Instituto Jorge Sabato
Comisión Nacional de Energía Atómica

Modelización de Materiales 2020
Práctica de Elementos Finitos 1

Método de Elementos Finitos, Resolución de Problemas Lineales Mixtos

Mariano Forti – Ruben Weht

marianodforti@gmail.com – ruweht@cnea.gov.ar

www.tandar.cnea.gov.ar/~weht/Modelización

https://mdforti.github.io/Modelizacion/

Ejemplo: Problema de los Resortes

Consideremos el problema 1 de la guía, en el que una cadena de tres resortes, empotrada en el extremo izquierdo, es solicitada por un desplazamiento δ_0 en el extremo derecho.

Las condiciones sobre los extremos nombradas anteriormente nos dan las condiciones de contorno sobre la cadena de resortes.

Para poder resolver la fuerza necesaria para efectuar el desplazamiento usando el método de elementos finitos, dividimos el problema de forma natural en tres elementos. Cada resorte será un elemento, y cada elemento tendrá dos nodos, de modo que todos los grados de libertad del problema pueden representarse en cuatro nodos. Cada nodo marca un extremo de un resorte.

Numeremos los Elementos de **1** a **3** indicados con cajas en la figura, y los nodos de *1* a *4*. indicados con círculos en la figura.

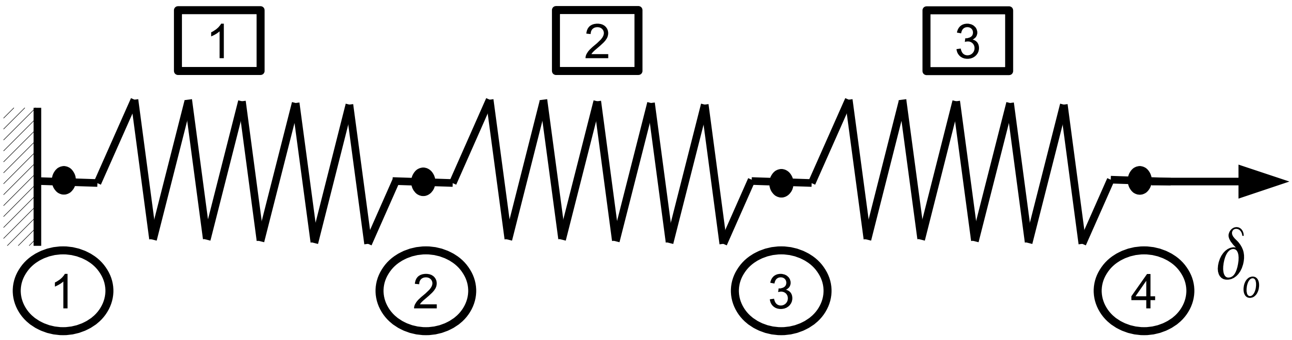


Figura 1: Esquema del Problema

Fuerzas en los Nodos

Consideremos las fuerzas que cada Elemento o resorte ejerce sobre los nodos, tal cual se hizo en la clase teórica.

Elemento 1

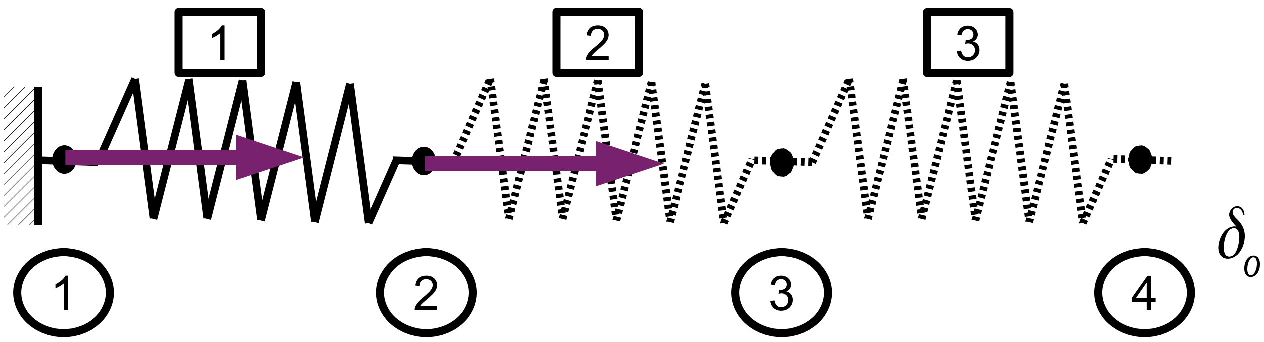


Figura 2: Fuerzas sobre el Elemento **1**

Las fuerza sobre el nodo *1* del Elemento **1** es f_1^1, mientras que la fuerza sobre el nodo *2* del Elemento **1** es f_2^1. Ambas fuerzas son de igual módulo pero opuestas, u quedan determinadas por el estiramiento del resorte. Este estiramiento será directamente la diferencia de corrimientos entre los nodos que determinan el elemento *1* y *2*. Matemáticamente:

$$\begin{aligned} f_1^1 &= -k_1 (x_2 - x_1) \\ f_2^1 &= \quad k_1 (x_2 - x_1) \end{aligned} \tag{1}$$

