Contents

computational complexity

def: problema in computer science

un problema π é una relazione

$$\pi \subseteq I_\pi \times S_\pi$$

dove:

- $I_\pi =$ insieme delle istanze di input del problema
- $S_\pi =$ insieme delle soluzioni del problema

tipologie di problema

- **decisione:**
  - si verifica se una data proprietá é valida per un determinato input
  - $S_\pi = \{true, false\}$ o semplicemente $S_\pi = \{0, 1\}$ e la relazione $\pi \subseteq I_\pi \times S_\pi$ corrisponde ad una funzione

    $$f : I_\pi \to \{0, 1\}$$

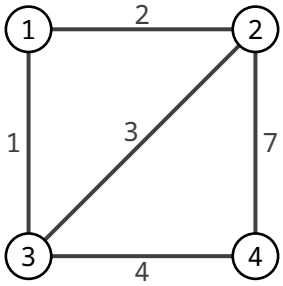
  - esempi: soddisfacibilitá, test di connettivitá di un grafo, etc....
- **ricerca:**
  - data un'istanza $x \in I_\pi$, si chiede di determinare una soluzione $y \in S_\pi$ tale che la coppia $(x, y) \in \pi$ appartengono alla relazione che definisce il problema
  - esempi: soddisfacibilitá, clique, vertex cover, nei quali chiediamo in output un assegnamento di veritá soddisfacente, rispettivamente una clique o un vertex cover, invece di semplicemente "si" o "no"
- **ottimizzazione**
  - data un'istanza $x \in I_\pi$, si chiede di determinare una soluzione $y \in S_\pi$ ottimizzando una data misura della funzione costo
  - esempi: min spanning tree, max SAT, max clique, min vertex cover, min TSP, etc....

complessitá degli algoritmi e dei problemi

- espressa in funzione della taglia dell'input (denotata come $|x|, \forall x \in I_\pi$)
- taglia dell'istanza x
  - quantitá di memoria necessaria a memorizzare x in un computer
  - lunghezza $|x|_c$ della stringa che codifica x in un particolare codice naturale $c : I_\pi \to \Sigma$, dove Σ é l'alfabeto del codice c
- codice naturale
  - conciso: le stringhe che codificano le istanze non devono essere ridondanti o allungate inutilmente
  - numeri espressi in base ≥ 2

esempio: codice

- istanza: grafo G



- codice per G
  - $\Sigma = \{\{, \}, , , 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ (simboli)
  - $c(G) = \{1, 2, 3, 4, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, 2, 1, 3, 7, 4\}$
    - $\{1, 2, 3, 4\}$ (nodi)
    - $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$ (archi)
    - $\{2, 1, 3, 7, 4\}$ (pesi)
  - $|G|_c = 49$

def: tempo di esecuzione dell'algoritmo A

sia $t_A(x)$ il tempo di esecuzione dell'algoritmo A per l'input x, allora il tempo di esecuzione nel caso peggiore di A é:

$$T_A(n) = \max\{t_A(x) \mid |x| \leq n\}, \quad \forall n > 0$$

def: complessitá temporale dell'algoritmo A

l'algoritmo A ha complessitá temporale

- $O(g(n))$ se $T_A(n) = O(g(n))$, ovvero

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_A(n)}{g(n)} \leq c, \text{ per una costante } c > 0$$

- $\Omega(g(n))$ se $T_A(n) = \Omega(g(n))$, ovvero

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_A(n)}{g(n)} \geq c, \text{ per una costante } c > 0$$

- $\Theta(g(n))$ se $T_A(n) = \Theta(g(n))$, ovvero

$$T_A(n) = \Omega(g(n)) \text{ e } T_A(n) = O(g(n))$$

def: complessitá di un problema

un problema ha complessitá

- $O(g(n))$ se esiste un algoritmo che lo risolve avente complessitá $O(g(n))$
- $\Omega(g(n))$ se ogni algoritmo A che lo risolve ha complessitá $\Omega(g(n))$
- $\Theta(g(n))$ se ha complessitá $O(g(n))$ e $\Omega(g(n))$

problemi di decisione e classi di complessitá

i problemi di decisione sono solitamente descritti da un'istanza di input (o semplicemente INPUT) e da una DOMANDA sull'input

esempi:

- soddisfacibilitá
  - INPUT: CNF (Conjunctive Normal Form) formula definita su un insieme di variabili
  - DOMANDA: esiste un assegnamento di veritá $\tau : V \to \{0,1\}$?
- clique
  - INPUT: un grafo non orientato $G = (V, E)$ di n nodi e un intero $k > 0$
  - DOMANDA: esiste in G una clique di almeno k nodi ($\geq k$), ovvero un sottoinsieme $U \subseteq V$ tale che $|U| \geq k$ e $\{u, v\} \in E,\ \forall u, v \in U$?
- vertex cover
  - INPUT: un grafo non orientato $G = (V, E)$ di n nodi e un intero $k > 0$
  - DOMANDA: esiste in G un vertex cover di al massimo k nodi ($\leq k$), ovvero un sottoinsieme $U \subseteq V$ tale che $|U| \leq k$ e $u \in U$ o $v \in U$, $\forall \{u, v\} \in E$?

nei problemi di decisione $I_\pi = Y_\pi \cup N_\pi$

- $Y_\pi =$ insieme di istanze positive, ovvero con soluzione 1
- $N_\pi =$ insieme di istanze negative, ovvero con soluzione 0

def: un algoritmo A risolve π

un algoritmo A risolve $\pi \iff \forall$ input $x \in I_\pi$, A risponde $1 \iff x \in Y_\pi$

def: classe dei problemi $TIME(g(n))$

$TIME(g(n)) =$ classe dei problemi di decisione con complessitá $O(g(n))$

algoritmi non-deterministici per i problemi di decisione

essi si compongono di 2 fasi

- fase 1
  - generano in modo non-deterministico un "certificato" y
- fase 2
  - partendo dall'input x e dal certificato y, verificano se x é un'istanza positiva

def: un algoritmo non-deterministico A risolve π

un algoritmo non-deterministico A risolve π se si ferma per ogni possibile certificato y ed esiste un certificato y per cui A risponde 1 ($true$) $\iff x \in Y_\pi$

- complessitá
  - costo della fase 2
  - espressa in funzione di $|x|$

def: classe dei problemi $NTIME(g(n))$

$NTIME(g(n)) =$ classe di problemi di decisione con complessitá non-deterministica $O(g(n))$

esempio: algoritmo non-deterministico per il problema della clique

- fase 1
  - dato in input il grafo $G = (V, E)$, genera non-deterministicamente un sottoinsieme $U \subseteq V$ di k nodi
- fase 2
  - verifica se U é una clique, ovvero se $\{u, v\} \in E, \forall u, v \in U$, e in tal caso risponde 1, altrimenti risponde 0
- chiaramente l'algoritmo risolve il problema della clique, in quanto si ferma per ogni possibile sottoinsieme U ed esiste un sottoinsieme U per il quale risponde 1 se e solo se esiste una clique di k nodi in G, ovvero $\iff (G, k) \in Y_{clique}$
- complessitá: $O(n^2)$, poiché $|U| \leq |V| = n$

osservazioni (algoritmi deterministici e non-deterministici)

- un algoritmo deterministico é meno potente di uno non-deterministico poiché non puó eseguire la fase 1
- se esiste un algoritmo deterministico A che risolve π, allora esiste anche un algoritmo non-deterministico A' che risolve π con la stessa complessitá come segue:
  - esso esegue al fase 1 e coincide con A nella fase 2, ignorando il certificato y

corollario: $TIME(g(n)) \subseteq NTIME(g(n))$

$$TIME(g(n)) \subseteq NTIME(g(n))$$

- dove:
  - $TIME(g(n)) =$ classe dei problemi deterministicamente risolvibili in tempo $O(g(n))$
  - $NTIME(g(n)) =$ classe dei problemi non-deterministicamente risolvibili in tempo $O(g(n))$

efficienza e trattabilitá

- un problema é trattabile se puó essere risolto efficientemente (deterministicamente)
- sono considerati trattabili o efficientemente risolvibili tutti i problemi aventi complessitá limitata da un polinomio della dimensione dell'input

$$\text{TRATTABILITÁ} \equiv \text{EFFICIENZA} \equiv \text{POLINOMIALITÁ}$$

efficienza e trattabilitá: ragione 1

la crescita delle funzioni polinomiali rispetto a quelle esponenziali (sia per ció che riguarda il tempo di esecuzione sia per ció che riguarda la dimensione delle istanze risolvibili entro un certo tempo di esecuzione)

efficienza e trattabilitá: ragione 2

- la composizione di polinomi é un polinomio e dunque la risolvibilitá in tempo polinomiale di un problema é indipendente da
  - il codice naturale utilizzato, poiché tutti i codici naturali sono correlati in maniera polinomiale
  - il modello computazionale adottato, se ragionevole (cioé costruibile nella pratica o meglio in grado di eseguire un lavoro limitato costante per step), in quanto tali modelli sono polinomialmente correlati, ovvero possono simularsi l'un l'altro in tempo polinomiale

osservazione: macchina di turing non-deterministica

la macchina di turing non-deterministica non é un modello di calcolo ragionevole, poiché la quantitá di lavoro svolto in ogni fase (ciascun livello dell'albero delle computazioni) cresce in modo esponenziale

