



# ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

## Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

### Θεωρία Παιγνίων

Υλοποίηση εξελικτικού πρωταθλήματος Axelrod

Ομάδα	2
Βαπόρης Δημήτριος	AEM 10625
Βουλκίδης Βλάσιος	AEM 10627
Ντελόπουλος Ερμανουήλ	AEM 10693
Υπεύθυνος Καθηγητής	Κεχαγιάς Αθανάσιος

Εαρινό Εξάμηνο 2025

## Περιεχόμενα

<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>2</b>
<b>2 Fitness Dynamics</b>	<b>3</b>
2.1 Η συνάρτηση TourSimFit . . . . .	3
2.2 Η συνάρτηση TourTheFit . . . . .	5
2.3 Προσομοιώσεις . . . . .	5
2.3.1 1η Προσομοίωση - Defectors may be strong . . . . .	5
2.3.2 2η Προσομοίωση - Μονότονη Σύγκλιση . . . . .	6
2.3.3 3η Προσομοίωση - Φθίνουσες Ταλαντώσεις . . . . .	7
2.3.4 4η Προσομοίωση - Περιοδικές Κινήσεις . . . . .	7
2.3.5 5η Προσομοίωση - Αύξουσες Ταλαντώσεις . . . . .	9
2.3.6 6η Προσομοίωση - Χάος/Διαταραγμένες Ταλαντώσεις . . . . .	10
<b>3 Imitation Dynamics</b>	<b>12</b>
3.1 Η συνάρτηση TourSimImi . . . . .	13
3.2 Η συνάρτηση TourTheImi . . . . .	13
3.3 Προσομοιώσεις . . . . .	14
3.3.1 1η Προσομοίωση - Παράδειγμα χρήσης των TourTheImi, Analyze- MarkovChain και TourSimImi . . . . .	14
3.3.2 2η Προσομοίωση - Δοκιμή προεπιλεγμένης μεθόδου (Individual) για τον προσδιορισμό της καλύτερης στρατηγικής . . . . .	15
3.3.3 3η Προσομοίωση - Δοκιμή μεθόδου “Total” για τον προσδιο- ρισμό της καλύτερης στρατηγικής . . . . .	16
<b>4 Σύγκριση Fitness vs Imitation Dynamics</b>	<b>19</b>
<b>5 Τελικά Συμπεράσματα</b>	<b>21</b>
<b>Κατάλογος σχημάτων</b>	<b>23</b>

## 1 Εισαγωγή

Το συγκεκριμένο αρχείο είναι η αναφορά της εργασίας για το μάθημα Θεωρία Παιγνίων. Αντικείμενο της εργασίας αυτής είναι η υλοποίηση και η μελέτη του εξελικτικού πρωταθλήματος Axelrod στο παίγνιο "Δίλημμα του Φυλακισμένου". Με την ονομασία αυτή χαρακτηρίζεται το κοινωνικό δίλημμα, δηλαδή οποιοδήποτε παίγνιο της μορφής  $\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix}$ , τιμές για τις οποίες ισχύει  $A_{1,2} < A_{2,2} < A_{1,1} < A_{2,1}$ . Η επανάληψη του παιγνίου αυτού δημιουργεί ένα match μεταξύ στρατηγικών, matches μεταξύ στρατηγικών δημιουργούν τουρνουά μεταξύ στρατηγικών και ο υπολογισμός νέου πληθυσμού με βάση την επίδοση κάθε στρατηγικής στο τουρνουά αποτελεί το αντικείμενο μελέτης της εργασίας.

Η εργασία αποτελείται από 4 βασικές συναρτήσεις, κάθε μία από τις οποίες επιτελεί μία συγκεκριμένη λειτουργία που μπορεί να χαρακτηριστεί από δύο χαρακτηριστικά της εκάστοτε παραδοχής: η φύση της προσομοίωσης (θεωρητική ή πραγματική) και η εξελικτική δυναμική (fitness ή imitation). Συγκεκριμένη εισαγωγή γίνεται και κατά την παρουσίαση της κάθε συνάρτησης, στην οποία εξηγείται ο τρόπος λειτουργίας και τυχούσες παραδοχές που συνέβησαν σε κάθε περίπτωση. Το πρώτο μέρος της εργασίας βασίζεται σε σημαντικό ποσοστό στη μελέτη των Mathieu et al. Μάλιστα, καταβλήθηκε προσπάθεια τα αποτελέσματα να είναι κατά το δυνατόν όμοια με αυτά που παρουσιάζει το paper του 1999.

## 2 Fitness Dynamics

Πρώτη εξελικτική δυναμική που θα αναλυθεί (και αυτή που αναλύεται από τους Mathieu et al.) είναι η δυναμική του fitness, σύμφωνα με την οποία ανατίθεται σε κάθε στρατηγική της προσομοίωσης ένα score, το οποίο χρησιμοποιείται ώστε να υπολογιστεί η κατανομή του πληθυσμού της επόμενης γενιάς. Ακολουθείται και για τις δύο παρακάτω συναρτήσεις που αξιοποιούν το fitness η θεώρηση των Mathieu et al, σύμφωνα με την οποία το fitness κάθε στρατηγικής υπολογίζεται ως εξής:

Έστω ότι ο πληθυσμός απαρτίζεται από 3 στρατηγικές, την A, την B και την C. Υπολογίζονται με βάση τον πίνακα του παιχνιδιού B, τον αριθμό των γύρων κάθε αγώνα T και, προφανώς, των στρατηγικών που βρίσκονται "αντιμέτωπες" σε κάθε περίπτωση, οι απολαβές κάθε μίας από τις 2 στρατηγικές και αποθηκεύονται ως π.χ.  $V(A|B)$ , η απολαβή της στρατηγικής A όταν συναντά την B. Έπειτα, το score κάθε παίκτη που χρησιμοποιεί την εκάστοτε στρατηγική (και άρα, ουσιαστικά, της στρατηγικής) υπολογίζεται ως, π.χ. για τη στρατηγική A,  $g_n(A) = W_n(A)V(A|A) + W_n(B)V(A|B) + W_n(C)V(A|C)V(A|A)$ , όπου  $W_n(A)$ ,  $W_n(B)$ ,  $W_n(C)$  οι πληθυσμοί της εκάστοτε στρατηγικής στη γενιά n (παρατηρήστε ότι αφαιρείται μία φορά η απολαβή για παιχνίδι με την ίδια στρατηγική του κάθε παίκτη, διότι θεωρείται ότι παραλείπεται το παιχνίδι με τον εαυτό του κάθε μέλους του πληθυσμού). Τέλος, το συνολικό score του τουρνουά υπολογίζεται ως  $t(n) = W_n(A)g_n(A) + W_n(B)g_n(B) + W_n(C)g_n(C)$  και ο πληθυσμός της γενιάς n + 1 για π.χ. τη στρατηγική A γίνεται  $W_{n+1}(A) = \frac{\Pi W_n(A)g_n(A)}{t(n)}$ .

Να επισημανθεί εδώ ότι η λογική αυτή εφαρμόζεται λόγω της πλήρους ντετερμινιστικής φύσης των στρατηγικών που έχουν υλοποιηθεί: εάν υπήρχαν στρατηγικές με τυχαίο στοιχείο, ο θεωρητικός υπολογισμός των αποτελεσμάτων κάθε αγώνα θα ήταν αδύνατος και θα έπρεπε να υπολογιστεί κάποια αναμενόμενη τιμή, αντικείμενο που ξεφεύγει από το αντικείμενο μελέτης της εργασίας.

### 2.1 Η συνάρτηση TourSimFit

Πρώτη συνάρτηση που υλοποιείται είναι η  $[POP, BST, FIT] = \text{TourSimFit}(B, \text{Strategies}, POP0, T, J, \text{compensation})$ , όπου B ο πίνακας απολαβών του παιχνιδιού, Strategies ένα array από Strings με τα ονόματα των στρατηγικών που συμμετέχουν στην προσομοίωση, POP0 ο αρχικός πληθυσμός, T ο αριθμός γύρων σε κάθε αγώνα και J ο αριθμός γενεών του εξελικτικού πρωταθλήματος. Επίσης, compensation είναι ένα έξτρα boolean όρισμα (η συνάρτηση μπορεί να κληθεί αγνοώντας την ύπαρξή του τελείως), η λειτουργία του οποίου περιγράφεται παρακάτω. Επιστρέφονται τα εξής: POP ένας πίνακας με τους πληθυσμούς κάθε στρατηγικής ανά γενιά, BST πίνακας που περιλαμβάνει τις καλύτερες στρατηγικές κάθε γύρου (0 αν δεν ανήκει στις καλύτερες, 1 αν ανήκει στις καλύτερες, οι ισοπαλίες μετράνε) και FIT ένας πίνακας με τα fitness scores κάθε στρατηγικής

για κάθε γενεά. Η λογική της συνάρτησης ακολουθεί όσα παρουσιάστηκαν παραπάνω, όμως προστίθεται κατά τον υπολογισμό των πληθυσμών της επόμενης γενιάς λογική ώστε να αποφεύγεται η ύπαρξη δεκαδικών και ο πληθυσμός κάθε στρατηγικής σε κάθε γενιά να παραμένει ακέραιος. Η λογική λειτουργεί ως εξής:

Λαμβάνεται ως αρχικό αποτέλεσμα των παραπάνω πράξεων για τον πληθυσμό το `floor` των δεκαδικών αποτελεσμάτων. Έπειτα, υπολογίζεται τυχόν έλλειμμα που προκύπτει από την εφαρμογή της συνάρτησης `floor` και ανατίθεται ένας ανά φορά νέος παίκτης σε κάποια στρατηγική τυχαία, μέχρις ότου να μηδενιστεί το έλλειμμα. Γίνεται και έλεγχος για το αν η στρατηγική βρίσκεται ήδη σε μηδενικό πληθυσμό, ώστε να αποφευχθεί η "αναγέννησή" της. Έτσι, ο συνολικός πληθυσμός των παικτών παραμένει σταθερός καθ' όλη τη διάρκεια της προσομοίωσης, όπως θεωρούν και οι Mathieu et al.

Η επιλογή αυτή γίνεται συνειδητά. Δοκιμάστηκαν οι περιπτώσεις κατά τις οποίες ανατίθεται κάθε παίκτης στη στρατηγική η οποία έχει πληθυσμό πιο κοντά στον επόμενο ακέραιο (π.χ. αν κάποια στρατηγική είχε αρχικά υπολογισμένο πληθυσμό 199.8, αυτό να μετατραπεί σε 200), όπως και η ακριβώς αντίθετη περίπτωση, όπου δηλαδή ανατίθεται στη στρατηγική πιο μακριά από τον επόμενο ακέραιο. Οι αλγόριθμοι αυτοί παρουσίασαν μερικές ανεπιθύμητες συμπεριφορές διατήρησης ενός πολύ χαμηλού αριθμού παικτών συγκεκριμένων στρατηγικών (π.χ. κάποια στρατηγική να κολλάει σε πληθυσμό 2 επειδή ο αρχικά υπολογισμένος πληθυσμός επόμενης γενεάς είναι 1.8, ή αντίστοιχα π.χ. 1.1). Διατηρώντας αυτό το τυχαίο στοιχείο, τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων δεν παρουσιάζουν σημαντική διαφορά με αυτά δίχως τυχαιότητα, ενώ παράλληλα η μέθοδος εγγυάται ότι σε βάθος χρόνου οι "αδύναμες" στρατηγικές εξαφανίζονται πλήρως.

