Instituto Jorge Sabato, 25 años.
Comisión Nacional de Energía atómica.

Modelización de Materiales 2018

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Ejemplo: Paracaidista, Péndulo.

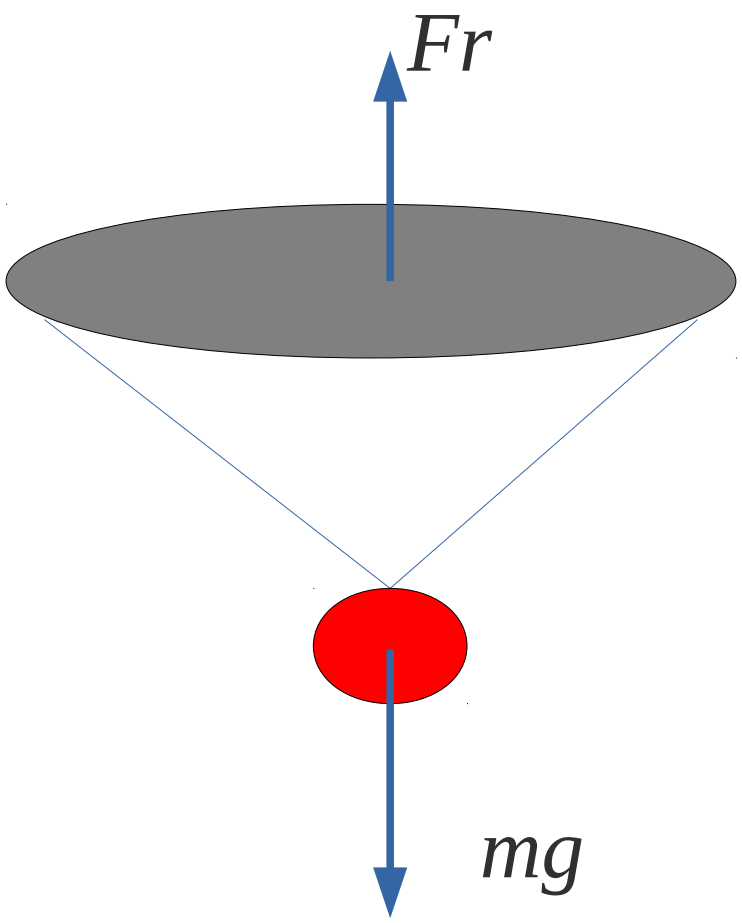
Mariano Forti - Ruben Weht

ruweht@cnea.gov.ar marianodforti@gmail.com

www.tandar.cnea.gov.ar/~weht/Modelizacion

https://mdforti.github.io/Modelizacion/

Paracaidista – Ecuación Diferencial



$$v = \frac{d\,y}{d\,t} \qquad \text{(velocidad)}$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\gamma_{(v)}}{m} v$$

$$\gamma_{(v)} = K\,v$$

$$v = \frac{m\,g}{K}\left(\exp\left(\frac{-k}{m}\,t\right) - 1\right)$$

Discretización de la ecuación Diferencial

Ecuación de orden 1 en velocidad

$$\frac{dv}{dt} = \underbrace{g - \frac{\gamma_{(v)}}{m} v}$$

$$F(t, v) = g - \frac{\gamma_{(v)}}{m} v$$

$$\frac{dv}{dt} = F(t, v)$$

Integración de la ecuación diferencial

$$\frac{v_i - v_{i-1}}{dt} = F\left(t_{i-1}, v_{i-1}\right)$$

Euler

$$v_i = v_{i-1} + dt \; F\left(t_{i-1}, v_{i-1}\right)$$

R – K

$$k_1 = F\left(t_{i-1}, v_{i-1}\right)$$

$$k_2 = F\left(t_{i-1} + \frac{1}{2} dt, v_{i-1} + \frac{1}{2} k_1 dt\right)$$

$$k_3 = F\left(t_{i-1} + \frac{1}{2} dt, v_{i-1} + \frac{1}{2} k_2 dt\right)$$

$$k_4 = F\left(t_{i-1} + dt, v_{i-1} + k_3 dt\right)$$

$$v_i = v_{i-1} + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) dt$$

Paracaidista - Discretización

Orden 2 en altura

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = g - \frac{\gamma_{\left(\frac{dy}{dt}\right)}}{m}\frac{dy}{dt}$$