def: codici polinomialmente correlati

- 2 codici c_1 e c_2 per un problema π sono correlati polinomialmente se esistono 2 polinomi p_1 e p_2 tali che, $\forall x \in I_\pi$:
  - $|x|_{c_1} \leq p_1(|x|_{c_2})$
  - $|x|_{c_2} \leq p_2(|x|_{c_1})$
- se la complessitá rispetto a c_1 é $O(q_1(|x|_{c_1}))$ per un dato polinomio q_1, allora rispetto a c_2 é $O(q_1(p_1(|x|_{c_2}))) = O(q_2(|x|_{c_2}))$ dove q_2 é il polinomio tale che $\forall \lambda \; q_2(\lambda) = q_1(p_1(\lambda))$
- tutti i codici naturali sono correlati polinomialmente, ovvero la risolvibilitá polinomiale non dipende dal particolare codice utilizzato

dimensione dell'input (def: codici correlati polinomialmente)

qualsiasi quantitá polinomialmente correlata ad un codice naturale é dunque correlata ad un qualsiasi codice naturale possibile, dato che tutti i codici naturali sono correlati polinomialmente e che la composizione di polinomi é un polinomio

esempio: codici correlati polinomialmente

- assumiamo che per ogni grafo G di n nodi
  - $|G|_{c_1} = 10n^2$
  - $|G|_{c_2} = n^3$
- se $p_1(\lambda) = 10\lambda$ e $p_2(\lambda) = \lambda^2$ abbiamo che:
  - $|G|_{c_1} = 10n^2 \leq 10n^3 = p_1(|G|_{c_2})$
  - $|G|_{c_2} = n^3 \leq 100n^4 = p_2(|G|_{c_1})$
- dunque i 2 codici sono correlati polinomialmente

- regola pratica:
  - 2 quantitá sono polinomialmente correlate se sono polinomi sulle stesse variabili

esempio: codifica non naturale

- test di primalitá
  - INPUT: un numero intero $n > 0$
  - DOMANDA: n é un numero primo?
  - ALGORITMO (banale):
    * scansiona tutti i numeri da 2 a $n-1$ e risponde 1 ($true$) se nessuno di essi lo divide
  - COMPLESSITÁ: $O(n)$, polinomiale?
  - CODICE c_1 (naturale): n espresso in base 2, ovvero $|n|_{c_1} = \log_2 n$
  - CODICE c_2 (non naturale): n espresso in base 1, ovvero $|n|_{c_2} = n$
- dunque la complessitá dell'algoritmo é:
  - $O(2^{|n|_{c_1}})$ rispetto a c_1, che é esponenziale
  - $O(|n|_{c_2})$ rispetto a c_2, che é polinomiale!
- dimensione dell'input
  - correlata polinomialmente ai codici naturali $|n|_{c_1} = \log_2 n$

def: modelli computazionali simulabili in modo polinomiale

- 2 modelli computazionali M_1 e M_2 sono mutualmente simulabili in modo polinomiale se esistono 2 polinomi p_1 a p_2 tali che:
  1. ogni algoritmo A per M_1 con complessitá $T_A(n)$ puó essere simulato su M_2 in tempo $p_1(T_A(n))$
  2. ogni algoritmo A per M_2 con complessitá $T_A(n)$ puó essere simulato su M_1 in tempo $p_2(T_A(n))$
- dunque se A é polinomiale in M_1 allora é polinomiale anche in M_2 e viceversa
- tutti i modelli computazionali ragionevoli sono mutualmente simulabili in modo polinomiale, ovvero la risolvibilitá polinomiale non dipende dal particolare modello utilizzato

classi P e NP

- $P =$ classe di tutti i problemi risolvibili deterministicamente in tempo polinomiale, ovvero
$$P = \cup_{k=0}^{\infty} TIME(n^k)$$
- $NP =$ classe di tutti i problemi risolvibili non-deterministicamente in tempo polinomiale, ovvero
$$NP = \cup_{k=0}^{\infty} NTIME(n^k)$$
- $P = NP$? nessuno lo a dimostrato

problemi NP-completi

- i problemi piú difficili di NP e tali che se $P \neq NP$ non appartengono a P, viceversa, se 1 di essi appartiene a P, allora $P = NP$
- finora nessuno é riuscito a trovare un algoritmo polinomiale deterministico per nessun problema NP-completo
- congettura: $P \neq NP$

optimization problems

def: problema di ottimizzazione

un problema di ottimizzazione π é una quadrupla $(I_\pi, S_\pi, m_\pi, goal_\pi)$ con:

- $I_\pi =$ insieme delle istanze di input di π
- $S_\pi(x) =$ insieme delle soluzioni ammissibili dell'istanza $x \in I_\pi$
- $m_\pi(x, y) =$ misura della soluzione ammissibile $y \in S_\pi(x)$ per l'input $x \in I_\pi$ (intera)
- $goal_\pi \in \{\min, \max\} =$ specifica se abbiamo un problema di minimizzazione o di massimizzazione

osservazioni (problemi di ottimizzazione)

- assumiamo che $m_\pi(x, y)$ é sempre un numero intero
  - i nostri modelli computazionali possono trattare solo l'approssimazione razionale dei reali
  - scalando tali reali possiamo ottenere numeri interi equivalenti
  - i valori interi rivelano giá le difficoltá intrinseche dei problemi
- quando sono chiari dal contesto (in seguito):
  - π sará omesso
  - $m_(x, y) =$ sará denotato semplicemente come m

esempio: descrizione formale di un problema di ottimizzazione (max clique)

- $I =$ grafo $G = (V, E)$
- $S = \{U \subseteq V \mid \{u, v\} \in E,\ \forall u, v \in U\}$
- $m(G, U) = |U|$
- $goal = \max$

possiamo descrivere i problemi di ottimizzazione nella seguente forma, piú semplice e informale

- MAX CLIQUE
  - INPUT: grafo $G = (V, E)$
  - SOLUZIONE: $U \subseteq V \mid \{u, v\} \in E,\ \forall u, v \in U$
  - MISURA: $|U|$
- MIN VERTEX COVER
  - INPUT: grafo $G = (V, E)$
  - SOLUZIONE: $U \subseteq V \mid \forall \{u, v\} \in E,\ u \in U \vee v \in U$
  - MISURA: $|U|$
- MIN TSP (Traveling Salesman Problem, problema del commesso viaggiatore)
  - INPUT:
    * insieme di cittá $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$
    * distanza $d(c_i, c_j) \in \mathbb{N}$, per ogni coppia di cittá $(c_i, c_j) \in C$

- SOLUZIONE: un tour di tutte le cittá, ovvero una permutazione $< c_{p(1)}, c_{p(2)}, \ldots, c_{p(n)} >$ che descriva l'ordine di visita delle cittá
- MISURA: lunghezza del tour, ovvero

$$(\sum_{i=1}^{n-1} d(c_{p(i)}, c_{p(i+1)})) + d(c_{p(n)}, c_{p(1)})$$

def: soluzione ottima

- data un'istanza $x \in I_\pi$, una soluzione $y^* \in S_\pi(x)$ é ottima per x se $m(x, y^*) = goal\{m(x, y) \mid y \in S(x)\}$
- la misura di una soluzione ottima (o in modo analogo di tutte le soluzioni ottime) di x é denotata come $m^*(x)$ o semplicemente m^*

problema decisionale sottostante

ogni problema di ottimizzazione ha un problema decisionale sottostante che puó essere ottenuto introducendo un intero k nell'istanza di input e chiedendo se esiste una soluzione ammissibile di misura $\leq k$ (per $\min$) e $\geq k$ (per $\max$)

- problema di ottimizzazione:
  - dato un input x, trova $y \in S(x) \mid m(x, y)$ sia $\min$ o $\max$ (secondo il $goal$)
- problema decisionale sottostante:
  - dato un input x e un intero $k \geq 0$, esiste $y \in S(x) \mid m(x, y) \leq k$ ($\min$) o $\geq k$ ($\max$)

esempio: descrizione formale di un problema decisionale sottostante (max clique)

- MAX CLIQUE
  - INPUT: grafo $G = (V, E)$
  - SOLUZIONE: $U \subseteq V \mid \{u, v\} \in E,\ \forall u, v \in U$
  - MISURA: $|U|$
- problema decisionale sottostante:
  - INPUT: grafo $G = (V, E)$ e un intero $k > 0$
  - DOMANDA: esiste una clique U in G tale che $|U| \geq k$

osservazioni (problema decisionale sottostante)

- se esiste un algoritmo polinomiale A per il problema di ottimizzazione, allora esiste un algoritmo polinomiale anche per il problema decisionale sottostante che funziona come segue:
  1. esegue A per determinare la soluzione ottime y^* per l'input x
  2. risponde 1 ($true$) se $m(x, y^*) \leq k$ ($\min$) o $\geq k$ ($\max$)
- il problema di ottimizzazione é difficile almeno quanto il problema decisionale sottostante

classi di complessitá dei problemi di ottimizzazione: PO

- un problema di ottimizzazione π appartiene alla classe PO se:
  - per ogni input x, $x \in I$ puó essere verificato in tempo polinomale
  - esiste un polinomio $p \mid \forall x \in I$ e $y \in S(x)$ vale $|y| \leq p(|x|)$
  - $\forall x \in I$ e $y \in S(x)$, $m(x, y)$ puó essere calcolata in tempo polinomale (rispetto a $|x|$)
  - $\forall x \in I$, una soluzione ottima y^* puó essere calcolata in tempo polinomale
- esempi: shortest path fra 2 nodi, min spanning tree, ecc...

classi di complessitá dei problemi di ottimizzazione: NPO

un problema di ottimizzazione π appartiene alla classe NPO se:

- per ogni input x, $x \in I$ puó essere verificato in tempo polinomale
- esiste un polinomio $p \mid \forall x \in I$ e $y \in S(x)$ vale $|y| \leq p(|x|)$
- $\forall x \in I$ e $y \in S(x)$, $m(x, y)$ puó essere calcolata in tempo polinomale (rispetto a $|x|$)

esempi: max clique, min vertex cover, min TSP, ecc...