Παρατηρώντας, ωστόσο, την απόκλιση της υλοποίησης αυτής από τα αποτελέσματα του `paper`, προσθέσαμε την εξής μετατροπή: ένα έξτρα όρισμα τύπου `boolean` στη συνάρτηση `TourSimFit`, με την ονομασία `compensation` και `default` τιμή `false`, το οποίο επιτελεί τη λειτουργία που περιγράφεται παρακάτω. Με τιμή `false`, επιστρέφει τα αποτελέσματα μόνο με απλό `rounding` στον κοντινότερο μικρότερο ακέραιο (`rounding` προς τα κάτω), το οποίο θεωρούμε ότι γίνεται και στο `paper`. Στην περίπτωση αυτή, ο πληθυσμός ανά γενιά δεν παραμένει υποχρεωτικά σταθερός, αλλά η απόκλιση δεν αυξάνεται με προσθετικό τρόπο. Ίσως χάνονται απλά 1 ή 2 μέλη του πληθυσμού σε μερικές γενιές, λόγω του `round down`. Με τιμή `true`, επιστρέφει τα αποτελέσματα σύμφωνα με τη λογική ανάθεσης των χαμένων μελών που περιγράφηκε παραπάνω. Στις προσομοιώσεις που ακολουθούν, παρουσιάζεται και μία σύγκριση των 2 αυτών μεθόδων με τα αποτελέσματα της συνάρτησης `TourTheFit`, που περιγράφεται παρακάτω. Θεωρήθηκε περιττή η προσθήκη των αποτελεσμάτων του `paper`.

## 2.2 Η συνάρτηση TourTheFit

Η δεύτερη συνάρτηση που υλοποιήθηκε είναι η  $[POP, BST, FIT] = \text{TourTheFit}(B, \text{Strategies}, POP0, T, J)$ , με ορίσματα και εξόδους παντελώς πανομοιότυπα με αυτά της προηγούμενης. Η μόνη ουσιαστική διαφορά κείται στο ότι πλέον, λόγω της θεωρητικής φύσης της προσομοίωσης, παραλείπεται το τμήμα του κώδικα που ήταν υπεύθυνο για τη διατήρηση ακεραίων στον πληθυσμό, καθώς επιτρέπονται και οι δεκαδικοί αριθμοί, αφού ο πληθυσμός δεν αποτελείται πραγματικά από παίκτες.

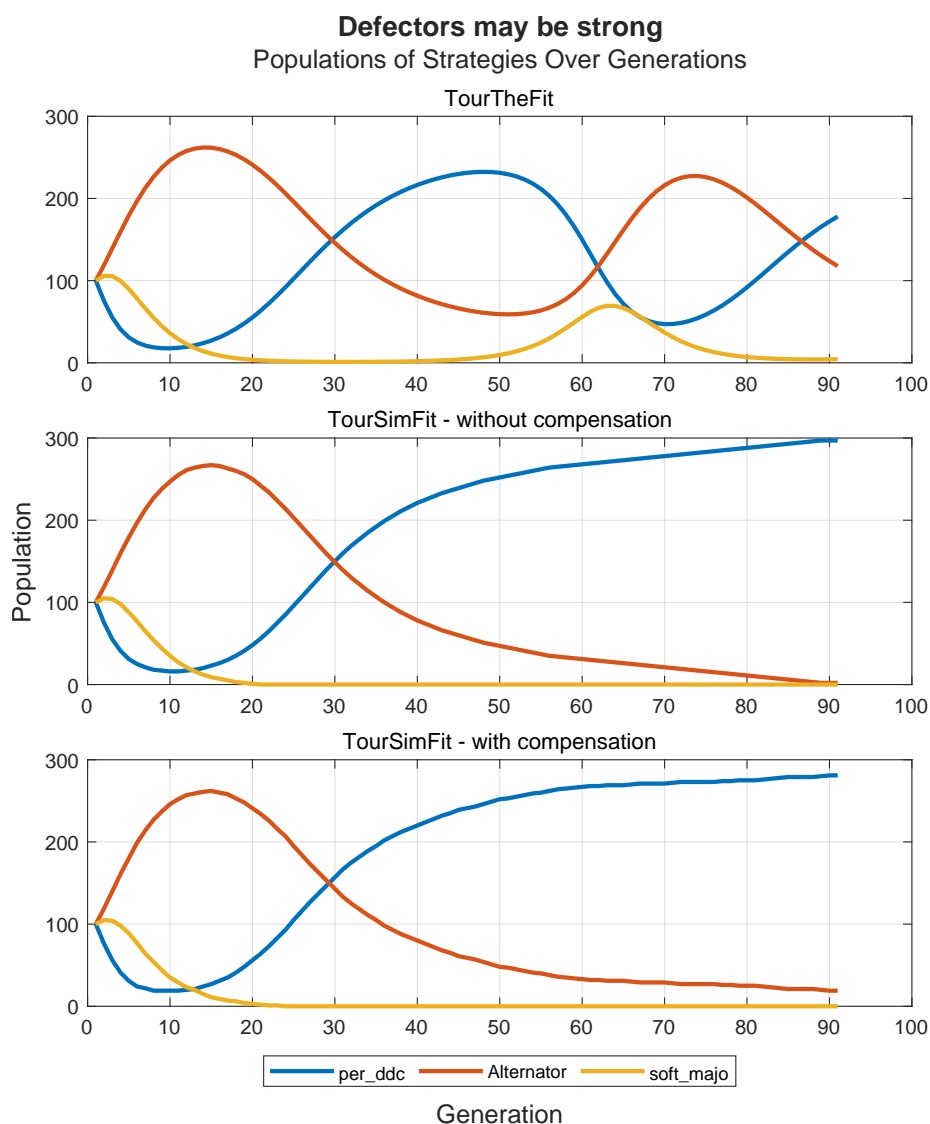
## 2.3 Προσομοιώσεις

Παρακάτω ακολουθούν οι προσομοιώσεις για την περίπτωση των fitness dynamics, οι οποίες ακολουθούν κατά πολύ τη λογική των Mathieu et al. Στόχος ήταν να επιτευχθεί όσο το δυνατόν πιστή αντιγραφή των αποτελεσμάτων που παρουσιάζονται στο paper. Για τον σκοπό αυτό, ως default τιμή του πίνακα απολαβών χρησιμοποιήθηκε  $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$  και προστέθηκαν στη λίστα των 12 στρατηγικών που είχαν έως τώρα υλοποιηθεί οι στρατηγικές `per_ccd`, `per_ddc`, `soft_majo` και `per_ccccd`, οι οποίες χρησιμοποιούνται στο paper. Η κάθε προσομοίωση βρίσκεται στο αρχείο `example.m` σε κατάλληλο Section και με Run Section προκύπτουν ακριβώς τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται παρακάτω.

### 2.3.1 1η Προσομοίωση - Defectors may be strong

Ήδη από την πρώτη προσομοίωση 1, παρουσιάζεται ένα ενδιαφέρον αποτέλεσμα. Σκοπός της προσομοίωσης αυτής είναι να αναδείξει ότι σε συγκεκριμένα σύνολα στρατηγικών και βολικές αρχικές τιμές πληθυσμού, λιποτακτικές στρατηγικές όπως η `per_ddc` είναι ικανές να κυριαρχήσουν. Ωστόσο, η θεωρητική ανάλυση της περίπτωσης που μελετάται στο paper δε δείχνει ακριβώς αυτήν την εικόνα. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο πληθυσμός `soft_majo` στις περιπτώσεις των προσομοιώσεων εξαφανίζεται εντελώς περίπου στην 20η γενιά, ενώ στη θεωρητική περίπτωση αυτό δε συμβαίνει. Έτσι, μετά από κάποια γενιά και μία σχετική μείωση του πληθυσμού `per_ddc`, επιστρέφει η στρατηγική `soft_majo` και αναπτύσσεται η στρατηγική Alternator, που ουσιαστικά είναι και ο τέλειος αντίπαλος της `soft_majo`, διότι διαπράττει ακριβώς όσες λιποταξίες μπορεί για να διατηρήσει τη `soft_majo` σε συνεργασία. Μετά από ένα σημείο, βέβαια, αρχίζουν και πάλι οι 2 πληθυσμοί αυτοί να μειώνονται και να αυξάνεται ο πληθυσμός των `per_ddc`, κάτι που μας κάνει να υποψιαζόμαστε ότι το παράδειγμα αυτό θεωρητικά οδηγείται σε ταλάντωση. Στις προσομοιώσεις, όμως, και στην περίπτωση του compensation και στην άλλη, τα αποτελέσματα είναι πολύ παρόμοια με αυτά του paper: η ελαφριά διαφοροποίηση στην περίπτωση του compensation οφείλεται στο τυχαίο στοιχείο, το οποίο κάνει την καμπύλη να φαίνεται λιγότερο λεία από

