



Instituto Jorge Sabato, 25 años.
Comisión Nacional de Energía atómica.

Modelización de Materiales 2018

MEF 02: Ensamble de Matrices (parte 1)

Mariano Forti - Ruben Weht

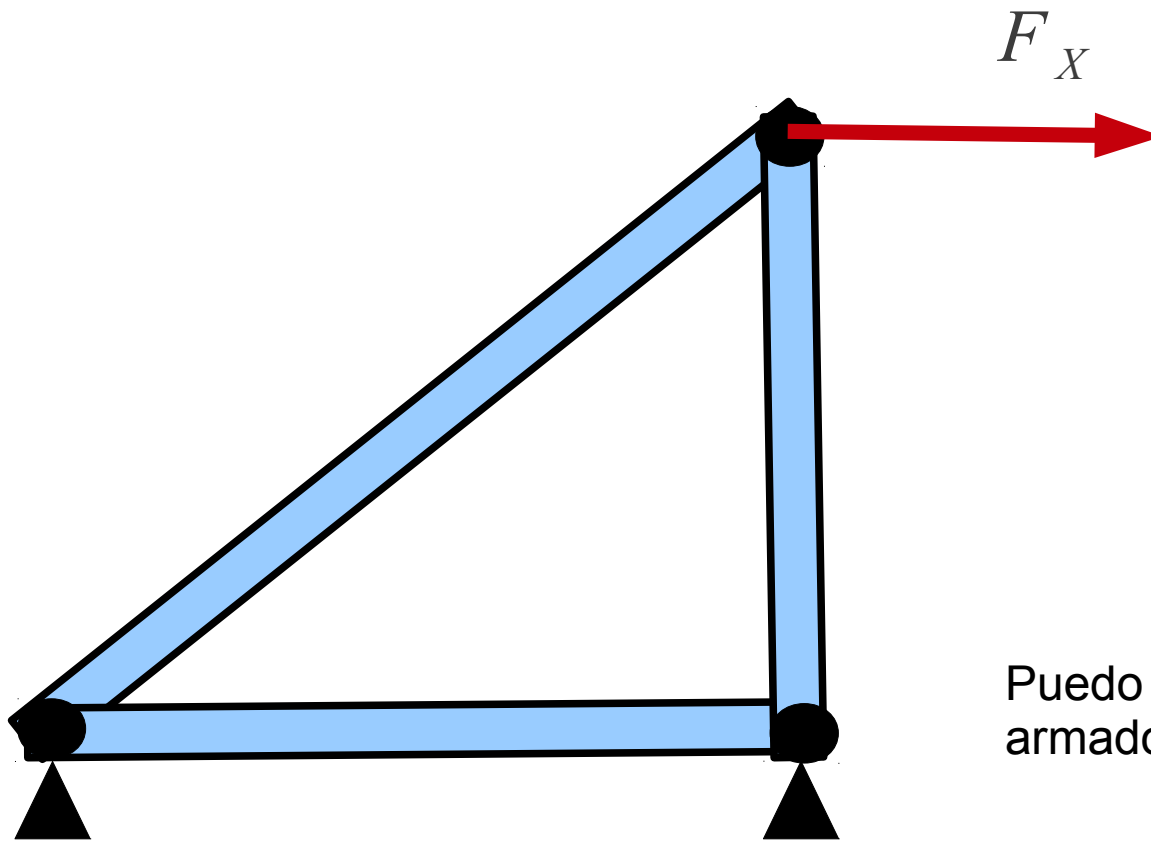
ruweht@cnea.gov.ar marianodforti@gmail.com

