Instituto Jorge Sabato, 25 años
Comisión Nacional de Energía Atómica

Modelización de Materiales 2018
Práctica de Elementos Finitos 2

Método de Elementos Finitos, Ensamble de Matrices Elementales

Mariano Forti – Ruben Weht

marianodforti@gmail.com – ruweht@cnea.gov.ar

www.tandar.cnea.gov.ar/~weht/Modelización

https://mdforti.github.io/Modelizacion/

Ejemplo: Problema de la Ménsula.

Consideremos el problema de la ménsula que se mostró en la clase teórica, que se vuelve a reproducir en la Figura 1. Para resolver el problema mediante el método de elementos finitos, identificamos que cada barra de la ménsula constituye un elemento lineal, y las soldaduras serán los nodos para los que resolveremos sus desplazamientos. Cada nodo tiene dos grados de libertad, ya que deben ser considerados sus desplazamientos en el plano que contiene a la ménsula. Antes de escribir los desplazamientos nodales, es conveniente numerar los nodos y sus grados de libertad.

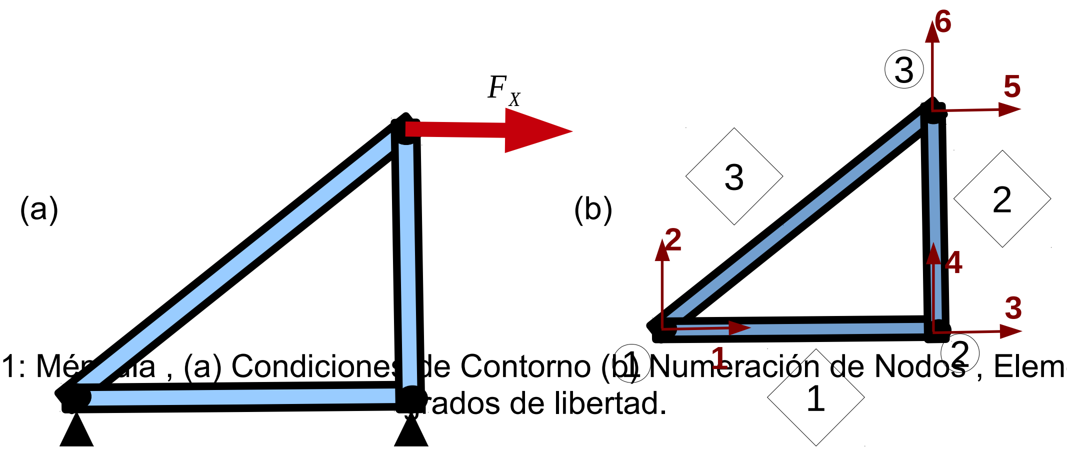

Figura 1: Ménsula , (a) Condiciones de Contorno (b) Numeración de Nodos , Elementos y Grados de libertad.

Indexación de los Grados de Libertad

De esta manera, podemos inicializar nuestras variables. Los desplazamientos nodales quedarán descritos por un vector de desplazamientos en el que se ubicarán los grados de libertad del sistema con la numeración global. Lo mismo ocurre con las fuerzas sobre los nodos. En la Tabla 1 se muestra la correspondencia entre los grados de libertad globales u los nodales

Tabla 1: Numeración de grados de libertad de la ménsula

Nodo	Grados de libertad	
	X	Y
1	u_1, F_1	u_2, F_2
2	u_3, F_3	u_4, F_4
3	u_5, F_5	u_6, F_6

De esta manera, podemos definir los vectores de fuerza y desplazamientos como las siguientes columnas,

$$F=\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{pmatrix} \quad U=\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Matrices Descriptivas del Sistema

Para proseguir con la construcción del problema es conveniente definir algunas variables que nos serán de suma utilidad.