O bien matricialmente:

$$\begin{pmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

De manera que ha quedado definida la matriz de rigidez elemental del Elemento **1**:

$$k_{el}^1 = k_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Elemento 2

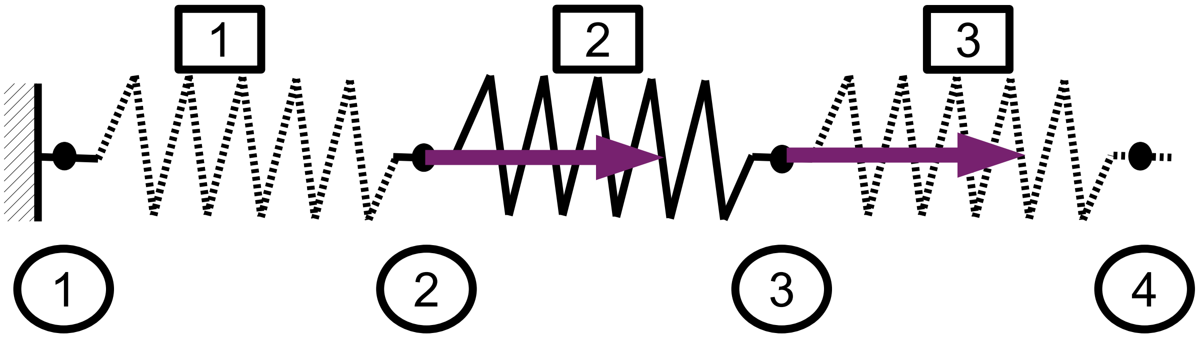


Figura 3: Fuerzas sobre el Elemento **2**

Habiendo introducido la notación para el elemento 1, simplemente tenemos aquí las ecuaciones equivalentes para el Elemento **2**. la diferencia será cuáles son los grados de libertad involucrados, porque el Elemento **2** ‘conecta’ o ‘acopla’ a los nodos *2* y *3*.

$$\begin{aligned} f_1^2 &= -k_2 (x_3 - x_2) \\ f_2^2 &= \quad k_2 (x_3 - x_2) \end{aligned} \;;\; \begin{pmatrix} f_1^2 \\ f_2^2 \end{pmatrix} = k_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;;\; k_{el}^2 = k_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Elemento 3

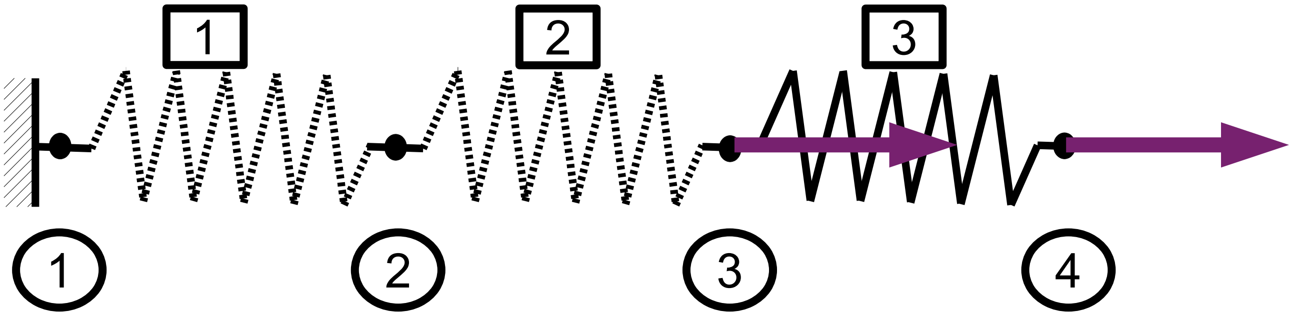


Figura 4: Fuerzas sobre el elemento 3

Por útlimo, para el Elemento **3** el estiramiento queda determinado por los nodos *4* y *3*, de manera que sus grados de libertad se 'acoplan' en la ecuación corespondiente,

$$\begin{array}{l} f_1^2 = -k_2(x_3 - x_2) \\ f_2^2 = \quad k_2(x_3 - x_2) \end{array} ; \begin{pmatrix} f_1^3 \\ f_3^2 \end{pmatrix} = k_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} ; \; k_{el}^3 = k_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Fuerzas Globales