Cambio de variables

$$v = \frac{dy}{dt} \qquad Y = \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}$$

$$\frac{dY}{dt} = \tilde{F}(t, Y) = \begin{pmatrix} v \\ F(t, v) \end{pmatrix}$$

Integración de la ecuación de orden superior

$$\frac{Y_i - Y_{i-1}}{dt} = \tilde{F}\left(t_{i-1}, v_{i-1}\right)$$

Euler

$$Y_i = Y_{i-1} + dt \;\; \tilde{F}\left(t_{i-1}, v_{i-1}\right)$$

R – K

$$k_1 = \tilde{F}\left(t_{i-1}, Y_{i-1}\right)$$

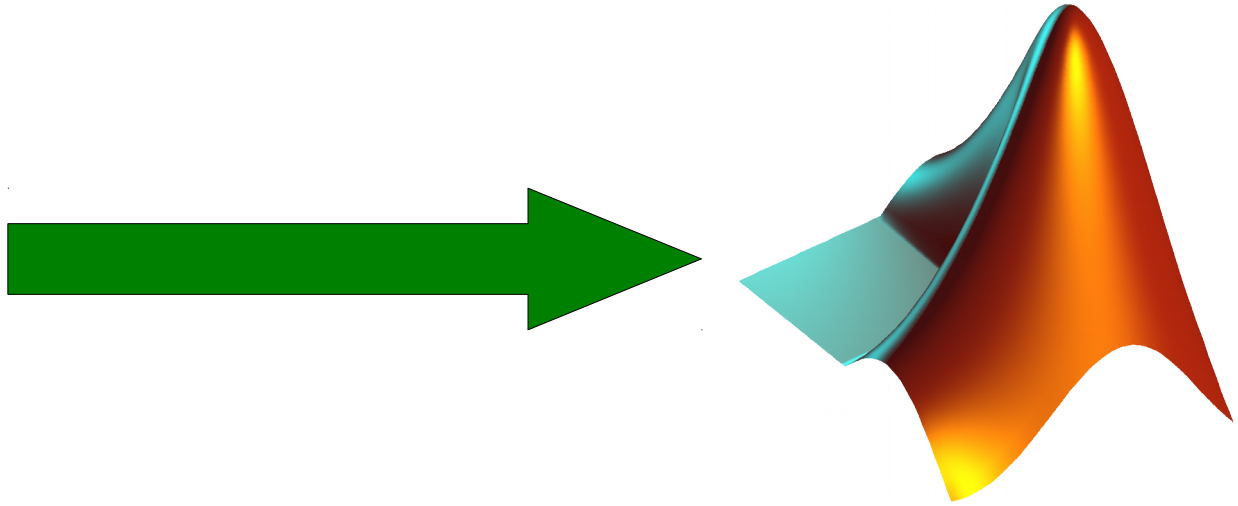
$$k_2 = \tilde{F}\left(t_{i-1} + \frac{1}{2} dt\,, Y_{i-1} + \frac{1}{2} k_1 dt\right)$$

$$k_3 = \tilde{F}\left(t_{i-1} + \frac{1}{2} dt\,, Y_{i-1} + \frac{1}{2} k_2 dt\right)$$