Matriz de Nodos

En primera instancia vamos a definir la **Matriz de Nodos** del sistema con una fila para cada nodo, y en las columnas se alojarán las coordenadas *x y z* de cada uno. Si la longitud de las barras más cortas de nuestro ejemplo es L, la matriz de nodos puede escribirse rápidamente,

$$MN=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ L & 0 & 0 \\ L & L & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Para introducir la indexación general que usaremos en adelante diremos que en forma general en la fila i-ésima de la matriz de nodos se alojan las coordenadas *x y z* del nodo i-ésimo, y el número de filas será igual al número de nodos **N** del sistema

$$MN(i,:)=(x_i, y_i, z_i)\ ,\ \mathrm{size}(MN)=N\times 3 \tag{3}$$

Dimensionalidad y grados de libertad por nodo

Debe notarse que el número de columnas de la matriz de nodos corresponde con la dimensionalidad del problema en el espacio real. Sin embargo, este número no necesariamente coincide con la cantidad de grados de libertad que aporta cada nodo al sistema global. Por ejemplo en un problema de una barra con torsión, puede identificarse una dimensionalidad 1 ya que solo se describen desplazamientos verticales. Sin embargo, el número de grados de libertad por nodo es dos, ya que se resuelven los ángulos de rotación local de las secciones transversales de la barra en las posiciones nodales. Queda entonces evidenciado que es necesario definir la variable **grados de libertad por nodo (glxn)**. En el caso de nuestra ménsula tenemos 2 grados de libertad por nodo,

$$glxn=2 \tag{4}$$

Matriz de Conectividad

Por otro lado conviene definir la **Matriz de Conectividad MC**. Esta matriz tendrá una fila por elemento, y para cada elemento la lista de nodos que lo conforman.

En forma general, para el elemento **e** se tienen **nodos por elemento** (**nxe)** nodos. Por lo tanto, para NE elementos, la matriz de concetividad tiene dimensiones

$$\mathrm{size}(MC)=NE\times nxe \tag{5}$$

y la estructura general de la misma es

$$MC(e,:)=[n_1,n_2,\ldots,n_{nxe}] \tag{6}$$

Donde n_i es el i-ésimo nodo del elemento e.

Volviendo a nuestro ejemplo de la ménsula con la numeración de la Figura 1, la matriz de conectividad quedará como

$$MC=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix} \tag{7}$$

Vale la pena aclarar aquí que el orden en el que se escribieron los nodos que conforman cada elemento es totalmente arbirtrario. A efectos de la formulación que sigue, es indistinto el orden elegido para cada nodo de cada elemento, siempre que se pueda trazar en forma unívoca desde la matriz de conectividad cuáles son las coordenadas de cada uno.

Trazabilidad de los nodos, indexación y propiedades de los elementos.

Por ejemeplo, para obtener el ángulo del elemento **e** de nuestra ménsula, una vez que estan escritas las matrices no es necesario ver cuál es dicho elemento, sino que alcanza con la información en la matriz de conectividad y la matriz de nodos. El ángulo en cuestión quedará definido como el arcotangente del cociente entre la diferencia entre las coordenadas *x* y la diferencia entre las coordenadas *y* de los nodos que lo conforman. Entonces, sin revisar la Figura 1 pero sí las definiciones de las matrices, se tiene para las coordenadas del elemento i-esimo del nodo e

$$x_i^e = MN(MC(e,i),1); \quad y_i^e = MN(MC(e,i),2) \tag{8}$$

de manera que el ángulo determinado por el elemento es

$$\theta_e = arctg_2\left(\frac{y_2^e - y_1^e}{x_2^e - x_1^e}\right) \tag{9}$$

donde la función $arctg_2$ es aquella que deduce el cuadrante del ángulo a partir de los signos de las diferencias.

