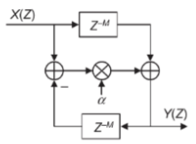
Trabajo Semanal 8

Trabajo semanal 8 - Filtros digitales.

1) Realizar el ejercicio 4 del TP5 de Filtros digitales.

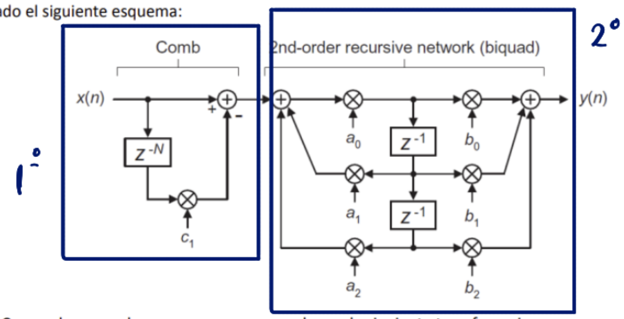
2) Se dispone del siguiente filtro digital:



a) Para la transferencia del filtro con M = 2 y α=0.8; calcular 1) el diagrama de polos y ceros y la respuesta en frecuencia de 2) módulo, 3) fase y 4) retardo de grupo.
b) Si quisiéramos anular una senoidal interferente de 125 Hz y su armónica de 375 Hz y sólo dispone de un sumador y el filtro de la figura con M = 4. Proponga un esquema de la solución y calcule los parámetros del filtro que sería necesario adecuar.

Ejercicio #4

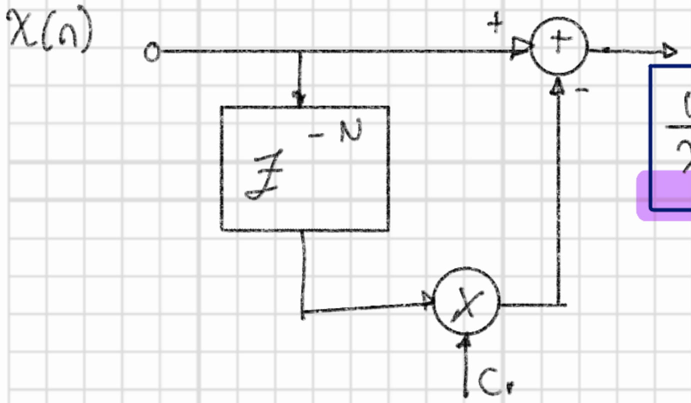
Dado el siguiente esquema:



a) Comprobar que el esquema se corresponde con la siguiente transferencia:

$$H(z) = \left(1 - c_1 \cdot z^{-N}\right) \cdot \frac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2}}{\frac{1}{a_0} - a_1 \cdot z^{-1} - a_2 \cdot z^{-2}}$$

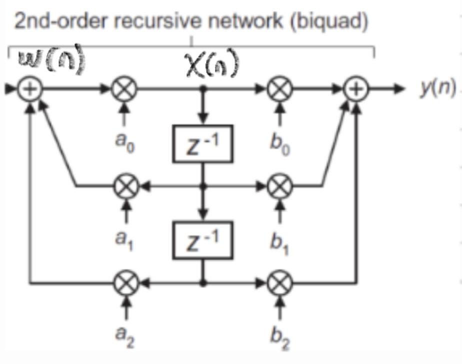
1era parte



$$w(n) = x(n) - x(n-N)C_1$$

$$\boxed{\frac{W(Z)}{X(Z)} = 1 - C_1 Z^{-N}}$$

2° parte



$$x(n) = w(n) \cdot a_0 + x(n-1) \cdot a_1 a_0 + x(n-2)\, a_2 \cdot a_0$$

$$X(Z)\left(1 - a_0 a_1 Z^{-1} - a_0 a_2 Z^{-2}\right) = W(Z)\, a_0$$

$$\boxed{\frac{X(Z)}{W(Z)} = \frac{a_0}{1 - a_0 a_1 Z^{-1} - a_0 a_2 Z^{-2}}}$$

$$y(n) = x(n)\cdot b_0 + x(n-1)\cdot b_1 + x(n-2)\cdot b_2$$

$$\boxed{\frac{Y(z)}{X(z)} = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}$$

