



Instituto Jorge Sabato, 25 años.
Comisión Nacional de Energía atómica.

Modelización de Materiales 2018

MEF 01: Resolución de problemas Mixtos

Mariano Forti - Ruben Weht

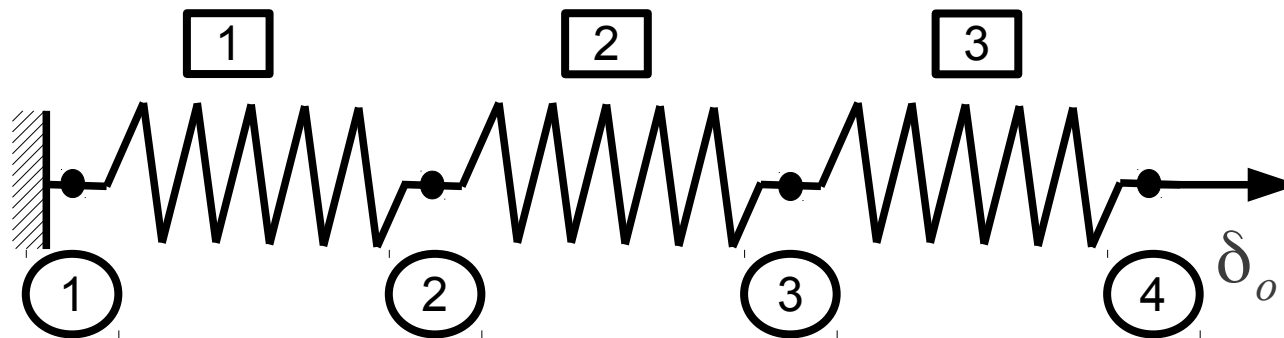
ruweht@cnea.gov.ar marianodforti@gmail.com

www.tandar.cnea.gov.ar/~weht/Modelizacion

<https://mdforti.github.io/Modelizacion/>



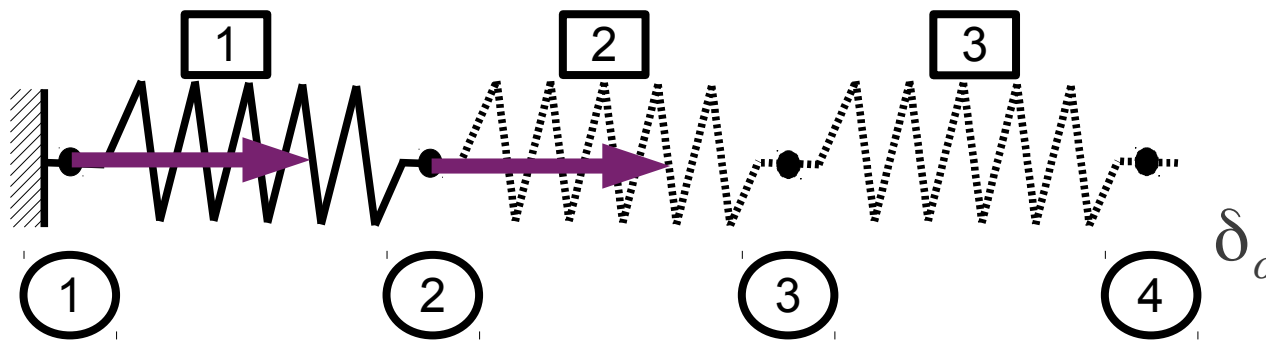
Ejemplo: Problema de los resortes





Fuerzas en los nodos

Fuerzas en los nodos del elemento 1



$$\begin{aligned} f_1^1 &= -k_1(x_2 - x_1) \\ f_2^1 &= k_1(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

