Instituto Jorge Sabato, 25 años.
Comisión Nacional de Energía atómica.

Modelización de Materiales 2018

MEF 01: Resolución de problemas Mixtos

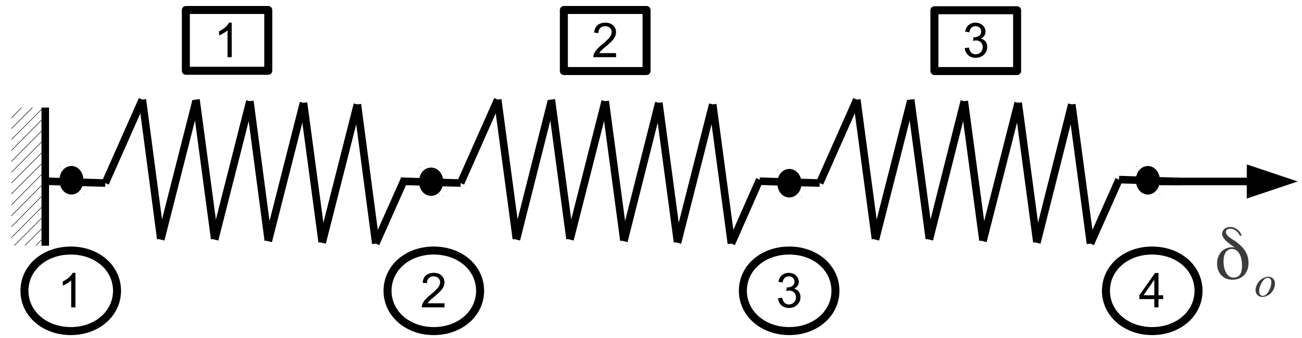
Mariano Forti - Ruben Weht

ruweht@cnea.gov.ar marianodforti@gmail.com

www.tandar.cnea.gov.ar/~weht/Modelizacion

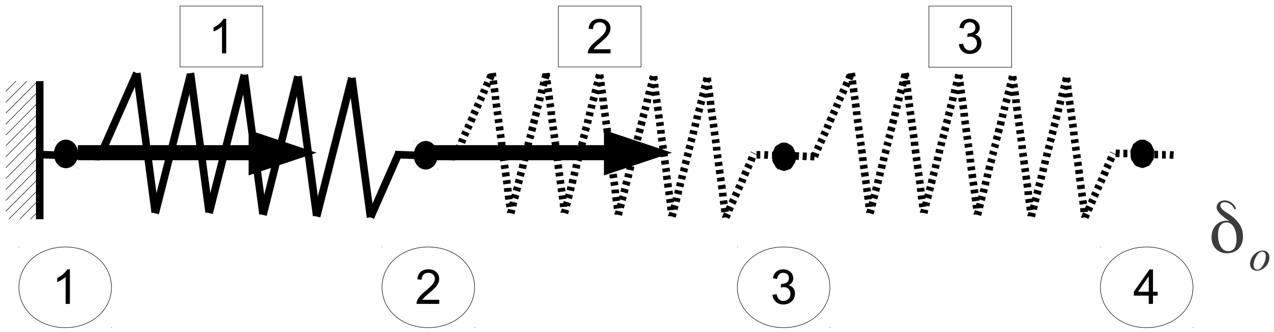
https://mdforti.github.io/Modelizacion/

Ejemplo: Problema de los resortes



Fuerzas en los nodos

Fuerzas en los nodos del elemento 1



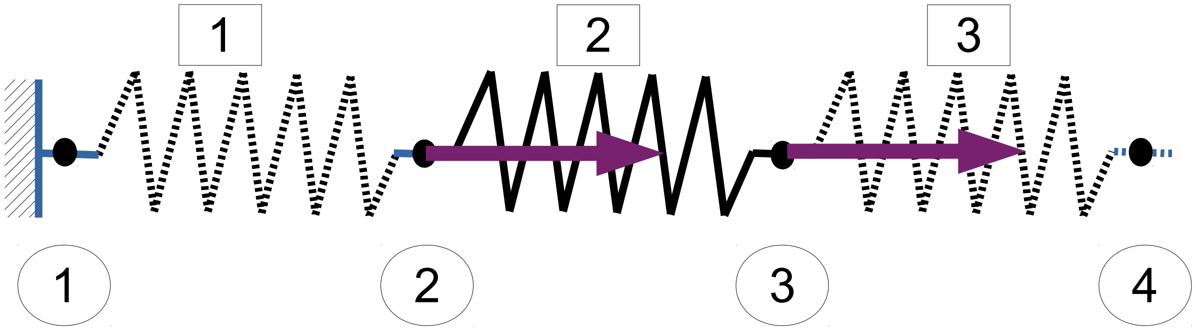
$$f_1^1 = -k_1 \left(x_2 - x_1 \right)$$
$$f_2^1 = \quad k_1 \left(x_2 - x_1 \right)$$