$$H(z) = \frac{\cancel{W(z)}}{X_1(z)} \cdot \frac{\cancel{X_2(z)}}{\cancel{W(z)}} \cdot \frac{Y(z)}{\cancel{X_2(z)}} = \frac{Y(z)}{X_1(z)} = (1 - z^{-N}\cdot c_1)\cdot \frac{a_0 b_0 + a_0 b_1 z^{-1} + a_0 b_2 z^{-2}}{1 - a_0 a_1 z^{-1} - a_0 a_2 z^{-2}}$$

Si sacamos factor común a_0, obtenemos:

$$\boxed{H(z) = (1 - c_1 z^{-N})\cdot \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{\frac{1}{a_0} - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}}$$

$$H(z) = \left(1 - c_1 \cdot z^{-N}\right)\cdot \frac{b_0 + b_1\cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2}}{\frac{1}{a_0} - a_1\cdot z^{-1} - a_2\cdot z^{-2}}$$

Verifica

b) ***Filtro de media móvil*** (*moving average ó CIC: cascaded integrator comb*)

Verificar la transferencia para $a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ b_0 = \frac{1}{N},\ c_1 = 1$ y $N = (3,\ 4$ y $5)$

$$H(z) = \frac{1}{N}\cdot \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}$$

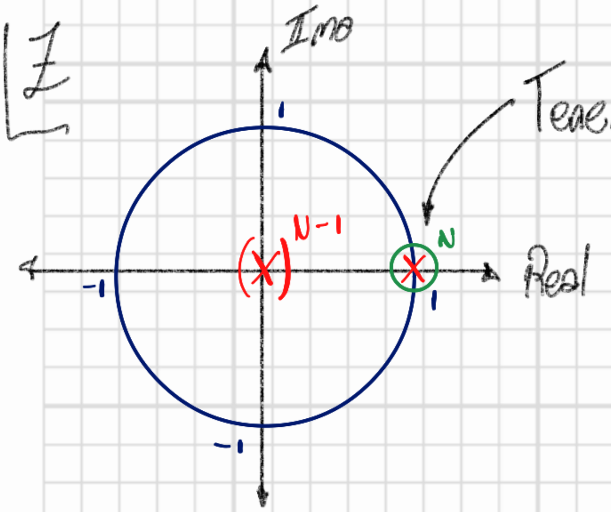
1. ¿Es un filtro IIR o FIR ?
2. Discuta las ventajas que tendría esta implementación respecto al filtro FIR de media móvil.
3. ¿Podría implementar el siguiente sistema $h_c(k) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ con esta topología ?

1. Los filtros FIR tienen polos únicamente en el origen, por lo que este filtro es IIR. Además $\underbrace{a_1 \neq 0}$.

Cond. Suf. para no ser FIR.

$$H(z) = \frac{1}{N} \cdot \frac{1 - \frac{1}{z^N}}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{N} \cdot \frac{z^N - 1}{\frac{z^N}{z}(z-1)} = \frac{1}{N}\,\frac{z^N - 1}{z^{N-1}(z-1)}$$

