Instituto Jorge Sabato, 25 años.
Comisión Nacional de Energía atómica.

Modelización de Materiales 2018

MEF 02: Ensamble de Matrices

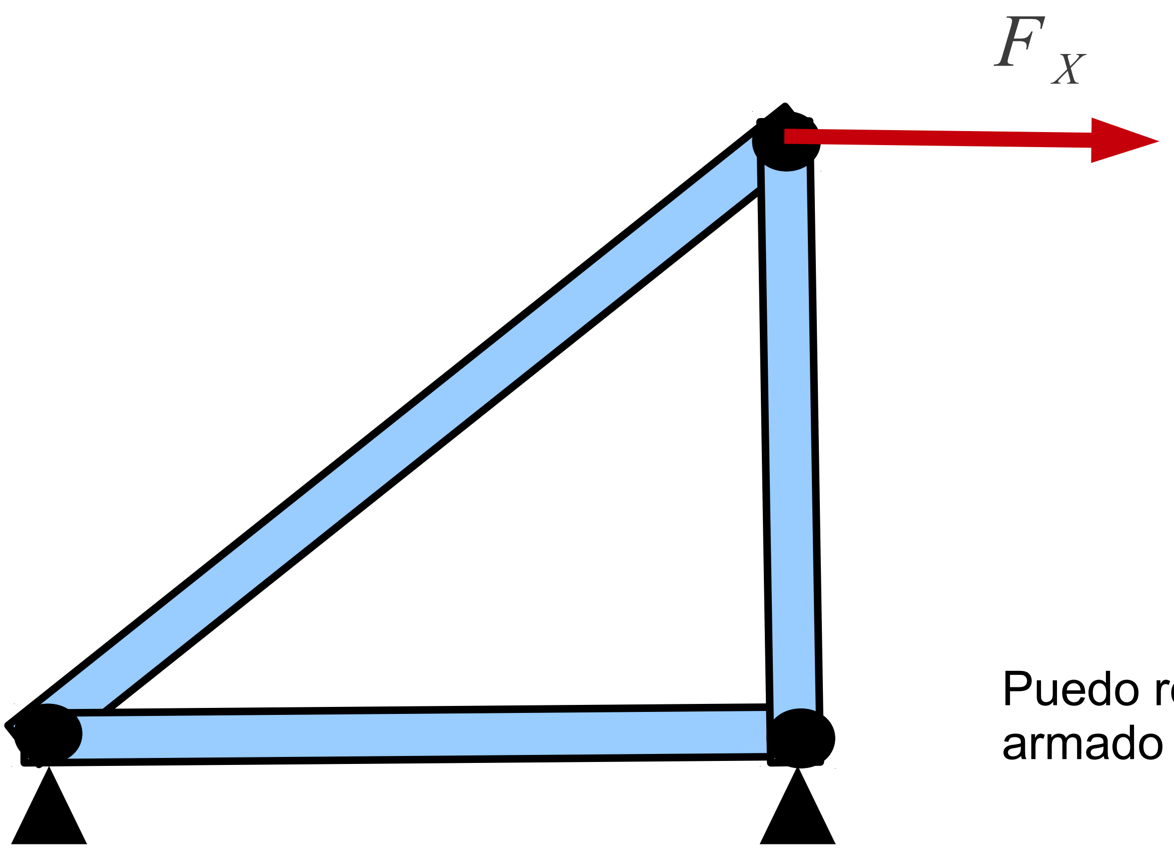
Mariano Forti - Ruben Weht

ruweht@cnea.gov.ar marianodforti@gmail.com

www.tandar.cnea.gov.ar/~weht/Modelizacion

https://mdforti.github.io/Modelizacion/

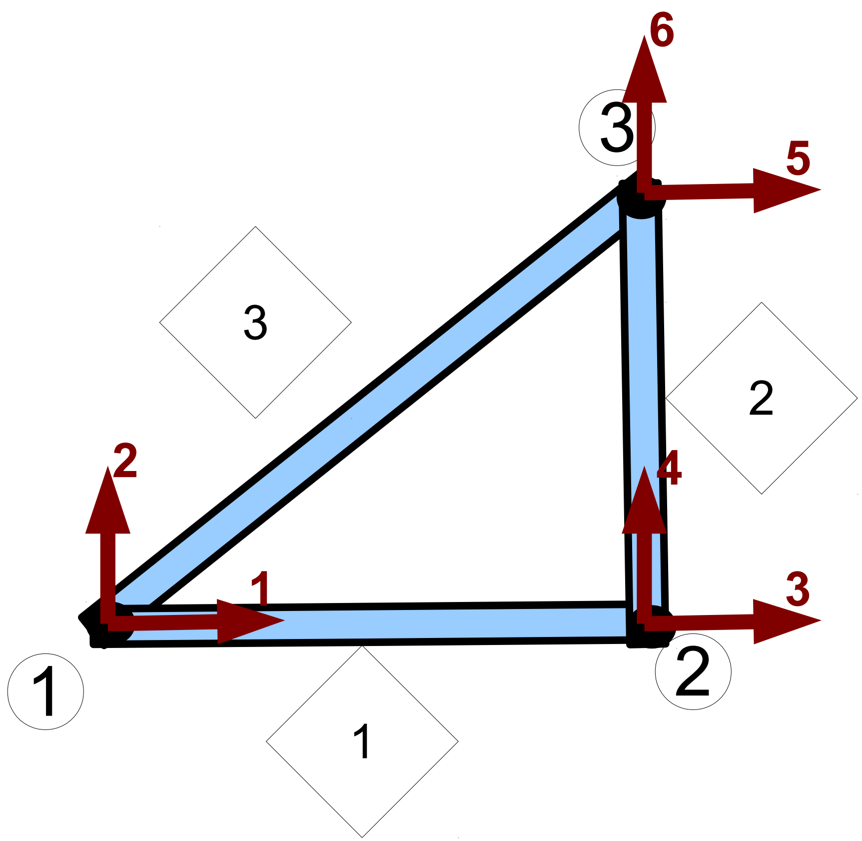
Ejemplo: Problema de la Ménsula



