzione ottima $OPT(i, p)$
 - $v(i, p) = \infty$ se $i = 0$
 - $v(i, p) = \min\{v(i-1, p), w_i\}$ se $p_i \geq p$
 - $v(i, p) = \min\{v(i-1, p), v(i-1, p - p_i) + w_i\}$ (altrimenti)

algoritmo: Progr-Dyn-Knapsack-Dual

Algorithm 13 Progr-Dyn-Knapsack-Dual

```
// inizializzazione a  $\infty$  della prima riga dell'array bidimensionale  $V$  (da 1 a  $P$ )
for  $p = 1$  to  $P$  do
     $V[0, p] = \infty$ 
end for
// inizializzazione a  $\infty$  della prima colonna dell'array bidimensionale  $V$  (da 0 a  $n$ )
for  $i = 0$  to  $n$  do
     $V[i, 0] = \infty$ 
end for
for  $i = 1$  to  $n$  do
    for  $p = 1$  to  $P$  do
        if  $p_i \geq p$  then
             $V[i, p] = \min\{V[i-1, p], w_i\}$ 
        else
             $V[i, p] = \min\{V[i-1, p], V[i-1, p-p_i] + w_i\}$ 
        end if
    end for
end for
return  $\max p \mid V[n, p] \leq b$ 
```

- problema: come dovremmo scegliere P ?
- risposta: grande abbastanza da includere l'ottimo, ovvero qualunque *upper bound* di m^* , cioè $P \geq m^*$
- scelta:

$$P = np_{\max} \geq \sum_{i=1}^n p_i \geq m^*, \quad (p_{\max} = \max p_j)$$

teorema: l'algoritmo Progr-Dyn-Knapsack-Dual ha complessità temporale

$O(n^2 p_{\max})$

l'algoritmo Progr-Dyn-Knapsack-Dual ha complessità temporale $O(n^2 p_{\max})$

dimostrazione:

- l'algoritmo impiega $O(1)$ per ogni entry della tabella
- vi sono $O(nP) = O(n^2 p_{\max})$ entry nella tabella
- dopo il calcolo dei valori, possiamo risalire per trovare la soluzione ottima:
 - prendi l'elemento o_i in $OPT(i, p) \iff V[i-1, p] > V[i, p]$

□

approximation schemes: polynomial time approximation scheme (PTAS)

definizione: PTAS

- un algoritmo A per un problema di ottimizzazione $\pi \in NPO$, è un polynomial time approximation scheme per π se, data un'istanza in input $x \in I_\pi$ e un numero razionale $\epsilon > 0$, esso ritorna una soluzione $(1 + \epsilon)$ -approssimata (per min) o $(1 - \epsilon)$ -approssimata (per max) in tempo polinomiale rispetto alla dimensione dell'istanza x
- **nota:** la complessità temporale può essere esponenziale in $\frac{1}{\epsilon}$ (esempio $O(n^{\frac{1}{\epsilon}})$)
- la complessità di un PTAS può crescere 'drammaticamente' quando ϵ decresce
- **nota:** per ogni valore fisso di ϵ , un PTAS corrisponde ad un algoritmo di $(1 + \epsilon)$ -approssimazione di tempo polinomiale (o $(1 - \epsilon)$)

problema: min multiprocessor scheduling (già definito precedentemente)

- INPUT:
 - insieme di n jobs P
 - numero di processori h
 - tempo di esecuzione t_j , $\forall p_j \in P$
- SOLUZIONE:
 - una schedule per P , ovvero una funzione
- MISURA:
 - *makespan* o tempo di completamento di f , ovvero

$$f : P \rightarrow \{1, \dots, h\}$$

$$\max_{i \in [1, \dots, h]} \sum_{p_j \in P \mid f(p_j) = i} t_j$$

richiamiamo l'algoritmo Greedy-Graham

- scelta greedy:
 - ad ogni step assegna un job ad uno dei processori correntemente meno carichi
- richiamiamo rapidamente gli step base della dimostrazione del rapporto di approssimazione di Greedy-Graham
 - $T_i(j)$ = tempo di completamento del processore i alla fine del tempo j (h = numero di processori)
- abbiamo utilizzato i seguenti *lower bounds* per m^* :
 - $m^* \geq \frac{T}{h}$, in qualsiasi soluzione almeno 1 processore deve avere tempo di completamento $\frac{T}{h}$ (richiamiamo che $T = \sum_j t_j$)
 - $m^* \geq t_j$, per ogni job p_j , in qualsiasi soluzione uno dei processori deve eseguire p_j
- abbiamo utilizzato il seguente *upper bound* per il valore della soluzione restituita:

- per limitare superiormente il valore della soluzione restituita, se k é uno dei processori piú carichi e p_l é l'ultimo job assegnato a k , per la scelta greedy:

$$T_k(l-1) \leq \frac{\sum_{j < l} t_j}{h} \leq \frac{T - t_l}{h}$$

- quindi possiamo derivare la seguente disuguaglianza:

$$\begin{aligned} m = T_k(n) &= T_k(l-1) + t_l \leq \frac{T - t_l}{h} + t_l = \\ &= \frac{T - t_l + ht_l}{h} = \frac{T}{h} - \frac{1+h}{h}t_l = \frac{T}{h} + \frac{h-1}{h}t_l \leq \dots \end{aligned}$$

- poiché $\frac{T}{h} \leq m^*$ e $t_l \leq m^*$

$$\begin{aligned} \dots &\leq m^* + \frac{h-1}{h}m^* = \frac{hm^* + (h-1)m^*}{h} = \frac{hm^* + hm^* - m^*}{h} = \\ &= \frac{2hm^* - m^*}{h} = \frac{2h-1}{h}m^* = (2 - \frac{1}{h})m^* \end{aligned}$$

- idea per il miglioramento: decrementa t_l il piú possibile e trova un rapporto di approssimazione migliore sfruttando le disuguaglianze

$$m \leq \frac{T}{h} + \frac{h-1}{h}t_l \leq m^* + \frac{h-1}{h}t_l$$

- modificando l'algoritmo e/o migliorando l'analisi vedremo come limitare superiormente t_l progressivamente con:
 - $\frac{m^*}{2}$ ($\frac{3}{2}$ -approssimante),
 - $\frac{m^*}{3}$ ($\frac{4}{3}$ -approssimante),
 - e arbitrariamente piccolo, ovvero ϵm^* ($(1+\epsilon)$ -approssimante), cioè un PTAS
- mostriamo ora come far diventare t_l arbitrariamente piccolo, cioè ϵm^* , ottenendo una $(1+\epsilon)$ -approssimazione, ovvero un PTAS

ottenere un PTAS...

- proviamo a far diventare t_l piú piccolo possibile
- possiamo sfruttare il seguente lemma:

lemma: $t_i \leq \frac{T}{i}$

se t_1, t_2, \dots, t_n sono ordinati in maniera decrescente e $t_1 + t_2 + \dots + t_n = T$, allora:

$$\forall i, 1 \leq i \leq n \quad t_i \leq \frac{T}{i}$$

dimostrazione:

- assumiamo per contraddizione che $t_i > \frac{T}{i}$, allora:

$$t_1 + t_2 + \dots + t_n \geq i \cdot t_i > i \cdot \frac{T}{i} = T$$

- contraddizione, poiché $T = \sum_{i=1}^n t_i$

□

PTAS: idea sottostante

- calcola la soluzione ottima per i primi q jobs
- completa assegnando in maniera greedy i restanti jobs
- se otteniamo $t_l \leq \epsilon \cdot m^*$, allora:

$$m \leq \frac{T}{h} + \left(\frac{h-1}{h}\right) \cdot t_l < \frac{T}{h} + t_l \leq m^* + \epsilon \cdot m^* = (1 + \epsilon)m^*$$

- partendo dal lemma precedente, é sufficiente assegnare q in modo tale che, poiché $l > q$
- questo vale per

$$q = \left\lceil \frac{h}{\epsilon} \right\rceil$$

- anzi, le disuguaglianze

$$t_l \leq \frac{T}{l} \leq \frac{T}{q+1} \leq \epsilon \cdot \frac{T}{h} \leq \epsilon \cdot m^*$$

sono vere se consideriamo

$$q \geq \frac{h}{\epsilon} - 1$$

algoritmo: PTAS-Scheduling

Algorithm 14 PTAS-Scheduling

```
ordina i jobs in modo decrescente rispetto ai tempi di esecuzione  $t_i$ 
sia  $p_1, p_2, \dots, p_n$  la risultante sequenza ordinata con  $t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n$ 
calcola lo schedule ottimo  $f$  per i primi  $q = \lceil \frac{h}{\epsilon} \rceil$  jobs
for  $j = q+1$  to  $n$  do
  assegna  $p_j$  al processore  $i$  con minimo  $T_i(j-1)$  // ovvero  $f(p_j) = i$ 
end for
return schedule  $f$ 
```

teorema: l'algoritmo PTAS-Scheduling ritorna sempre una soluzione $(1 + \epsilon)$ -approssimata

l'algoritmo PTAS-Scheduling ritorna sempre una soluzione $(1 + \epsilon)$ -approssimata

dimostrazione:

- sia $t \leq m^*$ il tempo di completamento della soluzione ottima per i primi q jobs
 - se $m \leq t$, ovvero la fase greedy non ha incrementato il tempo di completamento, allora l'algoritmo ritorna la soluzione ottima
 - se $m > t$, allora nuovamente, denotando con k il processore più carico al termine dell'algoritmo e con p_l l'ultimo job assegnato a k nella fase greedy:

$$m = T_k(n) = T_k(l-1) + t_l \leq \frac{T-t_l}{h} + t_l = \frac{T}{h} + \frac{h-1}{h} t_l < \frac{T}{h} + t_l \leq m^* + \epsilon \cdot m^* = (1 + \epsilon)m^*$$