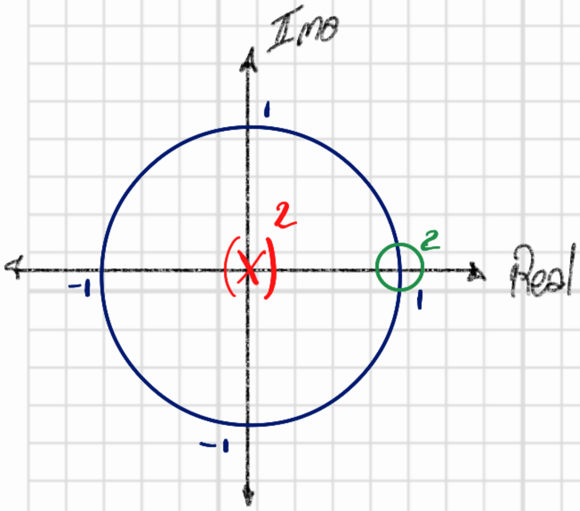
Diagrama de Polos y ceros



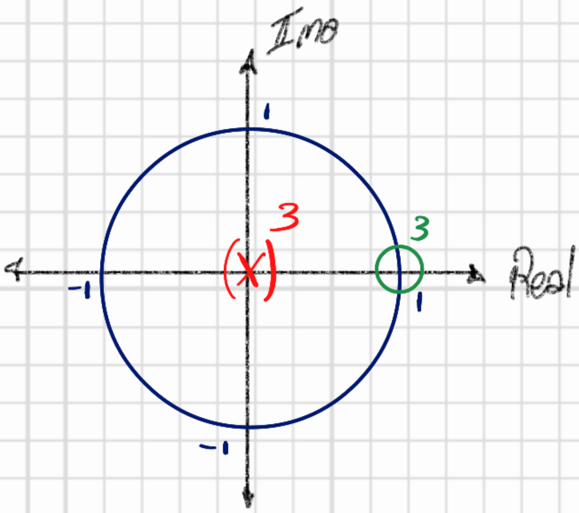
Tenemos "1" polo y "N" ceros en $Z=1$

Si especificamos para $N=\{3, 4, 5\}$ obtenemos los sig. diagramas.

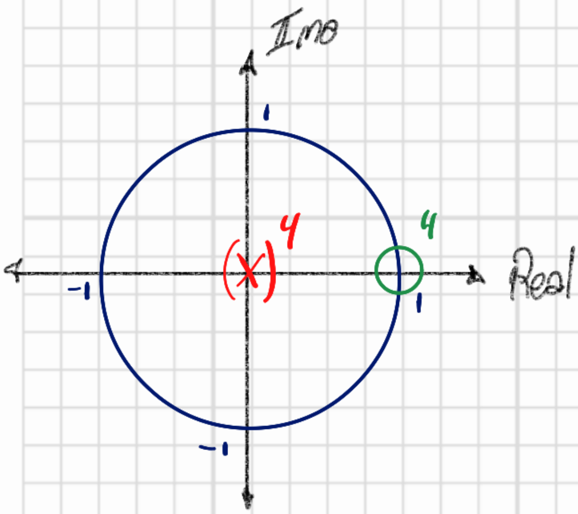
N = 3



N = 4



N = 5



2. Como principal ventaja encuentro que este filtro es realizable analogicamente.

En un principio pense que no era FIR, pero viendo estos gráficos, podemos ver que si es FIR.

Respuesta de modulo y fase

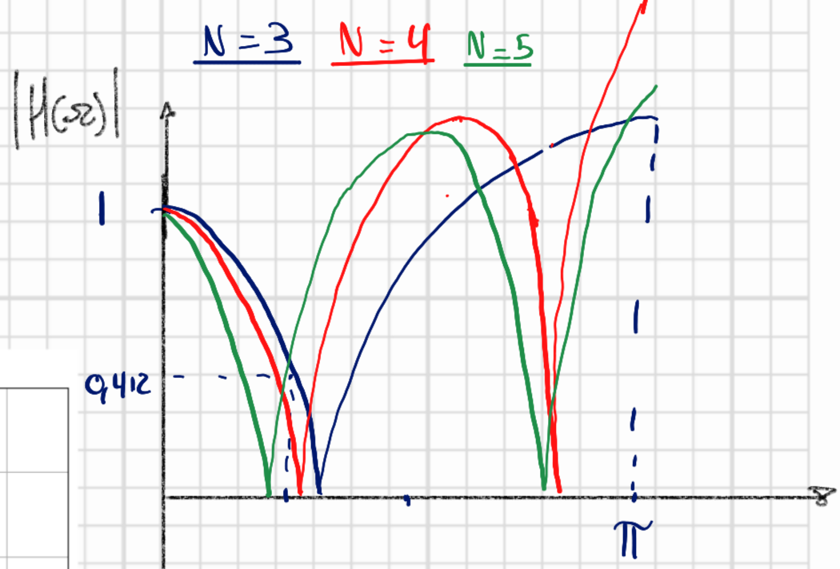
$$H(z) = \frac{1}{N}\,\frac{z^{N}-1}{z^{N-1}(z-1)} \Rightarrow H(\Omega) = H(z)\Big|_{z=e^{j\Omega}} = \frac{1}{N}\cdot\frac{e^{jN\Omega}-1}{e^{j(N-1)\Omega}\,(e^{j\Omega}-1)}$$