Puedo resolver el sistema cuando tenga armado el sistema de ecuaciones:

$$F = K \cdot X$$

Indexación de los grados de libertad



Nodo	grados de libertad
1	u_1 , u_2
2	u_3 , u_4
3	u_5 , u_6

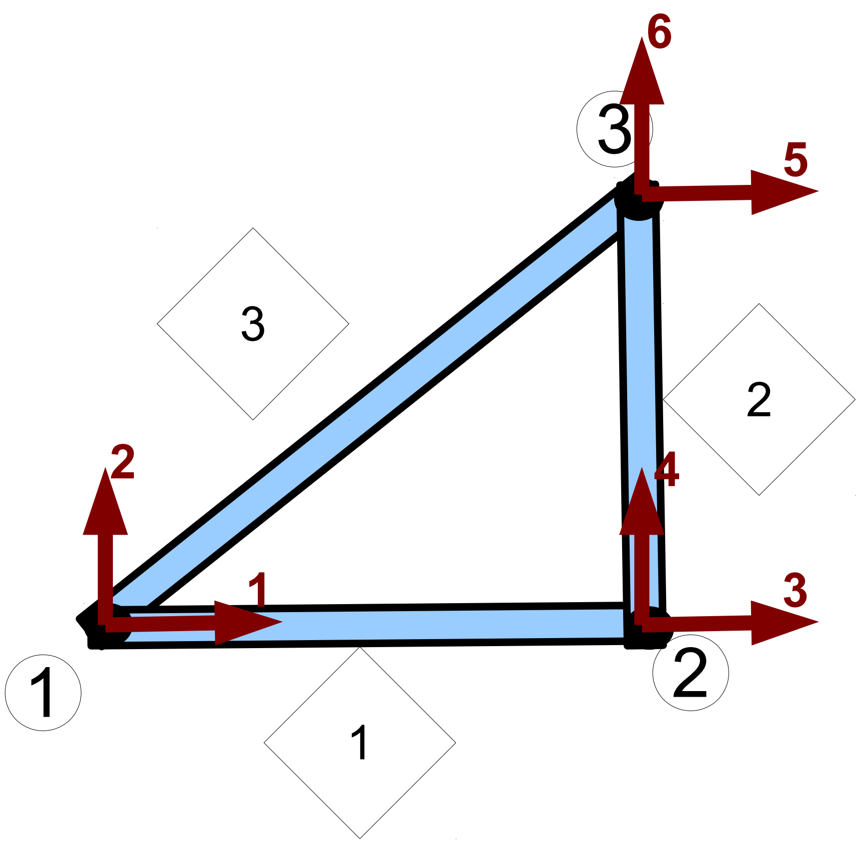
$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{pmatrix}$$

Matrices descriptivas del sistema

Es conveniente definir algunas variables descriptivas...