$$\begin{pmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$k_{el}^1 = k_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Fuerzas en los nodos

Fuerzas en los nodos del elemento 2



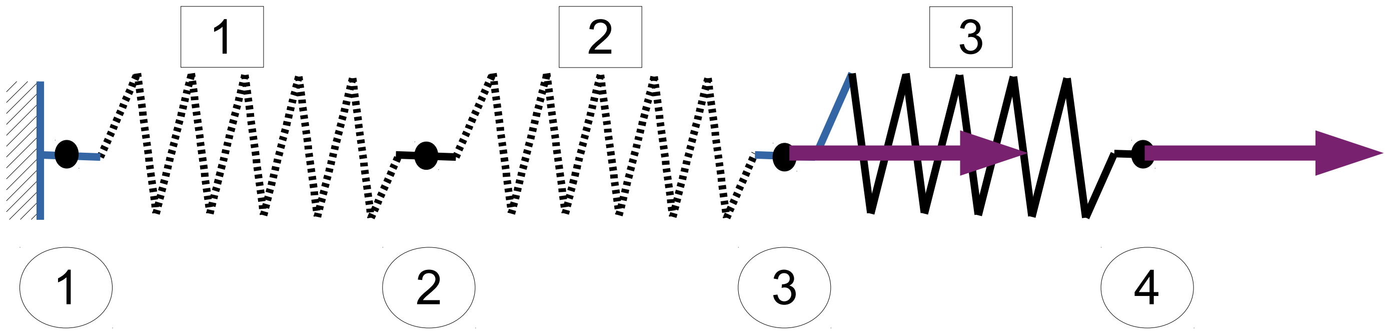
$$f_1^2 = -k_2(x_3 - x_2)$$
$$f_2^2 = \quad k_2(x_3 - x_2)$$

$$\begin{pmatrix} f_1^2 \\ f_2^2 \end{pmatrix} = k_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$k_{el}^2 = k_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Fuerzas en los nodos

Fuerzas sobre los nodos del elemento 3



$$f_1^3 = -k_3 (x_4 - x_3)$$
$$f_2^3 = \quad k_3 (x_4 - x_3)$$

$$\begin{pmatrix} f_1^3 \\ f_2^3 \end{pmatrix} = k_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$k_{el}^3 = k_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Fuerzas Globales

Sistema de ecuacioens globales

$$F_1 = f_1^1 = -k_1(x_2 - x_1) = x_1(k_1) + x_2(-k_1) + x_3\cdot(0) + x_4\cdot(0)$$

$$F_2 = f_2^1 + f_1^2 = k_1(x_2 - x_1) - k_2(x_3 - x_2) = x_1(-k_1) + x_2(k_1 + k_2) + x_3\cdot(-k_2) + x_4\cdot(0)$$

$$F_3 = f_2^2 + f_1^3 = k_2(x_3 - x_2) - k_3(x_4 - x_3) = x_1\cdot(0) + x_2(-k_2) + x_3\cdot(k_2 + k_3) + x_4\cdot(-k_3)$$

$$F_4 = f_2^3 = k_3(x_4 - x_3) = x_1\cdot(0) + x_2\cdot(0) + x_3\cdot(-k_3) + x_4\cdot(k_3)$$