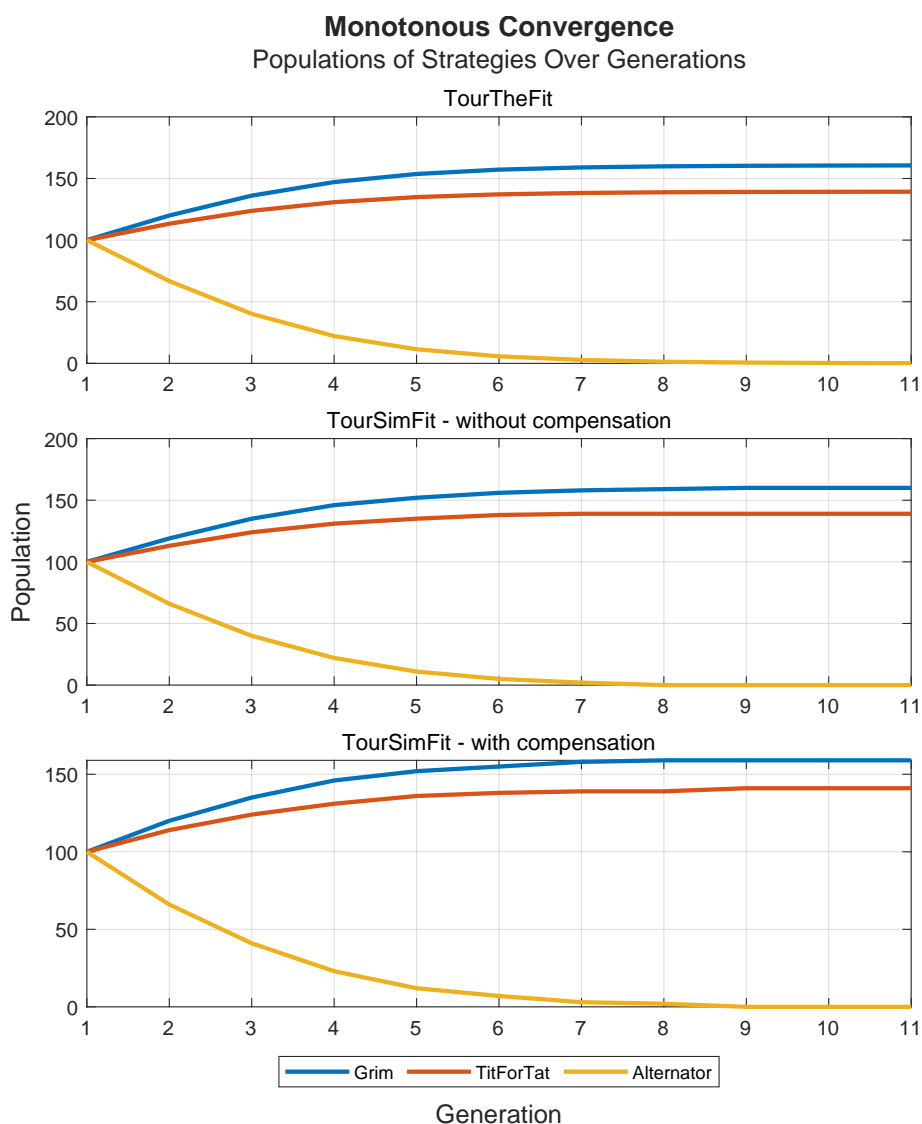
την περίπτωση δίχως compensation.



Σχήμα 1: Defectors may be strong

### 2.3.2 2η Προσομοίωση - Μονότονη Σύγκλιση

Στο εξής παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τις προσομοιώσεις που χρησιμοποιούν οι Mathieu et al ώστε να ταξινομήσουν τα γραφήματα σε 5 κατηγορίες, η πρώτη 2 από τις οποίες είναι η μονότονη σύγκλιση των πληθυσμών. Πρόκειται για την πιο συχνή μορφή που προκύπτει, καθώς οι ταλαντώσεις που παρουσιάζονται παρακάτω είναι αρκετά ευαίσθητες ως προς τις αρχικές συνθήκες. Τα αποτελέσματα τόσο της θεωρητικής ανάλυσης όσο και των 2 προσομοιώσεων είναι πανομοιότυπα με αυτά των Mathieu et al, με μοναδική διαφορά τον ελάχιστο διαφορετικό τελικό πληθυσμό στην περίπτωση του compensation, που οφείλεται και πάλι στο τυχαίο στοιχείο. Η κατάταξη, ωστόσο, των στρατηγικών παραμένει ίδια.



Σχήμα 2: Monotonous Convergence

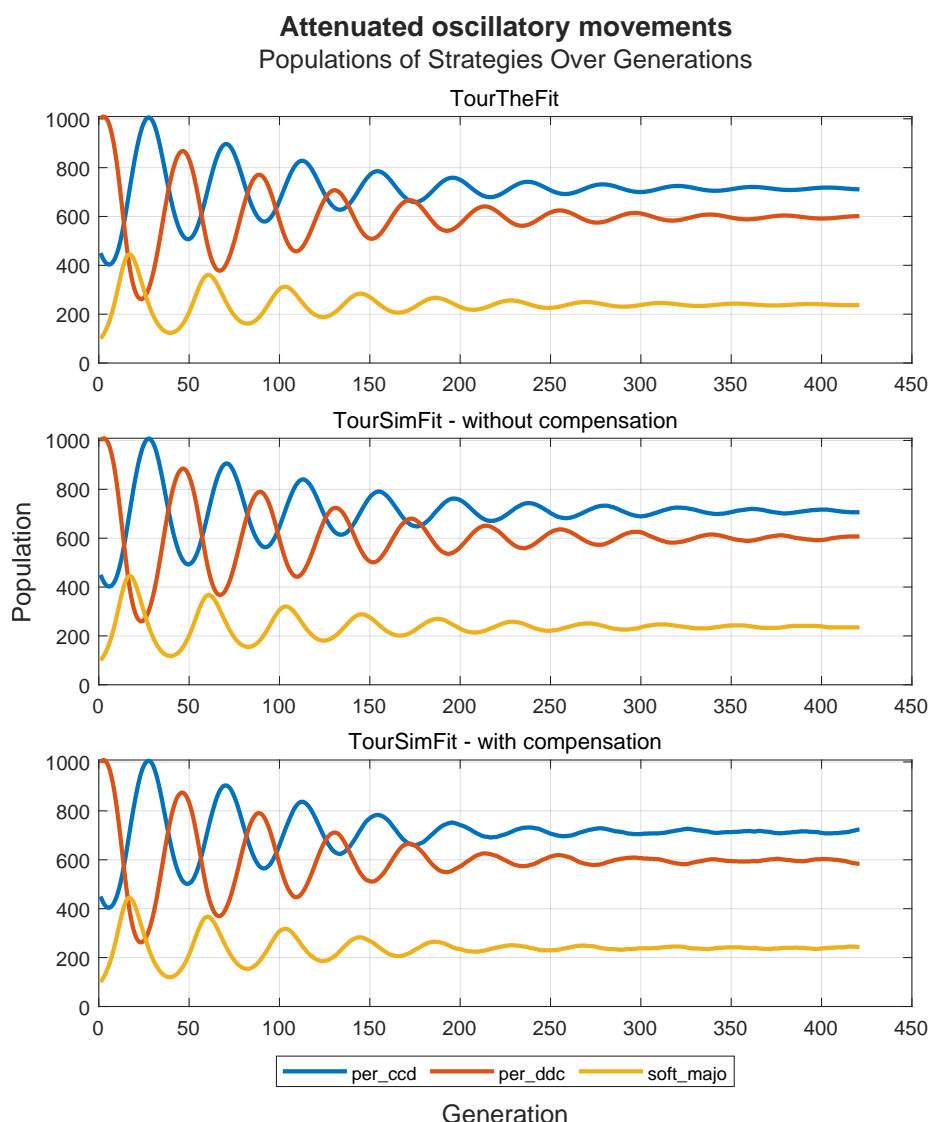
### 2.3.3 3η Προσομοίωση - Φθίνουσες Ταλαντώσεις

Η επόμενη κατηγορία αποτελεσμάτων του paper είναι η φθίνουσες ταλαντώσεις πληθυσμών 3. Τα αποτελέσματα σε αυτήν την περίπτωση είναι πανομοιότυπα με αυτά των Mathieu et al και για τις τρεις περιπτώσεις που παρουσιάζονται. Οι αρχικοί πληθυσμοί στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι αρκετά μεγάλοι, οπότε ο ένας ή δύο παίκτες που αντίθενται τυχαία στην περίπτωση του compensation δεν αλλάζουν αισθητά την πορεία της συνάρτησης.

### 2.3.4 4η Προσομοίωση - Περιοδικές Κινήσεις

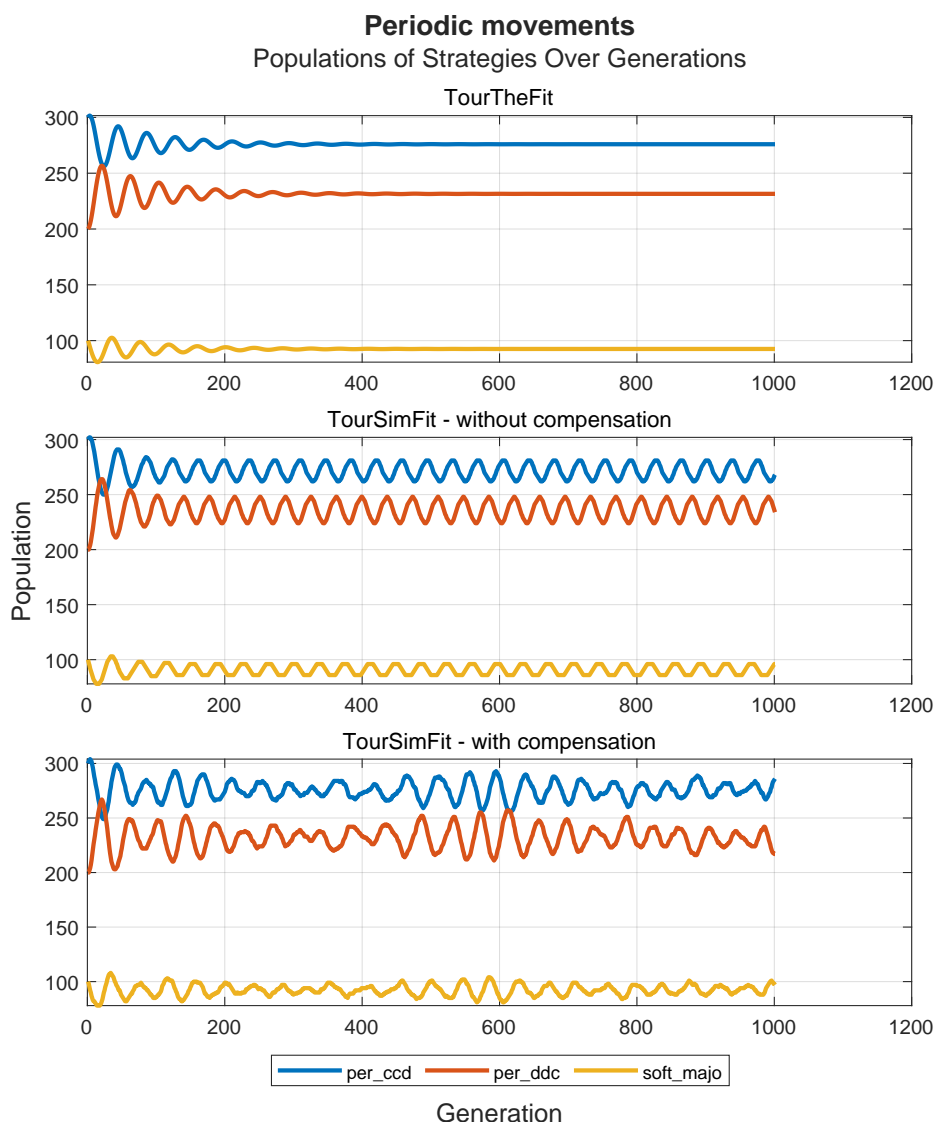
Τρίτη περίπτωση είναι η εμφάνιση περιοδικών κινήσεων/ταλαντώσεων 4, δίχως αύξηση ή μείωση των πλατών των ταλαντώσεων. Η εικόνα αυτή παρουσιάζεται σε γενικές γραμμές όταν υπάρχουν 3 στρατηγικές με τη λογική "πέτρα-ψαλίδι-χαρτί": η 1η "νικάει" τη 2η που "νικάει" την 3η που "νικάει" την 1η. Στη συ-





