Interpolación

Polinomio de Lagrange

$L_i(x_j)=\delta_{ij}$

$$P(x)=y_i \times L_i(x)=\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L_1(x) \\ \vdots \\ L_N(x) \end{pmatrix} \tag{1}$$

Splines.

Antes de comenzar el análisis es conveniente dejar expresadas las siguientes definiciones. Supongamos un sistema de N puntos experimentales que podemos escribir de la siguiente forma:

$$\{(x_1, y_1),\ldots,(x_N, y_N)\} \tag{2}$$

Los mismos dividen la abscisa (eje x) en $N-1$ intervalos determinados entre dos puntos contiguos. En cada intervalo interpolaremos con polinomios de grado 3. En el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ de longitud $h_i=x_{i+1}-x_i$ la función y sus derivadas quedan aproximadas por:

$$\begin{aligned} f_i(x) &= d_i+c_i(x-x_i)+b_i(x-x_i)^2+a_i(x-x_i)^3 \\ f_i'(x) &= c_i+2b_i(x-x_i)+3a_i(x-x_i)^2 \\ f_i''(x) &= 2b_i+6a_i(x-x_i) \end{aligned} \tag{3}$$

La primer condición que debemos imponer sobre estos polinomios es que efectivamente se reproduzca el conjunto experimental,

$$f_i(x_i)=y_i \quad \Rightarrow d_i=y_i \tag{4}$$

Para obtener el resto de los coeficientes, vamos a imponer condiciones de continuidad en la función y en sus derivadas.

Continuidad en la función

$f_i(x_{i+1}) = f_{i+1}(x_{i+1})$ ($N-2$ ecuaciones)

evaluando explícitamente: (5)

$$y_i + c_i h_i + b_i h_i^2 + a_i h_i^3 = y_{i+1} \quad \Rightarrow \quad c_i = \frac{(y_{i+1} - y_i)}{h_i} - b_i h_i - a_i h_i^2$$

Tengamos en cuenta que si (5) vale para i , entonces vale para $i-1$:

$$c_{i-1} = \frac{(y_i - y_{i-1})}{h_{i-1}} - b_{i-1} h_{i-1} - a_{i-1} h_{i-1}^2 \tag{6}$$

Continidad de la derivada

$f_i{}'(x_{i+1}) = f_{i+1}{}'(x_{i+1})$ ($N-2$ ecuaciones)

evaluando explícitamente: (7)

$$c_i + 2 b_i h_i + 3 a_i h_i^2 = c_{i+1}$$

y si vale para i entonces vale para $i-1$

$$c_i = c_{i-1} + 2 b_{i-1} h_{i-1} + 3 a_{i-1} h_{i-1}^2 \tag{8}$$

Ahora bien, reemplazando (5) y (6) en (8), tenemos que:

$$\frac{(y_{i+1} - y_i)}{h_i} - b_i h_i - a_i h_i^2 = \frac{(y_i - y_{i-1})}{h_{i-1}} - b_{i-1} h_{i-1} - a_{i-1} h_{i-1}^2 + 2 b_{i-1} h_{i-1} + 3 a_{i-1} h_{i-1}^2 \tag{9}$$

Reordenemos esta expresión:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} = b_i h_i + a_i h_i^2 + b_{i-1} h_{i-1} + 2 a_{i-1} h_{i-1}^2 \tag{10}$$

Continuidad en la segunda derivada

$$f_i{}''(x_{i+1}) = f_{i+1}{}''(x_{i+1}) \tag{11}$$

$$2b_i + 6a_i h_i = 2b_{i+1} \;\Rightarrow\; a_i = \frac{1}{3}\frac{(b_{i+1} - b_i)}{h_i} \tag{12}$$

Considerar también la correspondiente para $i-1$

Reemplazando en (10):

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} = b_i h_i + \frac{1}{3}\frac{(b_{i+1} - b_i)}{h_i} h_i^2 + b_{i-1} h_{i-1} + 2\frac{1}{3}\frac{(b_i - b_{i-1})}{h_{i-1}} h_{i-1}^2$$

reordenando:

$$\begin{aligned} &\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} = \\ &b_i h_i + \frac{1}{3} b_{i+1} h_i - \frac{1}{3} b_i h_i + b_{i-1} h_{i-1} + \frac{2}{3} b_i h_{i-1} - \frac{2}{3} b_{i-1} h_{i-1} \end{aligned} \tag{13}$$