- ovvero

$$\frac{m}{m^*} \leq 1 + \epsilon$$

□

- quindi l'algoritmo soddisfa il requisito di approssimazione per PTAS, ma è un PTAS?
- complessità:
 - l'ordinamento iniziale richiede $O(n \cdot \log n)$ step temporali
 - la ricerca esaustiva di una soluzione ottima per i primi q jobs richiede al massimo $O(h^{\frac{1}{\epsilon}})$, poiché vi sono al massimo $h^q \approx h^{\frac{1}{\epsilon}}$ possibili soluzioni (h possibili scelte per ciascuno dei q jobs)
 - l'ultimo *for* esegue al massimo n iterazioni, ciascuna delle quali richiede $O(h)$
 - quindi, la complessità temporale generale è:

$$O(n \cdot \log n + h^{\frac{1}{\epsilon}} + n \cdot h)$$

- tale complessità è esponenziale in h , e dunque può essere esponenziale nella dimensione dell'input (per esempio se $h = n$)
- quindi **non abbiamo un PTAS**, a meno che non fissiamo h in modo tale che sia un valore costante dato (ad esempio: $h = 2, h = 3, \dots, h = 100, \dots$)
- fissare h costante è equivalente a dire che h non dipende dall'istanza di input, o analogamente che non è parte dell'input
- in altre parole esso corrisponde a considerare il seguente problema:

problema: min h -processor scheduling

- INPUT:
 - insieme di n jobs P
 - tempo di esecuzione t_j , $\forall p_j \in P$
- SOLUZIONE:
 - uno schedule per P , ovvero una funzione
- MISURA:
 - *makespan* o tempo di completamento di f , ovvero

$$\max_{i \in [1, \dots, h]} \sum_{p_j \in P \mid f(p_j) = i} t_j$$

teorema: l'algoritmo PTAS-Scheduling è un PTAS per il problema min h -processor scheduling

l'algoritmo PTAS-Scheduling è un PTAS per il problema min h -processor scheduling

dimostrazione:

- come già visto, la complessità temporale di PTAS-Scheduling è:

$$O(n \cdot \log n + h^{\frac{1}{\epsilon}} + n \cdot h)$$

- che è polinomiale nella dimensione dell'input (ma esponenziale in $\frac{1}{\epsilon}$)
- approssimazione: $1 + \epsilon$

□

- **nota:** min h -processor scheduling con $h = 2$ coincide con il famoso min partition problem, che a sua volta ammette un PTAS

problema: min partition

- INPUT:

- insieme di oggetti X
- peso intero positivo a_i , $\forall o_i \in X$

- SOLUZIONE:

- una partizione di X in 2 sottoinsiemi X_1 e X_2 , tale che

$$X_1 \cap X_2 = \emptyset \text{ e } X_1 \cup X_2 = X$$

- MISURA:

$$\max\left\{\sum_{o_i \in X_1} a_i, \sum_{o_i \in X_2} a_i\right\}$$

ottenere un PTAS per il problema min partition

- chiaramente, gli oggetti corrispondono ai jobs, i pesi ai tempi di esecuzione e i 2 sottoinsiemi ai 2 processori
- é possibile estendere il precedente risultato per ottenere un PTAS per il problema min multiprocessor scheduling, ovvero per ogni (non costante) numero h di processori
- richiamiamo che nella precedente dimostrazione di approssimazione di PTAS, denotando con t il tempo di completamento dello schedule ottimo ottenuto per i primi q jobs, abbiamo 2 casi:
 1. $m \leq t$, ovvero la fase greedy non accresce il tempo di completamento, allora l'algoritmo restituisce la soluzione ottima poiché $t \leq m^*$
 2. $m > t$, in tal caso vengono applicati gli step abituali per la parte greedy
- idea: la dimostrazione dell'approssimazione continua ad essere valida se, invece di determinare l'ottimo per i primi q jobs, determiniamo una soluzione approssimata per questi ultimi, ovvero tale che $t \leq (1 + \epsilon)m^*$

lemma: algoritmo di programmazione dinamica polinomiale (schedule approssimato per i primi q jobs)

esiste un algoritmo di programmazione dinamica che determina in tempo polinomiale uno scheduling per i primi q jobs avente tempo di completamento $t \leq (1 + \epsilon)m^*$

teorema: esiste un PTAS per il problema min multiprocessor scheduling

esiste un PTAS per il problema min multiprocessor scheduling

approximation schemes: fully polynomial time approximation scheme (FPTAS)

definizione: FPTAS

- un algoritmo A per un problema di ottimizzazione $\pi \in NPO$, è un fully polynomial time approximation scheme per π se, data un'istanza in input $x \in I_\pi$ e un numero razionale $\epsilon > 0$, esso ritorna una soluzione $(1+\epsilon)$ -approssimata (per min) o $(1-\epsilon)$ -approssimata (per max) in tempo polinomiale, entrambe rispetto alla dimensione dell'istanza x e in $\frac{1}{\epsilon}$
- **nota:** FPTAS mantiene una buona complessità temporale quando ϵ decresce
- esempio:
 - $O(n \cdot \log n + 2^{\frac{1}{\epsilon}}) \rightarrow$ non è un FPTAS
 - $O(\frac{n \cdot \log n}{\epsilon^2}) \rightarrow$ è un FPTAS
- nella pratica dobbiamo stare attenti a far sí che $\frac{1}{\epsilon}$ (o una funzione piú logaritmica) non compaia in un esponente