www.tandar.cnea.gov.ar/~weht/Modelizacion

<https://mdforti.github.io/Modelizacion/>



Ejemplo: Problema de la Ménsula

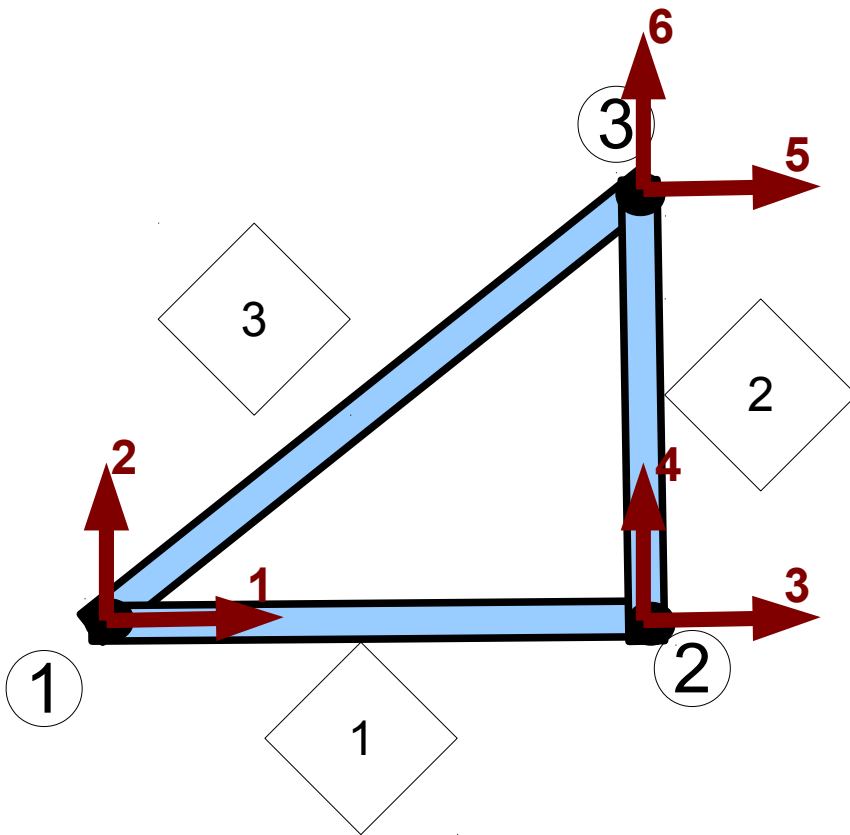


Puedo resolver el sistema cuando tenga armado el sistema de ecuaciones:

$$F = K \cdot X$$



Indexación de los grados de libertad



Nodo	grados de libertad
------	--------------------

1	u_1, u_2
---	------------

2	u_3, u_4
---	------------

3	u_5, u_6
---	------------

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{pmatrix}$$



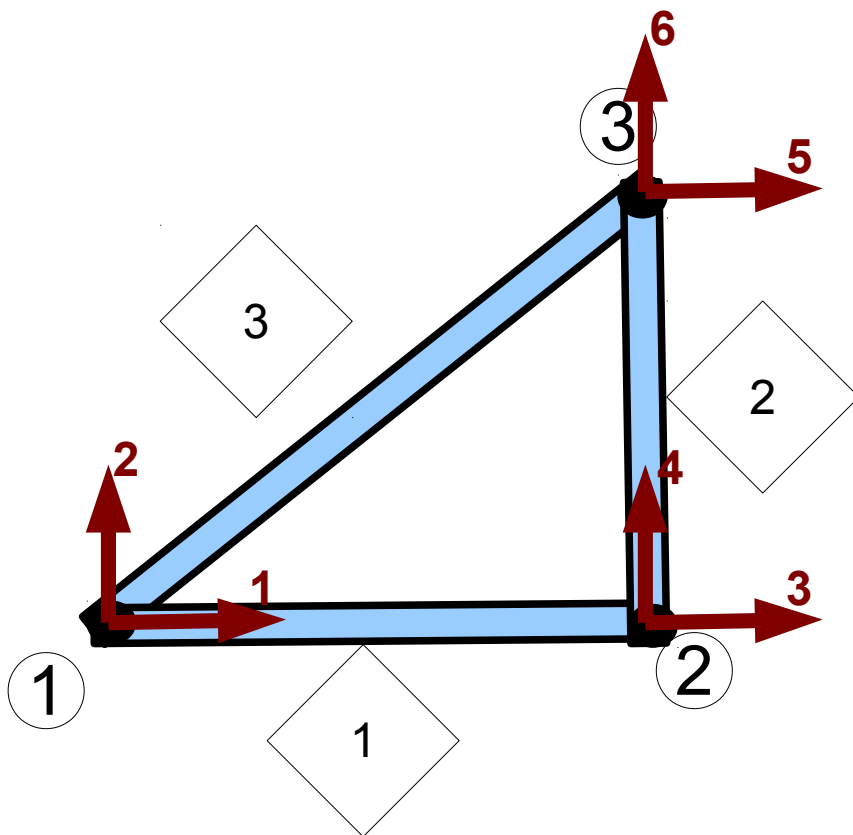
Matrices descriptivas del sistema

Es conveniente definir algunas variables descriptivas...