Matriz de Nodos

Guarda las coordenadas de los nodos con el orden de la numeración



$$MN = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ L & 0 & 0 \\ L & L & 0 \end{bmatrix}$$

Dimensionalidad y grados de libertad

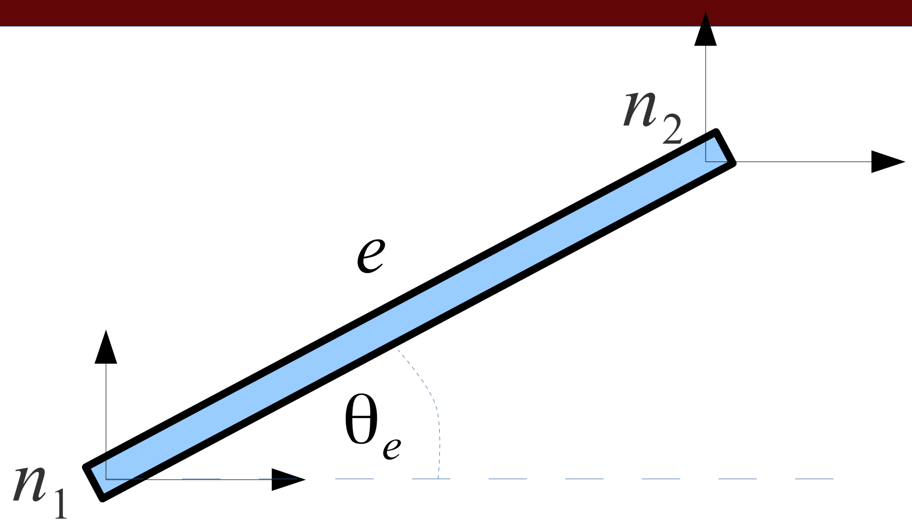
Dimension ≠ grados de libertad por nodo(glxn)

Matriz de Conectividad

una fila por elemento, y para cada elemento la lista de nodos que lo conforman

$$MC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Indexación y trazabilidad de nodos



$$n_i = MC(e, i)$$

$$x_i^e = MN(MC(e,i),1); \quad y_i^e = MN(MC(e,i),2)$$

$$\theta_e = arctg_2\left(\frac{x_2^e - x_1^e}{y_2^e - y_1^e}\right)$$

$$L_e = \sqrt{\left(x_2^e - x_1^e\right)^2 + \left(y_2^e - y_1^e\right)^2}$$

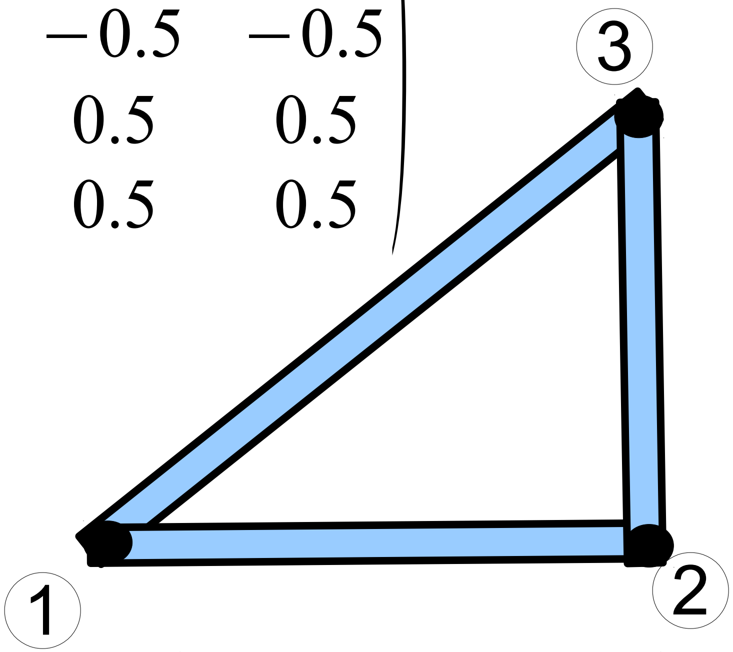
Matriz de Rigidez

A partir de las matrices de nodos y de conectividad...