FPTAS-Knapsack

- sappiamo che Progr-Dyn-Knapsack-Dual ha una complessità temporale pseudo-polinomiale $O(n^2 \cdot p_{max})$
- dove $p_{max} = \max p_j$ è il massimo profitto di un oggetto
- se possiamo approssimare i profitti originali con profitti piú piccoli allora la complessità viene ridotta, ottenendo comunque una buona approssimazione
- diamo un'occhiata piú ravvicinata a quest'idea:
- **idea:**
 1. approssimiamo i profitti di multipli di k per un parametro intero adatto $k > 0$
$$p'_i = \lfloor \frac{p_i}{k} \rfloor \cdot k$$
 2. se k è sufficiente piccolo, i nuovi profitti p'_i approssimano sufficientemente i profitti originali p_i , quindi una soluzione ottima per p'_i approssima bene la soluzione ottima per i profitti originali p_i
 3. scalando tutti i profitti p'_i , dividendoli per k , ovvero
$$p'_i = \frac{\lfloor \frac{p_i}{k} \rfloor \cdot k}{k} = \lfloor \frac{p_i}{k} \rfloor$$
otteniamo un'istanza equivalente con profitti piú piccoli
 4. **complessità:** l'algoritmo di programmazione dinamica duale applicato a questa istanza produce quindi una complessità minore

$$O(n^2 \cdot p'_{max}) = O(n^2 \cdot \frac{p_{max}}{k})$$

5. **approssimazione:**
 - errore al massimo k per ogni oggetto scelto, ovvero al massimo $n \cdot k$ in totale
 - dunque, $m \geq m^* - n \cdot k$
6. **idea:** scegli k sufficientemente grande da ottenere una complessità polinomiale e sufficientemente piccolo da fornire una buona approssimazione

$$k = \lfloor \frac{\epsilon \cdot p_{max}}{n} \rfloor$$

algoritmo: FPTAS-Knapsack

Algorithm 15 FPTAS-Knapsack

$k = \lfloor \frac{\epsilon \cdot p_{max}}{n} \rfloor$
trova la soluzione ottima per l'istanza con profitti scalati $p'_i = \lfloor \frac{p_i}{k} \rfloor$ utilizzando l'algoritmo di programmazione dinamica pseudo-polinomiale Progr-Dyn-Knapsack-Dual
sia S l'insieme di oggetti ritornati
return S

- **complessità:**

$$O(n^2 \cdot p'_{max}) = O(n^2 \cdot \frac{p_{max}}{k}) = O(\frac{n^2 \cdot p_{max}}{\frac{\epsilon \cdot p_{max}}{n}}) = O(\frac{n^3}{\epsilon})$$

- **approssimazione o errore:**

$$\frac{m}{m^*} \geq \frac{m^* - n \cdot k}{m^*} = 1 - \frac{n \cdot k}{m^*} \geq 1 - \frac{n \cdot k}{p_{max}} \geq 1 - \frac{\frac{n \cdot \epsilon \cdot p_{max}}{n}}{p_{max}} = 1 - \epsilon$$

dunque:

$$\frac{m}{m^*} \geq 1 - \epsilon$$

- **nota:** non abbiamo scalato i pesi, perché non è garantito che tornando ai pesi originali la soluzione resti ammissibile (potrebbe superare il peso totale b)

lemma: $m \geq m^* - n \cdot k$ (FPTAS-Knapsack)

$$m \geq m^* - n \cdot k$$

dimostrazione:

- sia $S = \{o_{j1}, o_{j2}, \dots, o_{jh}\}$ e sia $S^* = \{o_{i1}, o_{i2}, \dots, o_{il}\}$ la soluzione ottima, allora:

$$m = p_{j1} + p_{j2} + \dots + p_{jh} \text{ e } m^* = p_{i1} + p_{i2} + \dots + p_{il}$$

- assumiamo per contraddizione che $m < m^* - n \cdot k$

$$\begin{aligned} \lfloor \frac{p_{i1}}{k} \rfloor + \dots + \lfloor \frac{p_{il}}{k} \rfloor &\geq (\frac{p_{i1}}{k} - 1) + \dots + (\frac{p_{il}}{k} - 1) = \\ &= \frac{p_{i1} + \dots + p_{il}}{k} - l \geq \frac{p_{i1} + \dots + p_{il}}{k} - n = \frac{m^*}{k} - n > \dots \end{aligned}$$