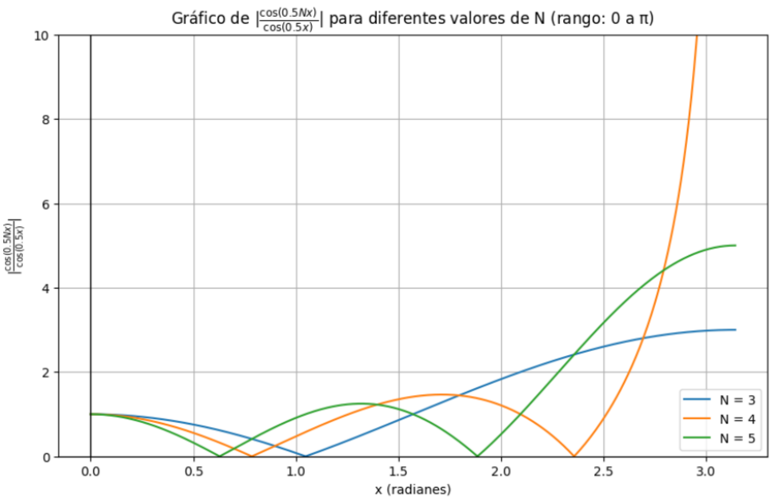
$$H(\Omega) = \frac{1}{N}\cdot\frac{\cancel{e^{jN\Omega}}\,(1-e^{-jN\Omega})}{\cancel{e^{jN\Omega}}\,e^{-j\Omega}\,(e^{j\Omega}-1)} = \frac{1}{N}\,\frac{1-e^{-jN\Omega}}{1-e^{-j\Omega}} = \frac{1}{N}\cdot\frac{e^{j0}-e^{-jN\Omega}}{e^{j0}-e^{-j\Omega}}$$

$$H(\Omega) = \frac{1}{N}\cdot\frac{e^{-j\frac{N\Omega}{2}}\left(e^{j\frac{N\Omega}{2}}-e^{-j\frac{N\Omega}{2}}\right)}{e^{-j\frac{\Omega}{2}}\left(e^{j\frac{\Omega}{2}}-e^{-j\frac{\Omega}{2}}\right)} : 2\cos\left(\frac{N\Omega}{2}\right) \qquad = \frac{1}{N}\,\frac{e^{j\frac{\Omega}{2}}\cdot\cancel{2}\cos\left(\frac{N\Omega}{2}\right)}{e^{j\frac{N\Omega}{2}}\cdot\cancel{2}\cos\left(\frac{\Omega}{2}\right)}$$

$$2\cos\left(\frac{\Omega}{2}\right)$$

$$|H(\Omega)| = \frac{\cos\left(\frac{N\Omega}{2}\right)}{\cos\left(\Omega/2\right)}$$