$$[K]_e = k_e \begin{pmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{pmatrix}$$

Matrices de rigidez elementales

$$k_3 \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$



$$k_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

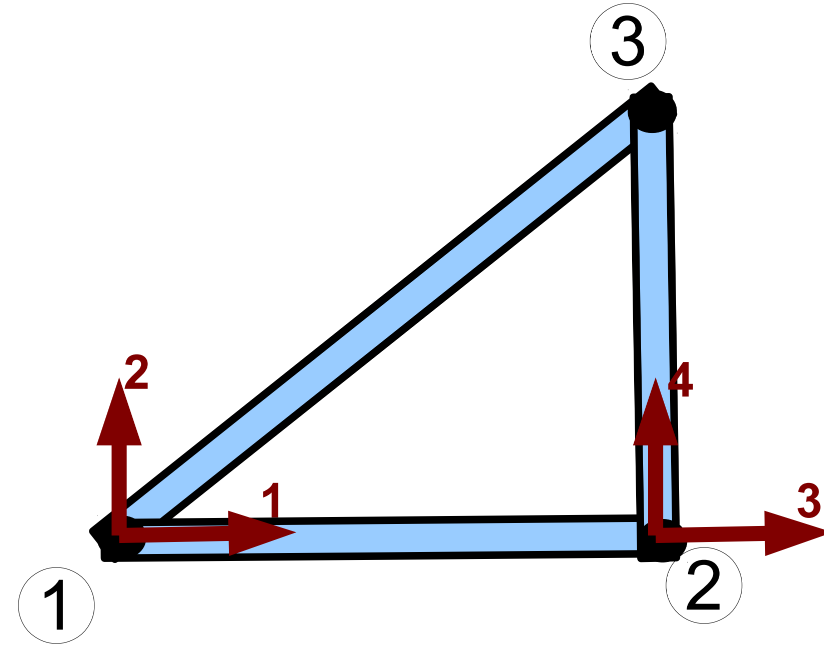
$$MC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Ecuación global para el elemento 1

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\
\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} k_1 & 0 & -k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
MC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
F^{(1)} = \begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\
\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} k_1 & 0 & -k1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k1 & 0 & k1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix}
$$

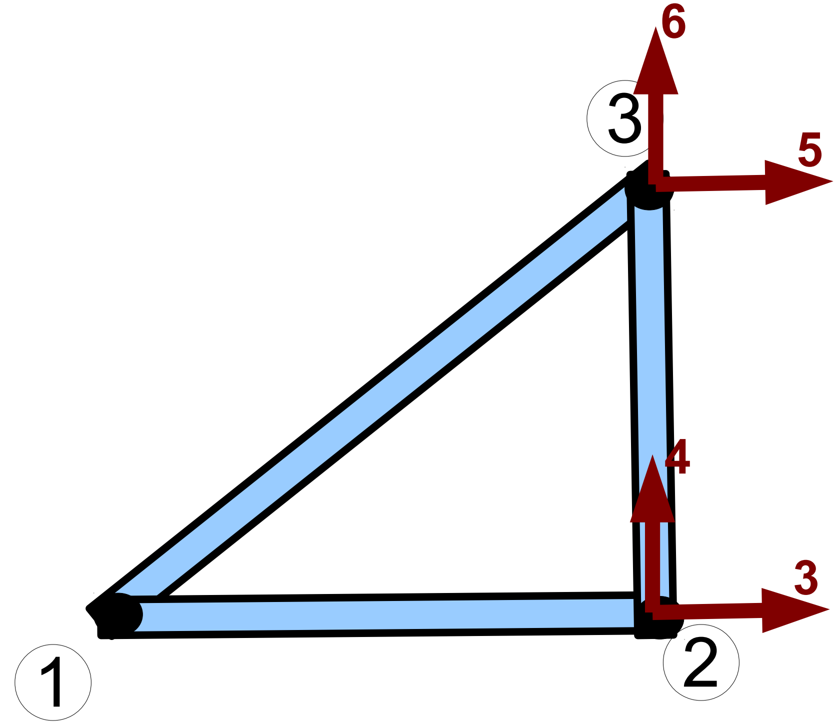


Ecuación global para el elemento 2

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} &
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & k_1 & 0 & -k_1 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -k_1 & 0 & k_1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$
MC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
F^{(1)} =
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & k_1 & 0 & -k_1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -k_1 & 0 & k_1
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix}
$$