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} = b_{i-1}\left(h_{i-1} - \frac{2}{3} h_{i-1}\right) + b_i\left(h_i - \frac{1}{3} h_i + \frac{2}{3} h_{i-1}\right) + b_{i+1}\frac{1}{3} h_i$$

y para terminar:

$$3\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right) = b_{i-1} h_{i-1} + 2 b_i (h_i + h_{i-1}) + b_{i+1} h_i \tag{14}$$

Condiciones de contorno

Hasta acá, tenemos que en total debemos resolver 4 coeficientes por intervalo, dando en total $4(N-1)$ incógnitas. Por las condiciones de continuidad, tenemos la cantidad de ecuaciones,

La interpolación debe contener a los datos, ec (4): N ecuaciones.
condiciones de continuidad de la función : N – 2 ecuaciones .
condiciones de continuidad de la derivada: N – 2 ecuaciones.
condiciones sobre la derivada segunda : N – 2 ecuaciones

Es decir que el total de ecuaciones que tenemos es de $N + 3\times(N-2) = 4\mathrm{N} - 6$ ecuaciones. Tenemos dos ecuaciones menos de las que necesitamos para resolver el sistema! Es necesario entonces poner dos condiciones extra. Las mismas se consigue poniendo condiciones de contorno.

Consideramos ahora las condiciones de contorno naturales, $S_1 = S_n = 0$ donde $S_i = f_i''(x_i)$. En el extremo izquierdo esto se cumple fácilmente poniendo $b_1 = 0$. En es extremo derecho, consideremos un intervalo auxiliar $[x_N, \hat{x}]$ donde interpolamos por f_N . Notar que entonces vamos a sumar incógnitas extra al problema (los coeficientes N-ésimos) de las cuales sólo me interesa el que corresponde con la derivada segunda. La condición en la derivada segunda impone $f_N''(x_N) = 0$ con lo que $b_N = 0$.

Solución del Sistema de ecuaciones.

Para las b_i , nos queda resolver el siguiente sistema de ecuaciones (14). Expandiendo dichas ecuaciones de manera de incluir las condiciones de contorno y al mismo tiempo explicitar la dependencia en todos los coeficientes b_i tenemos lo siguiente

i = 1; $b_1=0 \Rightarrow b_1+0\cdot b_2+0\cdot b_3+\cdots+0\cdot b_N=0$

i = 2; $b_1 h_1+2(h_2+h_1)b_2+b_3 h_2+0\cdot b_4+0\cdot b_5+\cdots=3\left(\frac{y_3-y_2}{h_2}-\frac{y_3-y_2}{h_2}\right)$

i : $0\cdot b_1+0\cdot b_2+\cdots+b_{i-1}h_{i-1}+2b_i(h_i+h_{i-1})+b_{i+1}h_i+0\cdot b_{i+2}+\cdots+0\cdot b_N=3\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}-\frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}}\right)$

i=N: $b_N=0 \Rightarrow \cdots+0\cdot b_{N-2}+0\cdot b_{N-2}+1\cdot b_N=0$

si ponemos a todas las b_i en un vector columna, cada una de estas ecuaciones representa una fila de una ecuación matricial que define el sistema a resolver. De esta forma, construimos el sistema lineal que representa a la interpolación que queremos hacer:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_2+h_1) & h_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_3+h_2) & h_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{N-3} & 2(h_{N-2}+h_{N-3}) & h_{N-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & h_{N-2} & 2(h_{N-1}+h_{N-2}) & h_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{N-2} \\ b_{N-1} \\ b_N \end{pmatrix} =$$

$$= 3\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{y_3-y_2}{h_2}-\frac{y_2-y_1}{h_1} \\ \vdots \\ \frac{y_N-y_{N-1}}{h_{N-1}}-\frac{y_{N-1}-y_{N-2}}{h_{N-2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Este sistema de ecuaciones puede resolverse por algún método tradicional de álgebra lineal, ya que es de la forma:

$$B[b]=[Y] \qquad (15)$$

Si el sistema de ecuaciones cumple con las condiciones necesarias para admitir solución única (en general lo hace), la misma puede encontrarse invirtiendo la matriz B:

$$[b]=B^{-1}[Y] \qquad (16)$$

Con las b_i resueltas, pueden encontrarse por recursividad las a_i de la ecuación (12) y las c_i de la ecuación (5).

Otras condiciones de contorno

Supongamos que las condiciones de contorno naturales no son representativas del sistema estudiado. En ese caso, podría poner otro tipo de condiciones, por ejemplo en las derivadas segundas en los extremos.