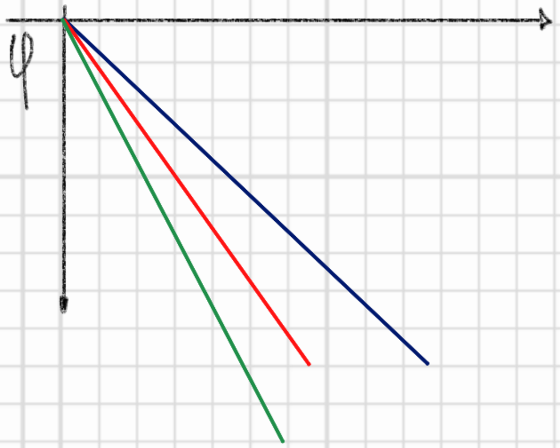


Fase

$N=3 \Rightarrow \varphi = e^{-j\Omega}$

$N=4 \quad e^{-j\frac{3}{2}\Omega}$

$e^{-j\frac{1}{2}\Omega}$



Para la pregunta 3. podría implementarse este filtro si hacemos N = 7. Entonces nos queda un filtro de 7 coeficientes, por lo tanto orden 6.

Por lo tanto nos queda la siguiente transferencia

$$H(Z) = \frac{1}{7}\,\frac{1-Z^{-7}}{1-Z^{-1}} \Rightarrow \text{Si usamos la identidad geométrica}$$

$$H(Z) = \frac{1}{7}\left(1 + Z^{-1} + Z^{-2} + Z^{-3} + Z^{-4} + Z^{-5} + Z^{-6}\right)$$

Por lo que podemos escribir como ecuación de diferencias:

$$y(k) = \frac{1}{7}\left(x(k) + x(k-1) + x(k-2) + \dots\, x(k-6)\right)$$

c) ***Filtro diferenciador***

Qué valores deberían tener los coeficientes a_i y b_k para obtener:

a)**diferenciador de primer orden** b)**diferenciador de segundo orden.**

$$H(z) = \left(1 - c_1 \cdot z^{-N}\right)\cdot\frac{b_0 + b_1\cdot z^{-1} + b_2\cdot z^{-2}}{\frac{1}{a_0} - a_1\cdot z^{-1} - a_2\cdot z^{-2}}$$

Filtro diferenciador ⇒ Filtro FIR

$$\boxed{a_0 = 1;\ a_1 = 0,\ a_2 = 0}$$

Para el diferenciador de 1° orden:

$$H(Z) = 1 - Z^{-1} = \frac{Z-1}{Z} = \left(1 - C_1 Z^{-N}\right)\frac{b_0 + b_1 Z^{-1} + b_2 Z^{-2}}{1}$$

No me tiene que aparecer $b_2 = 0$

$$H(Z) = \frac{b_0 + b_1 Z^{-1}}{1}\left(1 - C_1 Z^{-N}\right) = \frac{Z-1}{Z}$$

$$\frac{b_0 Z + b_1}{Z}\left(1 - C_1 Z^{-N}\right) \Rightarrow \text{Si } C_1 = 0 \Rightarrow H(Z) = \frac{b_0 Z + b_1}{Z}$$

Si $b_1 = -1$ y $b_0 = 1 \Rightarrow \boxed{H(Z) = \frac{Z-1}{Z}}$ Para esto:

$$\boxed{\begin{array}{l} a_0 = 1;\ a_1 = 0;\ a_2 = 0 \\ b_0 = 1;\ b_1 = -1 \\ C_1 = 0 \end{array}}$$

Para un diferenciador de segundo orden $H(Z) = \dfrac{1 + Z + Z^2}{Z^2}$

$$H(Z) = \frac{b_0 + b_1 Z^{-1} + b_2 Z^{-2}}{1} = \frac{b_0 + \frac{b_1}{Z} + \frac{b_2}{Z^2}}{1} = \frac{b_0 Z^2 + b_1 Z + b_2}{Z^2}$$

Si $b_0 = b_1 = b_2 = 1 \Rightarrow \boxed{H(Z) = \dfrac{Z^2 + Z + 1}{Z}}$

Para esto:

$$\boxed{\begin{array}{l} a_0 = 1 \ ; a_1 = a_2 = 0 \\ b_0 = b_1 = b_2 = 1 \\ C_1 = 0 \end{array}}$$

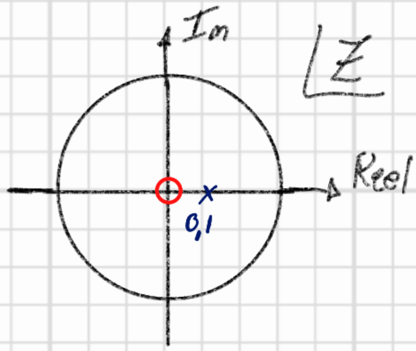
d) ***Integrador con pérdidas***.