Matriz de Nodos

Guarda las coordenadas de los nodos con el orden de la numeración



$$MN = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ L & 0 & 0 \\ L & L & 0 \end{bmatrix}$$



Dimensionalidad y grados de libertad

Dimension \neq grados de libertad por nodo($gl \times n$)



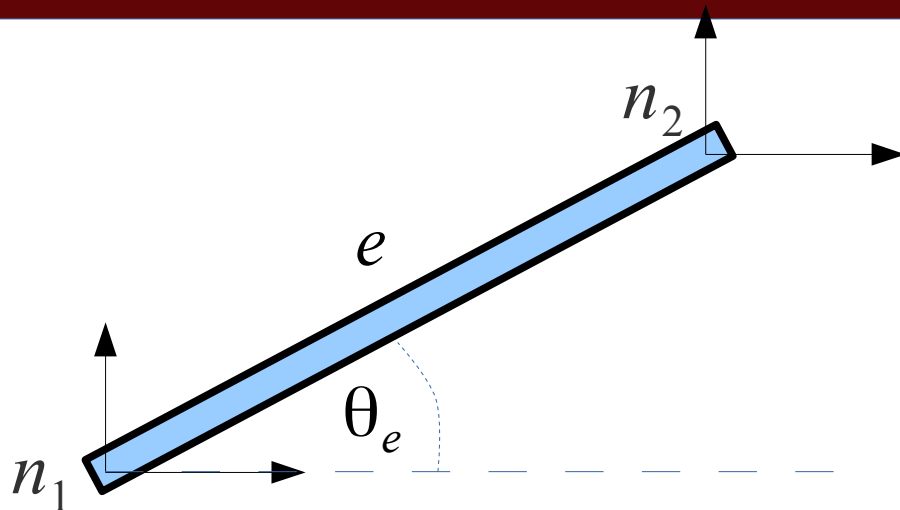
Matriz de Conectividad

una fila por elemento, y para cada elemento la lista de nodos que lo conforman

$$MC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$



Indexación y trazabilidad de nodos



$$n_i = MC(e, i)$$

$$x_i^e = MN(MC(e, i), 1); \quad y_i^e = MN(MC(e, i), 2)$$

$$\theta_e = \arctg_2 \left(\frac{x_2^e - x_1^e}{y_2^e - y_1^e} \right)$$

$$L_e = \sqrt{(x_2^e - x_1^e)^2 + (y_2^e - y_1^e)^2}$$



Matriz de Rigidez

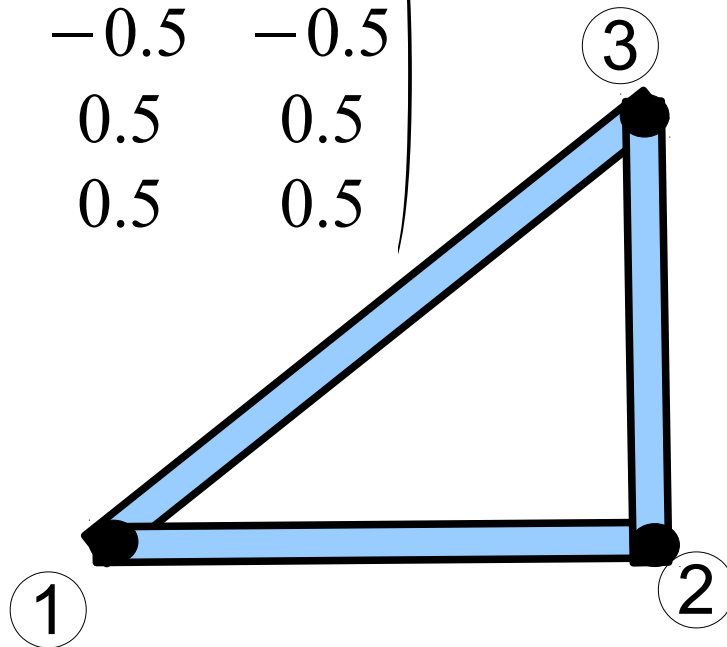
A partir de las matrices de nodos y de conectividad...