Ecuación global para el elemento 3

$$MC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 3 & & 1 & \end{array} \\ k_3 & \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 3 \\ \\ 1 \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$M^3 = k_3 \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Ecuación Global

$$F = F^{(1)} + F^{(2)} + F^{(3)}$$

$$F = \left(M^{(1)} + M^{(2)} + M^{(3)} \right) X$$

$$M = M^{(1)} + M^{(2)} + M^{(3)}$$

$$F = M \; X$$

```
Command Window
>> M/(E*A)

ans =

    1.3536    0.3536   -1.0000         0   -0.3536   -0.3536
    0.3536    0.3536         0         0   -0.3536   -0.3536
   -1.0000         0    1.0000    0.0000   -0.0000   -0.0000
         0         0    0.0000    1.0000   -0.0000   -1.0000
   -0.3536   -0.3536   -0.0000   -0.0000    0.3536    0.3536
   -0.3536   -0.3536   -0.0000   -1.0000    0.3536    1.3536

>>
```

$$E = 300\, GPa \quad ; \quad A = 1 \times 10^{-4}\, m^2$$

Resolución del sistema

Por último:

$$K_{r,r'} \; u_{r'} = F_r - K_{r,s} u_s$$

Que se resuelve rápidamente:

$$u_{r'} = K^{-1}_{r',r} \left[F_r - K_{r,s} u_s \right]$$

Una vez que se conocen todos los u_i se pueden recuperar las fuerzas de vínculo:

$$F_s = K_{s,j} u_j$$

Ensamble de Matrices: Generalización

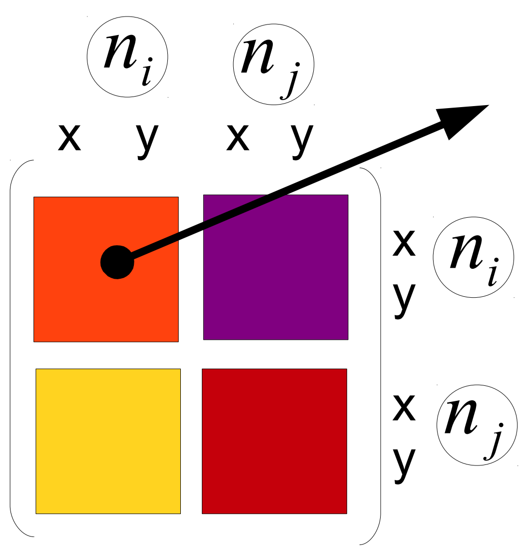
Grados de Libertad locales y globales

$$MC = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ n_i & n_j \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Elemento *e*