Matrices constitutivas del sistema

Matriz de rigidez

La matriz de rigidez elemental para una barra con orientación arbirtraria es conocida a partir de la clase teórica, y la recordamos a continuación

$$[K]_e = k_e \begin{pmatrix} \cos^2(\theta_e) & \cos(\theta_e)\sin(\theta_e) & -\cos^2(\theta_e) & -\cos(\theta_e)\sin(\theta_e) \\ \cos(\theta_e)\sin(\theta_e) & \sin^2(\theta_e) & -\cos(\theta_e)\sin(\theta_e) & -\sin^2(\theta_e) \\ -\cos^2(\theta_e) & -\cos(\theta_e)\sin(\theta_e) & \cos^2(\theta_e) & \cos(\theta_e)\sin(\theta_e) \\ -\cos(\theta_e)\sin(\theta_e) & -\sin^2(\theta_e) & \cos(\theta_e)\sin(\theta_e) & \sin^2(\theta_e) \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$k_e = E_e A_e / L_e$$

De esta manera, solo es necesario guardar un vector para cada propiedad intrínseca de las barras: **el módulo elástico E_e** y **la sección A_e**. En cuanto a la longitud del elemento, podemos obtenerlo a partir de la matriz de nodos y de la matriz de conectividad,

$$L_e = \sqrt{\left(x_2^e - x_1^e\right)^2 + \left(y_2^e - y_1^e\right)^2} \tag{11}$$

Matrices de rigidez elementales.

En el caso de nuestra ménsula, las matrices de rigidez locales pueden calcularse fácilmente pues los ángulos quedan bien determinados.

$$K_1 = k_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \; K_2 = k_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \\ K_3 = k_3 \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Matrices Globales: Ensamble de Matrices (con los dedos)

Hasta ahora hemos pensado a las matrices de rigidez del sistema en un sistema de indexación local. Esto se interpreta en el contexto de los grados de libertad locales de cada elemento.

Ecuacion global para el elemento 1

Por ejemplo para el elemento 1, la matriz de conectividad de la ecuación (7) nos dice que la matriz de rigidez del mismo será la que describe el acoplamiento entre los grados de libertad del nodo 1 con los del nodo 2. Según la indexación definida en la Tabla 1, debemos reordenar los elementos de matriz de K_1 en los elementos de matriz correspondientes en una matriz que permita calcular la fuerza sobre los nodos del elemento 1 en función de **todos** los desplazamientos.

Para hacer eso, es conveniente escribir la ecuación para el elemento 1 con la indexación global. Redundamos al decir que para escribir esta ecuación recurrimos a la información que brindan la matriz de conectividad para saber cuáles son los nodos involucrados y a la Tabla 1 para saber cuáles son los grados de libertad de cada nodo. A demás , localmente es importante que dichos índices aparezcan en el orden que detalla la matriz de conectividad.

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix}^1 = k_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \tag{13}$$

donde se usó un supraíndice en el vector de fuerzas para indicar pertenencia al nodo. Ahora bien, para tener la ecuación global de la fuerza sobre los nodos del elemento 1, debemos expandir esta ecuación en todos los grados de libertad del sistema,

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & -k1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k1 & 0 & k1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} \tag{14}$$

Ecuacion global para el elemento 2

El mismo procedimiento puede utilizarse para construir la matriz global de la fuerza sobre los nodos del elemento 2. La forma local de dicha ecuación es

$$\begin{pmatrix} F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{pmatrix}^2 = k_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} \tag{15}$$

De modo que al expandir las ecuaciones en función de todos los grados de libertad del sistema, tenemos,

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_1 & 0 & -k_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_1 & 0 & k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} \tag{16}$$

Ecuacion global para el elemento 3

Por último, consideremos al elemento 3. Notar que la fila correspondiente de la matriz de conectividad se escribió como (3,1). Por lo tanto, en los vectores locales aparecerán primero los grados de libertad del nodo 3 y luego los del nodo 1, es decir,

$$\begin{pmatrix} F_5 \\ F_6 \\ F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}^2 = k_2 \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_5 \\ u_6 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \tag{17}$$

Sin embargo al expandir en todos los grados de libertad, los elementos de matriz deben aparecer en el lugar correcto, es decir,

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0.5k_3 & 0.5k_3 & 0 & 0 & -0.5k_3 & -0.5k_3 \\ 0.5k_3 & 0.5k_3 & 0 & 0 & -0.5k_3 & -0.5k_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5k_3 & -0.5k_3 & 0 & 0 & 0.5k_3 & 0.5k_3 \\ -0.5k_3 & -0.5k_3 & 0 & 0 & 0.5k_3 & 0.5k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} \tag{18}$$

Ecuación Global

Por último, la fuerza total del sistema será la sumatoria de todas las fuerzas elementales que se ejerzan sobre los nodos, es decir,

$$F = F^1 + F^2 + F^3 \tag{19}$$

Al reemplazar por lo obtenido en las ecuaciones (14), (16) y (18), se obtiene el sistema de ecuaciones del sistema.

$$F = (M^1 + M^2 + M^3)U \tag{20}$$

Donde las M^i son las matrices de rigidez expandidas en todos los grados de libertad.