$$[K]_e = k_e \begin{pmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{pmatrix}$$



Matrices de rigidez elementales

$$k_3 \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$



$$k_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$MC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

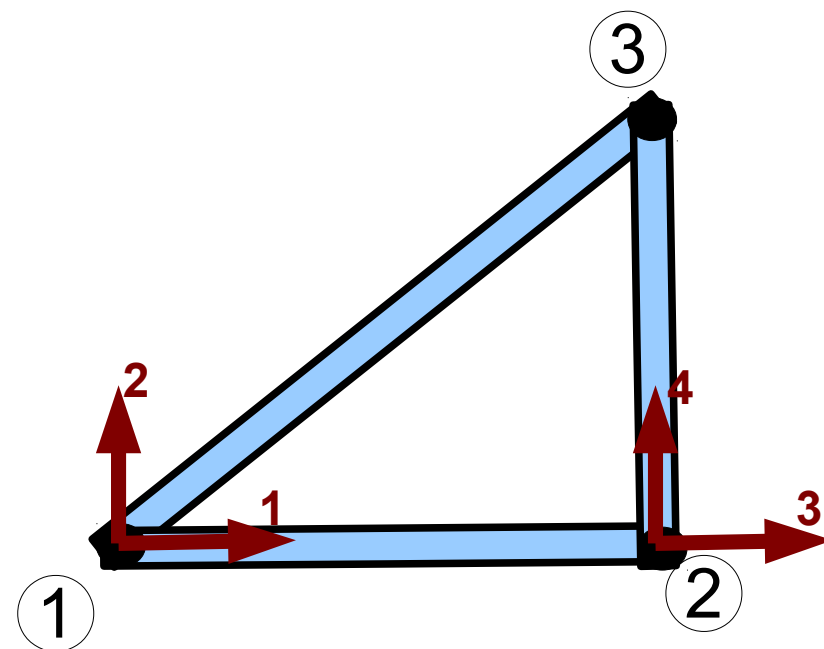


Ecuación global para el elemento 1

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \left(\begin{array}{cc|cc} k_1 & 0 & -k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -k_1 & 0 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{matrix}$$

$$MC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F^{(1)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccc|cc} k_1 & 0 & -k_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -k_1 & 0 & k_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} \end{matrix}$$