Σχήμα 3: Attenuated oscillatory movements

γκεκριμένη περίπτωση, η *per\_ccd* νικάει τη *soft\_majo* που νικάει την *per\_ddc* που νικάει τη *per\_ccd*. Με κατάλληλους, λοιπόν, αρχικούς πληθυσμούς παρατηρούνται τα παρακάτω αποτελέσματα. Η θεωρητική ανάλυση δείχνει ότι η ταλάντωση στην πραγματικότητα οδηγεί - πρόκειται για φθίνουσα ταλάντωση όπως πριν. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι σε διακριτές περιπτώσεις, όπως αυτές των προσομοιώσεων, γίνεται βέβαιο με κατάλληλες επιλογές ότι θα βρεθούμε σε κατάσταση ίδια με παρελθοντική, και άρα ότι θα υπάρξει επανάληψη/ταλάντωση. Ωστόσο, στη θεωρητική ανάλυση, αυτό δε συμβαίνει ("απειρία" καταστάσεων λόγω της αριθμητικής με δεκαδικούς), και άρα παρατηρείται η απόσβεση της ταλάντωσης. Η *TourSimFit* χωρίς *compensation* αποφέρει πάλι ίδια αποτελέσματα με τους Mathieu et al, ενώ η περίπτωση με *compensation*, αν και αντιαισθητική στην όψη, αποτυπώνει επίσης την ταλάντωση, ακόμα και με την αισθητή ύπαρξη θορύβου λόγω της τυχαιότητας (τα πλάτη των ταλαντώσεων είναι μικρά, άρα ακόμα και η προσθήκη ενός ή δύο έξτρα παικτών έχει αισθητό αποτέλεσμα).

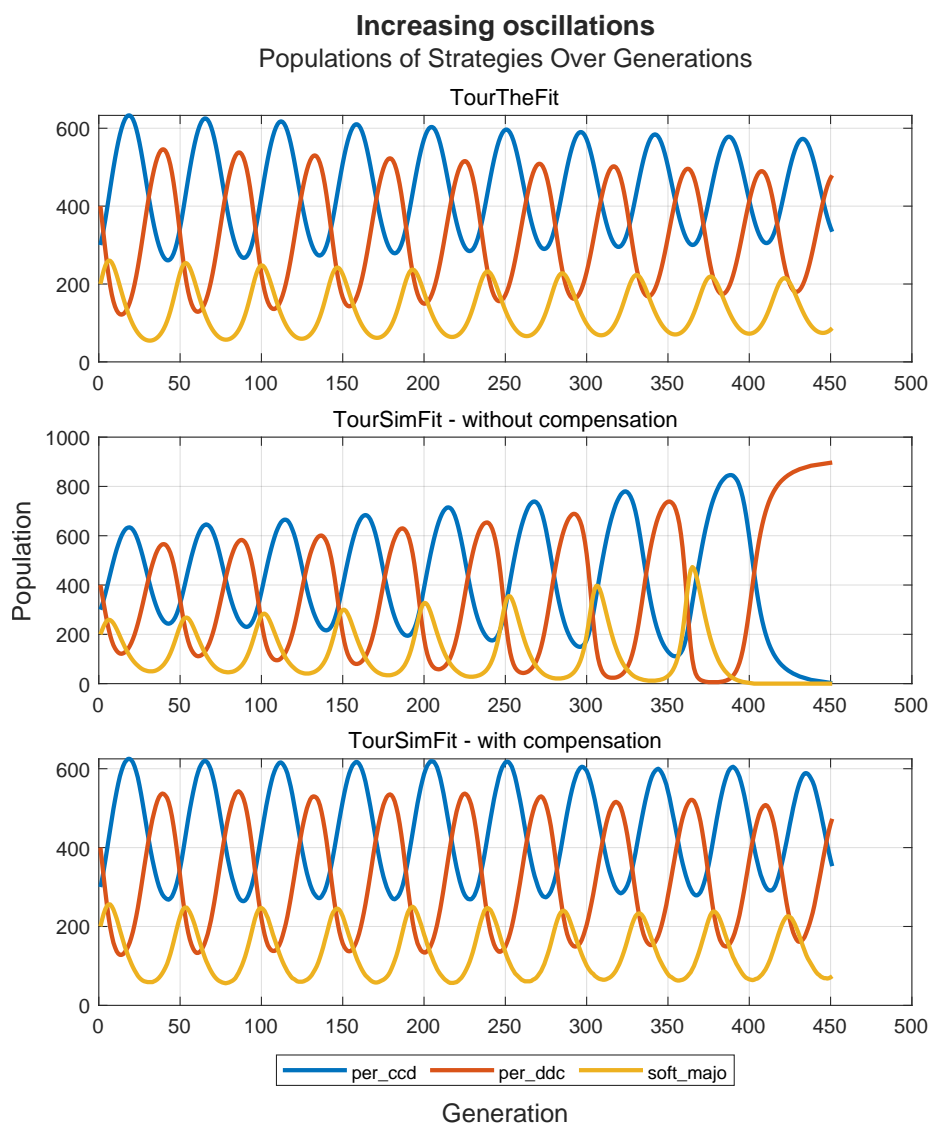


Σχήμα 4: Periodic movements

### 2.3.5 5η Προσομοίωση - Αύξουσες Ταλαντώσεις

Από τις πλέον μη αναμενόμενες περιπτώσεις είναι αυτή των αυξουσών ταλαντώσεων 5. Με κατάλληλη επιλογή πίνακα απολαβής, στρατηγικών και αρχικών πληθυσμών, είναι δυνατόν να παρατηρηθεί το φαινόμενο αυτό. Δοκιμάστηκε ο πληθυσμός ως έχει και τα αποτελέσματα δεν ήταν τα επιθυμητά. Έτσι, μεταβλήθηκε ο πίνακας απολαβών σε  $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4.72 & 1 \end{bmatrix}$  (με δοκιμή και σφάλμα, γνωρίζοντας τη γενική κατεύθυνση στην οποία έπρεπε να κινηθεί ο πίνακας) και τελικά παρατηρήθηκε στην περίπτωση TourSimFit χωρίς compensation αποτέλεσμα πολύ όμοιο με αυτό του paper. Ωστόσο, για την ίδια τιμή του  $B$  και τις περιπτώσεις της TourTheFit και TourSimFit με compensation παρατηρούνται

ελαφρώς φθίνουσες ταλαντώσεις, κάτι που φανερώνει δύο αλήθειες για τις περιπτώσεις των αυξουσών ταλαντώσεων. Πρώτον, προκύπτουν από πληθυσμούς που δύνανται να εμφανίσουν κανονικές ταλαντώσεις, με κατάλληλη μεταβολή του πίνακα κερδών. Δεύτερον, είναι ιδιαίτερα ευαίσθητες περιπτώσεις που με ακόμα και ελάχιστη μετατροπή της δυναμικής (όπως π.χ. τη λογική του compensation) καταρρέουν πίσω σε κανονική ή φθίνουσα ταλάντωση. Πολύ πιθανόν για κατάλληλη επιλογή του  $B$  να μετατρέπονται και οι περιπτώσεις TourTheFit και TourSimFit με compensation σε αύξουσα ταλάντωση, αλλά κρίθηκε πιο σημαντικό για την εργασία να παρουσιαστεί αυτή η απόκλιση στα αποτελέσματα.

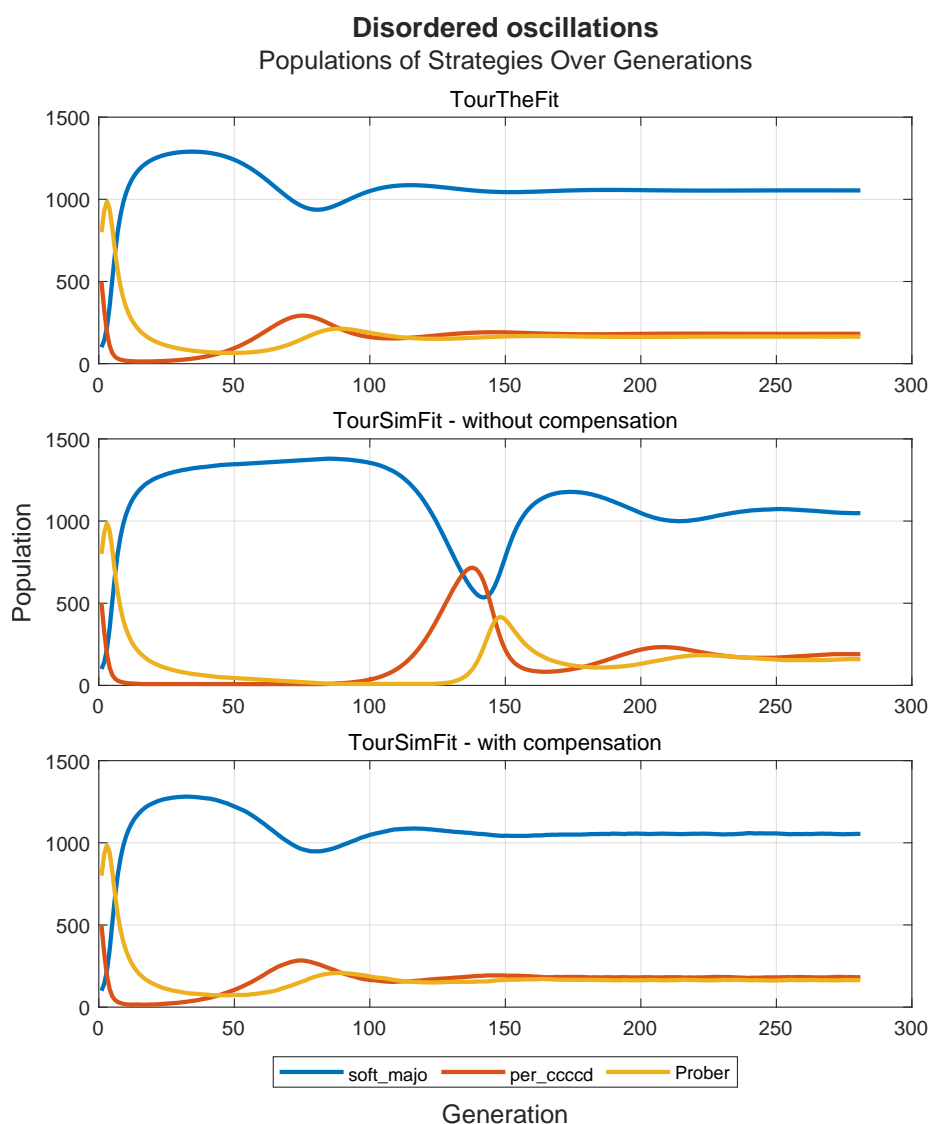


Σχήμα 5: Increasing oscillations

### 2.3.6 6η Προσομοίωση - Χάος/Διαταραγμένες Ταλαντώσεις

Τελευταία περίπτωση που παρουσιάζεται στο paper είναι αυτή των διαταραγμένων ταλαντώσεων 6. Οι συγγραφείς του paper ορθά διστάζουν να τη χαρακτηρίσουν ως πραγματικά χαοτική περίπτωση, διότι, λόγω της διακριτής φύσης

της προσομοίωσης, κάθε τέτοια συμπεριφορά μετά από ικανό αριθμό γενεών είτε φτάνει σε ισορροπία είτε απλώς επαναλαμβάνεται. Τα αποτελέσματα, βέβαια, της συγκεκριμένης προσομοίωσης, μοιάζουν αρκετά χαστικά στο μάτι. Πάλι, η περίπτωση TourSimFit δίχως compensation ανταποκρίνεται πλήρως στα αποτελέσματα του paper. Αντιθέτως, λόγω πάλι της ευαισθησίας του φαινομένου, οι περιπτώσεις της θεωρητικής ανάλυσης και της πραγματικής προσομοίωσης με compensation διαφοροποιούνται σημαντικά, διότι δεν εμφανίζουν τη χαώδη συμπεριφορά γύρω στη γενιά 140 όπως στην περίπτωση του paper. Ωστόσο, προβλέπουν την παραμονή στη ζωή των στρατηγικών per\_ccccd και Prober, αλλά και τις τιμές στις οποίες φαίνεται να τείνουν οι πληθυσμοί της περίπτωσης TourSimFit χωρίς προσομοίωση.