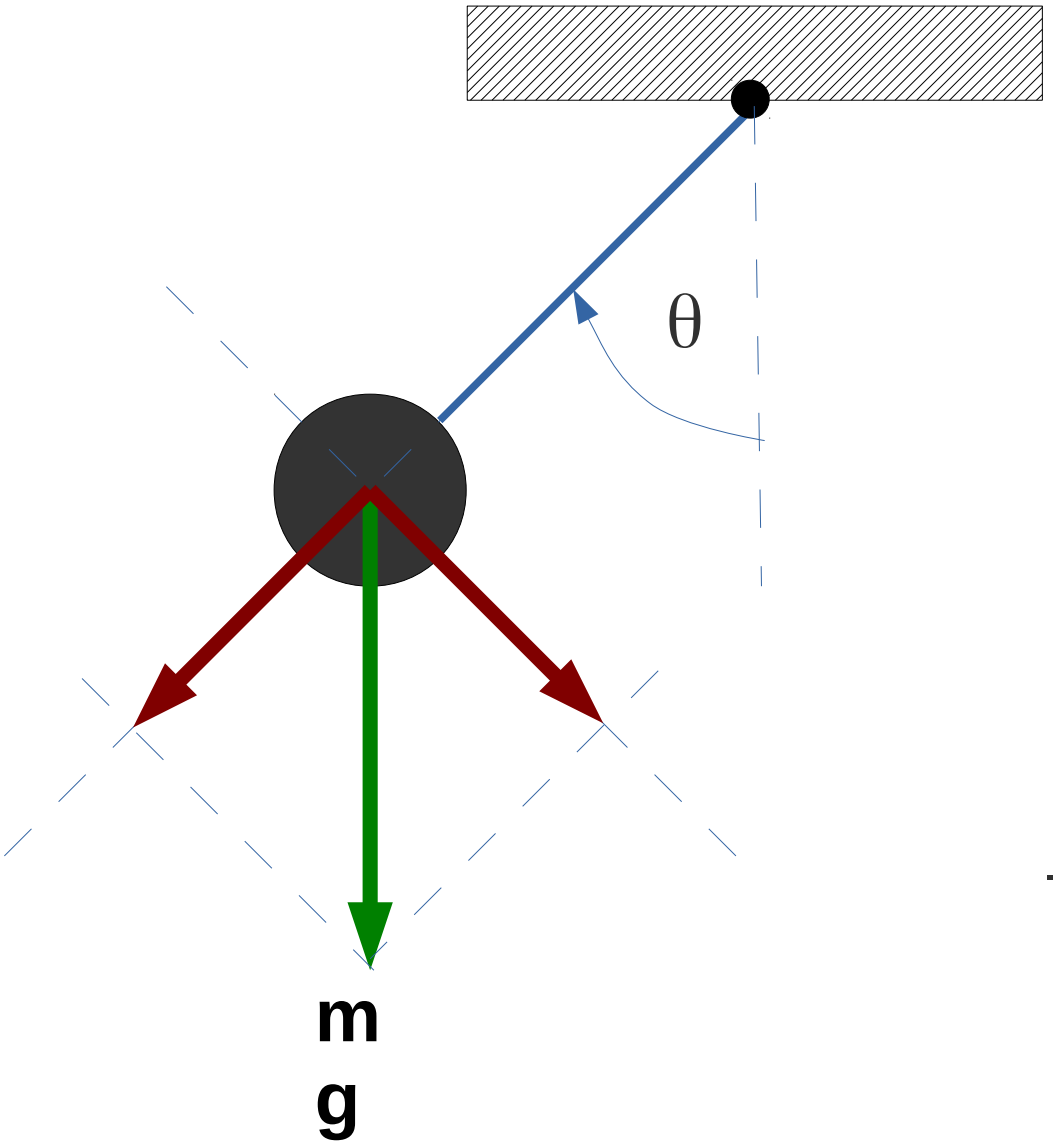
$$k_4 = \tilde{F}\left(t_{i-1} + dt\,, Y_{i-1} + k_3 dt\right)$$

$$Y_i = Y_{i-1} + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) dt$$

Ecuación diferencial Ordinaria - Ejercicio



Péndulo – Solución para ángulos grandes



$$m R \frac{d^2\theta}{dt} + mg \sin(\theta) = 0$$

$$v = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{g}{R} \sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\theta \\ v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \frac{-g}{R}\sin\theta \end{pmatrix} = \tilde{F}\begin{pmatrix}\theta \\ v\end{pmatrix}$$

Péndulo – Solución para ángulos grandes