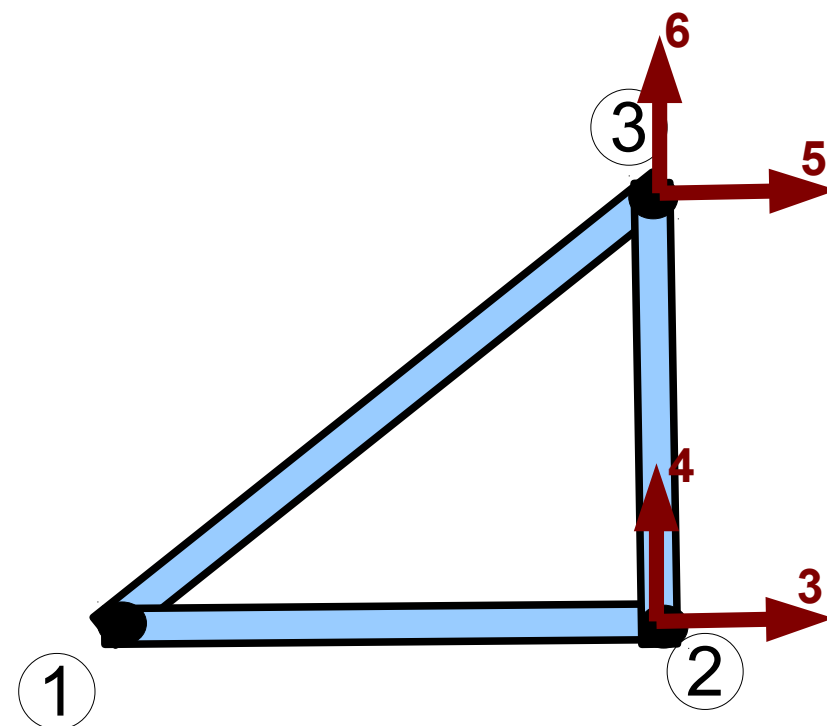


Ecuación global para el elemento 2

$$\begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c|c} \begin{array}{cc} 3 & 4 \end{array} & \begin{array}{cc} 5 & 6 \end{array} \\ \hline \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 & -k_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_1 & 0 & k_1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$MC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F^{(1)} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c|c|c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} & \begin{array}{cc} 3 & 4 \end{array} & \begin{array}{cc} 5 & 6 \end{array} \\ \hline \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_1 & 0 & -k_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_1 & 0 & k_1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{array}$$





Ecuación global para el elemento 3

Diagram illustrating the global equation for element 3, showing the assembly of the global stiffness matrix M^3 from local matrices k_3 and MC .

Local Matrix k_3 (Element 3):

3	
0.5	0.5
0.5	0.5
-0.5	-0.5
-0.5	-0.5

Local Matrix k_3 (Element 1):

	1
-0.5	-0.5
-0.5	-0.5
0.5	0.5
0.5	0.5

Matrix MC (Element 3):

1	2
2	3
3	1

Global Matrix $M^3 = k_3$:

0.5	0.5	0	0	-0.5	-0.5
0.5	0.5	0	0	-0.5	-0.5
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
-0.5	-0.5	0	0	0.5	0.5
-0.5	-0.5	0	0	0.5	0.5



Ecuación Global

$$F = F^{(1)} + F^{(2)} + F^{(3)}$$

$$F = (M^{(1)} + M^{(2)} + M^{(3)}) X$$

$$M = M^{(1)} + M^{(2)} + M^{(3)}$$

$$F = M X$$

```
Command Window
>> M/(E*A)

ans =

    1.3536    0.3536   -1.0000         0   -0.3536   -0.3536
    0.3536    0.3536         0         0   -0.3536   -0.3536
   -1.0000         0    1.0000    0.0000   -0.0000   -0.0000
         0         0    0.0000    1.0000   -0.0000   -1.0000
   -0.3536   -0.3536   -0.0000   -0.0000    0.3536    0.3536
   -0.3536   -0.3536   -0.0000   -1.0000    0.3536    1.3536

fx >>
```

$$E = 300 \text{ GPa} ; A = 1 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$



Resolución del sistema

Por último:

$$K_{r,r'} u_{r'} = F_r - K_{r,s} u_s$$

Que se resuelve rápidamente:

$$u_{r'} = K_{r',r}^{-1} [F_r - K_{r,s} u_s]$$

Una vez que se conocen todos los u_i se pueden recuperar las fuerzas de vínculo:

$$F_s = K_{s,j} u_j$$



Instituto Jorge Sabato, 25 años.
Comisión Nacional de Energía atómica.

Modelización de Materiales 2018

Ensamble de Matrices: Generalización



Grados de Libertad locales y globales

$$MC = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ n_i & n_j \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \quad \text{Elemento e}$$

Matriz elemental

$$K_e = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \textcircled{n_i} & \textcircled{n_j} \\ x & y & x & y \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{Orange square} & \text{Purple square} \\ \text{Yellow square} & \text{Red square} \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{matrix} x & y & \textcircled{n_i} \\ x & y & \textcircled{n_j} \end{matrix}$$