Resolución del sistema.

La resolución del sistema fué abordada anteriormente y tiene que ver con la definición de los vectores de índices de desplazamientos vinculados y de incógnitas, s y r respectivamente, por lo que no lo volveremos a tratar aquí.

Generalización: Ensamble de matrices

El esquema presentado hasta aquí, utilizando la expansión de las matrices de rigidez elementales a todos los grados de libertad del sistema es útil a modo didáctico. Sin embargo, es pobremente escalable al caso más general donde se tendrán un número arbitrario de elementos y nodos. En un sistema típico pueden alcanzarse fácilmente miles de elementos y el total de grados de libertad será por lo tanto un múltiplo entero de ese número. El esquema presentado hasta aquí requiere guardar al mismo tiempo todas las matrices elementales de millones de elementos de matriz. En términos computacionales, eso no es para nada eficiente.

Una alternativa posible es la de guardar simultánemanete una matriz elemental local no expandida, y una sola matriz global con todos los grados de libertad. Lo que sigue es un ejemplo de cómo ubicar los elementos de matriz de las matrices locales en la matriz global, usando solamente la información de la matriz de rigidez y la indexación de los grados de libertad en el sistema local y el sistema global.

Grados de libertad locales y globales.

Las matrices de rigidez elementales deben ser pensadas como una representación de la interacción entre los grados de libertad de los nodos que conforman un elemento debido a las fuerzas constitutivas del problema a resolver. Es así que en la matriz global, los elementos de matriz debido al elemento en tratamiento tendrán la misma indexación que los grados de libertad de esos nodos.

En una matriz de rigidez local, podemos pensar que los elementos de matriz están organizados en bloques cuadrados con dimensión igual a los grados de libertad por nodo *glxn*, y que habrá tantos bloques como nodos en el elemento, es decir,

$$k_e \in \mathbb{R}^{nxe \cdot glxn \times nxe \cdot glxn} \tag{21}$$

Por ejemplo en un problema de barras con glxn = 2, la matriz de rigidez local tendrá la estructura de la Figura 2, donde ni y nj son un los nodos del elemento e tal y como vienen dados en la fila correspondiente de la matriz de conectividad.

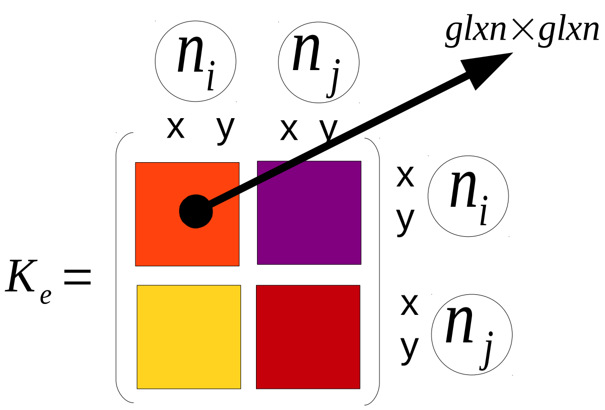

Figura 2: Bloques de las matrices de rigidez locales

Como los grados de libertad involucrados tendrán ya asignada su indexación respecto de los grados de libertad del sistema total, el ejercicio consiste en encontrar los índices de esos grados de libertad en ese sistema global, para poder asignar los elementos de matriz correspondientes como se esquematiza en la Figura 3.