PO e NPO: nella pratica

- PO: classe dei problemi di ottimizzazione il cui problema decisionale sottostante appartiene a P
- NPO: classe dei problemi di ottimizzazione il cui problema decisionale sottostante appartiene a NP
- chiaramente $PO \subseteq NPO$

def: relazione NPO - NP-$HARD$

un problema di ottimizzazione in NPO é NP-$HARD$ se il problema decisonale sottostante é NP-$Completo$

teorema: relazione tra $P \neq NP$ e risolvibilitá polinomiale dei problemi NP-$HARD$

se $P \neq NP$, un problema di ottimizzazione NP-$HARD$ non puó essere risolto in tempo polinomiale (poiché é difficile almeno quanto il problema decisionale sottostante)

teorema: relazione tra $P = NP$ e $PO = NPO$

se $P = NP$ allora $PO = NPO$

- quasi tutti i problemi che verranno presentati in seguito sono NP-$HARD$, ovvero non efficientemente risolvibili
- verranno progettati algoritmi per tali problemi che restituiscono soluzioni "vicine" a quelle ottime

approximation

introduzione

- DOMANDA: supponiamo di dover risolvere un problema NP-HARD, cosa dovremmo fare?
- RISPOSTA: sacrificare 1 delle 3 caratteristiche desiderate
  1. risolvere istanze arbitrarie del problema
  2. risolvere il problema di ottimalitá
  3. risolvere il problema in tempo polinomiale
- STRATEGIE:
  1. progettare algoritmi per casi speciali del problema
  2. progettare algoritmi di approssimazione o euristiche
  3. progettare algoritmi che possono richiedere tempo esponenziale
- d'ora in poi ci concentreremo sui problemi di ottizzazione NP-HARD, ovvero problemi che non possono essere risolti in modo efficiente (a meno che $P = NP$)
- per tali problemi verranno progettati algoritmi in grado di determinare soluzioni prossime a quelle ottime, ovvero "buone approssimazioni"

def: algorimo di r-approssimazione per problemi di minimizzazione

dato un problema di minimizzazione π e un numero $r \geq 1$, un algoritmo A é un algoritmo di r-approssimazione per π se per ogni input $x \in I$ restituisce sempre una soluzione r-approssimata, ovvero una soluzione ammissibile $y \in S(x)$ tale che

$$\frac{m(x,y)}{m^*(x)} \leq r$$

def: algorimo di r-approssimazione per problemi di massimizzazione

dato un problema di massimizzazione π e un numero $r \leq 1$, un algoritmo A é un algoritmo di r-approssimazione per π se per ogni input $x \in I$ restituisce sempre una soluzione r-approssimata, ovvero una soluzione ammissibile $y \in S(x)$ tale che

$$\frac{m(x,y)}{m^*(x)} \geq r$$

determinazione del fattore di approssimazione r

- come possiamo determinare il fattore di approssimazione r se non conosciamo il valore m^* di una soluzione ottima?
- per problemi di minimizzazione (rispettivamente massimizzazione), confrontiamo il valore della soluzione restituita $m(x,y)$ con un lower bound (rispettivamente upper bound) appropriato $l(x)$ (rispettivamente $u(x)$) di $m^*(x)$
- se il loro rapporto é al massimo r ($\leq$) per $\min$ o almeno r ($\geq$) per $\max$, allora l'algoritmo é r-approssimante

$\min$ (analogo per $\max$) fattore di approssimazione r

- se
$$\frac{m(x,y)}{l(x)} \leq r$$
- allora
$$\frac{m(x,y)}{m^*(x)} \leq \frac{m(x,y)}{l(x)} \leq r$$

algoritmo: Approx-Cover per min vertex cover

Algorithm 1 Approx-Cover

```
// M = archi scelti dall'algoritmo
M = ∅
// U = nodi scelti nel cover
U = ∅
repeat
  seleziona un arco {u, v} ∈ E
  U = U ∪ {u, v}
  E = E \ {e ∈ E} | e é incidente a u o a v
  M = M ∪ {{u, v}}
until (E = ∅)
return U
```

lemma: Approx-Cover forma un matching al termine dell'esecuzione

al termine dell'esecuzione dell'algoritmo di approssimazione Approx-Cover, M forma un matching, ovvero gli archi in M non condividono alcun nodo

dimostrazione:

- banalmente, ogni volta che un arco e é selezionato in M, tutti gli archi con un nodo in comune con e vegono eliminati da E
- pertanto nei passi successivi nessun arco con un nodo in comune con e puó essere selezionato dall'algoritmo

□

teorema: Approx-Cover é 2-approssimante

Approx-Cover é 2-approssimante

dimostrazione:

- il valore della soluzione restituita dall'algoritmo é
$$m = |U| = 2|M|$$
- sia U^* il cover ottimo.
Poiché gli archi in M non condividono alcun nodo (M é un matching) e poiché ciascuno di essi deve avere un nodo in U^*
$$m^* = |U^*| \geq |M|$$
- dunque:
$$\frac{m}{m^*} \leq \frac{2|M|}{|M|} = 2$$

□

algorithmic techniques: greedy

caratteristiche

- la soluzione viene determinata in step
- ad ogni step l'algoritmo esegue la scelta che sembra essere la migliore in quello step, senza considerare le possibili conseguenze nei futuri step

problema: max 0-1 knapsack

- INPUT:
  - un insieme finito di oggetti O
  - un profitto intero p_i, $\forall o_i \in O$
  - un volume intero a_i, $\forall o_i \in O$
  - un intero positivo b ($b > 0$)
- SOLUZIONE:
  - un sottoinsieme di oggetti $Q \subseteq O$ tale che $\sum_{o_i \in Q} a_i \leq b$
- MISURA:
  - profitto totale degli oggetti scelti, ovvero $\sum_{o_i \in Q} p_i$

- senza perdere di generalitá, in seguito, assumeremo sempre che:
  - $a_i \leq b$, $\forall o_i \in O$
  - $p_i > 0$, $\forall o_i \in O$

max 0-1 knapsack: descrizione della scelta greedy

- nella scelta greedy:
  - non possiamo considerare solo il profitto degli oggetti, in quanto il loro volume potrebbe essere troppo grande
  - non possiamo considerare solo il volume degli oggetti, in quanto il loro profitto potrebbe essere troppo basso
- idea: consideriamo gli oggetti in base al profitto per unitá di volume, ovvero in base al rapporto

$$\frac{p_i}{a_i}, \ \forall o_i \in O$$

- l'algoritmo greedy seleziona gli oggetti in ordine decrescente di profitto per volume

algoritmo: Greedy-Knapsack

Algorithm 2 Greedy-Knapsack

```
// Q = insieme degli oggetti scelti
Q = ∅
// v = volume del sottoinsieme corrente degli oggetti scelti
v = 0
ordina gli oggetti in ordine decrescente di profitto per volume p_i / a_i
siano o_1, ..., o_n gli oggetti elencati secondo tale ordine
for i = 1 to n do
  if v + a_i ≤ b then
    Q = Q ∪ {o_i}
    v = v + a_i
  end if
end for
return Q
```

teorema: $\forall r < 1$ Greedy-Knapsack non é r-approssimante

$\forall r < 1$ dato, Greedy-Knapsack non é r-approssimante

dimostrazione:

- dato un intero $k = \lceil \frac{1}{r} \rceil$, consideriamo la seguente istanza di max 0-1 knapsack
- $\forall n \geq 2$
  - $b = kn$ é il volume del knapsack
  - $n - 1$ oggetti con profitto $p_i = 1$ e volume $a_i = 1$
  - 1 oggetto con profitto $b - 1$ e volume b
- soluzione restituita:
  - l'insieme dei primi $n - 1$ oggetti, ovvero $m = n - 1$
- soluzione ottima
  - l'insieme contenente solo l'n-esimo oggetto, ovvero

$$m^* = b - 1 = kn - 1$$

- quindi:

$$\frac{m}{m^*} = \frac{n-1}{kn-1}$$

- cosí che:

$$\frac{m}{m^*} = \frac{n-1}{kn-1} \leq \frac{n-1}{\frac{n}{r}-1} \underset{(<) \text{ poiché } \frac{1}{r} > 1}{<} \frac{n-1}{\frac{n}{r}-\frac{1}{r}} = \frac{n-1}{\frac{1}{r}(n-1)} = r$$