Qué tipo de transferencia se obtendría si : $a_0 = 1,\ a_1 = 1 - \alpha,\ b_0 = \alpha$ para $\alpha = 0.9$

$$H(z) = \left(1 - c_1 \cdot z^{-N}\right) \cdot \frac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2}}{\frac{1}{a_0} - a_1 \cdot z^{-1} - a_2 \cdot z^{-2}}$$

Supongo $C_1 = 0 = b_1 = b_2$

$$H(Z) = \frac{0{,}9}{1 - 0{,}1 Z^{-1}} = \boxed{\frac{0{,}9 Z}{Z - 0{,}1} = H(Z)}$$

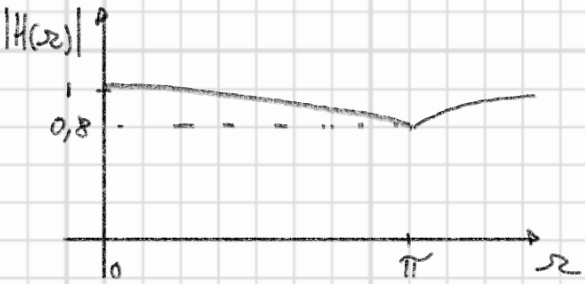


$$H(\Omega) = H(Z)\Big|_{e^{j\Omega}} = \frac{0{,}9\, e^{j\Omega}}{e^{j\Omega} - 0{,}1}$$

$$|H(\Omega)| = \frac{0{,}9}{|\cos(\Omega) - 0{,}1 - j \operatorname{sen}(\Omega)|} = \frac{0{,}9}{\sqrt{(\cos(\Omega) - 0{,}1)^2 + (\operatorname{sen}(\Omega))^2}} =$$

$$\cos^2(\Omega) - 0{,}2\cos(\Omega) + 0{,}01 + \operatorname{sen}^2(\Omega) = 1{,}01 - 0{,}2\cos(\Omega)$$

$$|H(\Omega)| = \frac{0{,}9}{\sqrt{1{,}01 - 0{,}2\cos(\Omega)}}$$

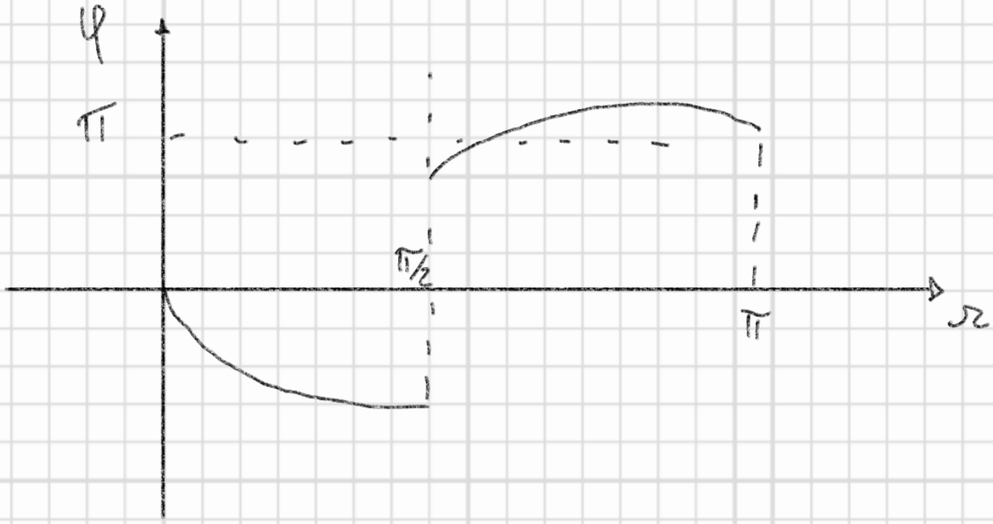


Respuesta de fase

$$\text{Arg}(H(\Omega)) = \text{Arg}(0{,}9\, e^{j\Omega}) - \text{Arg}(e^{j\Omega} - 0{,}1)$$