Σχήμα 6: Disordered oscillations

### 3 Imitation Dynamics

Η δεύτερη εξελικτική δυναμική που θα παρουσιαστεί είναι αυτή των Imitation Dynamics - δυναμική μίμησης. Στην περίπτωση αυτή, δεν υπολογίζεται η νέα κατανομή του πληθυσμού αυστηρά ως συνάρτηση του fitness της κάθε στρατηγικής για κάθε γενιά, αλλά υιοθετείται μία πιο απλή και ίσως πιο εφαρμόσιμη στην πραγματικότητα λογική: σε κάθε γενιά, βρίσκουμε τη στρατηγική (ή σε περίπτωση ισοπαλίας τις στρατηγικές) που ανταποκρίθηκαν καλύτερα. Έπειτα, έχοντας ορίσει τον αριθμό  $K$  των παικτών που αλλάζουν στρατηγική ανά γενιά, επιλέγονται τυχαία  $K$  παίκτες μη βέλτιστης στρατηγικής και υιοθετούν μία εκ των βέλτιστων στρατηγικών, πάλι τυχαία, σε περίπτωση ισοβαθμίας.

Να επισημανθεί ότι η επιλογή γίνεται μόνο μεταξύ παικτών μη βέλτιστης στρατηγικής και όχι μεταξύ όλων των παικτών του πληθυσμού. Αυτό θεωρούμε πως ανταποκρίνεται περισσότερο στην πραγματικότητα - αν βρίσκεται κάποιος παίκτης ήδη στη βέλτιστη στρατηγική, γιατί να σκεφτεί να αλλάξει στρατηγική; Η επιλογή αυτή έχει μερικές συνέπειες στα αποτελέσματα που παρουσιάζονται παρακάτω.

Για την εύρεση της βέλτιστης στρατηγικής χρησιμοποιείται υπολογισμός του score παρόμοιος με αυτόν της περίπτωσης των fitness dynamics, ώστε να εξοικονομείται χρόνος κατά την εκτέλεση τως προγραμμάτων. Δηλαδή, δεν προσομοιώνονται πραγματικά τα matches μεταξύ κάθε παίκτη, αλλά υπολογίζονται τα scores με βάση τις απολαβές κάθε στρατηγικής εναντίον κάθε στρατηγικής και τους αντίστοιχους πληθυσμούς.

Όπως θα παρουσιαστεί παρακάτω, κατά τη θεωρητική παρουσίαση της συνάρτησης `TourTheImi`, η διαδικασία αυτή μπορεί να διατυπωθεί με τη βοήθεια μαρκοβιανής αλυσίδας, όπου καταστάσεις είναι οι διάφορες πιθανές κατανομές πληθυσμού, με βάση το άθροισμα των αρχικών πληθυσμών (τον συνολικό πληθυσμό) και τον αριθμό στρατηγικών που εμπλέκονται στη διαδικασία. Στην αναφορά του κ. Κεχαγιά βρίσκεται το θεωρητικό υπόβαθρο αυτών που θα συζητηθούν αργότερα: θεωρούμε αρχικά την  $r$ -state μαρκοβιανή αλυσίδα, όπου κάθε κατάσταση είναι η στρατηγική του κάθε παίκτη ξεχωριστά, π.χ. για  $N = 5$  παίκτες και 3 στρατηγικές, πιθανό  $r$ -state είναι το (11323). Θεωρούμε έπειτα, τις  $s$ -states, όπου κατάσταση είναι ο πληθυσμός της κάθε στρατηγικής, στο προηγούμενο παράδειγμα το  $s$ -state θα ήταν (212). Ουσιαστικά πρόκειται για grouping διάφορων  $r$ -states σε ένα  $s$ -state, το οποίο, λόγω του ότι δε μας ενδιαφέρει πραγματικά ο κάθε παίκτης ξεχωριστά, αλλά ο συνολικός πληθυσμός της κάθε στρατηγικής, είναι ισοδύναμο. Αποδεικνύεται ότι η διαδικασία  $r(t)$  είναι lumpable και άρα ότι η  $s(t)$  είναι μαρκοβιανή αλυσίδα. Η θεωρητική αυτή γνώση είναι απαραίτητη για την υλοποίηση της `TourTheImi` παρακάτω.

### 3.1 Η συνάρτηση TourSimImi

Υλοποιείται, αρχικά, συνάρτηση προσομοίωσης του εξελικτικού πρωταθλήματος με δυναμική μίμησης  $[POP, BST] = \text{TourSimImi}(B, \text{Strategies}, POP0, K, T, J, \text{mode})$ . Οι είσοδοι και έξοδοι της συνάρτησης είναι όμοιες με αυτές της TourSimFit, με έξτρα όρισμα μία ακέραια τιμή  $K$  που προσδιορίζει τον αριθμό παικτών που αλλάζουν στρατηγική ανά γενιά. Το έξτρα όρισμα  $\text{mode}$  (η συνάρτηση τρέχει με default τιμή "Individual") λαμβάνει τιμές "Individual" και "Total" και αναφέρεται στον τρόπο με τον οποίο επιλέγεται η βέλτιστη στρατηγική: στην περίπτωση "Individual", επιστρέφεται απλά η στρατηγική του καλύτερου παίκτη, ενώ στην περίπτωση "Total" επιστρέφεται η στρατηγική με το μεγαλύτερο άθροισμα scores ανά τους παίκτες που τη χρησιμοποιούν. Η επιλογή του  $\text{mode}$  επιφέρει σημαντικά διαφορετικά αποτελέσματα, όπως θα παρουσιαστεί παρακάτω.

Να σχολιαστεί επίσης ότι, σε περίπτωση που οι παίκτες με μη βέλτιστη στρατηγική είναι λιγότεροι από  $K$ , αλλάζουν στρατηγική όλοι οι παίκτες με μη βέλτιστη στρατηγική, σε πλήθος λιγότεροι από  $K$ . Παραδείγματος χάριν, βρισκόμαστε σε κατάσταση μόνο με All\_C και TitForTat, οι απολαβές με τη μέθοδο Individual είναι ίδιες και το  $K = 1$ . Υπάρχουν 0 άτομα με μη βέλτιστη στρατηγική, άρα δεν αλλάζει κανένας στρατηγική, μιας και  $0 < 1$ . Αντίστοιχα, αν οι μη βέλτιστοι παίκτες είναι 2 και το  $K$  είναι 3, θα αλλάξουν μόνο οι 2 και ούτω καθεξής.

### 3.2 Η συνάρτηση TourTheImi

Η συνάρτηση TourTheImi είναι το τελευταίο ζητούμενο της εργασίας. Έχει τη μορφή  $P = \text{TourTheImi}(B, \text{Strategies}, POP0, K, T, J, \text{mode})$ , με ορίσματα πλήρως πανομοιότυπα της συνάρτησης TourSimImi και έξοδο τον πίνακα μεταβάσεων της μαρκοβιανής αλυσίδας των s-states  $P$ . Στην πραγματικότητα, για τον υπολογισμό του πίνακα  $P$ , ο αρχικός πληθυσμός χρησιμοποιείται μόνο για να υπολογιστεί ο συνολικός πληθυσμός του πρωταθλήματος (άρα θα μπορούσε απλά να αντικατασταθεί από ένα όρισμα  $N$ ) και ο αριθμός γενεών  $J$  δε χρησιμοποιείται καθόλου.

Για την ανάλυση αυτή θεωρούμε τα s-states του πρωταθλήματος ως τους αριθμούς των παικτών κάθε στρατηγικής, π.χ. για  $N = 9$  έχουμε  $s_1 = [0 \ 0 \ 9]$ ,  $s_2 = [0 \ 1 \ 8]$  και ούτω καθεξής. Ανάλογα με το όρισμα  $\text{mode}$ , αναμένουμε ο πίνακας μετάβασης να έχει διαφορετική μορφή. Για παράδειγμα, στο  $\text{mode Individual}$  και με στρατηγικές All\_D, All\_C, και TitForTat, η κατάσταση  $[0 \ 5 \ 4]$  αναμένουμε να είναι absorbing, μιας και δεν υπάρχουν μη βέλτιστοι παίκτες και άρα να έχει μόνο μία μετάβαση, στον εαυτό της, με πιθανότητα 1. Αντίθετα, στην περίπτωση Total, η κατάσταση αυτή δε θα ήταν absorbing, καθώς η στρατηγική All\_C συγκεντρώνει περισσότερους συνολικούς πόντους.

Δημιουργείται και μία ακόμη συνάρτηση AnalyzeMarkovChain ( $P, POP0, \text{Strategies}, \text{Title}$ ), η οποία είναι υπεύθυνη για την παραγωγή των διαγραμμά-

των μετάβασης καταστάσεων που παρουσιάζονται παρακάτω. Η συνάρτηση αυτή, με βάση τον πίνακα  $P$  που υπολογίζεται από τη συνάρτηση `TourTheImi` και τον αρχικό πληθυσμό `POPO`, διαχωρίζει τις καταστάσεις σε μεταβατικές - *transient*, απορροφητικές - *absorbing* και την αρχική κατάσταση. Επίσης, κάνει την περαιτέρω διάκριση μεταξύ *reachable* και *unreachable* καταστάσεων με βάση την αρχική κατάσταση. Δημιουργεί διάγραμμα της κάθε κατάστασης, στο οποίο φαίνεται με χρώμα ο τύπος κατάστασης, φαίνονται οι πληθυσμοί της κάθε κατάστασης, τα ονόματα των στρατηγικών, που δίνονται με το όρισμα `Strategies`, και οι αντίστοιχες πιθανότητες μετάβασης πάνω από κάθε μετάβαση. Το όρισμα `Title` είναι ο τίτλος του διαγράμματος που προκύπτει.