Ecuación Global

Sistema de ecuaciones Lineales

$$\begin{pmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix}$$

x_i : desplazamiento nodo i — Vínculos: x_1 , x_4

F_i : fuerza total en el nodo i — Conocidas: F_2 , F_3

Resolución: Ejemplo de los Resortes

Desarrollamos las ecuaciones para las incógnitas

$$\begin{pmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix}$$

$$x_1(-k_1)+x_2(k_1+k_2)+x_3\cdot(-k_2)+x_4\cdot(0)=F_2$$

$$x_2(k_1+k_2)+x_3\cdot(-k_2)=F_2-x_1(-k_1)-x_4\cdot(0)$$

$$x_1\cdot(0)+x_2(-k_2)+x_3\cdot(k_2+k_3)+x_4\cdot(-k_3)=F_3$$

$$x_2(-k_2)+x_3\cdot(k_2+k_3)=F_3-x_1\cdot(0)-x_4\cdot(-k_3)$$

Reducción del sistema lineal

Interpretamos matricialmente el sistema de ecuaciones reducido:

$$x_2(k_1+k_2)+x_3\cdot(-k_2)=F_2-x_1(-k_1)-x_4\cdot(0)$$
$$x_2(-k_2)+x_3\cdot(k_2+k_3)=F_3-x_1\cdot(0)-x_4\cdot(-k_3)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{pmatrix}}_{K_{reducida}}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}-\underbrace{\begin{pmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_3 \end{pmatrix}}_{K_{vin}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Resolvemos:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=K^{-1}_{reducida}\left[\begin{pmatrix} F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}-K_{vin}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix}\right]$$

Reducción del sistema lineal

Desarrollamos ahora para las fuerzas de vínculo

$$\begin{pmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix}$$

$$x_1 \cdot k_1 + x_2 \cdot (-k_1) + x_3 \cdot (0) + x_4 \cdot (0) = F_1$$

$$x_1 \cdot (0) + x_2 \cdot (0) + x_3 \cdot (-k_3) + x_4 \cdot (k_3) = F_4$$

Reducción del sistema lineal

Interpretamos matricialmente la solución para las fuerzas

$$x_1 \cdot k_1 + x_2 \cdot (-k_1) + x_3 \cdot (0) + x_4 \cdot (0) = F_1$$

$$x_1 \cdot (0) + x_2 \cdot (0) + x_3 \cdot (-k_3) + x_4 \cdot (k_3) = F_4$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix}}_{K_{fuerzas}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} F_1 \\ F_4 \end{pmatrix}}_{F_{vin}}$$

Generalización del Problema

Sistema de ecuaciones: $K_{i,j} \; u_j = F_i$

Consideramos las filas de los grados de libertad incógnitas: $K_{r,j} \; u_j = F_r$

Donde *r* es un índice que recorre dichos grados de libertad (incógnitas).
Ahora bien, como *j* recorre todos los grados de libertad, podemos separar aquellos vinculados de los libres (incógnitas).
Sea *r′* recorriendo las incógnitas, *s* recorriendo los vínculos.

$$\underbrace{K_{r,r'} \; u_{r'}}_{\text{Incógnitas}} + \underbrace{K_{r,s} u_s}_{\text{Vínculos}} = F_r$$

Generalización

Por último: $$K_{r,r'}\ u_{r'} = F_r - K_{r,s} u_s$$

Que se resuelve rápidamente: $$u_{r'} = K_{r',r}^{-1}\ \left[F_r - K_{r,s} u_s\right]$$

Una vez que se conocen todos los ui se pueden recuperar las fuerzas de vínculo:

$$F_s = K_{s,j} u_j$$

Programación

Podemos entender que *r* es un vector con los índices que identifican a los grados de libertad incógnitas. En nuestro ejemplo del resorte, `r = (2,3)`. *s* sería entonces el vector que recorre los índices de los grados de libertad vinculados, `s = (1,4)`. Lenguajes de programación como Matlab, cualquier derivado de Fortran 90 o incluso Python pueden construir las matrices reducidas con la siguiente notación:

```
Kred = K (r , r) ;

Ks= K(s,:);
```

De forma que la implementación de la formula general es inmediata:

```
U(r) = inv(K(r , r))*( F(r) - K(r,s)*U(s));
```

Esto resolvera los desplazamientos desconocidos. Para resolver las fuerzas de vínculo:

```
F(s) = K(s,:) U
```

Instituto Jorge Sabato, 25 años.
Comisión Nacional de Energía atómica.