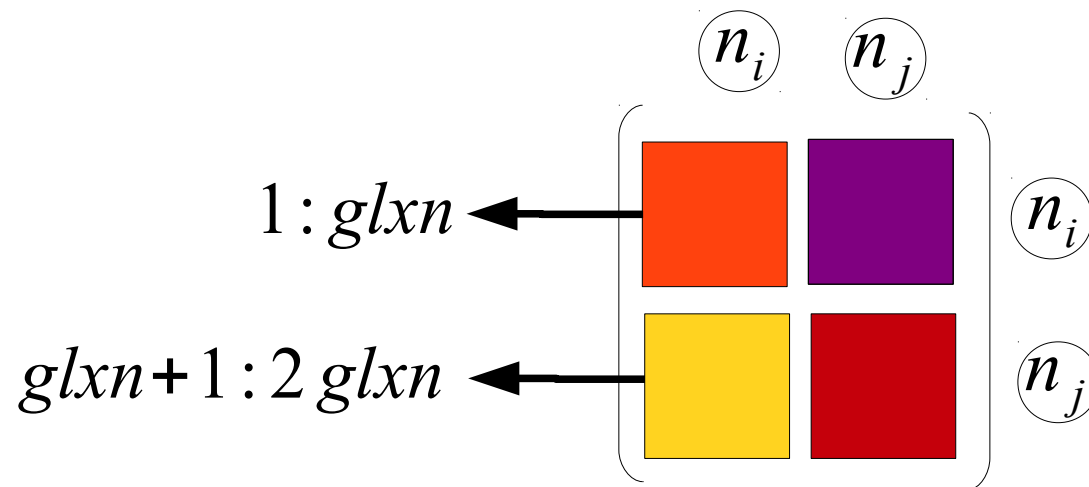
$glxn \times glxn$

Matriz Global

$$K = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \textcircled{n_i} & \textcircled{n_j} \\ x & y & x & y \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{Orange square} & \text{Purple square} \\ \text{Yellow square} & \text{Red square} \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{matrix} x & y & \textcircled{n_i} \\ x & y & \textcircled{n_j} \end{matrix}$$



Rangos de índices de Matrices Locales

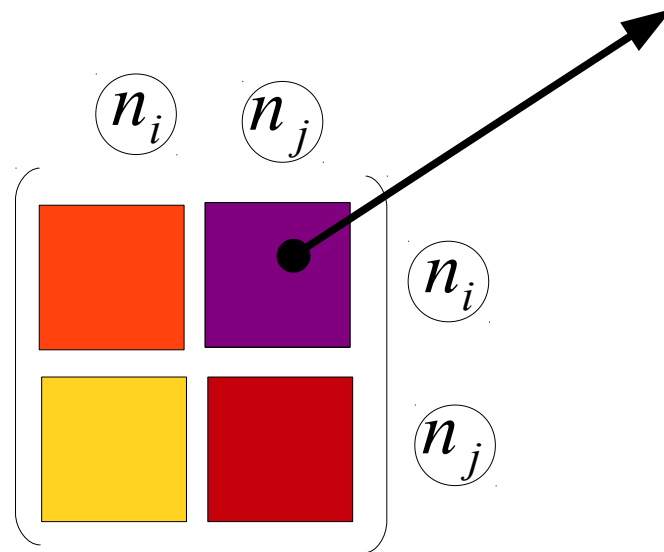


Nodo elemental (cumna de la matriz de conectividad)	índices de los grados de libertad
1	1:glxn
2	glxn+1:2glxn
3	2glxn+1:3glxn
4	3glxn+1:4 glxn
...	
i	(i-1)glxn-1 : i glxn