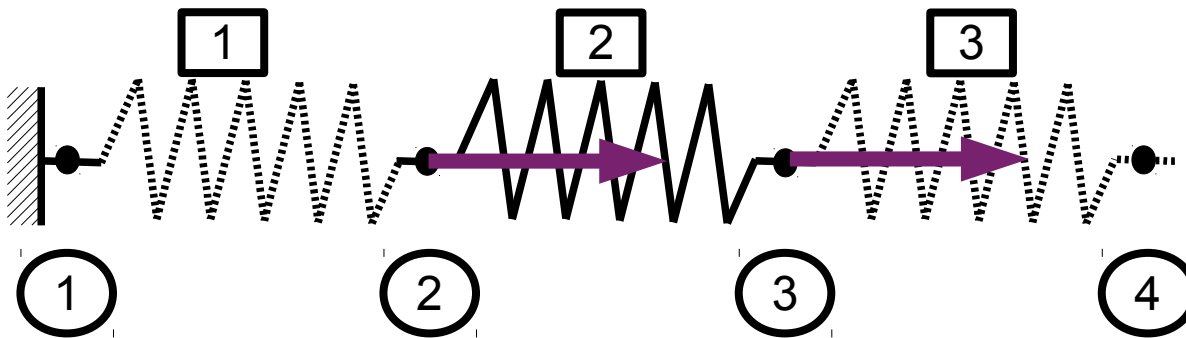
$$\begin{pmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$k_{el}^1 = k_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$



Fuerzas en los nodos

Fuerzas en los nodos del elemento 2



$$f_1^2 = -k_2(x_3 - x_2)$$

$$f_2^2 = k_2(x_3 - x_2)$$

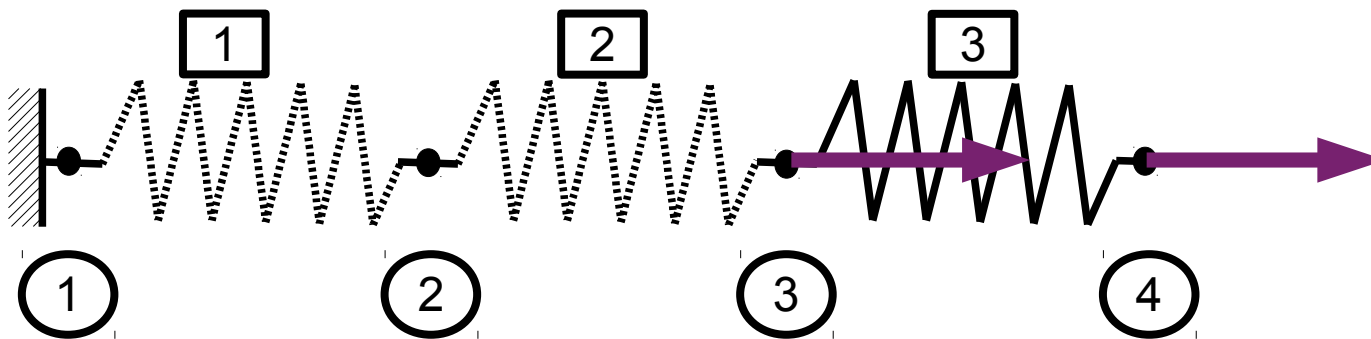
$$\begin{pmatrix} f_1^2 \\ f_2^2 \end{pmatrix} = k_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$k_{el}^2 = k_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$



Fuerzas en los nodos

Fuerzas sobre los nodos del elemento 3



$$f_1^3 = -k_3(x_4 - x_3)$$
$$f_2^3 = k_3(x_4 - x_3)$$

$$\begin{pmatrix} f_1^3 \\ f_2^3 \end{pmatrix} = k_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$k_{el}^3 = k_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$



Fuerzas Globales

Sistema de ecuaciones globales



$$F_1 = f_1^1 = -k_1(x_2 - x_1) = x_1(k_1) + x_2(-k_1) + x_3 \cdot (0) + x_4 \cdot (0)$$

$$F_2 = f_2^1 + f_1^2 = k_1(x_2 - x_1) - k_2(x_3 - x_2) = x_1(-k_1) + x_2(k_1 + k_2) + x_3(-k_2) + x_4 \cdot (0)$$

$$F_3 = f_2^2 + f_1^3 = k_2(x_3 - x_2) - k_3(x_4 - x_3) = x_1 \cdot (0) + x_2(-k_2) + x_3(k_2 + k_3) + x_4(-k_3)$$

$$F_4 = f_2^3 = k_3(x_4 - x_3) = x_1 \cdot (0) + x_2 \cdot (0) + x_3(-k_3) + x_4(k_3)$$



