Instituto Jorge Sabato, 25 años
Comisión Nacional de Energía Atómica

Modelización de Materiales 2018
Práctica de Elementos Finitos 2

Método de Elementos Finitos, Ensamble de Matrices Elementales

Mariano Forti – Ruben Weht

marianodforti@gmail.com – ruweht@cnea.gov.ar

www.tandar.cnea.gov.ar/~weht/Modelización

https://mdforti.github.io/Modelizacion/

Ejemplo: Problema de la Ménsula.

Consideremos el problema de la ménsula que se mostró en la clase teórica, que se vuelve a reproducir en la Figura 1. Para resolver el problema mediante el método de elementos finitos, identificamos que cada barra de la ménsula constituye un elemento lineal, y las soldaduras serán los nodos para los que resolveremos sus desplazamientos. Cada nodo tiene dos grados de libertad, ya que deben ser considerados sus desplazamientos en el plano que contiene a la ménsula. Antes de escribir los desplazamientos nodales, es conveniente numerar los nodos y sus grados de libertad.

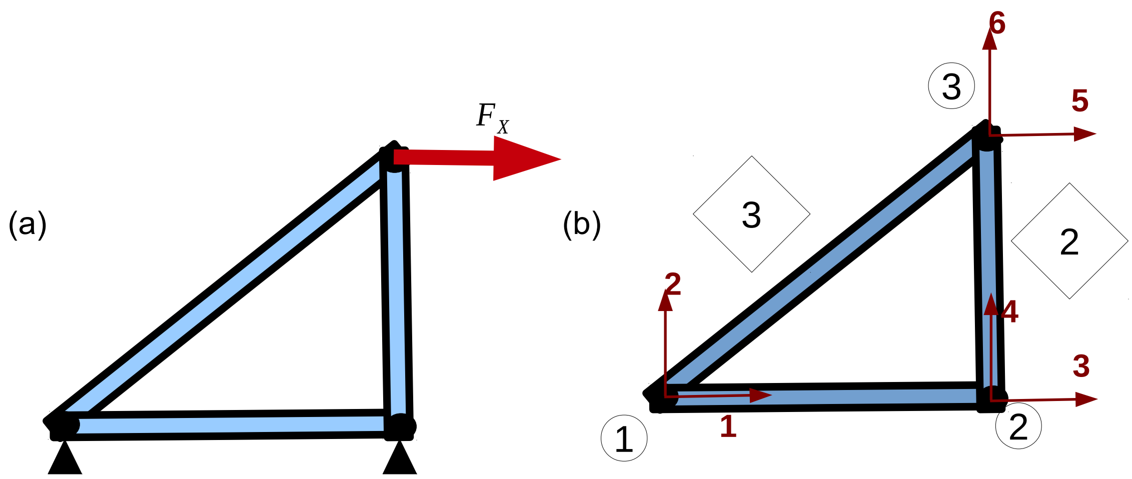

Figura 1: Ménsula , (a) Condiciones de Contorno (b) Numeración de Nodos , Elementos y grados de libertad.

De esta manera, podemos inicializar nuestras variables. Los desplazamientos nodales quedarán descritos por un vector de desplazamientos en el que se ubicarán los grados de libertad del sistema con la numeración global. Lo mismo ocurre con las fuerzas sobre los nodos. En la Tabla 1 se muestra la correspondencia entre los grados de libertad globales u los nodales

Tabla 1: Numeración de grados de libertad de la ménsula

Nodo	Grados de libertad	
	X	Y
1	u_1, F_1	$u_{2,} F_2$
2	$u_{3,} F_3$	$u_{4,} F_4$
3	$u_{5,} F_5$	u_6, F_6

De esta manera, podemos definir los vectores de fuerza y desplazamientos como las siguientes columnas,

$$F=\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{pmatrix} \quad U=\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Matrices Descriptivas del Sistema

Para proseguir con la construcción del problema es conveniente definir algunas variables que nos serán de suma utilidad.