Matriz elemental

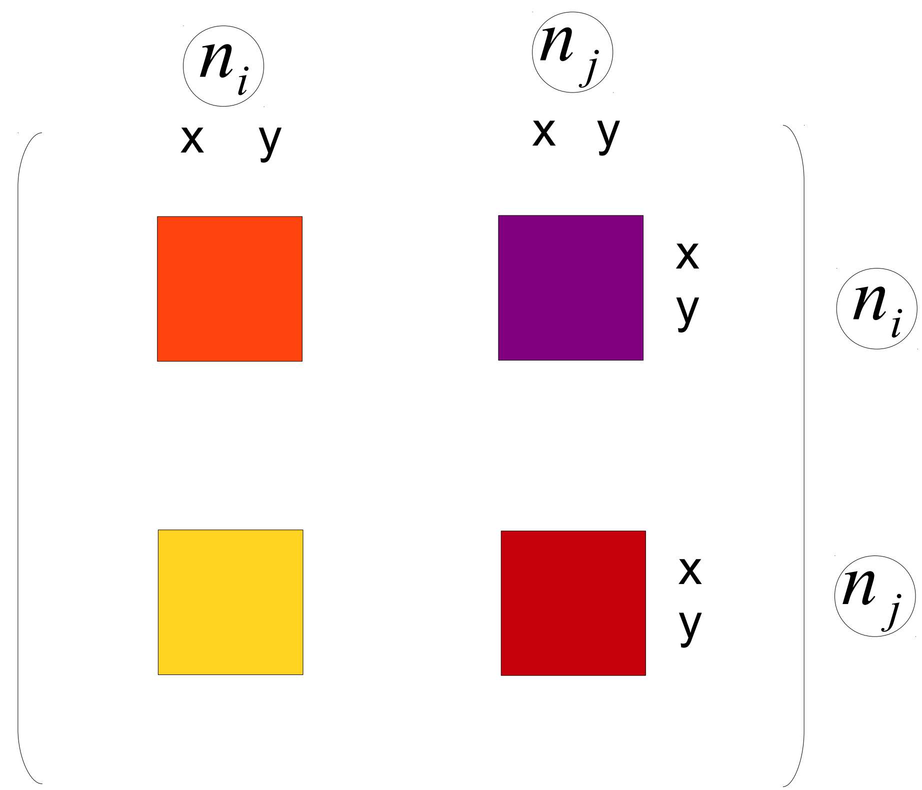
$$K_e =$$



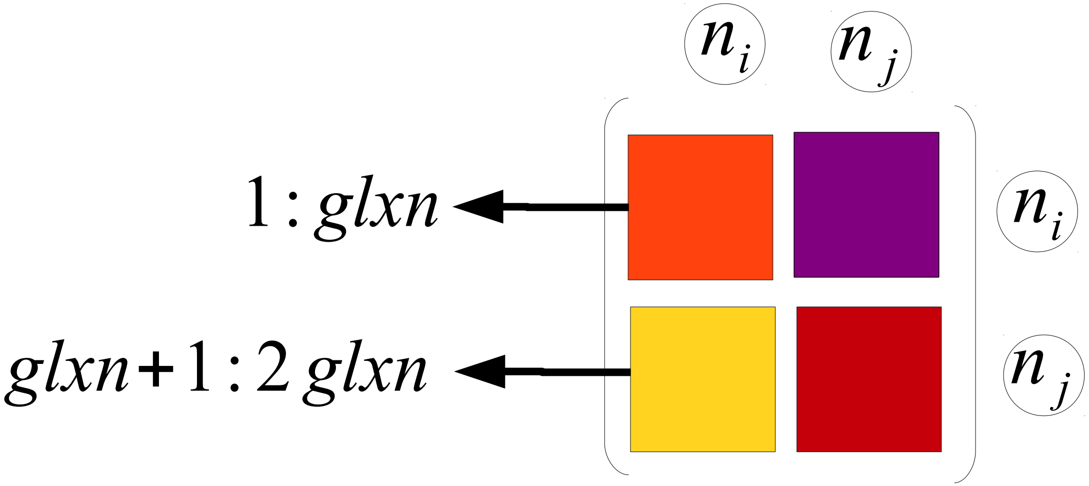
$$glxn \times glxn$$

Matriz Global

$$K =$$



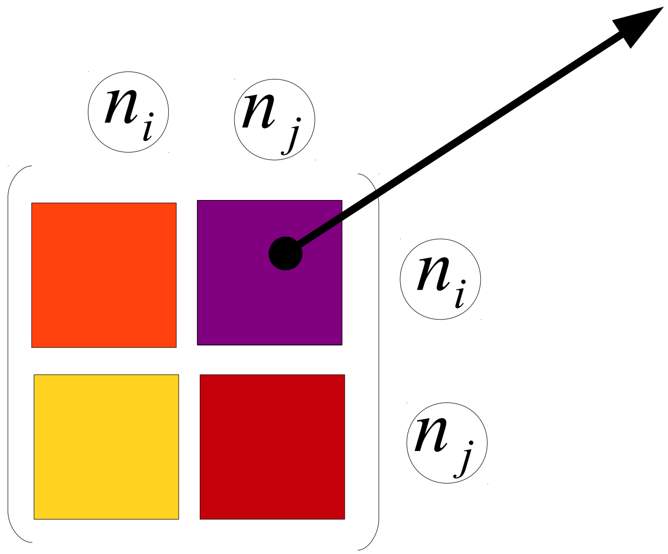
Rangos de índices de Matrices Locales



Nodo elemental (cumna de la matriz de conectividad)	índices de los grados de libertad
1	1:glxn
2	glxn+1:2glxn
3	2glxn+1:3glxn
4	3glxn+1:4 glxn
...	
i	(i-1)glxn+1 : i glxn