- $\forall r < 1 \rightarrow \frac{m}{m^*} \leq r$, invece di $\forall r \leq 1 \rightarrow \frac{m}{m^*} \geq r$

□

miglioramento algoritmo: Greedy-Knapsack

- osservazione:
  - intuitivamente, Greedy-Knapsack non restituisce una buona approssimazione, poiché ignora l'oggetto avente il profitto massimo

Greedy-Knapsack modificato

- calcola una soluzione greedy Q_{GR} e sia m_{GR} la misura di quest'ultima
- considera l'oggetto $O_{\max}$ avente il massimo profitto $p_{\max}$
- se $m_{GR} \geq p_{\max}$ restituisci Q_{GR} altrimenti restituisci $Q = \{O_{\max}\}$

lemma 1: Greedy-Knapsack modificato

- sia o_j il primo oggetto che l'algoritmo Greedy-Knapsack non inserisce nel knapsack e sia:

$$m_j = \sum_{i=1}^{j-1} p_i$$

- allora:

$$m^* \leq m_j + p_j$$

dimostrazione:

- $m^* \leq m_j + p_j$ deriva direttamente osservando semplicemente che, denotando con v la somma dei volumi dei primi $j-1$ oggetti scelti, $m_j + p_j$ é il valore della soluzione ottima dell'istanza in cui il volume del knapsack é $v + a_j > b$

lemma 2: Greedy-Knapsack modificato

- $m^* \leq m_{GR} + p_{\max}$

dimostrazione:

- diretta conseguenza del procedente lemma osservando che $m_j \leq m_{GR}$ e $p_j \leq p_{\max}$, e quindi:

$$m^* \leq m_j + p_j \leq m_{GR} + p_{\max}$$

- intuizione: l'algoritmo restituisce una soluzione di valore $\max\{m_{GR}, p_{\max}\}$, che é almeno la metá di $m_{GR} + p_{\max}$, ovvero la metá di un upper bound di m^*

$$\max\{m_{GR}, p_{\max}\} \geq \frac{m_{GR} + p_{\max}}{2}$$

teorema: Greedy-Knapsack modificato é $\frac{1}{2}$-approssimante

Greedy-Knapsack modificato é $\frac{1}{2}$-approssimante

dimostrazione:

- $m_{Mod} \geq \max\{m_{GR}, p_{\max}\} \geq \frac{(m_{GR} + p_{\max})}{2} \geq \frac{m^*}{2}$

problema: min multiprocessor scheduling

- INPUT:
  - insieme di n jobs P
  - numero di processori h
  - tempo di esecuzione t_j, $\forall p_j \in P$
- SOLUZIONE:
  - uno schedule per P, ovvero una funzione

$$f : P \to \{1, \ldots, h\}$$

- MISURA:
  - $makespan$ o tempo di completamento di f, ovvero

$$\max_{i \in [1,\dots,h]} \sum_{p_j \in P \mid f(p_j)=i} t_j$$

algoritmo: Greedy-Graham

- scelta greedy: ad ogni step assegna un job al processore meno carico
- $T_i(j)$:
  - tempo di completamento (somma dei tempi di esecuzione dei jobs assegnati) del processore i al termine del tempo j, ovvero una volta schedulati i primi j jobs (in qualunque ordine)

Algorithm 3 Greedy-Graham

siano $p_1, \dots, p_n$ i jobs elencati in un qualsiasi ordine
for $j = 1$ to n **do**
  assegna p_j al processore i avente il minimo $T_i(j-1)$ ovvero $f(p_j) = i$
end for
return schedule i

- osservazione:
  - se i jobs vengono schedulati in accordo con il tempo di arrivo, l'algoritmo assegna ciascun job senza conoscere quelli futuri, ovvero ONLINE

teorema: Greedy-Graham é $\frac{2-1}{h}$-approssimante

l'algoritmo Greedy-Graham é $\frac{2-1}{h}$-approssimante, dove h é il numero di processori

fatto:

- dato $s \geq 0$ e h numeri $a_1, \dots, a_h \mid a_1 + \dots + a_h = s$, allora esiste j, $1 \leq j \leq h$, tale che

$$a_j \geq \frac{s}{h}$$

- altrimenti, contraddizione ($a_1 + \dots + a_h < h\frac{s}{h} = s$)
- analogamente, esiste j', $1 \leq j' \leq h$, tale che $a_{j'} \leq \frac{s}{h}$
- in altre parole, un numero é al massimo uguale alla media e uno maggiore o uguale alla media
- pertanto, $\min_j a_j \leq \frac{s}{h}$ e $\max_j a_j \geq \frac{s}{h}$

dimostrazione:

- sia T la somma di tutti i tempi di esecuzione dei job, ovvero

$$T = \sum_{j=1}^{n} t_j$$

- siano $T_1^*, T_2^*, \dots, T_h^*$ i tempi di completamento degli h processori nella soluzione ottima

- poiché $T_1^* + T_2^* + \ldots + T_h^* = T$ dal precedente 'fatto', esiste j tale che $T_j^* \geq \frac{T}{h}$
- quindi:

$$m^* \geq T_j^* \geq \frac{T}{h}$$

- sia k il processore con il massimo tempo di completamento nello schedule f restituito dall'algoritmo, ovvero con $T_k(n)$ massimo
- in piú sia p_l l'ultimo job assegnato al processore k
- dato che, per la scelta greedy, p_l é stato assegnato ad uno dei processori meno carichi all'inizio dello step l, sempre per il 'fatto' precedente, abbiamo:

$$T_k(l-1) \leq \frac{\sum_{j<l} t_j}{h} \leq \frac{T - t_l}{h}$$

- dato che la somma dei tempi di esecuzione di tutti i jobs assegnati prima di p_l é al massimo ($\leq$) $T - t_l$
- pertanto:

$$m = T_k(n) = T_k(l-1) + t_l \leq \frac{T - t_l}{h} + t_l =$$

$$= \frac{T - t_l + ht_l}{h} = \frac{T}{h} - \frac{1+h}{h} t_l = \frac{T}{h} + \frac{h-1}{h} t_l \leq \ldots$$

- poiché $\frac{T}{h} \leq m^*$ e $t_l \leq m^*$

$$\ldots \leq m^* + \frac{h-1}{h} m^* = \frac{hm^* + (h-1)m^*}{h} = \frac{hm^* + hm^* - m^*}{h} =$$

$$= \frac{2hm^* - m^*}{h} = \frac{2h-1}{h} m^* = (2 - \frac{1}{h}) m^*$$

- e quindi:

$$\frac{m}{m^*} \leq 2 - \frac{1}{h}$$

□

- osservazioni:
  - quando h cresce, il rapporto di approssimazione $\frac{2-1}{h}$ tende a 2
  - l'analisi é stretta, ovvero vale il seguente teorema

teorema: Greedy-Graham non é r-approssimante per $r < \frac{2-1}{h}$

Greedy-Graham non é r-approssimante per $r < \frac{2-1}{h}$

dimostrazione:

- considera la seguente istanza:
  - $h(h-1)$ jobs con tempo di esecuzione 1
  - 1 job con tempo di esecuzione h
- Greedy-Graham assegna i jobs nella seguente maniera:
- e quindi:

$$m = 2(h-1)$$

- la soluzione ottima puó essere ottenuta assegnando il job piú lungo ad un processore e distribuendo ugualmente i jobs piú corti tra i processori restanti:
- e quindi:

$$m^* = h$$

- in conclusione:

$$\frac{m}{m^*} = \frac{2(h-1)}{h} = 2 - \frac{1}{h} \qquad \text{(diverso da } \leq 2 - \frac{1}{h}\text{)}$$

□

migliorare il rapporto di approssimazione r per Greedy-Graham

- DOMANDA: come possiamo migliorare il rapporto di approssimazione r
- richiamiamo rapidamente gli step base della dimostrazione del rapporto di approssimazione di Greedy-Graham
- abbiamo utilizzato i seguenti $lower\ bounds$ per il valore della soluzione ottima:
  - $m^* \geq \frac{T}{h}$, come in qualsiasi soluzione almeno 1 processore deve avere tempo di completamento $\frac{T}{h}$ (richiamiamo che $T = \sum_j t_j$)
  - $m^* \geq t_j$, per ogni job p_j, come in qualsiasi soluzione uno dei processori deve eseguire p_j
- abbiamo utilizzato il seguente $upper\ bound$ per il valore della soluzione restituita:
  - per limitare superiormente il valore della soluzione restituita, se k é uno dei processori piú carichi e p_l é l'ultimo job assegnato a k, per la scelta greedy:

$$T_k(l-1) \leq \frac{\sum_{j<l} t_j}{h} \leq \frac{T - t_l}{h}$$

- quindi possiamo derivare la seguente disuguaglianza:

$$m = T_k(n) = T_k(l-1) + t_l \leq \frac{T - t_l}{h} + t_l =$$

$$= \frac{T - t_l + ht_l}{h} = \frac{T}{h} - \frac{1+h}{h} t_l = \frac{T}{h} + \frac{h-1}{h} t_l \leq \dots$$