### 3.3 Προσομοιώσεις

Παρακάτω παρουσιάζονται κάποιες προσομοιώσεις οι οποίες παράγονται από τις συναρτήσεις που περιγράφηκαν παραπάνω και παρουσιάζουν ενδιαφέρον. Η κάθε προσομοίωση βρίσκεται στο αρχείο `example.m` σε κατάλληλο `Section` και με `Run Section` προκύπτουν ακριβώς τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται παρακάτω.

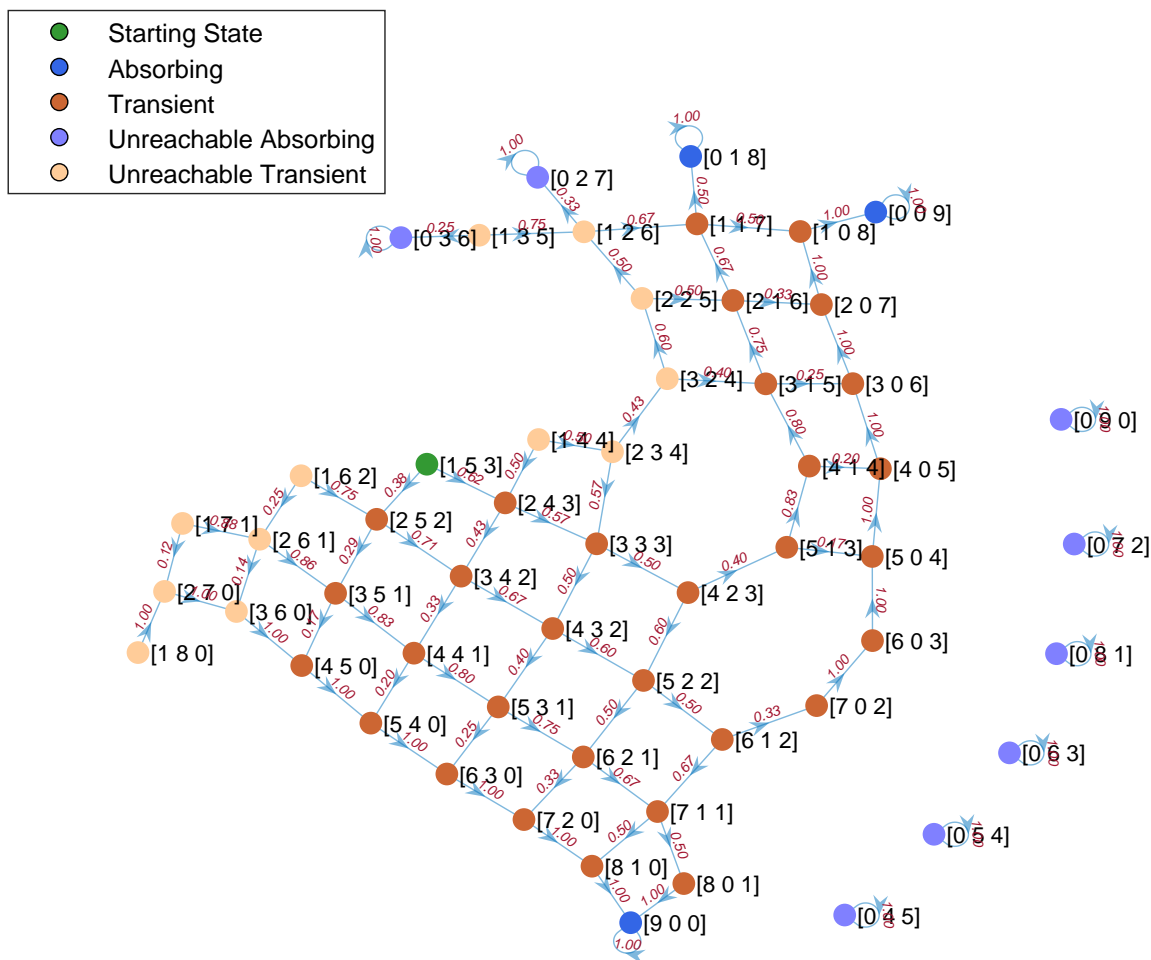
#### 3.3.1 1η Προσομοίωση - Παράδειγμα χρήσης των `TourTheImi`, `AnalyzeMarkovChain` και `TourSimImi`

Στην πρώτη προσομοίωση 7 παρουσιάζεται η μαρκοβιανή αλυσίδα που προκύπτει για τις στρατηγικές  $[All\_D \ All\_C \ TitForTat]$  σε μείγμα  $[1 \ 5 \ 3]$ . Από το διάγραμμα που προκύπτει παρατηρούμε ότι οι πιθανές απορροφητικές καταστάσεις είναι η  $[9 \ 0 \ 0]$ , δηλαδή η επικράτηση της στρατηγικής *All\_D*, η  $[0 \ 0 \ 9]$ , δηλαδή η επικράτηση της στρατηγικής *TitForTat* και η  $[0 \ 1 \ 8]$ , δηλαδή η επικράτηση της *TitForTat* αλλά με επιβίωση της *All\_C*. Από τις πιθανότητες μετάβασης, που απεικονίζονται στα βέλη των μεταβάσεων, παρατηρούμε ότι η τελευταία απορροφητική κατάσταση έχει σημαντικά χαμηλότερη πιθανότητα να συμβεί σε σχέση με τις άλλες δύο. Ακόμη παρατηρούμε ότι οι καταστάσεις στις οποίες υπάρχουν μόνο οι συμπαθείς στρατηγικές (*All\_C* και *TitForTat*), δηλαδή στρατηγικές οι οποίες ποτέ δεν λιποτακτούν πρώτες και άρα οι παίκτες των οποίων αποκτούν ίσα σκορ παίζοντας μεταξύ τους, μεταβαίνουν μόνο στον εαυτό τους καθώς δεν υπάρχουν παίκτες με σκορ χαμηλότερο του μεγίστου.

Στο Σχήμα 8 απεικονίζονται δύο εκτελέσεις της `TourSimImi` για το μείγμα στρατηγικών της παραπάνω προσομοίωσης. Παρατηρούμε ότι λόγω του τυχαίου τρόπου επιλογής των *imitators*, δηλαδή των παικτών που δεν έχουν την καλύτερη στρατηγική και αλλάζουν σε κάποια από τις καλύτερες, το τελικό μείγμα στρατηγικών είναι διαφορετικό για κάθε εκτέλεση του προγράμματος. Συγκεκριμένα στην (α) εκτέλεση παρατηρούμε  $[1 \ 5 \ 3] \rightarrow^* [9 \ 0 \ 0]$  ενώ στην (β) εκτέλεση  $[1 \ 5 \ 3] \rightarrow^* [0 \ 0 \ 9]$ , που όπως αναλύσαμε παραπάνω είναι πράγματι οι δύο πιο πιθανές απορροφητικές καταστάσεις.

### Example showcase of TourThelmi and AnalyzeMarkovChain

Strategies: All\_D, All\_C, TitForTat



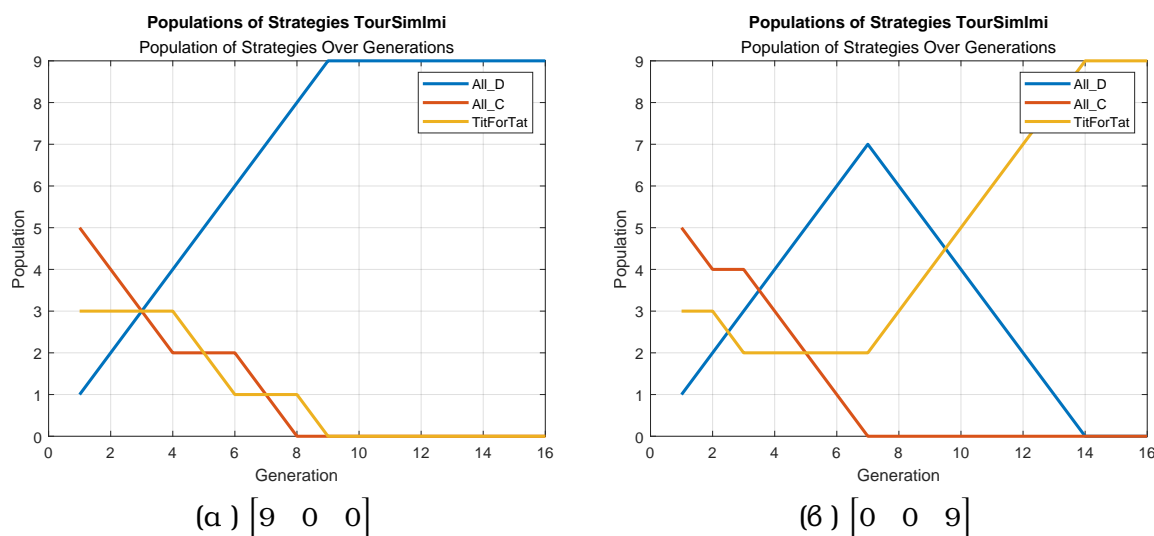
Σχήμα 7: Example showcase of TourThelmi and AnalyzeMarkovChain

### 3.3.2 2η Προσομοίωση - Δοκιμή προεπιλεγμένης μεθόδου (Individual) για τον προσδιορισμό της καλύτερης στρατηγικής

Στις δύο επόμενες προσομοιώσεις επιχειρείται να παρουσιαστεί η διαφορά στα αποτελέσματα που προκαλεί η διαφορετική μεθοδολογία επιλογής της καλύτερης στρατηγικής. Αρχικά (9) παρουσιάζεται η μαρκοβιανή αλυσίδα που προκύπτει για αρχικό μείγμα στρατηγικών  $[1 \ 4 \ 5]$  και επιλογή μεθόδου “Individual”, δηλαδή επιλογή της καλύτερης στρατηγικής με σύγκριση των payoffs των στρατηγικών με παιχνίδια ένας εναντίον ενός για κάθε ζεύγος στρατηγικών.

Το αποτέλεσμα είναι αντίστοιχο αυτού της πρώτης προσομοίωσης 7. Με λίγη παρατήρηση μπορούμε να οραματιστούμε μία νοητή καμπύλη μεταξύ των κορυφών των καταστάσεων  $[8 \ 0 \ 2]$ ,  $[6 \ 1 \ 3]$ ,  $[4 \ 2 \ 4]$ ,  $[2 \ 3 \ 5]$  η οποία χωρίζει τις λεκάνες απορροής των συμπαθών και των μη-συμπαθών στρατηγικών. Αν βρεθούμε σε κατάσταση κάτω από αυτή την καμπύλη θα καταλήξουμε στην απορροφητική κατάσταση επικράτησης της “All\_D”, ενώ από κατάσταση πάνω από αυτή την καμπύλη θα καταλήξουμε σε μία από τις απορροφητικές καταστάσεις των





Σχήμα 8: Absorbing States may differ even for the same Starting State

συμπαθών στρατηγικών.