- (dall'ipotesi $m < m^* - n \cdot k$)

$$\dots > \frac{m + n \cdot k}{k} - n = \frac{m}{k} = \frac{p_{j1} + \dots + p_{jh}}{k} \geq \lfloor \frac{p_{j1}}{k} \rfloor + \dots + \lfloor \frac{p_{jh}}{k} \rfloor$$

- **contraddizione:** poiché S^* sarebbe una soluzione strettamente migliore di S per l'istanza con profitti scalati, quindi contraddicendo l'ottimalità di Progr-Dyn-Knapsack-Dual per l'istanza con profitti scalati

teorema: FPTAS-Knapsack è un FPTAS per il problema max 0-1 knapsack

- **complessità:**

$$O(\frac{n^2 \cdot p_{max}}{k}) = O(\frac{n^2 \cdot p_{max}}{\frac{\epsilon \cdot p_{max}}{n}}) = O(\frac{n^3}{\epsilon})$$

- **approssimazione:** (dal lemma precedente)

$$\frac{m}{m^*} \geq \frac{m^* - n \cdot k}{m^*} = 1 - \frac{n \cdot k}{m^*} \geq 1 - \frac{n \cdot k}{p_{max}} \geq 1 - \frac{n \cdot \frac{\epsilon \cdot p_{max}}{n}}{p_{max}} = 1 - \epsilon$$

□

é possibile ridurre la complessità temporale?

- complessità temporale della programmazione dinamica:

$$O(n \cdot \sum_j p_j) = O(n \cdot n \cdot p_{max}) = O(n^2 \cdot p_{max})$$

- complessità con i profitti scalati:

$$O(n \cdot \sum_j \frac{p_j}{k}) = O(n \cdot \frac{n \cdot p_{max}}{k}) = O(\frac{n^2 \cdot p_{max}}{k})$$

- approssimazione:

$$1 - \frac{n \cdot k}{m^*} \geq 1 - \frac{n \cdot k}{p_{max}}$$

- **nota:** p_{max} e $n \cdot p_{max}$ rispettivamente sono il *lower bound* e l'*upper bound* per m^* , ovvero $p_{max} \leq m^* \leq n \cdot p_{max}$
- **nota:** p_{max} può essere più piccolo di m^* e $n \cdot p_{max}$ può essere più grande
- **domanda:** é possibile fornire dei *bound* migliori per m^* ?
- **osservazioni:**

- utilizzando un *lower bound* migliore per m^* e mantenendo lo stesso k otteniamo una migliore approssimazione e analogamente incrementando k (riducendo la complessità) manteniamo la stessa approssimazione
- utilizzando un *upper bound* migliore per m^* e mantenendo lo stesso k otteniamo una migliore approssimazione e analogamente decrementando k (migliorando l'approssimazione) manteniamo la stessa complessità

come migliorare i bound per m^*

- richiamiamo l'algoritmo Modified-Greedy $\frac{1}{2}$ -approssimante e sia M_{mod} la misura della soluzione da esso ritornata
- per definizione di approssimazione e poiché $M_{mod} \leq m^*$

$$M_{mod} \leq m^* \leq 2 \cdot M_{mod}$$

- quindi, considerando

$$P' = \lceil \frac{2 \cdot M_{mod}}{k} \rceil$$

come massimo profitto in Progr-Dyn-Knapsack-Dual (ovvero P' é il numero di colonne nella tabella di Progr-Dyn-Knapsack-Dual), otteniamo una migliore complessità...

- impostando il parametro

$$k = \lfloor \frac{\epsilon \cdot M_{mod}}{n} \rfloor$$

ed eseguendo Progr-Dyn-Knapsack-Dual Modificato sull'istanza con profitti scalati

$$p'_i = \lfloor \frac{p_i}{k} \rfloor$$

otteniamo la seguente approssimazione e complessità temporale

- **complessità:**

$$O(\frac{n \cdot M_{mod}}{k}) = O(\frac{n \cdot M_{mod}}{\frac{\epsilon \cdot M_{mod}}{n}}) = O(\frac{n^2}{\epsilon})$$

- **approssimazione:**

$$\frac{m}{m^*} \geq 1 - \frac{n \cdot k}{m^*} \geq 1 - \frac{n \cdot k}{M_{mod}} \geq \frac{n \cdot \frac{\epsilon \cdot M_{mod}}{n}}{M_{mod}} = 1 - \epsilon$$

algoritmo: New-FPTAS-Knapsack

Algorithm 16 New-FPTAS-Knapsack

calcola M_{mod} eseguendo l'algoritmo Modified-Greedy e sia $k = \lfloor \frac{\epsilon \cdot M_{mod}}{n} \rfloor$
trova la soluzione ottima per l'istanza con profitti scalati $p'_i = \lfloor \frac{p_i}{k} \rfloor$ utilizzando
l'algoritmo Progr-Dyn-Knapsack-Dual Modificato
sia S l'insieme di oggetti ritornati
return S

domanda: possiamo evitare il calcolo di P' all'interno di
Progr-Dyn-Knapsack-Dual Modificato?