$S_1 = \alpha$

$S_2 = \beta$

En ese caso podemos proceder en forma similar a lo hecho para las condiciones de contorno naturales. Sin embargo, la ecuación para la b_1 será diferente.

$$b_1 = \alpha \tag{17}$$

Por otro lado, la ecuación para el b_N (derivada segunda en el último puno interpolado dede un segmento ficticio) también cambia respecto del caso anterior:

$$b_N = \beta \tag{18}$$

Por lo tanto, la matriz B del sistema de ecuaciónes debe tener el siguiente aspecto:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_2+h_1) & h_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_3+h_2) & h_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{N-3} & 2(h_{N-2}+h_{N-3}) & h_{N-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & h_{N-2} & 2(h_{N-1}+h_{N-2}) & h_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{N-2} \\ b_{N-1} \\ b_N \end{pmatrix} =$$

$$= 3 \begin{pmatrix} \alpha \\ \frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1} \\ \vdots \\ \frac{y_N - y_{N-1}}{h_{N-1}} - \frac{y_{N-1} - y_{N-2}}{h_{N-2}} \\ \beta \end{pmatrix}$$

Condiciones sobre las primeras derivadas.

Supongamos, para redundar con el título de esta sección, que la condición debe ser impuesta sobre las derivadas de los extremos.

$$f'(x_1)=A \quad ; \quad f'(x_N)=B \tag{19}$$

Esta ecuación se puede traducir en condiciones sobre los coeficientes de f_1' y de f_{N-1}', es decir,

$$f_1'(x_1)=A=c_1$$
$$f_{N-1}'(x_N)=B=c_{N-1}+2b_{N-1}(x_N-x_{N-1})+3a_{N-1}(x_N-x_{N-1})^2$$

Reemplazando A en la solución para c_1 obtenida anteriormente ecuación (5),

$$A=\frac{(y_2-y_1)}{h_1}-b_1h_1-a_1h_1^2$$

y reemplazando la solución para a_1 de la ecuación (12),

$$A=\frac{(y_2-y_1)}{h_1}-b_1h_1-\frac{1}{3}\frac{(b_2-b_1)}{h_1}h_1^2$$
$$b_1h_1+\frac{1}{3}(b_2-b_1)h_1=\frac{(y_2-y_1)}{h_1}-A$$
$$3b_1h_1+(b_2-b_1)h_1=3\left[\frac{(y_2-y_1)}{h_1}-A\right]$$

y finalmente

$$2b_1h_1+b_2h_1=3\left[\frac{(y_2-y_1)}{h_1}-A\right] \tag{20}$$

Por otro lado, para el extremo opuesto,

$$B=c_{N-1}+2b_{N-1}h_{N-1}+3a_{N-1}h_{N-1}^2$$

Reemplazando la solución para C_{N-1} ecuación (5) se obtiene $c_i=\frac{(y_{i+1}-y_i)}{h_i}-b_ih_i-a_ih_i^2$

$$B=\frac{(y_N-y_{N-1})}{h_{N-1}}-b_{N-1}h_{N-1}-a_{N-1}h_{N-1}^2+2b_{N-1}h_{N-1}+3a_{N-1}h_{N-1}^2$$
$$B=\frac{(y_N-y_{N-1})}{h_{N-1}}+b_{N-1}h_{N-1}+2a_{N-1}h_{N-1}^2$$

y de la solución para a_{N-1} de la ecuación (12) $\frac{1}{3}\frac{(b_{i+1}-b_i)}{h_i}$

reordenando:

$$b_{N-1}h_{N-1}+2b_Nh_{N-1}=3\left[B-\frac{(y_N-y_{N-1})}{h_{N-1}}\right]$$

Con estas condiciones el sistema de ecuaciones queda,

$$\begin{bmatrix} 2h_1 & h_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_2+h_1) & h_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_3+h_2) & h_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{N-3} & 2(h_{N-2}+h_{N-3}) & h_{N-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & h_{N-2} & 2(h_{N-1}+h_{N-2}) & h_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & h_{N-1} & 2h_{N-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{N-2} \\ b_{N-1} \\ b_N \end{pmatrix} =$$

$$= 3 \begin{pmatrix} \frac{(y_2 - y_1)}{h_1} - A \\ \frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1} \\ \vdots \\ \frac{y_N - y_{N-1}}{h_{N-1}} - \frac{y_{N-1} - y_{N-2}}{h_{N-2}} \\ B - \frac{(y_N - y_{N-1})}{h_{N-1}} \end{pmatrix}$$

Notar que el coeficiente b de la función de interpolación del intervalo ficticio (aka la derivada segunda en el último punto) se resuelve del sistema de ecuaciones.