Ecuación Global

Sistema de ecuaciones Lineales

$$\begin{pmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix}$$

x_i : desplazamiento nodo i

Vínculos: x_1 , x_4

F_i : fuerza total en el nodo i

Conocidas: F_2 , F_3



Resolución: Ejemplo de los Resortes

Desarrollamos las ecuaciones para las incógnitas

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \begin{pmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix}$$

$$x_1(-k_1) + x_2(k_1+k_2) + x_3(-k_2) + x_4(0) = F_2$$

$$x_2(k_1+k_2) + x_3(-k_2) = F_2 - x_1(-k_1) - x_4(0)$$

$$x_1(0) + x_2(-k_2) + x_3(k_2+k_3) + x_4(-k_3) = F_3$$

$$x_2(-k_2) + x_3(k_2+k_3) = F_3 - x_1(0) - x_4(-k_3)$$



Reducción del sistema lineal

Interpretamos matricialmente el sistema de ecuaciones reducido:

$$x_2(k_1 + k_2) + x_3(-k_2) = F_2 - x_1(-k_1) - x_4(0)$$

$$x_2(-k_2) + x_3(k_2 + k_3) = F_3 - x_1(0) - x_4(-k_3)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{pmatrix}}_{K_{reducida}} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_3 \end{pmatrix}}_{K_{vin}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Resolvemos:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = K_{reducida}^{-1} \left[\begin{pmatrix} F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} - K_{vin} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} \right]$$



Reducción del sistema lineal

Desarrollamos ahora para las fuerzas de vínculo

$$\begin{array}{l} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \begin{pmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix}$$

$$x_1 \cdot k_1 + x_2 \cdot (-k_1) + x_3 \cdot (0) + x_4 \cdot (0) = F_1$$

$$x_1 \cdot (0) + x_2 \cdot (0) + x_3 \cdot (-k_3) + x_4 \cdot (k_3) = F_4$$



Reducción del sistema lineal

Interpretamos matricialmente la solución para las fuerzas

$$x_1 \cdot k_1 + x_2 \cdot (-k_1) + x_3 \cdot (0) + x_4 \cdot (0) = F_1$$

$$x_1 \cdot (0) + x_2 \cdot (0) + x_3 \cdot (-k_3) + x_4 \cdot (k_3) = F_4$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix}}_{K_{fuerzas}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{F_{vin}} = \underbrace{\begin{pmatrix} F_1 \\ F_4 \end{pmatrix}}_{F_{vin}}$$



Generalización del Problema

Sistema de ecuaciones: $K_{i,j} u_j = F_i$

Consideramos las filas de los grados de libertad incógnitas: $K_{r,j} u_j = F_r$

Donde r es un índice que recorre dichos grados de libertad (incógnitas).

Ahora bien, como j recorre todos los grados de libertad, podemos separar aquellos vinculados de los libres (incógnitas).

Sea r' recorriendo las incógnitas, s recorriendo los vínculos.

$$\underbrace{K_{r,r'} u_{r'}}_{\text{Incógnitas}} + \underbrace{K_{r,s} u_s}_{\text{Vínculos}} = F_r$$



Generalización

Por último:

$$K_{r,r'} u_{r'} = F_r - K_{r,s} u_s$$

Que se resuelve rápidamente:

$$u_{r'} = K_{r',r}^{-1} [F_r - K_{r,s} u_s]$$

Una vez que se conocen todos los u_i se pueden recuperar las fuerzas de vínculo:

$$F_s = K_{s,j} u_j$$



Programación

Podemos entender que r es un vector con los índices que identifican a los grados de libertad incógnitas. En nuestro ejemplo del resorte, $r = (2, 3)$. s sería entonces el vector que recorre los índices de los grados de libertad vinculados, $s = (1, 4)$.
Lenguajes de programación como Matlab, cualquier derivado de Fortran 90 o incluso Python pueden construir las matrices reducidas con la siguiente notación:

$$K_{red} = K(r, r);$$

$$K_s = K(s, :);$$

De forma que la implementación de la formula general es inmediata:

$$U(r) = \text{inv}(K(r, r)) * (F(r) - K(r, s) * U(s));$$

Esto resolvera los desplazamientos desconocidos. Para resolver las fuerzas de vínculo:

$$F(s) = K(s, :) U$$