Matriz de Nodos

En primera instancia vamos a definir la **Matriz de Nodos** del sistema con una fila para cada nodo, y en las columnas se alojarán las coordenadas *x y z* de cada uno. Si la longitud de las barras más cortas de nuestro ejemplo es L, la matriz de nodos puede escribirse rápidamente,

$$MN=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ L & 0 & 0 \\ L & L & 0 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Para introducir la indexación general que usaremos en adelante diremos que en forma general en la fila i-ésima de la matriz de nodos se alojan las coordenadas *x y z* del nodo i-ésimo, y el número de filas será igual al número de nodos **N** del sistema

$$MN(i,:)=(x_i, y_i, z_i)\ , \ \text{size}(MN)=N\times 3 \qquad (3)$$

Dimensionalidad y grados de libertad por nodo

Debe notarse que el número de columnas de la matriz de nodos corresponde con la dimensionalidad del problema en el espacio real. Sin embargo, este número no necesariamente coincide con la cantidad de grados de libertad que aporta cada nodo al sistema global. Por ejemplo en un problema de una barra con torsión, puede identificarse una dimensionalidad 1 ya que solo se describen desplazamientos verticales. Sin embargo, el número de grados de libertad por nodo es dos, ya que se resuelven los ángulos de rotación local de las secciones transversales de la barra en las posiciones nodales. Queda entonces evidenciado que es necesario definir la variable **grados de libertad por nodo (glxn)**. En el caso de nuestra ménsula tenemos 2 grados de libertad por nodo,

$$glxn = 2 \tag{4}$$

Matriz de Conectividad

Por otro lado conviene definir la **Matriz de Conectividad MC**. Esta matriz tendrá una fila por elemento, y para cada elemento la lista de nodos que lo conforman.

En forma general, para el elemento **e** se tienen **nodos por elemento** (**nxe)** nodos. Por lo tanto, para NE elementos, la matriz de concetividad tiene dimensiones

$$\mathrm{size}(MC) = NE \times nxe \tag{5}$$

y la estructura general de la misma es

$$MC(e,:) = [n_1, n_2, \ldots, n_{nxe}] \tag{6}$$

Donde n_i es el i-ésimo nodo del elemento e.

Volviendo a nuestro ejemplo de la ménsula con la numeración de la Figura 1, la matriz de conectividad quedará como

$$MC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Vale la pena aclarar aquí que el orden en el que se escribieron los nodos que conforman cada elemento es totalmente arbirtrario. A efectos de la formulación que sigue, es indistinto el orden elegido para cada nodo de cada elemento, siempre que se pueda trazar en forma unívoca desde la matriz de conectividad cuáles son las coordenadas de cada uno.

Trazabilidad de los nodos, indexación y propiedades de los elementos.

Por ejemeplo, para obtener el ángulo del elemento **e** de nuestra ménsula, una vez que estan escritas las matrices no es necesario ver cuál es dicho elemento, sino que alcanza con la información en la matriz de conectividad y la matriz de nodos. El ángulo en cuestión quedará definido como el arcotangente del cociente entre la diferencia entre las coordenadas *x* y la diferencia entre las coordenadas *y* de los nodos que lo conforman. Entonces, sin revisar la Figura 1 pero sí las definiciones de las matrices, se tiene para las coordenadas del elemento i-esimo del nodo e

$$x_i^e = MN(MC(e,i),1); \quad y_i^e = MN(MC(e,i),2) \tag{8}$$

de manera que el ángulo determinado por el elemento es

$$\theta_e = arctg_2\left(\frac{x_2^e - x_1^e}{y_2^e - y_1^e}\right) \tag{9}$$

donde la función $arctg_2$ es aquella que deduce el cuadrante del ángulo a partir de los signos de las diferencias.

Matrices constitutivas del sistema

Matriz de rigidez

La matriz de rigidez elemental para una barra con orientación arbirtraria es conocida a partir de la clase teórica, y la recordamos a continuación

$$[K]_e = k_e \begin{pmatrix} \cos^2(\theta_e) & \cos(\theta_e)\sin(\theta_e) & -\cos^2(\theta_e) & -\cos(\theta_e)\sin(\theta_e) \\ \cos(\theta_e)\sin(\theta_e) & \sin^2(\theta_e) & -\cos(\theta_e)\sin(\theta_e) & -\sin^2(\theta_e) \\ -\cos^2(\theta_e) & -\cos(\theta_e)\sin(\theta_e) & \cos^2(\theta_e) & \cos(\theta_e)\sin(\theta_e) \\ -\cos(\theta_e)\sin(\theta_e) & -\sin^2(\theta_e) & \cos(\theta_e)\sin(\theta_e) & \sin^2(\theta_e) \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$k_e = E_e A_e / L_e$$

De esta manera, solo es necesario guardar un vector para cada propiedad intrínseca de las barras: **el módulo elástico E_e** y **la sección A_e** . En cuanto a la longitud del elemento, podemos obtenerlo a partir de la matriz de nodos y de la matriz de conectividad,

$$L_e = \sqrt{\left(x_2^e - x_1^e\right)^2 + \left(y_2^e - y_1^e\right)^2} \tag{11}$$

Matrices de rigidez elementales.