Modelización de Materiales 2018

MEF 01: Resolución de problemas Mixtos

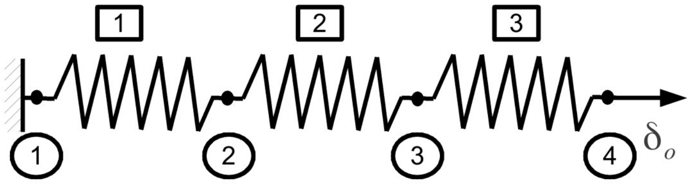
Mariano Forti - Ruben Weht

ruweht@cnea.gov.ar marianodforti@gmail.com

www.tandar.cnea.gov.ar/~weht/Modelizacion

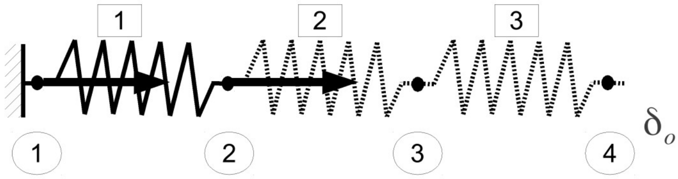
https://mdforti.github.io/Modelizacion/

Ejemplo: Problema de los resortes



Fuerzas en los nodos

Fuerzas en los nodos del elemento 1



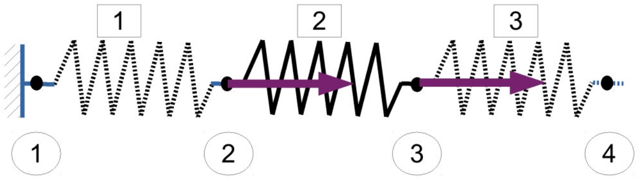
$$f_1^1 = -k_1 (x_2 - x_1)$$
$$f_2^1 = k_1 (x_2 - x_1)$$

$$\begin{pmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$k_{el}^1 = k_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Fuerzas en los nodos

Fuerzas en los nodos del elemento 2



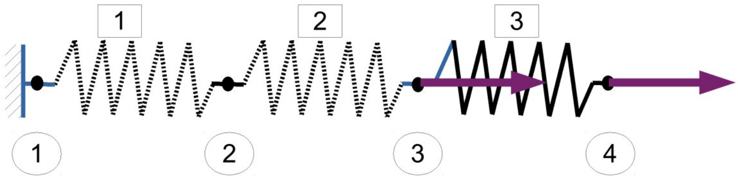
$$f_1^2 = -k_2(x_3 - x_2)$$
$$f_2^2 = \quad k_2(x_3 - x_2)$$

$$\begin{pmatrix} f_1^2 \\ f_2^2 \end{pmatrix} = k_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$k_{el}^2 = k_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Fuerzas en los nodos

Fuerzas sobre los nodos del elemento 3



$$f_1^3 = -k_3 (x_4 - x_3)$$
$$f_2^3 = \quad k_3 (x_4 - x_3)$$

$$\begin{pmatrix} f_1^3 \\ f_2^3 \end{pmatrix} = k_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$k_{el}^3 = k_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Fuerzas Globales

Sistema de ecuacioens globales

$$F_1 = f_1^1 = -k_1(x_2 - x_1) = x_1(k_1) + x_2(-k_1) + x_3\cdot(0) + x_4\cdot(0)$$

$$F_2 = f_2^1 + f_1^2 = k_1(x_2 - x_1) - k_2(x_3 - x_2) = x_1(-k_1) + x_2(k_1 + k_2) + x_3\cdot(-k_2) + x_4\cdot(0)$$

$$F_3 = f_2^2 + f_1^3 = k_2(x_3 - x_2) - k_3(x_4 - x_3) = x_1\cdot(0) + x_2(-k_2) + x_3\cdot(k_2 + k_3) + x_4\cdot(-k_3)$$

$$F_4 = f_2^3 = k_3(x_4 - x_3) = x_1\cdot(0) + x_2\cdot(0) + x_3\cdot(-k_3) + x_4\cdot(k_3)$$