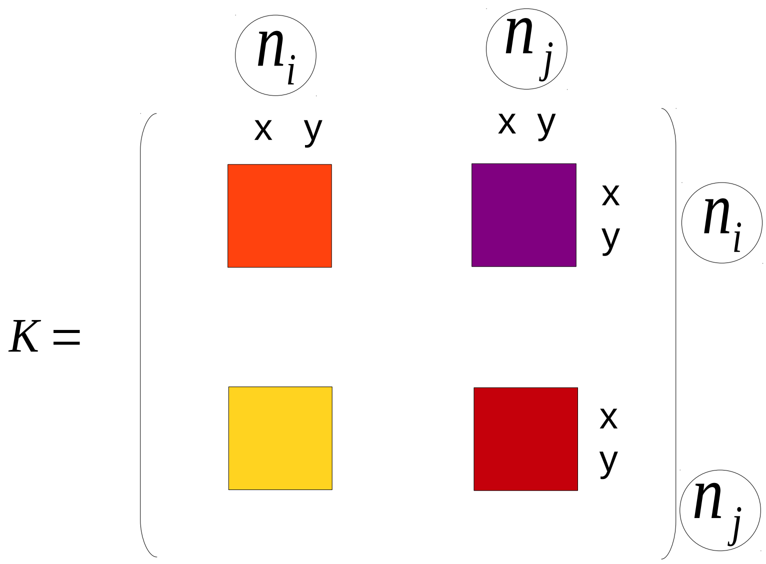

Figura 3: Bloques de las matrices de rigidez locales indexados globalmente

Rangos de índices en matrices locales

Para eso, debemos pensar primero los rangos de índices que ocupan los elementos de matriz en la matriz de rigidez local.

Los grados de libertad del primer nodo del elemento ocuparán las primeras filas, desde la fila 1 hasta la fila glxn. Los grados de libertad del segundo nodo del elemento ocuparán las siguientes glxn filas, es decir desde glxn +1 hasta 2glxn, y si hubieran más nodos la sucesión sería así:

Tabla 2: Numeración de grados de libertad de los nodos del elemento

Nodo elemental (cumna de la matriz de conectividad)	**índices de los grados de libertad**
1	$1:glxn$
2	$glxn+1:2glxn$
3	$2glxn+1:3glxn$
4	$3glxn+1:4glxn$
etc	

Rápidamente es posible intuir el rango de índices en la matriz local que corresponden al nodo i-ésimo del elemento e,

$$(i-1)glxn+1:iglxn \tag{22}$$

Estos rangos de índices definen los bloques correspondientes a los grados de libertad de cada nodo que debemos traspasar a la matriz global. En notación de tajadas de matrices o 'slices', el bloque de matriz que acopla a los grados de libertad del nodo i-ésimo con los del nodo j-ésimo del elemento – **filas i y j de la matriz de conectividad** – quedará definido como

$$k_e^{i,j} = k_e[(i-1)\cdot glxn+1 : i\cdot glxn ; (j-1)\cdot glxn+1 : j\cdot glxn] \tag{23}$$

Notar que cuando i=j se hará referencia a los bloques diagonales, mientras que si i ≠ j se obtendrán los bloques cruzados.

Por último, también es imprescindible notar que para recuperar la totalidad de los bloques de una matriz local, es necesario recorrer todas las combinaciones entre pares de nodos elementales. De esa manera, para el primer nodo del elemento, se recuperan todas las 'columnas de bloques' , luego para el segundo nodo, y así sucesivamente.

Rangos de índices en Matrices globales

Para indexar los grados de libertad de cada nodo en el sistema global ye hemos hecho la mitad del trabajo. Esto se debe a que dado un índice, el rango de variables asociadas ya fué deducido anteriormente. Simplemente es necesario notar aquí que en lugar de utilizar el número de columna de la matriz de conectividad, para ubicar al nodo en forma global debemos usar el número de nodo, es decir el valor guardado en la columna de la matriz de conectividad. Si conservamos la sucesión de índices $i, j, k, ...$ para indicar las columnas de la matriz, entonces $n_i, n_j, n_k, ...$ serán los números de nodos del elemento correspondiente a la fila en tratamiento. Pero entonces, con la misma capacidad deductiva que tuvimos antes encontramos que el bloque de matriz global asociado al bloque de matriz local de la ecuación (23) es

$$M^{n_i,n_j} = M[(n_i-1)\cdot glxn+1 : n_i\cdot glxn ; (n_j-1)\cdot glxn+1 : n_j\cdot glxn] \tag{24}$$