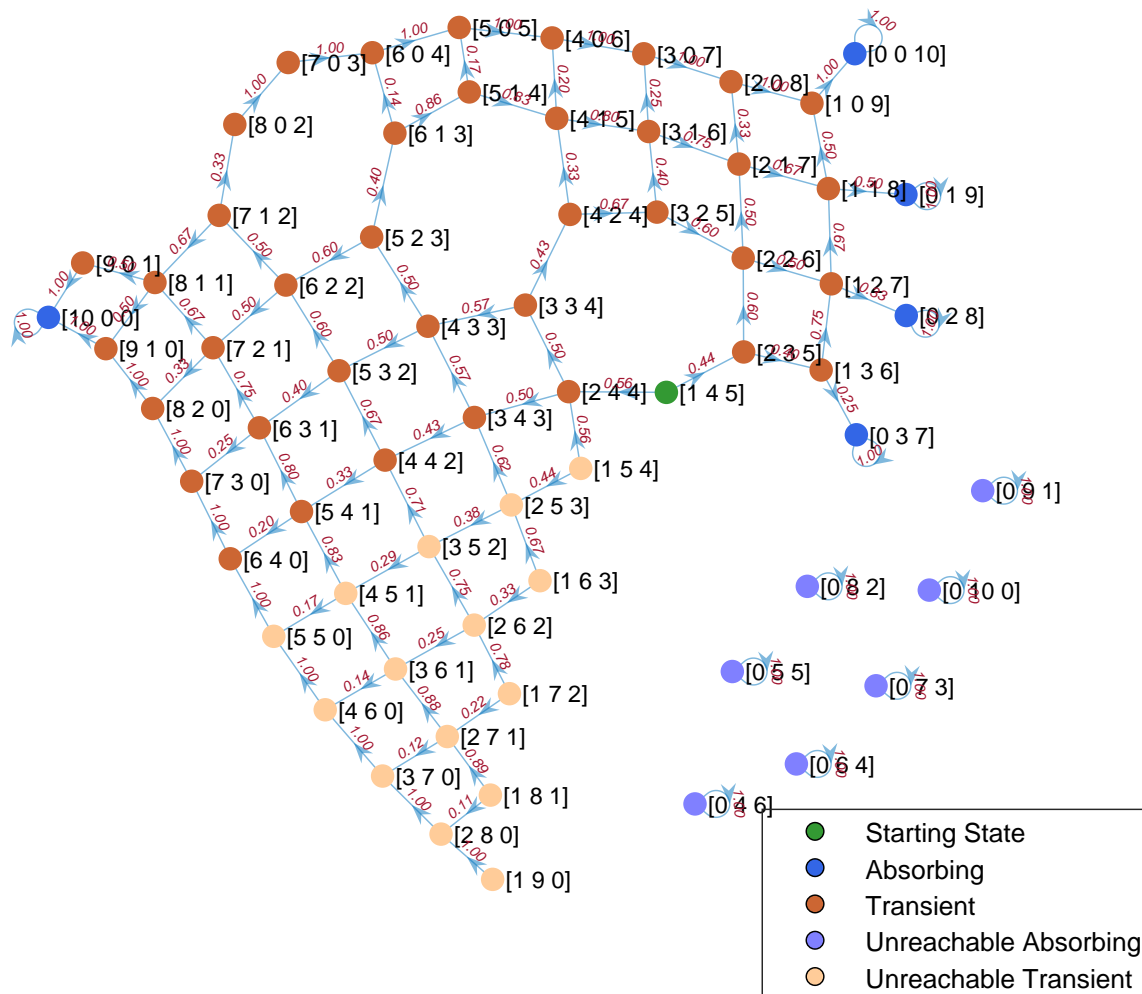
### 3.3.3 3η Προσομοίωση - Δοκιμή μεθόδου “Total” για τον προσδιορισμό της καλύτερης στρατηγικής

Στην τρίτη προσομοίωση (10) για ίδιο αρχικό μείγμα στρατηγικών  $[1 \ 4 \ 5]$  και επιλογή μεθόδου “Total”, δηλαδή σύγκριση των payoffs των παικτών που προκύπτουν σε κάθε state από Axelrod με τους πληθυσμούς του state και επιλογή ως καλύτερη στρατηγική της στρατηγικής του παίκτη με το μεγαλύτερο συνολικό payoff.

Σε αντίθεση με την προηγούμενη προσομοίωση (9) εδώ παρατηρούμε ότι το διάγραμμα είναι χωρισμένο σε τρεις ξεχωριστούς υπογράφους. Ο πρώτος υπογράφος, αυτός που περιλαμβάνει την αρχική κατάσταση, είναι ο μόνος που περιλαμβάνει προσεγγίσιμη απορροφητική κατάσταση (την  $[0 \ 0 \ 10]$ ), η οποία είναι η επικράτηση της “TitForTat”. Αυτό συμβαίνει διότι κατά την εύρεση της καλύτερης στρατηγικής στο mode “Total” οι συμπαθείς στρατηγικές συνεργάζονται μεταξύ τους και υπερνικούν λόγω του μεγαλύτερου πλήθους τους το προβάδισμα που δίνει η λιποταξία στην “All\_D”. Ο δεύτερος υπογράφος είναι αυτός που περιλαμβάνει την απορροφητική κατάσταση που επικρατεί η “All\_D” ( $[10 \ 0 \ 0]$ ), η οποία όμως είναι μη προσπελάσιμη όπως και οι μεταβατικές καταστάσεις όλου του υπογράφου, για τον λόγο που περιγράφηκε παραπάνω. Τέλος ο τρίτος υπογράφος είναι αυτός που περιλαμβάνει την απορροφητική κατάσταση που επικρατεί η “All\_C” ( $[0 \ 10 \ 0]$ ), η οποία είναι επίσης μη προσπελάσιμη όπως και οι μεταβατικές καταστάσεις όλου του υπογράφου, για τον λόγο που περιγράφηκε παραπάνω.

### Testing default mode (Individual) for best strategy calculation

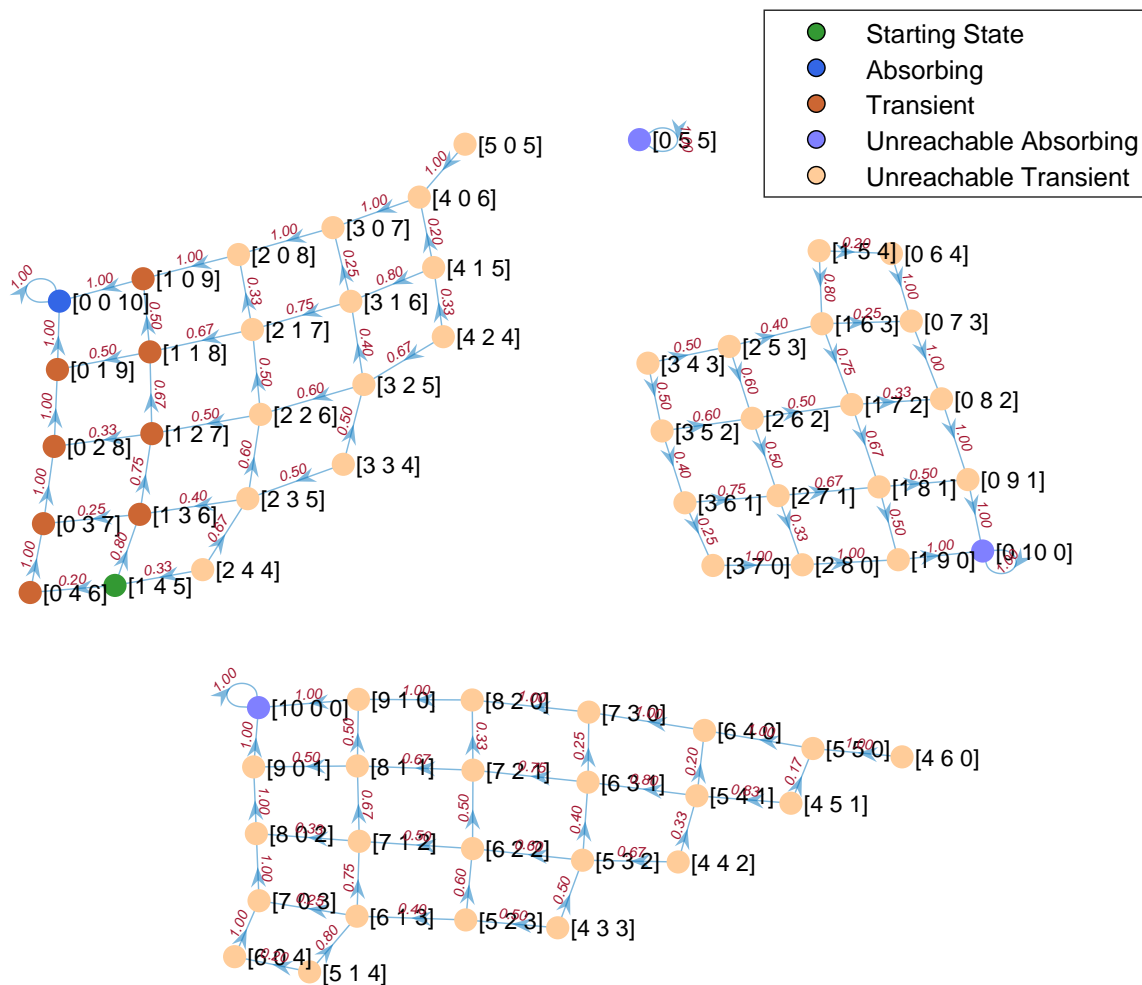
Strategies: All\_D, All\_C, TitForTat



Σχήμα 9: Testing default mode (“Individual”) for best strategy calculation with  $POPO = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