alternative approaches

performance garantite

- finora abbiamo considerato approcci con performance garantite
- pro:
 - approssimazione e tempo di esecuzione garantiti per ogni istanza in input
 - prende in considerazione il caso peggiore
- contro:
 - alcuni problemi non ammettono algoritmi con performance garantite
 - per alcuni problemi non sono noti algoritmi con performance garantite
 - a volte, cattivi comportamenti nella pratica

restrizione dell'insieme delle istanze

- performance garantite nel sottoinsieme delle istanze in input che sono significative o di interesse
- pro:
 - permette di applicare nuovamente l'approccio con performance garantite
- contro:
 - performance garantite solo per il sottoinsieme scelto di istanze o per un caso particolare
- esempio: metric TSP (con disequazioni triangolari)

media o analisi probabilistica

- in generale, assumendo una distribuzione di probabilità dell'istanza, essa eguaglia la media o la performance attesa, alcune volte con alta probabilità
- pro:
 - può accorgersi di buoni comportamenti pratici dell'algoritmo
 - è un metodo analitico, ovvero basato su dimostrazioni matematiche
- contro:
 - non ha performance garantite
 - l'analisi è spesso complessa
 - spesso la distribuzione delle istanze in input è sconosciuta

euristiche

- algoritmi con un buon comportamento pratico ma solitamente con performance non dimostrabili
- pro:
 - buon comportamento pratico
- contro:
 - performance spesso non dimostrabili

algoritmi randomizzati

- effettuano scelte randomiche durante la computazione
- le soluzioni ritornate possono essere differenti per esecuzioni differenti sullo stesso input
- esse sono infatti variabili random (per ogni istanza vi sono diverse soluzioni, ciascuna restituita con una certa probabilità determinata in accordo con le scelte randomiche dell'algoritmo)
- é mostrato che, fissata una qualsiasi istanza, il valore atteso delle performance é buono o la performance é buona con alta probabilità (sempre in accordo con le scelte randomiche)
- pro:
 - sono generalmente semplici
 - sono veloci (sia analiticamente che in pratica)
- contro:
 - incertezza del risultato per ogni istanza fissata
 - impossibilit  di fare scelte realmente randomiche (sebbene esse possano essere simulate)

algoritmi randomizzati

- $m \rightarrow$ é una variabile randomica
- $E(m) \rightarrow$ é il valore atteso di m calcolato in accordo con le scelte randomiche dell'algoritmo

definizione: algoritmi randomizzati e r -approssimazione

- un algoritmo randomizzato A é r -approssimante se:

$$\frac{E(m)}{m^*} \leq r \quad (\text{per min})$$

$$\frac{E(m)}{m^*} \geq r \quad (\text{per max})$$

problema: max weighted cut

- INPUT:
 - grafo $G = (V, E)$
 - peso non-negativo $w_{ij} > 0, \forall \{v_i, v_j\} \in E$
- SOLUZIONE: partizione di V in 2 sottoinsiemi V_1 e V_2 tale che

$$V_1 \cap V_2 = \emptyset \text{ e } V_1 \cup V_2 = V$$

- MISURA: peso del taglio, ovvero

$$\sum_{\{v_i, v_j\} \in E | v_i \in V_1 \wedge v_j \in V_2} w_{ij}$$

algoritmo: Random-Cut

Algorithm 17 Random-Cut

```
 $V_1 = \emptyset$   
 $V_2 = \emptyset$   
for  $i = 1$  to  $n$  do  
  inserisci  $v_i$  in  $V_1$  con probabilità  $\frac{1}{2}$  indipendentemente dagli altri nodi (oppure  
  in  $V_2$ )  
end for  
return  $V_1$  e  $V \setminus V_1$  ( $\equiv V_2$ )
```

- chiaramente, l'algoritmo é polinomale

teorema: Random-Cut é $\frac{1}{2}$ -approssimante

Random-Cut é $\frac{1}{2}$ -approssimante

dimostrazione:

- sia x_{ij} la variabile randomica "l'arco $\{v_i, v_j\}$ " é nel taglio"
- allora

$$m = \sum_{\{v_i, v_j\} \in E} w_{ij} \cdot x_{ij}$$

- quindi

$$\begin{aligned} E(m) &= E\left(\sum_{\{v_i, v_j\} \in E} w_{ij} \cdot x_{ij}\right) = \sum_{\{v_i, v_j\} \in E} w_{ij} \cdot E(x_{ij}) = \\ &= \sum_{\{v_i, v_j\} \in E} w_{ij} \cdot P(x_{ij} = 1) = \\ &= \sum_{\{v_i, v_j\} \in E} w_{ij} \cdot P((v_i \in V_1 \wedge v_j \in V_2) \vee (v_i \in V_2 \wedge v_j \in V_1)) = \\ &= \sum_{\{v_i, v_j\} \in E} w_{ij} \cdot P\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{\{v_i, v_j\} \in E} w_{ij} \geq \frac{m^*}{2} \end{aligned}$$

