Contents

computational complexity

def: problema in computer science

un problema π é una relazione

$$\pi \subseteq I_\pi \times S_\pi$$

dove:

- $I_\pi =$ insieme delle istanze di input del problema
- $S_\pi =$ insieme delle soluzioni del problema

tipologie di problema

- decisione
  - si verifica se una data proprietá é valida per un determinato input
  - $S_\pi = \{true, false\}$ o semplicemente $S_\pi = \{0, 1\}$ e la relazione $\pi \subseteq I_\pi \times S_\pi$ corrisponde ad una funzione

    $$f : I_\pi \to \{0, 1\}$$

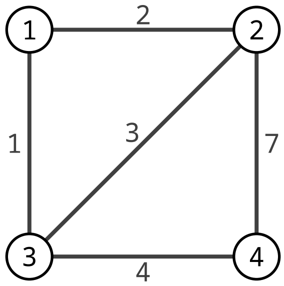
  - esempi: soddisfacibilitá, test di connettivitá di un grafo, etc....
- ricerca
  - data un'istanza $x \in I_\pi$, si chiede di determinare una soluzione $y \in S_\pi$ tale che la coppia $(x, y) \in \pi$ appartengono alla relazione che definisce il problema
  - esempi: soddisfacibilitá, clique, vertex cover, nei quali chiediamo in output un assegnamento di veritá soddisfacente, rispettivamente una clique o un vertex cover, invece di semplicemente "si" o "no"
- ottimizzazione
  - data un'istanza $x \in I_\pi$, si chiede di determinare una soluzione $y \in S_\pi$ ottimizzando una data misura della funzione costo
  - esempi: min spanning tree, max SAT, max clique, min vertex cover, min TSP, etc....

complessitá degli algoritmi e dei problemi

- espressa in funzione della taglia dell'input (denotata come $|x|, \forall x \in I_\pi$)
- taglia dell'istanza x
  - quantitá di memoria necessaria a memorizzare x in un computer
  - lunghezza $|x|_c$ della stringa che codifica x in un particolare codice naturale $c : I_\pi \to \Sigma$, dove Σ é l'alfabeto del codice c
- codice naturale
  - conciso: le stringhe che codificano le istanze non devono essere ridondanti o allungate inutilmente
  - numeri espressi in base ≥ 2

esempio: codice

- istanza: grafo G



- codice per G
  - $\Sigma = \{\{,\},,,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ (simboli)
  - $c(G) = \{1,2,3,4,\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\},2,1,3,7,4\}$
    * $\{1,2,3,4\}$ (nodi)
    * $\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$ (archi)
    * $\{2,1,3,7,4\}$ (pesi)
  - $|G|_c = 49$

def: tempo di esecuzione dell'algoritmo A

sia $t_A(x)$ il tempo di esecuzione dell'algoritmo A per l'input x_i, allora il tempo di esecuzione nel caso peggiore di A é:

$$T_A(n) = \max\{t_A(x) \mid |x| \leq n\}, \quad \forall n > 0$$

def: complessitá temporale dell'algoritmo A

l'algoritmo A ha complessitá temporale

- $O(g(n))$ se $T_A(n) = O(g(n))$, ovvero

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_A(n)}{g(n)} \leq c, \text{ per una costante } c > 0$$

- $\Omega(g(n))$ se $T_A(n) = \Omega(g(n))$, ovvero

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_A(n)}{g(n)} \geq c, \text{ per una costante } c > 0$$

- $\Theta(g(n))$ se $T_A(n) = \Theta(g(n))$, ovvero

$$T_A(n) = \Omega(g(n)) \text{ e } T_A(n) = O(g(n))$$

def: complessitá di un problema

un problema ha complessitá

- $O(g(n))$ se esiste un algoritmo che lo risolve avente complessitá $O(g(n))$
- $\Omega(g(n))$ se ogni algoritmo A che lo risolve ha complessitá $\Omega(g(n))$
- $\Theta(g(n))$ se ha complessitá $O(g(n))$ e $\Omega(g(n))$

problemi di decisione e classi di complessitá

i problemi di decisione sono solitamente descritti da un'istanza di input (o semplicemente INPUT) e da una DOMANDA sull'input esempi:

- soddisfacibilitá
  - INPUT: CNF (Conjunctive Normal Form) formula definita su un insieme di variabili
  - DOMANDA: esiste un assegnamento di veritá $\tau : V \to \{0,1\}$?
- clique
  - INPUT: un grafo non orientato $G = (V, E)$ di n nodi e un intero $k > 0$
  - DOMANDA: esiste in G una clique di almeno k nodi ($> k$), ovvero un sottoinsieme $U \subseteq V$ tale che $|U| \geq K$ e $\{u, v\} \in E$, $V \in U$?
- vertex cover
  - INPUT: un grafo non orientato $G = (V, E)$ di n nodi e un intero $k > 0$
  - DOMANDA: esiste in G una vertex cover di al massimo k nodi ($< k$), ovvero un sottoinsieme $U \subseteq V$ tale che $|U| \leq K$ e $u \in U$ o $v \in U$, $\forall \{u, v\} \in E$?

nei problemi di decisione $I_\pi = Y_\pi \cup N_\pi$

- $Y_\pi =$ insieme di istanze positive, ovvero con soluzione 1
- $N_\pi =$ insieme di istanze negative, ovvero con soluzione 0

def: un algoritmo A risolve π

un algoritmo A risolve $\pi \iff \forall$ input $x \in I_\pi$, A risponde $1 \iff x \in Y_\pi$

def: classe dei problemi $TIME(g(n))$

$TIME(g(n)) =$ classe dei problemi di decisione con complessitá $O(g(n))$

optimization problems body

approximation body

greedy body

local search body

rounding body

primal dual body

dynamic programming body

approximation schemes body

alternative approaches body

social networks and bibliography body

centrality measures body

spectral analysis and prestige index body

link analysis body

web structure body

search and advertising body

matching markets body

auctions body

vcg mechanism body

gsp mechanism body