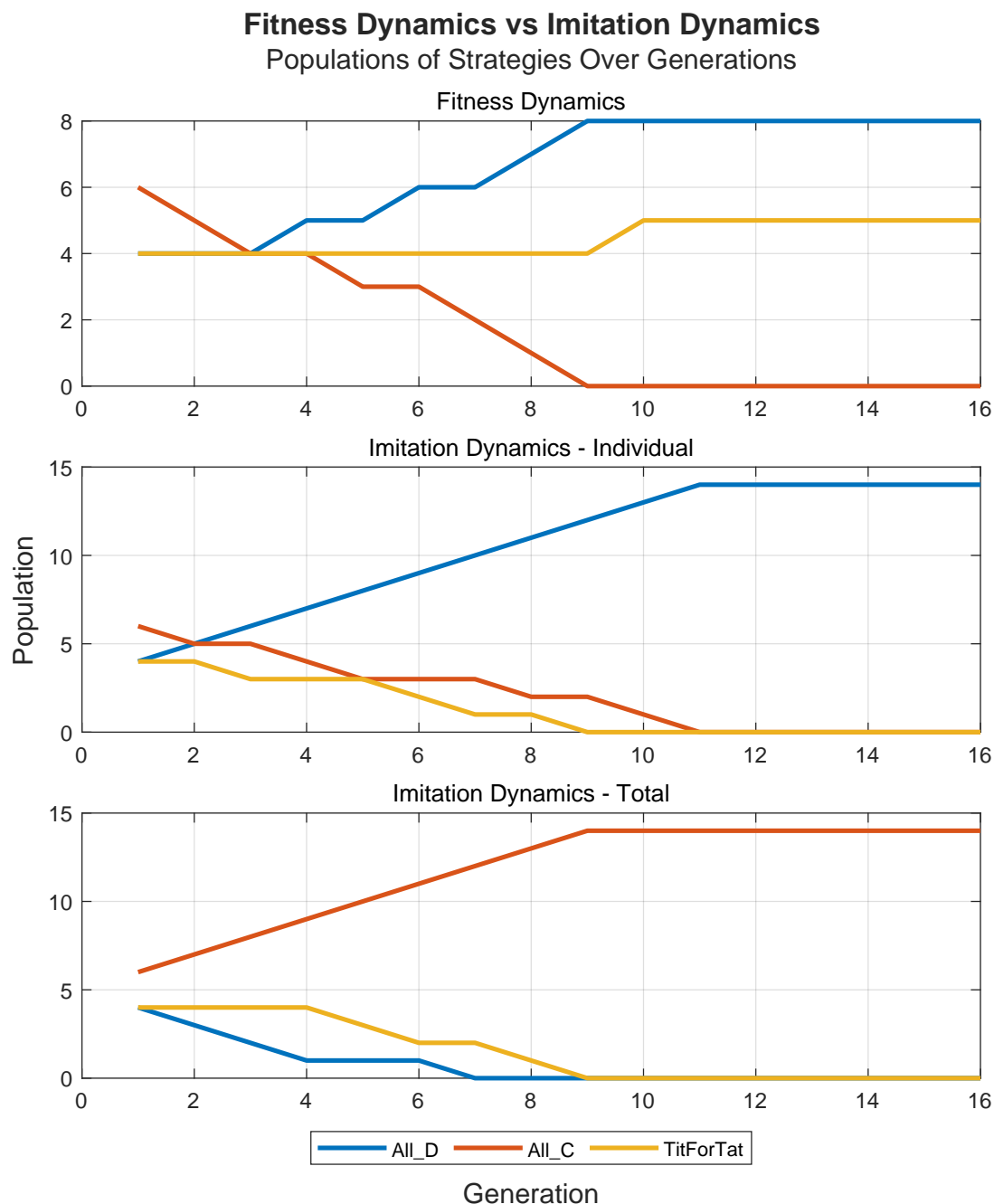
## Testing Total mode for best strategy calculation

Strategies: All\_D, All\_C, TitForTat



Σχήμα 10: Testing “Total” mode for best strategy calculation with  $POPO = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

## 4 Σύγκριση Fitness vs Imitation Dynamics



Σχήμα 11: Fitness Dynamics vs Imitation Dynamics  $[All\_D \ All\_C \ TitForTat]$   
 $POPO = [4 \ 6 \ 4]$

Στο Σχήμα 11 γίνεται μία σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων των TourSimFit, TourSimImi με mode="Individual" και TourSimImi με mode="Total" για στρατηγικές  $[All\_D \ All\_C \ TitForTat]$  με  $POPO = [4 \ 6 \ 4]$ . Παρατηρούμε ότι η περίπτωση Fitness μοιάζει με την περίπτωση "Individual" mode, ωστόσο και μεταξύ των δύο σημειώνεται η σημαντική διαφορά ότι στα Imitation Dynamics επιβιώνει μόνο μία στρατηγική. Η περίπτωση του "Total" mode έχει παρόμοια εξέλιξη

με το “Individual” mode αλλά παρατηρούμε ότι επιβιώνει διαφορετική στρατηγική, συγκεκριμένα η “All\_C”, επειδή έχει αρχικό πληθυσμό μεγαλύτερο από τις άλλες στρατηγικές και άρα εκμεταλλεύεται καλύτερα την συμπαθή στρατηγική “TitForTat” μέσω της λειτουργίας του “Total” mode για εύρεση της βέλτιστης στρατηγικής.

## 5 Τελικά Συμπεράσματα

Από την παραπάνω ανάλυση των δύο εξελικτικών δυναμικών προκύπτουν τα παρακάτω συμπεράσματα:

### Για τα Fitness Dynamics

α) Οι Mathieu et al φαίνεται ότι χρησιμοποιούσαν απλό floor κατά τον υπολογισμό των νέων πληθυσμών μετά από κάθε γενιά, καθώς η τακτική αυτή δημιουργήσε για εμάς τα κοντινότερα αποτελέσματα.

β) Σε πολλές περιπτώσεις ασταθών, γενικά, συμπεριφορών, τα διαγράμματα διαφοροποιούνται σε παρατηρήσιμο βαθμό ανάλογα με το αν χρησιμοποιείται η συνάρτηση TourTheFit ή η συνάρτηση TourSimFit με και χωρίς compensation. Αυτό οφείλεται στο ότι πολλές από τις περιπτώσεις των διαγραμμάτων που προκύπτουν είναι ιδιαίτερα ευαίσθητες και έτσι, ακόμα και μικρή μεταβολή στη λογική της δυναμικής, μπορεί να αλλάξει τα αποτελέσματα σημαντικά.

γ) Το διάγραμμα που προκύπτει εξαρτάται από τις αρχικές τιμές πληθυσμού, τις στρατηγικές που χρησιμοποιούνται και τον πίνακα απολαβής. Ακόμα και για 2 από αυτούς τους παράγοντες ίδιους, η μεταβολή ενός από αυτούς μπορεί να οδηγήσει σε δραστικά διαφορετικά αποτελέσματα (ακόμα και διαφορετική ταξινόμηση, όπως στην 5η προσομοίωση).

δ) Η ανάθεση των εναπομείναντων μελών του πληθυσμού τυχαία σύμφωνα με τη λογική του compensation φαίνεται να είναι καλή επιλογή, ειδικά σε σχέση με την απλότητά της, διότι δε μεταβάλλει σημαντικά τα αποτελέσματα (στρατηγικές που θεωρητικά πεθαίνουν, πεθαίνουν πραγματικά, γενικά το πού τείνουν οι πληθυσμοί δεν αλλάζει). Ανάλογα με την περίπτωση που εξετάζεται, μοιάζει περισσότερο είτε με την περίπτωση της TourTheFit είτε με την περίπτωση TourSimFit δίχως compensation.

ε) Σε γενικές γραμμές, η διακριτή φύση των προσομοιώσεων TourSimFit με ή χωρίς compensation, δημιουργεί σε βάθος χρόνου είτε επαναλαμβανόμενες ταλαντώσεις είτε σύγκλιση σε κάποιες τελικές τιμές πληθυσμού. Το χάος δεν μπορεί πραγματικά να επιτευχθεί, ακόμα και στην 6η προσομοίωση οι πληθυσμοί τελικά τείνουν στις τιμές που προβλέπει και η TourTheFit. Ωστόσο, αυτό δε μας αποτρέπει από το να δημιουργήσουμε τα ενδιαφέροντα αποτελέσματα που βλέπουμε και στο paper.

### Για τα Imitation Dynamics

α) Η επιλογή της ακριβής δυναμικής που ακολουθάται κατά τον υπολογισμό των πληθυσμών της επόμενης γενιάς είναι βασική για τα αποτελέσματα που προκύπτουν. Για παράδειγμα, η επιλογή K παικτών από τον συνολικό πληθυσμό ή K παικτών εκ των μη βέλτιστων, δημιουργούν πολύ διαφορετικά αποτελέσματα

και θεωρητικά και στις προσομοιώσεις.

β) Οι περιπτώσεις υπολογισμού της βέλτιστης στρατηγικής με τη μέθοδο Individual και Total οδηγούν επίσης σε δραστικά διαφορετικά αποτελέσματα για τη φύση των καταστάσεων που προκύπτουν, όπως φαίνεται στις προσομοιώσεις 2 και 3. Σε γενικές γραμμές, η μέθοδος Total δημιουργεί συνεκτικούς υπογράφους που έχουν ως τελικές καταστάσεις τις καταστάσεις επικράτησης μίας εκ των στρατηγικών, ενώ η μέθοδος Individual δημιουργεί έναν μεγαλύτερο υπογράφο που οδηγεί σε πολλές πιθανές τελικές καταστάσεις και μερικές απομονωμένες τελικές καταστάσεις. Ο όρος συνεκτικότητα χρησιμοποιείται εδώ λανθασμένα, καθώς πρόκειται για κατευθυνόμενους γράφους στους οποίους κατά κανόνα δεν υπάρχουν διαδρομές και προς τις δύο κατευθύνσεις, αλλά χρησιμοποιείται για τη χαλαρή επεξήγηση του φαινομένου.

γ) Λόγω του β), παρατηρούμε ότι η τελική κατάσταση δεν είναι πάντα βέβαιη γνωρίζοντας την αρχική, εφόσον επιλέγεται η μέθοδος Individual. Αυτό οφείλεται στο ότι η τυχαία ανάθεση ανά γενιά μπορεί να οδηγήσει διαφορετικές κάθε φορά στρατηγικές σε πλεονεκτική θέση την επόμενη γενιά, και άρα να υπάρχει μεταβλητότητα στα αποτελέσματα. Αντιθέτως, η μέθοδος Total είναι πλήρως ντετερμινιστική ως προς την αρχική και τελική κατάσταση, ενώ παρουσιάζει τυχειότητα μόνο στο μονοπάτι που θα ακολουθηθεί μεταξύ των 2.

δ) Σε κάθε περίπτωση, οι πληθυσμοί που προκύπτουν από τη συνάρτηση TourSimImi ακολουθούν κάποια σειρά μεταβολών που παρουσιάζεται στο διάγραμμα μετάβασης καταστάσεων της αντίστοιχης TourTheImi και AnalyzeMarkovChain.

## Κατάλογος σχημάτων

1	Defectors may be strong . . . . .	6
2	Monotonous Convergence . . . . .	7
3	Attenuated oscillatory movements . . . . .	8
4	Periodic movements . . . . .	9
5	Increasing oscillations . . . . .	10
6	Disordered oscillations . . . . .	11
7	Example showcase of TourTheImi and AnalyzeMarkovChain . . .	15
8	Absorbing States may differ even for the same Starting State . . .	16
9	Testing default mode (“Individual”) for best strategy calculation with $POPO = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ . . . . .	17
10	Testing “Total” mode for best strategy calculation with $POPO =$ $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ . . . . .	18
11	Fitness Dynamics vs Imitation Dynamics $\begin{bmatrix} All\_D & All\_C & TitForTat \end{bmatrix}$ $POPO = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ . . . . .	19