Ecuación Global

Sistema de ecuaciones Lineales

$$\begin{pmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix}$$

x_i : desplazamiento nodo i — Vínculos: x_1 , x_4

F_i : fuerza total en el nodo i — Conocidas: F_2 , F_3

Resolución: Ejemplo de los Resortes

Desarrollamos las ecuaciones para las incógnitas

$$\begin{pmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix}$$

$$x_1(-k_1)+x_2(k_1+k_2)+x_3\cdot(-k_2)+x_4\cdot(0)=F_2$$

$$x_2(k_1+k_2)+x_3\cdot(-k_2)=F_2-x_1(-k_1)-x_4\cdot(0)$$

$$x_1\cdot(0)+x_2(-k_2)+x_3\cdot(k_2+k_3)+x_4\cdot(-k_3)=F_3$$

$$x_2(-k_2)+x_3\cdot(k_2+k_3)=F_3-x_1\cdot(0)-x_4\cdot(-k_3)$$

Reducción del sistema lineal

Interpretamos matricialmente el sistema de ecuaciones reducido:

$$x_2(k_1+k_2)+x_3\cdot(-k_2)=F_2-x_1(-k_1)-x_4\cdot(0)$$
$$x_2(-k_2)+x_3\cdot(k_2+k_3)=F_3-x_1\cdot(0)-x_4\cdot(-k_3)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{pmatrix}}_{K_{reducida}}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}-\underbrace{\begin{pmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_3 \end{pmatrix}}_{K_{vin}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Resolvemos:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=K_{reducida}^{-1}\left[\begin{pmatrix} F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}-K_{vin}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix}\right]$$

Reducción del sistema lineal

Desarrollamos ahora para las fuerzas de vínculo

$$\begin{pmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix}$$

$$x_1 \cdot k_1 + x_2 \cdot (-k_1) + x_3 \cdot (0) + x_4 \cdot (0) = F_1$$

$$x_1 \cdot (0) + x_2 \cdot (0) + x_3 \cdot (-k_3) + x_4 \cdot (k_3) = F_4$$

Reducción del sistema lineal

Interpretamos matricialmente la solución para las fuerzas

$$x_1 \cdot k_1 + x_2 \cdot (-k_1) + x_3 \cdot (0) + x_4 \cdot (0) = F_1$$

$$x_1 \cdot (0) + x_2 \cdot (0) + x_3 \cdot (-k_3) + x_4 \cdot (k_3) = F_4$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix}}_{K_{fuerzas}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} F_1 \\ F_4 \end{pmatrix}}_{F_{vin}}$$

Generalización del Problema

Sistema de ecuaciones: $K_{i,j} \; u_j = F_i$

Consideramos las filas de los grados de libertad incógnitas: $K_{r,j} \; u_j = F_r$

Donde *r* es un índice que recorre dichos grados de libertad (incógnitas).
Ahora bien, como *j* recorre todos los grados de libertad, podemos separar aquellos vinculados de los libres (incógnitas).
Sea *r'* recorriendo las incógnitas, *s* recorriendo los vínculos.

$$\underbrace{K_{r,r'} \; u_{r'}}_{\text{Incógnitas}} + \underbrace{K_{r,s} u_s}_{\text{Vínculos}} = F_r$$

Generalización

Por último: $$K_{r,r'}\ u_{r'}=F_r-K_{r,s}u_s$$

Que se resuelve rápidamente: $$u_{r'}=K_{r',r}^{-1}\ \left[F_r-K_{r,s}u_s\right]$$

Una vez que se conocen todos los ui se pueden recuperar las fuerzas de vínculo:

$$F_s=K_{s,j}u_j$$

Programación

Podemos entender que *r* es un vector con los índices que identifican a los grados de libertad incógnitas. En nuestro ejemplo del resorte, `r = (2,3)`. *s* sería entonces el vector que recorre los índices de los grados de libertad vinculados, `s = (1,4)`. Lenguajes de programación como Matlab, cualquier derivado de Fortran 90 o incluso Python pueden construir las matrices reducidas con la siguiente notación:

```
Kred = K (r , r) ;

Ks= K(s,:);
```

De forma que la implementación de la formula general es inmediata:

```
U(r) = inv(K(r , r))*( F(r) - K(r,s)*U(s));
```

Esto resolvera los desplazamientos desconocidos. Para resolver las fuerzas de vínculo:

```
F(s) = K(s,:) U
```