- dunque

$$\frac{E(m)}{m^*} \geq \frac{1}{2}$$

□

problema: min weighted set cover (giá definito precedentemente)

- INPUT:
 - un universo $U = \{o_1, o_2, \dots, o_n\}$ di n oggetti
 - una famiglia $\hat{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_h\}$ di h sottoinsiemi di U
 - un costo intero c_j associato ad ogni $S_j \in \hat{S}$
- SOLUZIONE: un cover di U , ovvero una sottofamiglia $\hat{C} \subseteq \hat{S}$ tale che:

$$\cup_{S_j \in \hat{C}} S_j = U$$

- MISURA: costo totale del cover, ovvero

$$\sum_{S_j \in \hat{C}} c_j$$

- f = frequenza massima di un oggetto nel sottoinsieme \hat{S} , ovvero ciascun oggetto occorre in al massimo f sottoinsiemi
- dato un insieme di n elementi $\{1, 2, \dots, n\}$ (chiamato universo) e una collezione S di m insiemi, la cui unione eguaglia l'universo, il problema del set cover consiste nell'identificare il più piccolo sottoinsieme di S la cui unione eguaglia l'universo

algoritmo greedy per il problema min weighted set cover

- **nota:** nella scelta dei sottoinsiemi da inserire nel cover:
 - non possiamo considerare solo i costi, perché in proporzione non potremmo coprire abbastanza elementi di U
 - non possiamo considerare solo il numero di oggetti coperti, poiché potremmo incorrere in un costo eccessivo
- **scelta greedy:** ad ogni step scegli il sottoinsieme avente costo minimo per il nuovo oggetto coperto

scelta greedy

- ad un dato step j in cui nell'ordine l'algoritmo ha selezionato $j-1$ sottoinsiemi S_1, \dots, S_{j-1} , l'efficacia di un sottoinsieme S_k non ancora scelto è definito come:

$$eff(S_k) = \frac{c_k}{|S_k \cap \overline{C_{j-1}}|}$$

- dove:
 - c_k = costo di S_k
 - $C_{j-1} = (S_1 \cup \dots \cup S_{j-1})$
 - $\overline{C_{j-1}} = U \setminus C_{j-1}$ (insieme degli elementi non ancora selezionati in U)
 - $|S_k \cap \overline{C_{j-1}}|$ = insieme degli elementi in S_k non ancora selezionati in U)
- nello step j scegli un sottoinsieme S_j di efficacia minima, ovvero tale che

$$eff(S_j) = \min\{eff(S_k) \mid S_k \text{ non è stato ancora scelto}\}$$

algoritmo: Greedy-Min-Weighted-Set-Cover

Algorithm 18 Greedy-Min-Weighted-Set-Cover

```

// C = insieme degli oggetti coperti
C = ∅
// Ĉ = insieme dei sottoinsiemi scelti nel cover
Ĉ = ∅
j = 1
while C ≠ U do
  sia Sj il sottoinsieme di efficacia minima
  Ĉ = Ĉ ∪ Sj
  per ogni oggetto oi ∈ Sj ∩ C̄, sia price(oi) = eff(Sj)
  C = C ∪ Sj
  j = j + 1
end while
return Ĉ

```

lemma: $m = \sum_{S_j \in \hat{C}} c_j = \sum_{i=1}^n price(o_i)$

$$m = \sum_{S_j \in \hat{C}} c_j = \sum_{i=1}^n price(o_i)$$

dimostrazione:

- banale, inquanto la somma dei *price* degli oggetti coperti durante lo step j é proprio c_j
- in altre parole, il costo totale c_k viene suddiviso tra gli oggetti coperti

□

lemma: $price'(o_i) \geq eff(S'_j)$

- $\forall j$, data una qualunque scelta di sottoinsiemi S'_j, \dots, S'_t , che forma un cover con i sottoinsiemi S_1, \dots, S_{j-1} scelti dall'algoritmo greedy all'inizio dello step j
- $\forall o_i$ (oggetto) non ancora coperto all'inizio dello step j

$$price'(o_i) \geq eff(S_j)$$

dove:

- S_j é il sottoinsieme scelto dall'algoritmo greedy allo step j
- $eff(S_j)$ é l'efficacia del sottoinsieme S_j
- $price'(o_i)$ é l'efficacia del sottoinsieme S'_l che copre o_i assumendo che, partendo dallo step j , la scelta greedy é effettuata solo tra i sottoinsiemi S'_j, \dots, S'_t

dimostrazione:

- é sufficiente osservare che $eff(S_j)$ é il *min covering price* per l'oggetto allo step j
- e che l'efficacia di un sottoinsieme non scelto può solo aumentare durante gli step successivi
- poiché il suo costo é fisso, ma alcuni altri oggetti possono essere coperti durante i successivi step (scelta di ulteriori sottoinsiemi)
- quindi il $price'(o_i)$, ovvero l'efficacia del sottoinsieme S'_l ($eff(S'_l)$) con $l \geq j$ tra S'_j, \dots, S'_t che lo copre é almeno uguale a (\geq) $eff(S_j)$

□

lemma: $price(o_i) \leq \frac{m^*}{n-i+1}$

- siano o_1, \dots, o_n gli oggetti elencati nell'ordine di covering dell'algoritmo greedy (ovvero tale che gli oggetti coperti durante lo step j vegono elencati dopo quelli coperti negli step precedenti e prima di quelli coperti negli step successivi)
- allora

$$price(o_i) \leq \frac{m^*}{n-i+1} \quad \forall i, 1 \leq i \leq n$$

dimostrazione:

- all'inizio dello step j , poiché gli insiemi non ancora scelti di una soluzione ottima possono coprire tutti gli oggetti non coperti con un costo generale al massimo pari a m^* :

- esiste un sottoinsieme S_k di efficacia al massimo pari a

$$\frac{m^*}{|\overline{C_{j-1}}|}$$

dove $\overline{C_{j-1}}$ é il sottoinsieme di oggetti non ancora coperti all'inizio dello step j

- infatti, se non é questo il caso, dato che il $price(o_i) = eff(S_j)$ del sottoinsieme S_j scelto dall'algoritmo greedy
- dal precedente lemma, per ogni possibile scelta di sottoinsiemi restanti per completare il cover, ovvero per ogni possibile $price$ degli oggetti rimanenti:

$$\sum_{o_i \in \overline{C_{j-1}}} price'(o_i) \geq \sum_{o_i \in \overline{C_{j-1}}} eff(S_j) > \sum_{o_i \in \overline{C_{j-1}}} \frac{m^*}{|\overline{C_{j-1}}|} = |\overline{C_{j-1}}| \cdot \frac{m^*}{|\overline{C_{j-1}}|} = m^*$$

- **contraddizione:** all'ipotesi che esiste una scelta di sottoinsiemi che copre i restanti oggetti con un costo al massimo pari a m^*
- quindi:

$$price(o_i) \leq \frac{m^*}{|\overline{C_{j-1}}|}$$

- ma $|\overline{C_{j-1}}| \geq n - i + 1$ poiché $o_i, \dots, o_n \in \overline{C_{j-1}}$ e dunque:

$$price(o_i) \leq \frac{m^*}{n - i + 1}$$

□

teorema: Greedy-Min-Weighted-Set-Cover é H_n -approssimante

l'algoritmo Greedy-Min-Weighted-Set-Cover é H_n -approssimante, con $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + 1$ **dimostrazione:**

$$m = \sum_{i=1}^n price(o_i) \leq \sum_{i=1}^n \frac{m^*}{n - i + 1} = m^* \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \dots + 1 \right) = m^* \cdot H_n$$

- da cui:

$$\frac{m}{m^*} \leq H_n$$

□

- **nota:** $\forall n > 1 \rightarrow \ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$
- quindi r ha una dipendenza logaritmica dalla dimensione dell'input

esempio: $H_n \cdot m^*$!

- il rapporto di approssimazione dell'algoritmo greedy é almeno H_n
- considera infatti la seguente istanza:
 - S_1 : 1 oggetto, costo $c_1 = \frac{1}{n}$
 - S_2 : 1 oggetto, costo $c_2 = \frac{1}{n-1}$
 - S_3 : 1 oggetto, costo $c_3 = \frac{1}{n-2}$
 - ...
 - S_n : 1 oggetto, costo $c_n = 1$

- S_{n+1} : n oggetti, costo $c_{n+1} = 1 + \epsilon$ (con $\epsilon > 0$, arbitrariamente piccolo)
- esecuzione:
 - **step 1:**
 - * $eff(S_1) < eff(S_{n+1}) = \frac{1}{n} < \frac{1+\epsilon}{n}$
 - * scelgo l'insieme di efficacia minima S_1
 - **step 2:**
 - * $eff(S_2) < eff(S_{n+1}) = \frac{1}{n-1} < \frac{1+\epsilon}{n-1}$
 - * scelgo l'insieme di efficacia minima S_2
 - ...
 - l'algoritmo **non** sceglierá mai il sottoinsieme S_{n+1}
- quindi:

$$m = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} = H_n$$

$$m^* = 1 + \epsilon \quad (\text{con } \epsilon > 0, \text{ arbitrariamente piccolo})$$

- dunque:

$$\frac{m}{m^*} = \frac{H_n}{1 + \epsilon}$$

- allora, per $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\frac{m}{m^*} \rightarrow H_n$$

- dunque la misura della soluzione restituita dall'algoritmo greedy, per alcune istanze, é H_n volte quella ottima!