Bloques de matrices locales

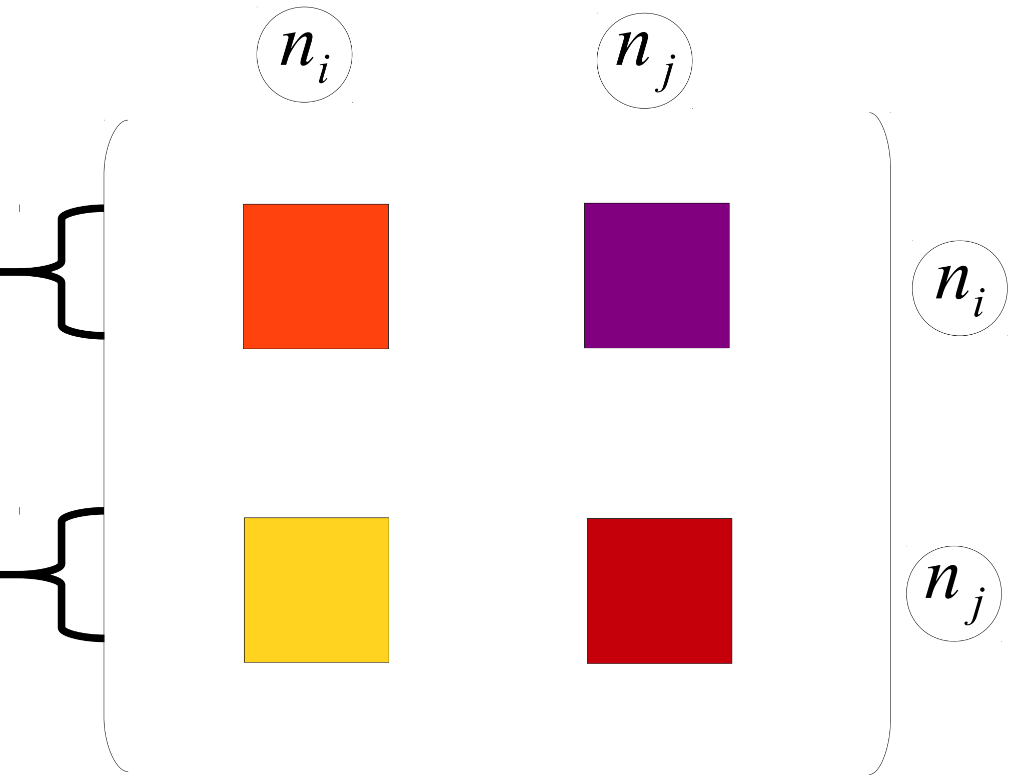
$$k_e^{i,j} = k_e[(i-1)\cdot glxn+1 : i\cdot glxn, (j-1)\cdot glxn+1 : j\cdot glxn]$$



Bloques de Matrices Globales

$$(n_i - 1)\,glxn + 1 : n_i\,glxn$$

$$(n_j - 1)\,glxn + 1 : n_j\,glxn$$



Ensamble de Matrices

$$MC = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ n_i & n_j \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Elemento i-ésimo

Matriz elemental

n_i

$$K_e\left((i-1)\,glxn+1 : i\,glxn\,,\quad (j-1)\,glxn+1 : j\,gl\right)$$

n_j

Matriz Global

n_i

$$M\left((n_i-1)\,glxn+1 : n_i\,glxn\,,\quad (n_j-1)\,glxn+1 : n_j\,glxn\right)$$

n_j

Volviendo al ejemplo de la ménsula

- Elemento 3

$$MC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$
$\quad\; n_1 \quad n_2$

$$\begin{array}{ccc} & 3 & 1 \\ k_3 & \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array}$$

$([1:2],[1:2])$ $([1:2],[3:4])$ $([3:4],[1:2])$ $([3:4],[3:4])$

$$M^3 = k_3 \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$([1:2],[1:2])$ $([1:2],[5:6])$ $([5:6],[1:2])$ $([5:6],[5:6])$