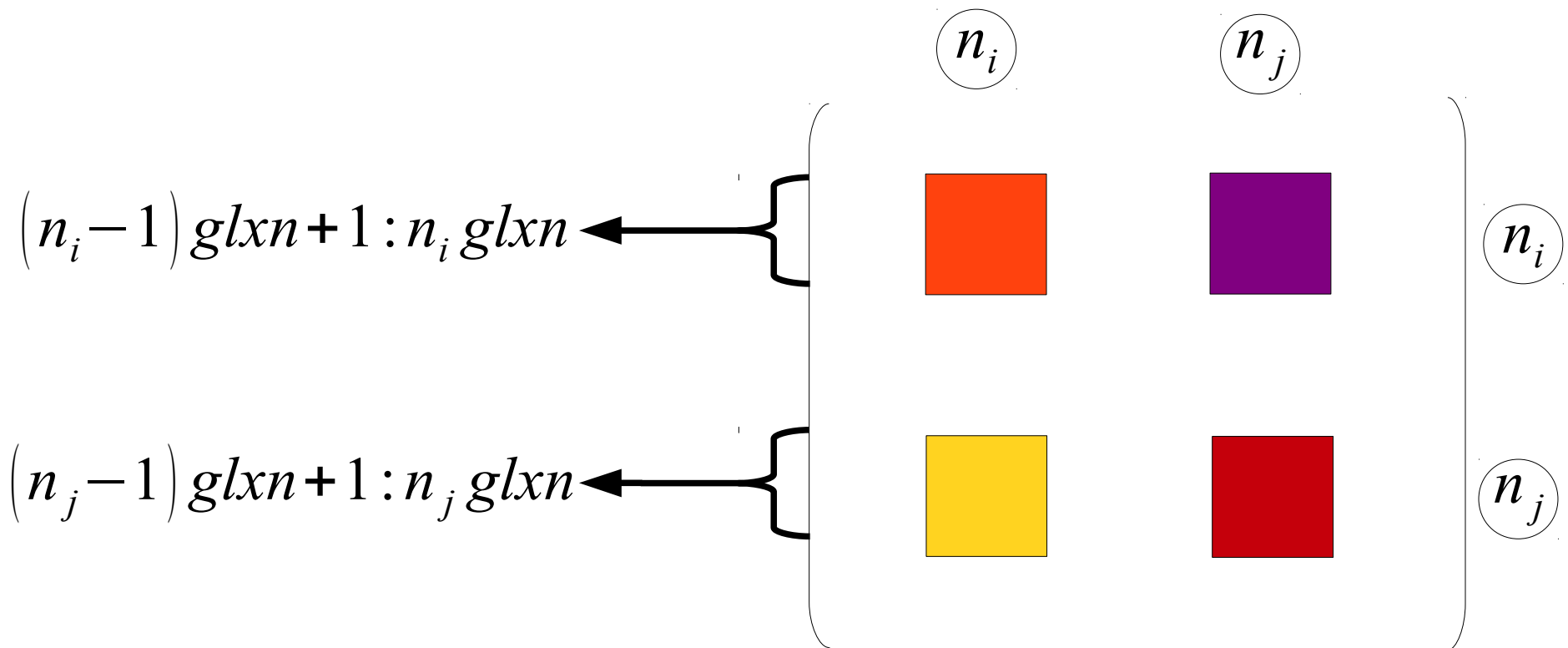
Bloques de matrices locales

$$k_e^{i,j} = k_e[(i-1) \cdot glxn + 1 : i \cdot glxn ; (j-1) \cdot glxn + 1 : j \cdot glxn]$$





Bloques de Matrices Globales



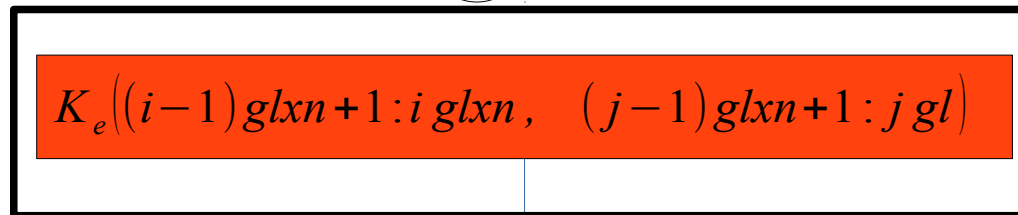


Ensamble de Matrices

$$MC = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ n_i & n_j \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \quad \text{Elemento i-ésimo}$$

Matriz elemental

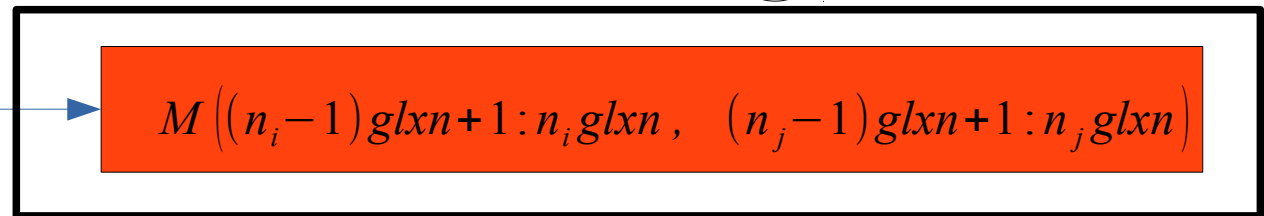
n_i



Matriz Global

n_j

n_i



n_j



Volviendo al ejemplo de la ménsula

• Elemento 3