- poiché $\frac{T}{h} \leq m^*$ e $t_l \leq m^*$

$$\dots \leq m^* + \frac{h-1}{h} m^* = \frac{hm^* + (h-1)m^*}{h} = \frac{hm^* + hm^* - m^*}{h} =$$

$$= \frac{2hm^* - m^*}{h} = \frac{2h-1}{h} m^* = (2 - \frac{1}{h}) m^*$$

- idea per il miglioramento: decrementa t_l il piú possibile e trova un rapporto di approssimazione migliore sfruttando le disuguaglianze

$$m \leq \frac{T}{h} + \frac{h-1}{h} t_l \leq m^* + \frac{h-1}{h} t_l$$

- modificando l'algoritmo e/o migliorando l'analisi vedremo come limitare superiormente t_l progressivamente con:
  - $\frac{m^*}{2}$ ($\frac{3}{2}$-approssimante),
  - $\frac{m^*}{3}$ ($\frac{4}{3}$-approssimante),
  - e arbitrariamente piccolo, ovvero ϵm^* ($(1+\epsilon)$-approssimante), cioé un PTAS

Greedy-Graham, primo miglioramento

- assegnare i jobs dal piú lungo al piú corto
- ció ci consente di evitare il caso peggiore dell'algoritmo di Graham, ovvero il fatto che un job lungo arrivi alla fine, sbilanciando significativamente il carico dei processori

algoritmo: Ordered-Greedy

Algorithm 4 Ordered-Greedy

siano $p_1, p_2, \ldots, p_n$ i job elencati in ordine decrescente di tempo di esecuzione, ovvero tale che $t_1 \geq t_2 \geq \ldots \geq t_n$
for $j = 1$ to n **do**
  assegna p_j al processore i con il minimo $T_i(j-1)$, ovvero $f(p_j) = i$
end for
return schedule f

- vediamo un'analisi piú semplice che porta ad un rapporto di approssimazione di circa $\frac{3}{2}$

lemma: Ordered-Greedy

se $n > h$, allora $t_{h+1} \leq \frac{m^*}{2}$

dimostrazione:

- dall'ordinamento dei jobs, i primi $h+1$ hanno tutti un tempo di esecuzione $\geq t_{h+1}$
- ma allora $m^* \geq 2t_{h+1}$, poiché in ogni schedule almeno 1 degli h processori deve ricevere almeno 2 dei primi $h+1$ job

□

teorema: Ordered-Greedy é $(\frac{3}{2} - \frac{1}{2h})$-approssimante

Ordered-Greedy é $(\frac{3}{2} - \frac{1}{2h})$-approssimante

dimostrazione:

- di nuovo sia k uno dei processori piú carichi (alla fine)
- se k ha 1 solo job, allora chiaramente la soluzione ritornata é ottima
- altrimenti considera l'ultimo job p_l assegnato a k
- dato che p_l non é il primo job assegnato a k, $l \geq h+1$ e quindi $t_l \leq t_{h+1} \leq \frac{m^*}{2}$, e cosí:

$$m \leq \frac{T}{h} + \frac{h-1}{h} t_l \leq m^* + \frac{h-1}{h} \frac{m^*}{2} =$$

$$= m^* + \frac{m^*(h-1)}{2h} = \frac{2hm^* + m^*(h-1)}{2h} = \frac{2hm^* + hm^* - m^*}{2h} =$$

$$= \frac{3hm^* - m^*}{2h} = (\frac{3h-1}{2h})m^* = (\frac{3h}{2h} - \frac{1}{2h})m^* = (\frac{3}{2} - \frac{1}{2h})m^*$$

□

problema: max cut

- INPUT: grafo $G = (V, E)$
- SOLUZIONE: una partizione di V in 2 sottoinsiemi V_1 e V_2, ovvero tale che:

$$V_1 \cup V_2 = V \text{ e } V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

- MISURA: la cardinalitá del taglio, ovvero il numero di archi con un estremo (nodo) in V_1 e un estremo in V_2, cioé:

$$|\{\{u, v\} \mid u \in V_1 \text{ e } v \in V_2\}|$$

algoritmo: Greedy-Max-Cut

Algorithm 5 Greedy-Max-Cut

$V_1 = V_2 = \emptyset$
for $i = 1$ to n **do**
  // Δ_i = set di archi tra i e i nodi $j < i$ (adiacenti)
  $\Delta_i = \{\{i, j\} \in E \mid j < i\}$
  // U_i = set di nodi giá inseriti (adiacenti ad i, all'inizio dello step i)
  $U_i = \{j \mid \{i, j\} \in \Delta_i\}$
  $\delta_i = |\Delta_i| = |U_i|$
  $\delta_{1i} = |V_1 \cap U_i|$
  $\delta_{2i} = |V_2 \cap U_i|$
  // chiaramente $\delta_{1i} + \delta_{2i} = \delta_i$
  if $\delta_{1i} > \delta_{2i}$ **then**
    $V_2 = V_2 \cup \{i\}$
  else
    $V_1 = V_1 \cup \{i\}$
  end if
end for
return V_1, V_2

- per semplicitá sia $V = \{1, \ldots, n\}$
- l'algoritmo ad ogni step inserisce un nuovo nodo in V_1 o in V_2
- scelta greedy:
  - allo step i, il nodo i viene inserito in modo da massimizzare il numero di archi nuovi nel taglio, ovvero in V_1 se il numero di archi che ha verso i nodi giá inseriti in V_2 é maggiore ($\geq$) del numero di archi che ha verso quelli in V_1, altrimenti in V_2 ($<$)

teorema: Greedy-Max-Cut é $\frac{1}{2}$-approssimante

Greedy-Max-Cut é $\frac{1}{2}$-approssimante

dimostrazione:

- chiaramente poiché quel taglio puó solo contenere un sottoinsieme di tutti gli archi in E

$$m^* \leq |E|$$

- mostriamo ora che la misura m del taglio restituita dall'algoritmo é almeno la metá del numero totale di archi, ovvero:

$$m \geq \frac{|E|}{2}$$

- ció implica chiaramente l'affermazione, poiché

$$\frac{m}{m^*} \geq \frac{\frac{|E|}{2}}{|E|} = \frac{1}{2}$$

- poiché gli insiemi Δ_i determinati dall'algoritmo formano una partizione di E e per definizione $\delta_i = |\Delta_i|$:

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i = \sum_{i=1}^{n} |\Delta_i| = |E|$$

- inoltre, il numero di archi aggiunti al taglio durante lo step i, ovvero con un estremo in V_1 e l'altro in V_2 (dopo l'esecuzione dell' i-esima iterazione dell'istruzione for), é:

$$\max(\delta_{1i}, \delta_{2i}) \geq \frac{(\delta_{1i} + \delta_{2i})}{2} = \frac{\delta_i}{2}$$

- quindi:

$$m = \sum_{i=1}^{n} \max(\delta_{1i}, \delta_{2i}) \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{2} = \frac{|E|}{2}$$

□

conclusioni sulla tecnica greedy

- tutti gli algoritmi visti fin ora hanno complessitá temporale polinomiale
- gli algoritmi greedy hanno buone performance in pratica poiché possono essere implementati in modo semplice
- ma come abbiamo visto, compiere la scelta che sembra migliore a ciascun singolo step, senza badare alle conseguenze future, in generale non permette di trovare la soluzione ottima

algorithmic techniques: local search

caratteristiche

- definiamo, per ogni soluzione ammissibile y, un sottoinsieme di soluzioni ammissibili "vicine" chiamato intorno di y o semplicemente $neighborhood(y)$
- partendo da una soluzione iniziale, si passa ripetutamente ad una soluzione migliore nell'intorno corrente, finché possibile

schema di un algoritmo di ricerca locale

- risolve una soluzione iniziale y ammissibile per l'input x (di solito una banale)
- fintanto che esiste una $y' \in neighborhood(y)$ migliore di y
  - sia $y = y'$
- ritorna y
- per definire un algoritmo di ricerca locale per un determinato problema é quindi sufficiente definire:
  - la soluzione iniziale
  - l'intorno delle soluzioni ammissibili

complessitá

- per ottenere una complessitá temporale polinomiale:
  - la soluzione iniziale deve essere determinata in tempo polinomiale
  - il test della condizione di guardia del $while$ e l'eventuale conseguente determinazione di una soluzione migliore nell'intorno deve essere eseguito in tempo polinomiale
  - NOTA: l'intorno puó avere una cardinalitá esponenziale rispetto alla dimensione dell'input!
  - il numero di iterazioni del $while$ deve essere polinomiale

approssimazione

- OTTIMO LOCALE: la soluzione y restituita é la migliore nell'intorno considerato
- per limitare il rapporto di approssimazione é sufficiente limitare il rapporto tra il valore di un qualsiasi ottimo locale con quello della misura di una soluzione ottima globale

definizione dell'intorno

- $neighborhood(y)$:
  - sufficientemente "ricco", per ottenere buone soluzioni (ottimi locali)
  - sufficientemente "povero", per garantire una complessitá temporale polinomiale

definizione dell'intorno: casi estremi

- $neighborhood(y) = \emptyset$
  - tempo di esecuzione polinomiale (se la soluzione iniziale viene determinata in tempo polinomiale)
  - cattiva approssimazione (ogni soluzione é un ottimo locale)
- $neighborhood(y) = S(x)$, ovvero l'insieme di tutte le soluzioni ammissibili per x
  - tempo di esecuzione non polinomiale (se il problema é NP-HARD)
  - buona approssimazione (poiché ogni ottimo locale é anche un ottimo globale)

problema: max cut (giá definito precedentemente)