Ensamble de Matrices

Con lo hecho hasta aquí, el camino a seguir queda algo esclarecido. Si lo que se busca es reconstruir la suma de la ecuación (20) usando solo sumas parciales por tajadas, entonces la estrategia será:

Para cada elemento, tomar los bloques de matriz elemental para cada par de nodos locales i, j y **sumarlos** a los bloques de matriz global correspondientes a los nodos n_i, n_j .

Dicho en lenguaje de programación, la expresión para un bloque cualquiera n_i ,

$$M^{n_i,n_j} = M^{n_i,n_j} + k_e^{i,j} \tag{25}$$

Dicha ecuación estaría dentro de un ciclo que recorrería todos los elementos, para cada elemento encontraría la matriz local, y luego asigna los bloques correspondientes de la matriz global.

Ejemplo de la ménsula

Volvamos al ejemplo de la ménsula. Como ya dijimos, la matriz global va a tener dimensiones $N\,gl \times N\,gl = 6\times 6$ mientras que las matrices de rigidez locales tienen dimensión $nxe\cdot glxn \times nxe\cdot glxn = 4\times 4$. la matriz de conectividad era la definida en la ecuación (7).

Elemento 1

Entonces, para el elemento 1 se tiene, $n_1=1, n_2=2$, y los bloques de matrices correspondientes son entonces,

$$k_1^{1,1}=k_1[1:2,1:2];k_1^{1,2}=k_1[1:2,3:4];k_1^{2,1}=k_1[3:4,1:2];k_1^{2,2}=k_1[3:4,3:4] \tag{26}$$

donde k_1 es la matriz elemental definida en la ecuación (12). Estos bloques se asociaran a los bloques de matriz gloabal,

$$\begin{aligned} M^{n_1=1,n_2=1}=M[1:2,1:2];M^{n_1=1,n_2=2}=M[1:2,3:4];\\ M^{n_1=2,n_2=1}=M[3:4,1:2];M^{n_1=2,n_2=2}=M[3:4,3:4]; \end{aligned} \tag{27}$$

Como se ve, al tratarse de que los primeros grados de libertad son los de los primeros nodos, la asignación es trivial.

Elemento 2

Las asignaciones para el elemento 2 son tan triviales como para el elemento 1, de modo que puede quedar como actividad para el lector.

Elemento 3

Tenemos aquí, que la fila correspondiente de la matriz de conectividad es

$$M[3,:]=[3,1] \tag{28}$$

De manera que los bloques de matriz local son

$$\begin{aligned} k_3^{i=1,j=1}=k_3[1:2,1:2];k_3^{i=1,j=2}=k_3[1:2,3:4];\\ k_3^{i=2,j=1}=k_3[3:4,1:2];k_3^{i=2,j=2}=k_3[3:4,3:4] \end{aligned} \tag{29}$$

donde k_1 es la matriz elemental definida en la ecuación (12). Estos bloques se asociaran a los bloques de matriz gloabal,

$$M^{n_1=3,n_2=3}=M[5:6,5:6];\ M^{n_1=3,n_2=1}=M[5:6,1:2];$$
$$M^{n_1=1,n_2=3}=M[1:2,5:6];\ M^{n_1=1,n_2=1}=M[1:2,1:2]; \tag{30}$$

Con estas asignaciones, es necesario ir sumando para cada bloque de matriz global los bloques de matriz elemental correspondientes para reconstruir la suma de la ecuación (20).

Ejercicio

En base a los conceptos aquí trabajados, escriba un diagrama de flujo de los pasos a seguir para reconstruir la matriz global a partir de la matriz de conectividad. Suponga conocidas las matrices de rigidez locales.