En el caso de nuestra ménsula, las matrices de rigidez locales pueden calcularse fácilmente pues los ángulos quedan bien determinados.

$$K_1 = k_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ;\; K_2 = k_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} ;\; K_3 = k_3 \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Matrices Globales: Ensamble de Matrices (con los dedos)

Hasta ahora hemos pensado a las matrices de rigidez del sistema en un sistema de indexación local. Esto se interpreta en el contexto de los grados de libertad locales de cada elemento.

Ecuacion global para el elemento 1

Por ejemplo para el elemento 1, la matriz de conectividad de la ecuación (7) nos dice que la matriz de rigidez del mismo será la que describe el acoplamiento entre los grados de libertad del nodo 1 con los del nodo 2. Según la indexación definida en la Tabla 1, debemos reordenar los elementos de matriz de K_1 en los elementos de matriz correspondientes en una matriz que permita calcular la fuerza sobre los nodos del elemento 1 en función de **todos** los desplazamientos.

Para hacer eso, es conveniente escribir la ecuación para el elemento 1 con la indexación global. Redundamos al decir que para escribir esta ecuación recurrimos a la información que brindan la matriz de conectividad para saber cuáles son los nodos involucrados y a la Tabla 1 para saber cuáles son los grados de libertad de cada nodo. A demás , localmente es importante que dichos índices aparezcan en el orden que detalla la matriz de conectividad.

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix}^1 = k_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \tag{13}$$

donde se usó un supraíndice en el vector de fuerzas para indicar pertenencia al nodo. Ahora bien, para tener la ecuación global de la fuerza sobre los nodos del elemento 1, debemos expandir esta ecuación en todos los grados de libertad del sistema,

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & -k1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k1 & 0 & k1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} \tag{14}$$

Ecuacion global para el elemento 2

El mismo procedimiento puede utilizarse para construir la matriz global de la fuerza sobre los nodos del elemento 2. La forma local de dicha ecuación es

$$\begin{pmatrix} F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{pmatrix}^2 = k_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} \tag{15}$$

De modo que al expandir las ecuaciones en función de todos los grados de libertad del sistema, tenemos,

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_1 & 0 & -k_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_1 & 0 & k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} \tag{16}$$

Ecuacion global para el elemento 3

Por último, consideremos al elemento 3. Notar que la fila correspondiente de la matriz de conectividad se escribió como (3,1). Por lo tanto, en los vectores locales aparecerán primero los grados de libertad del nodo 3 y luego los del nodo 1, es decir,

$$\begin{pmatrix} F_5 \\ F_6 \\ F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}^2 = k_2 \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_5 \\ u_6 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \tag{17}$$

Sin embargo al expandir en todos los grados de libertad, los elementos de matriz deben aparecer en el lugar correcto, es decir,

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0.5k_3 & 0.5k_3 & 0 & 0 & -0.5k_3 & -0.5k_3 \\ 0.5k_3 & 0.5k_3 & 0 & 0 & -0.5k_3 & -0.5k_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5k_3 & -0.5k_3 & 0 & 0 & 0.5k_3 & 0.5k_3 \\ -0.5k_3 & -0.5k_3 & 0 & 0 & 0.5k_3 & 0.5k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} \tag{18}$$

Ecuación Global

Por último, la fuerza total del sistema será la sumatoria de todas las fuerzas elementales que se ejerzan sobre los nodos, es decir,

$$F = F^1 + F^2 + F^3 \tag{19}$$

Al reemplazar por lo obtenido en las ecuaciones (14), (16) y (18), se obtiene el sistema de ecuaciones del sistema.

$$F = \left(M^1 + M^2 + M^3\right) U \tag{20}$$

Donde las M^i son las matrices de rigidez expandidas en todos los grados de libertad.

Resolución del sistema.

La resolución del sistema fué abordada anteriormente y tiene que ver con la definición de los vectores de índices de desplazamientos vinculados y de incógnitas, s y r respectivamente, por lo que no lo volveremos a tratar aquí.