- INPUT: grafo $G = (V, E)$
- SOLUZIONE: una partizione di V in 2 sottoinsiemi V_1 e V_2, ovvero tale che:

$$V_1 \cup V_2 = V \text{ e } V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

- MISURA: la cardinalitá del taglio, ovvero il numero di archi con un estremo (nodo) in V_1 e un estremo in V_2, cioé:

$$|\{\{u, v\} \mid u \in V_1 \text{ e } v \in V_2\}|$$

algoritmo di ricerca locale per max cut

- per definire l'algoritmo di ricerca locale, é sufficiente determinare:
  - la soluzione iniziale:
    $$V_1 = V, \ V_2 = \emptyset$$
  - l'intorno:
    * dati $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e V_1, V_2, le soluzioni dell'intorno di (V_1, V_2) sono tutte le coppie (V_{1i}, V_{2i}) con $1 \leq i \leq n$ che possono essere ottenute muovendo un nodo v_i da V_1 a V_2 o viceversa, ovvero:

$$\text{if } (v_i \in V_1) \ V_{1i} = V_1 \setminus \{v_i\} \text{ e } V_{2i} = V_2 \cup \{v_i\}$$

$$\text{else } (v_i \in V_2) \ V_{1i} = V_1 \cup \{v_i\} \text{ e } V_{2i} = V_2 \setminus \{v_i\}$$

complessitá (algoritmo di ricerca locale per max cut)

- la soluzione iniziale viene banalmente ottenuta in tempo polinomiale
- il test della guardia $while$ e l'eventuale determinazione di una migliore soluzione nell'intorno viene effettuata in tempo polinomale come segue:
  - per ciascuna delle n soluzioni dell'intorno (n iterazioni), controlla se la soluzione corrente é migliore (n^2 iterazioni) $\rightarrow O(n^3)$
- le iterazioni nel $while$ sono al massimo ($\leq$) $|E| = O(n^2)$,poiché ogni iterazione migliora la soluzione corrente, ovvero aumenta almeno di 1 il numero di archi del taglio, e vi sono $|E|$ archi nel taglio (al massimo)
- quindi l'algoritmo ha complessitá temporale:

$$O(n^3 n^2) = O(n^5)$$

approssimazione (algoritmo di ricerca locale per max cut)

- vediamo una proprietá utile a mostrare il rapporto di approssimazione dell'algoritmo:

fatto (approssimazione (algoritmo di ricerca locale per max cut))

dato un grafo $G = (V, E)$, sia δ_i il grado di un generico nodo $v_i \in V$, allora:

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i = 2|E|$$

dimostrazione:

- banalmente vero, poiché ogni arco viene contato 2 volte nella somma, ovvero incrementa la somma di 2

□

teorema: l'algoritmo di ricerca locale é $\frac{1}{2}$-approssimante

l'algoritmo di ricerca locale é $\frac{1}{2}$-approssimante

dimostrazione:

- mostriamo che ogni ottimo locale (V_1, V_2) ha misura:

$$m \geq \frac{|E|}{2}$$

- ció implica:

$$\frac{m}{m^*} \geq \frac{\frac{|E|}{2}}{|E|} = \frac{1}{2}$$

- poiché $m^* \leq |E|$
- dato un ottimo locale (V_1, V_2) denotiamo con h il numero di archi interni, ovvero con entrambi gli estremi in V_1 o in V_2
- chiaramente, $m + h = |E|$
- per ogni nodo $v_i \in V$ definiamo i gradi interni ed esterni del nodo come segue:
  - $\delta_i^{int} =$ numero di archi che v_i ha verso i nodi nella sua stessa partizione, ovvero:

$$\delta_i^{int} = |\{v_k | \{v_i, v_k\} \in E \text{ e } (v_i, v_k \in V_1) \text{ o } (v_i, v_k \in V_2)\}|$$

  - $\delta_i^{ext} =$ numero di archi che v_i ha verso i nodi nell'altra partizione, ovvero:

$$\delta_i^{ext} = |\{v_k | \{v_i, v_k\} \in E \text{ e } (v_i \in V_1, v_k \in V_2) \text{ o } (v_i \in V_2, v_k \in V_1)\}|$$

- poiché la soluzione nell'intorno (V_{1i}, V_{2i}) ha misura non maggiore ($\leq$) di quella di (V_1, V_2) (ottimo locale), abbiamo:

$$m - \delta_i^{ext} + \delta_i^{int} \leq m$$

- e quindi:

$$\delta_i^{int} - \delta_i^{ext} \leq 0$$

- riassumento, su tutti i nodi, abbiamo:

$$\sum_{v_i \in V} \delta_i^{int} - \sum_{v_i \in V} \delta_i^{ext} = \sum_{v_i \in V} (\delta_i^{int} - \delta_i^{ext}) \leq 0$$

- dal fatto precedente:

$$\sum_{v_i \in V} \delta_i^{int} = 2h$$

  (perché é come sommare i gradi dei nodi del grafo contenente solo gli archi interni)

- e (sempre dal fatto precedente):

$$\sum_{v_i \in V} \delta_i^{ext} = 2m$$

  (perché é come sommare i gradi dei nodi del grafo contenente solo gli archi esterni)

- quindi:

$$0 \geq \sum_{v_i \in V} \delta_i^{int} - \sum_{v_i \in V} \delta_i^{ext} = 2h - 2m$$

- ovvero $m \geq h$
- quindi (aggiungendo m su entrambi i lati e dividendo per 2), otteniamo:

$$\frac{2m}{2} \geq \frac{(m+h)}{2} = m \geq \frac{(m+h)}{2} = \frac{|E|}{2}$$

□

TODO: esempio esecuzione algoritmo di ricerca locale su grafo

conclusioni sulla tecnica della ricerca locale

- come gli algoritmi greedy, gli algoritmi di ricerca locale hanno buone performance nella pratica e portano alla determinazione di buone euristiche (algoritmi che eseguono bene nella pratica ma che di solito non hanno prestazioni garantite in termini di tempo o approssimazione)

algorithmic techniques: linear programming (rounding)

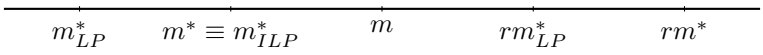
caratteristiche

- il problema é formulato come un programma lineare intero (ILP: integer linear program)
- programma lineare intero: programmi lineare + vincoli di interezza
- esiste un algoritmo con complessitá temporale polinomale (algoritmo ellissoide) per risolvere problemi lineari, ma...
- risolvere un programma lineare intero é un problema NP-HARD
- la formulazione come ILP consente di utilizzare potenti mezzi generali che, in base alle proprietá dell'ILP, sono in grado di fornire algoritmi con buona approssimazione:
  - rounding (arrotondamento)
  - primal-dual (primale-duale)

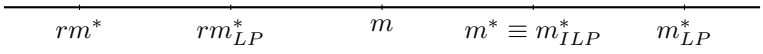
rounding: caratteristiche

- il problema é formulato come un programma lineare
- il rilassamento lineare (LP) viene ottenuto dall'ILP rilassando i vincoli d'interezza, ovvero sostituendoli con adeguati vincoli lineari (sugli interi)
- la soluzione ottenuta (ottima per LP) é arrotondata ad una vicina soluzione intera ammissibile per ILP
- la misura m della soluzione ottenuta é in seguito confrontata con quella della soluzione ottima LP, ovvero m^*_{LP}, cioé un limite inferiore ($\min$) o superiore ($\max$) per m^*

min problems



max problems



problema: min weighted vertex cover

- INPUT:
  - un grafo $G = (V, E)$
  - un costo intero c_j associato ad ogni $v_j \in V$
- SOLUZIONE:

$$U \subseteq V \mid v_j \in U \vee v_k \in U, \ \forall \{v_j, v_k\} \in E$$

- MISURA: costo totale di U, ovvero

$$\sum_{v_j \in U} c_j$$

ILP: min weighted vertex cover

- funzione obiettivo: $\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$
- vincoli: $x_j + x_k \geq 1$, $\forall \{v_j, v_k\} \in E$
- vincoli interi: $x_j \in \{0,1\}$, $\forall v_j \in V$, $\forall j$ con $1 \leq j \leq n$

LP: min weighted vertex cover (rilassamento lineare)

- $\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$
- $x_j + x_k \geq 1$, $\forall \{v_j, v_k\} \in E$
- ~~$x_j \leq 1$, $\forall v_j \in V$~~ (superfluo)
- $x_j \geq 0$, $\forall v_j \in V$

algoritmo: Round-Vertex-Cover

Algorithm 6 Round-Vertex-Cover

determina l'ILP associato all'istanza in input
risolvi il rilassamento lineare LP dell'ILP
sia $< x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^* >$ la risultante soluzione ottima dell'LP
$\forall v_j$ sia $x_j = 1$ se $x_j^* \geq \frac{1}{2}$ e $x_j = 0$ se $x_j^* < \frac{1}{2}$
return il cover U associato a $< x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^* >$, ovvero tale che $U = \{v_j \in V \mid x_j = 1\}$

teorema: l'algoritmo Round-Vertex-Cover é 2-approssimante

l'algoritmo Round-Vertex-Cover é 2-approssimante

dimostrazione:

- é sufficiente mostrare che:
  1. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é ammissibile per l'ILP (esso soddisfa tutti i vincoli), ovvero U é un cover
  2. $\frac{m}{m_{LP}^*} \leq 2$ e quindi anche $\frac{m}{m^*} \leq \frac{m}{m_{LP}^*} \leq 2$
- DIMOSTRIAMO 1.
  - dall'ammissibilitá di $< x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^* >$ per LP, per ogni arco $\{v_j, v_k\} \in E$ vale $x_j^* + x_k^* \geq 1$
  - ovvero $x_j^* \geq 0.5$ o $x_k^* \geq 0.5$, cosí che $x_j = 1$ o $x_k = 1$, e quindi $x_j + x_k \geq 1$ é soddisfatto in ILP

■

- DIMOSTRIAMO 2.

$$m = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ldots$$

  - (dall'arrotondamento: $x_j \leq 2x_j^*$)

$$m = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{n} c_j 2x_j^* = 2 \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* \ldots$$

- ($\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = m_{LP}^*$)

$$m = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{n} c_j 2x_j^* = 2\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = 2m_{LP}^*$$

- ovvero:

$$\frac{m}{m^*} \leq \frac{m}{m_{LP}^*} \leq 2$$

■

□

problema: min weighted set cover

- INPUT:
  - un universo $U = \{o_1, o_2, \ldots, o_n\}$ di n oggetti
  - una famiglia $\hat{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_h\}$ di h sottoinsiemi di U
  - un costo intero c_j associato ad ogni $S_j \in \hat{S}$
- SOLUZIONE: un cover di U, ovvero una sottofamiglia $\hat{C} \subseteq \hat{S}$ tale che:

$$\cup_{S_j \in \hat{C}} S_j = U$$

- MISURA: costo totale del cover, ovvero

$$\sum_{S_j \in \hat{C}} c_j$$

- $f =$ frequenza massima di un oggetto nel sottoinsieme $\hat{S}$, ovvero ciasun oggetto occorre in al massimo f sottoinsiemi
- dato un insieme di n elementi $\{1, 2, \ldots, n\}$ (chiamato universo) e una collezione S di m insiemi, la cui unione eguaglia l'universo, il problema del set cover consiste nell'identificare il piú piccolo sottoinsieme di S la cui unione eguaglia l'universo

ILP: min weighted set cover

- funzione obiettivo: $\min \sum_{j=1}^{h} c_j x_j$
- vincoli: $\sum_{S_j | o_i \in S_j} x_j \geq 1, \ \forall o_i \in U$
- vincoli interi: $x_j \in \{0, 1\}, \ \forall S_j \in \hat{S}$

LP: min weighted set cover (rilassamento lineare)

- $\min \sum_{j=1}^{h} c_j x_j$
- $\sum_{S_j | o_i \in S_j} x_j \geq 1, \ \forall o_i \in U$
- ~~$x_j \leq 1, \ \forall S_j \in \hat{S}$~~ (superfluo)
- $x_j \geq 0, \ \forall S_j \in \hat{S}$

algoritmo: Round-Set-Cover

Algorithm 7 Round-Set-Cover

determina l'ILP associato all'istanza in input
risolvi il rilassamento lineare LP dell'ILP
sia $< x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^* >$ la risultante soluzione ottima dell'LP
$\forall S_j$ sia $x_j = 1$ se $x_j^* \geq \frac{1}{f}$ e $x_j = 0$ se $x_j^* < \frac{1}{f}$
return il cover risultante, ovvero $\hat{C} = \{S_j \in \hat{S} \mid x_j = 1\}$

teorema: l'algoritmo Round-Set-Cover é f-approssimante ($f \geq 1$)

l'algoritmo Round-Set-Cover é f-approssimante ($f \geq 1$)

dimostrazione:

- é sufficiente mostrare che:
  1. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é ammissibile per l'ILP
  2. $\frac{m}{m^*_{LP}} \leq f$ e quindi anche $\frac{m}{m^*} \leq \frac{m}{m^*_{LP}} \leq f$
- DIMOSTRIAMO 1.
  - dall'ammissibilitá di $< x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^* >$ per LP, $\forall o_i \in U$

$$\sum_{S_j | o_i \in S_j} x_j^* \geq 1$$

  - e poiché la somma ha al massimo ($\leq$) f termini, deve esistere S_j contenente o_i tale che $x_j^* \geq \frac{1}{f}$, ovvero tale che $x_j = 1$, e quindi:

$$\sum_{S_j | o_i \in S_j} x_j \geq 1$$

■

- DIMOSTRIAMO 2.

$$m = \sum_{j=1}^{h} c_j x_j \ldots$$

  - (dall'arrotondamento: $x_j \leq f x_j^*$)

$$m = \sum_{j=1}^{h} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{h} c_j f x_j^* = f \sum_{j=1}^{h} c_j x_j^* \ldots$$

  - ($\sum_{j=1}^{h} c_j x_j^* = m^*_{LP}$)

$$m = \sum_{j=1}^{h} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{h} c_j f x_j^* = f \sum_{j=1}^{h} c_j x_j^* = f m^*_{LP}$$

  - ovvero:

$$\frac{m}{m^*} \leq \frac{m}{m^*_{LP}} \leq f$$

■

□

algorithmic techniques: dynamic programming (part 1)

caratteristiche

- come nel paradigma divide-and-conquer, suddividi il problema in sottoproblemi piú piccoli, risolvi ricorsivamente ciasun sottoproblema e combina le soluzioni dei sottoproblemi per formare la soluzione al problema originale
- ricorrenza facile da calcolare che consente di determinare la soluzione ad un sottoproblema dalla soluzione di sottoproblemi piú piccoli
- differentemente da divide-and-conquer, i sottoproblemi non sono indipendenti, ma si sovrappongono, ovvero durante le decomposizioni occorrono frequentemente gli stessi sottoproblemi
- idea: ciascun sottoproblema viene risolto solo una volta, ció riduce la complessitá temporale
- differentemente da divide-and-conquer, di solito é con approccio bottom-up invece che top-down, ovvero partendo da sottoproblemi piú piccoli e risolvendo progressivamente quelli piú grandi, fino al problema iniziale

uno sguardo piú ravvicinato...

- il paradigma divide-and-conquer é basato sulla decomposzione dei problemi in sottoproblemi piú piccoli:
  - risolvi ricorsivamente i sottoproblemi
  - combina le soluzioni dei sottoproblemi per determinare la soluzione del problema iniziale
- se un problema di taglia n é decomposto in k sottoproblemi di taglie $n_1, n_2, \ldots, n_k < n$, rispettivamente, allora la complessitá temporale puó essere espressa dall ricorrenza

$$T(n) = T(n_1) + T(n_2) + \ldots + T(n_k) + C(n)$$

  con $C(n) =$ tempo per combinare le k sottosoluzioni
- la ricorrenza puó essere risolta con metodi differenti, come ad esempio il ricorso al celebre Master Theorem
- un classico esempio di applicazione di divide-and-conquer é il calcolo dei numeri di Fibonacci
- l'algoritmo deriva direttamente dalla definizione ricorsiva di tali numeri

algoritmo: Fibonacci

- caso base: $(n \leq 2)$ $F(1) = F(2) = 1$
- caso induttivo: $(n > 2)$ $F(n) = F(n-1) + F(n-2), n$

Algorithm 8 Fibonacci

```
if n = 1 or n = 2 then
  return 1
else
  return Fibonacci(n-1)+Fibonacci(n-2)
end if
```

- complessitá temporale:

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + \Theta(1)$$

- che restituisce:

$$T(n) = O(2^n)$$

- albero delle chiamate ricorsive:
  - nota:
    * inefficiente: gli stessi sottoproblemi vengono risolti ripetutamente per molte volte

algoritmo: Fibonacci 2

- programmazione dinamica:
  - memorizza la soluzione di ciascun sottoproblema in una tabella o in un array, cosí da evitare di risolverli ripetutamente
  - nell'algoritmo risultante, F é un array esterno globale visibile a tutte le chiamate ricorsive
- nuovo albero delle chiamate ricorsive

Algorithm 9 Fibonacci 2

```
if n = 1 or n = 2 then
  F[n] = 1
  return F[n]
else
  if F[n] é stato giá assegnato then
    return F[n]
  else
    F[n] = Fibonacci(n − 1) + Fibonacci(n − 2)
    return F[n]
  end if
end if
```

algoritmo: Fibonacci 3

Algorithm 10 Fibonacci 3

```
F[1] = 1
F[2] = 1
for i = 3 to n do
  F[i] = F[i − 1] + F[i − 2]
end for
return F[n]
```

riassumendo

- in programmazione dinamica:
  - il problema iniziale puó essere ricorsivamente decomposto in sottoproblemi
  - gli stessi sottoproblemi occorrono molte volte e sono risolti una volta soltanto