$$\Omega \quad - \text{Arg}\left(\cos(\Omega) - 0{,}1 - j\,\text{sen}(\Omega)\right)$$

$$\varphi(H(\Omega)) = \Omega - tg^{-1}\left(\frac{\text{sen}(\Omega)}{\cos(\Omega) - 0{,}1}\right)$$



e) ***Filtro elimina continua.*** (*DC Blocker*)

Verifique la transferencia que se obtendría si $a_0 = 1,\ a_1 = \alpha,\ b_0 = 1,\ b_1 = -1$ para $\alpha = 0.9$.
Determine α para que la transferencia en $\Omega = 0, 1\cdot\pi$ sea 3 dB menor a la transferencia en $\Omega = \pi$.

$$H(Z) = \frac{1 - Z^{-1}}{1 - \alpha Z^{-1}} = \frac{Z - 1}{\frac{\cancel{Z}(Z-\alpha)}{\cancel{Z}}} = \frac{Z-1}{Z-\alpha}$$

Si $\alpha = 0{,}9 \Rightarrow \dfrac{Z-1}{Z-0{,}9}$

Para eliminar continua necesitamos el cero en 1 y el polo lo más pegado posible.

$$|H(\Omega)| = \left|\frac{e^{j\Omega} - 1}{e^{j\Omega} - \alpha}\right| = \left|\frac{e^{j\frac{\Omega}{2}}\overbrace{\left(e^{j\Omega/2} - e^{-j\Omega/2}\right)}^{2\cos(\Omega/2)}}{\cos(\Omega) - \alpha - j\,\text{sen}(\Omega)}\right| = \frac{2\cos(\Omega/2)}{\sqrt{(\cos(\Omega)-\alpha)^2 + (\text{sen}(\Omega))^2}}$$

$|H(\Omega = \pi)| = 0$? $\Rightarrow |H(\Omega = 0{,}1\pi)|$

Como hago para encontrar algo 3dB menor que cero veces?

f) ***Filtro ecualizador de fase de 1º orden***.

Verifique la transferencia que se obtendría si $a_0 = 1,\ a_1 = -R,\ b_0 = R,\ b_1 = 1$ para $R = \frac{-D}{D+2}$ y siendo D un valor de demora de -0,5 a 0,5 muestras ($\frac{1}{f_s}$). En qué valores de frecuencia este filtro obtendría un retardo de grupo acotado en un margen del 5% respecto a $\Omega = 0$. Verificar que la demora obtenida es de 1+D muestras.

$$H(z) = \left(1 - c_1 \cdot z^{-N}\right) \cdot \frac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2}}{\frac{1}{a_0} - a_1 \cdot z^{-1} - a_2 \cdot z^{-2}}$$

$$\Rightarrow H(Z) = \frac{R + Z^{-1}}{1 + RZ^{-1}} = \frac{ZR + 1}{\cancel{Z}(Z + R)}\ \ \cancel{Z}$$

$$\boxed{H(Z) = \frac{ZR + 1}{Z + R}}$$

$$R = \frac{-D}{D+2} \Rightarrow H(Z) = \frac{Z(-D) + D + 2}{\cancel{(D+2)}\left(Z(D+2) - D\right)}\ \cancel{(D+2)} \qquad H(Z) = \frac{D + 2 - ZD}{Z(D+2) - D}$$

$$\text{Retardo de grupo} = -\frac{d\varphi(\Omega)}{d\Omega}$$

Busco expresión de fase:

$$H(\Omega) = H(Z)\Big|_{Z = e^{j\Omega}}$$

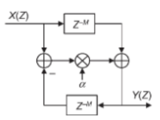
$$H(\Omega) = \frac{e^{j\Omega} R + 1}{e^{j\Omega} + R} = \frac{Re^{j\Omega} + e^{j0}}{\cos(\Omega) + j\,\text{sen}(\Omega) + R}$$

$$H(\Omega) = \frac{R\cos(\Omega) + Rj\,\text{sen}(\Omega) + 1}{\cos(\Omega) + j\,\text{sen}(\Omega) + R} = \frac{\cancel{R}\left(\cos(\Omega) + j\,\text{sen}(\Omega) + 1/R\right)}{\left[\frac{\cos(\Omega) + 1}{R} + j\frac{\text{sen}(\Omega)}{R}\right]\cancel{R}}$$

$$\text{Fase}: \ tg^{-1}\left[\frac{\text{sen}(\Omega)}{\cos(\Omega) + 1/R}\right] - tg^{-1}\left[\frac{\frac{\text{sen}(\Omega)}{R}}{\frac{\cos(\Omega) + 1}{R}}\right]$$

Llegado este punto prefiero seguir en python dado que el desarrollo en papel es muy tedioso.

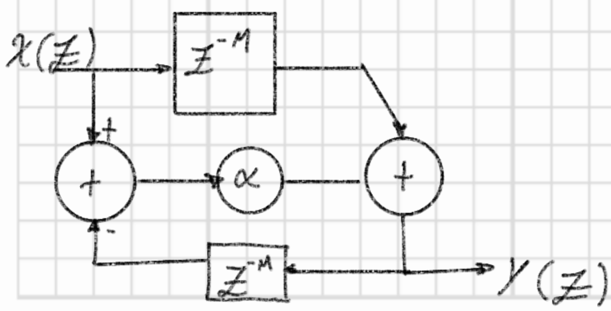
2) Se dispone del siguiente filtro digital:



a) Para la transferencia del filtro con M = 2 y α=0.8; calcular 1) el diagrama de polos y ceros y la respuesta en frecuencia de 2) módulo, 3) fase y 4) retardo de grupo.

b) Si quisiéramos anular una senoidal interferente de 125 Hz y su armónica de 375 Hz y sólo dispone de un sumador y el filtro de la figura con M = 4. Proponga un esquema de la solución y calcule los parámetros del filtro que sería necesario adecuar.

Busco transferencia



$$Y(Z) = XZ^{-M} + X\alpha - Y\alpha Z^{-M}$$

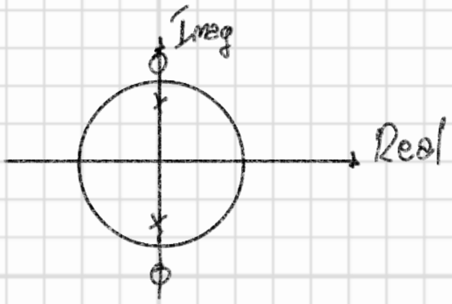
$$Y(Z) = X(Z^{-M} + \alpha) - Y\alpha Z^{-M}$$

$$Y(Z)\left(1 + \alpha Z^{-M}\right) = X(Z)\left(\alpha + Z^{-M}\right)$$

$$H(Z) = \frac{\alpha + Z^{-M}}{1 + \alpha Z^{-M}} = \boxed{\frac{Z^M \alpha + 1}{Z^M + \alpha} = H(Z)}$$

Si $M = 2$ y $\alpha = 0,8 \Rightarrow H(z) = \dfrac{z^2 \cdot 0,8 + 1}{z^2 + 0,8}$

Diagrama de polos y ceros.



$\sqrt{0,8} = z \to \boxed{\begin{array}{l} z_1 = j0,894 \\ z_2 = j-0,894 \end{array}}$

Ceros

$0,8z^2 + 1 = 0$

$\boxed{z = \pm\sqrt{-1,25} = \pm j1,118}$

Modulo

Pasa todo