    - la soluzione di un sottoproblema puó essere ottenuta combinando quelle dei sottoproblemi piú piccoli
- 2 possibili implementazioni:
    - top-down (con annotazione in tabella)
    - bottom-up

top-down vs. bottom-up

- top-down
    - sfrutta l'annotazione in tabella
    - PRO: risolve solo i sottoproblemi strettamente necessari
    - CON: overhead derivante dalla catena di chiamate ricorsive
- bottom-up
    - é la scelta tipica nella programmazione dinamica
    - PRO: risolve anche i problemi non necessari
    - CON: é in ogni caso generalmente piú efficiente perché elimina il peso della ricorsione, il quale incide maggiormente sulle prestazioni

divide-and-conquer vs. dynamic programming

divide-and-conquer

- tecnica ricorsiva
- approccio top-down (problemi divisi in sottoproblemi)
- utile quando i sottoproblemi sono indipendenti (ovvero differenti)
- altrimenti, gli stessi sottoproblemi vengono risolti piú volte

dynamic programming

- tecnica iterativa
- tipicamente approccio bottom-up
- utile quando i sottoproblemi si sovrapppongono (ovvero coincidono)
- ciasun sottoproblema viene risolto una volta soltanto

algorithmic techniques: dynamic programming (part 2)

progettazione di algoritmi di programmazione dinamica

- fornire una decomposizione ricorsiva dei sottoproblemi
- calcolare le sottosoluzioni in maniera bottom-up, ovvero partendo dai sottoproblemi di taglia piú piccola
    - utilizzare una tabella per memorizzare i risultati dei sottoproblemi
    - evitare il calcolo delle stesse soluzioni sfruttando la tabella
- combinare le soluzioni dei sottoproblemi giá risolti per costruire quelle dei sottoproblemi di taglia maggiore, fino alla risoluzione del problema originale

complessitá degli algoritmi di programmazione dinamica

- consideriamo la seguente tabella:
  - $n =$ taglia dei sottoproblemi $(1, 2, \ldots, n)$
  - $k =$ parametri dei sottoproblemi $(p_1, p_2, \ldots, p_k)$
- taglia della tabella $=$ numero di sottoproblemi $= nk$
- complessitá:
  - [taglia della tabella] $\times$ [tempo per combinare le soluzioni]
  - il tempo per combinare le soluzioni é sempre banalmente polinomiale
  - la complessitá é polinomale se la tabella ha taglia polinomale, ovvero se é presente un numero polinomale di differenti sottoproblemi

problema: max 0-1 knapsack (giá definito precedentemente)

- INPUT:
  - un insieme finito di oggetti O
  - un profitto intero p_i, $\forall o_i \in O$
  - un peso intero w_i, $\forall o_i \in O$
  - un intero positivo b $(b > 0)$
- SOLUZIONE:
  - un sottoinsieme di oggetti $Q \subseteq O$ tale che $\sum_{o_i \in Q} w_i \leq b$
- MISURA:
  - profitto totale degli oggetti scelti, ovvero $\sum_{o_i \in Q} p_i$

- senza perdere di generalitá, in seguito, assumeremo sempre che:
  - $w_i \leq b$, $\forall o_i \in O$
  - $p_i > 0$, $\forall o_i \in O$

algoritmo brute force

- semplice algoritmo che enumera tutti i possibili 2^n sottoinsiemi degli n elementi
- sceglie la migliore combinazione (miglior profitto)
- l'algoritmo di programmazione solutamente ha performance migliori

progettazione dell'algoritmo di programmazione dinamica

- definizione:
  - $OPT(i, w) =$ sottoinsieme con profitto massimo di oggetti $1, 2, \ldots, n$ con limite di peso w
- fatto:
  - $OPT(n, b) =$ soluzione ottima del problema iniziale
- le seguente alternative possono occorrere per OPT:
  1. OPT non seleziona l'oggetto i

- OPT seleziona il migliore tra $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ utilizzando il limite di peso w

2. OPT seleziona l'oggetto i
   - OPT seleziona il migliore tra $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ utilizzando il limite di peso $w - w_i$

- assumiamo che $OPT(k, w)$ sia la soluzione ottima per gli elementi $\{o_1, o_2, \ldots, o_k\}$
- nota: la soluzione ottima $OPT(k+1, w)$ potrebbe non corrispondere a $OPT(k, w)$
- anche perché $OPT(k+1, w)$ potrebbe non essere un superset di $OPT(k, w)$

definizione ricorsiva per OPT

- possiamo dunque fornire la seguente definizione ricorsiva per OPT:
  - $OPT(i, w) = \emptyset$ se $i = 0$
  - $OPT(i, w) = OPT(i-1, w)$ se $w_i > w$
  - $OPT(i, w) =$ scelta migliore tra $OPT(i-1, w)$ e $OPT(i-1, w-w_i) \cup \{o_i\}$ (altrimenti)

definizione ricorsiva per la misura m della soluzione ottima $OPT(i, w)$

- in termini di misura $m(i, w)$ della soluzione ottima $OPT(i, w)$
  - $m(i, w) = 0$ se $i = 0$
  - $m(i, w) = m(i-1, w)$ se $w_i > w$
  - $m(i, w) = \max\{m(i-1, w), m(i-1, w-w_i) + p_i\}$ (altrimenti)
- chiaramente, $m^* = m(n, b)$

riepilogo definizioni ricorsive per m e OPT

- come risultato, questo significa che il migliori sottoinsieme di k oggetti con vincolo di peso w é (mutua esclusione):
  - il miglior sottoinsieme di $(k-1)$ oggetti con peso totale w
  - il miglior sottoinsieme di $(k-1)$ oggetti con peso totale $w - w_k$, piú il contributo (il suo peso) del k-esimo oggetto
  - quindi per quando riguarda la seguente formula ricorsiva:
    * $OPT(i, w) = \emptyset$ se $i = 0$
    * $OPT(i, w) = OPT(i-1, w)$ se $w_i > w$
    * $OPT(i, w) =$ scelta migliore tra $OPT(i-1, w)$ e $OPT(i-1, w-w_i) \cup \{o_i\}$ (altrimenti)
  - o il k-esimo oggetto non puó essere parte della soluzione (poiché il suo solo peso é cosí grande che l'oggetto stesso non entra nel knapsack)
  - altrimenti, scegliamo la soluzione migliore tra:
    * la soluzione che include il nuovo oggetto
    * la soluzione migliore che non include il nuovo oggetto

Algorithm 11 Progr-Dyn-Knapsack

```
// inizializzazione a 0 della prima riga dell'array bidimensionale M (da 1 a w)
for w = 1 to b do
  M[0, w] = 0
end for
// inizializzazione a 0 della prima colonna dell'array bidimensionale M (da 0 a n)
for i = 0 to n do
  M[i, 0] = 0
end for
for i = 1 to n do
  for w = 1 to b do
    if w_i > w then
      M[i, w] = M[i − 1, w]
    else
      M[i, w] = max{M[i − 1, w], M[i − 1, w − w_i] + p_i}
    end if
  end for
end for
return M[n, b]
```

algoritmo: Progr-Dyn-Knapsack

- l'algoritmo Progr-Dyn-Knapsack per il problema max 0-1 knapsack, trova il massimo valore che puó essere inserito dentro il knapsack
- il valore viene memorizzato in $M[n, b]$ al termine della procedura
- per scoprire quali sono gli oggetti che sono stati inseriti nella soluzione ottima,bisogna tornare indietro nella tabella:
  - dobbiamo memorizzare in qualche modo ciascun oggetto aggiunto

algoritmo: Progr-Dyn-Knapsack (trovare gli oggetti inseriti)

Algorithm 12 Progr-Dyn-Knapsack (trovare gli oggetti inseriti)

```
i = n
k = w
if M[i, k] ≠ M[i − 1, k] then
  marca l'oggetto i come 'inserito nel knapsack'
  i = i − 1
  k = k − w_i
else
  // assumi che l'oggetto i-esimo non sia stato inserito nel knapsack
  i = i − 1
end if
```

teorema: l'algoritmo Progr-Dyn-Knapsack ha complessitá temporale $O(nb)$

la complessitá temporale dell'algoritmo Progr-Dyn-Knapsack é $O(nb)$

dimostrazione:

- l'algoritmo impiega $O(1)$ per ciascuna entry della tabella
- vi sono $O(nb)$ entry nella tabella

- dopo aver calcolato i valori possiamo risalire per trovare la soluzione ottima:
  - prendi l'elemento o_i in $OPT(i,w) \iff M[i-1,w] < M[i,w]$

□

domanda: l'algoritmo Progr-Dyn-Knapsack é polinomiale?

l'algoritmo Progr-Dyn-Knapsack é polinomiale?
(suggerimento: considera il caso in cui $b = 2^n$)

risposta:

- per essere polinomiale, la complessitá dovrebbe essere polinomiale nel logaritmo dei valori codificati nell'istanza in input, ovvero rispetto a $\log b$
- questa complessitá é chiamata **pseudo-polinomale**, ovvero polinomale nella dimensione e nei valori in input, non solo nella dimensione dell'input

algoritmo Progr-Dyn-Knapsack: approccio duale

approximation schemes

alternative approaches

social networks and bibliography

centrality measures

spectral analysis and prestige index

link analysis

web structure

search and advertising

matching markets

auctions

vcg mechanism

gsp mechanism