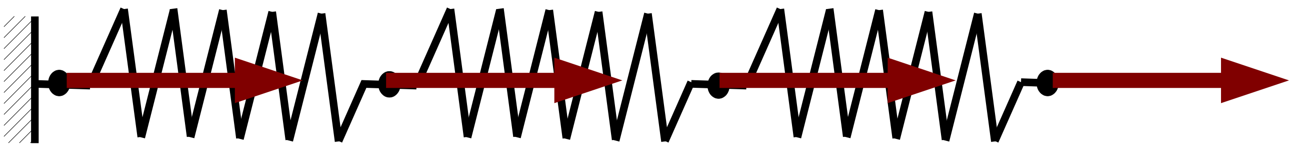


Figura 5: Fuerzas globales

La fuerza total sobre cada uno de los nodos es la suma de todas las fuerzas que actúa sobre cada uno de ellos. Al escribir estas ecuaciones globales, es posible acoplar a todos los grados de libertad a partir de las ecuaciones locales, expandiendo cada una de ellas de manera que aparezcan en forma explícita todos los grados de libertad del problema x_1, x_2, x_3 y x_4. La fuerza global sobre cada nodo puede numerarse F_1 , F_2 , F_3 y F_4 .

$$\begin{cases} F_1 = f_1^1 = -k_1(x_2 - x_1) = x_1(k_1) + x_2(-k_1) + x_3 \cdot (0) + x_4 \cdot (0) \\ F_2 = f_2^1 + f_1^2 = k_1(x_2 - x_1) - k_2(x_3 - x_2) = x_1(-k_1) + x_2(k_1 + k_2) + x_3 \cdot (-k_2) + x_4 \cdot (0) \\ F_3 = f_2^2 + f_1^3 = k_2(x_3 - x_2) - k_3(x_4 - x_3) = x_1 \cdot (0) + x_2(-k_2) + x_3 \cdot (k_2 + k_3) + x_4 \cdot (-k_3) \\ F_4 = f_2^3 = k_3(x_4 - x_3) = x_1 \cdot (0) + x_2 \cdot (0) + x_3 \cdot (-k_3) + x_4 \cdot (k_3) \end{cases} \tag{6}$$

Este sistema de ecuaciones puede pensarse en forma Lineal, donde tenemos un vector de Fuerzas (F_1, F_2, F_3, F_4) y un vector de desplazamientos (x_1, x_2, x_3, x_4) .

$$\begin{pmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Donde queda definida nuestra **Matriz de Rigidez** del problema:

$$M = \begin{pmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix} \quad (8)$$

El problema de este sistema lineal es que por las condiciones de contorno planteadas al principio, las incógnitas y las condiciones de contorno están repartidas en forma arbitraria entre el vector de desplazamientos y el vector de fuerzas. Por lo tanto, es necesario extender algo de nuestro desarrollo

Resolución: Problema de los resortes

Sistema Lineal Mixto

En principio, el sistema lineal encontrado representa un sistema de ecuaciones. Tratemos primero las ecuaciones que corresponden con los desplazamientos desconocidos x_2 y x_3 en el ejemplo del resorte. La operatoria consiste en expandir las ecuaciones correspondientes en todos los grados de libertad, tal y como aparecen en la ecuación (17).

Separación de las condiciones de contorno

Para las ecuaciones de F_2 y F_3 , deben reordenarse los términos de los grados de libertad vinculados x_1 y x_4 a la derecha del igual, de manera de dejar del lado izquierdo del igual solo a los términos de los grados de libertad incógnita x_2 y x_3 ,

$$\begin{matrix} F_2 = x_1(-k_1)+x_2(k_1+k_2)+x_3\cdot(-k_2)+x_4\cdot(0) \\ F_3 = x_1\cdot(0)+x_2(-k_2)+x_3\cdot(k_2+k_3)+x_4\cdot(-k_3) \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x_2(k_1+k_2)+x_3\cdot(-k_2)=F_2-x_1(-k_1)-+x_4\cdot 0 \\ x_2(-k_2)+x_3\cdot(k_2+k_3)=F_3-x_1\cdot 0-x_4(-k_3) \end{cases} \quad (9)$$

Reduccion del sistema lineal

Finalmente, pensemos en un vector de incógnitas $X_r=(x_{2,}x_3)$ y un vector de vínculos $X_S=(x_{1,}x_4)$. Con estas definiciones, las ecuaciones (9) puede escribirse en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix};\ K_{\mathrm{red}}=\begin{pmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{pmatrix};\ K_{vin}=\begin{pmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_3 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Sobre esta ecuación conviene hacer algunas definiciones. Sea K_{red} la *matriz de rigidez reducida*, mientras que K_{vin} es la *matriz de rigidez vinculada*.

Solución de las incógnitas.

El sistema lineal reducido puede resolverse ahora en forma limpia simplemente invirtiendo K_{red} ya que este nuevo sistema lineal reducido tiene todas las incógnitas en el vector X_r que multiplica a la matriz de rigidez. Puede escribirse entonces que

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = K_{red}^{-1}\left[\begin{pmatrix} F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}-K_{vin}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix}\right] \tag{11}$$

Sin embargo el problema no está terminado aún puesto que falta resolver las fuerzas F_1 y F_4. Pero, conociendo los desplazamientos a partir de la ecuación (11), resulta trivial resolver a partír de las ecuaciones correspondientes en el sistema de ecuaciones (6). Aún así, por completitud, escribamos la forma matricial de las ecuaciones correspondientes. Tomemos un vector de fuerzas de vínculo $F_s=(F_1,F_4)$, el sistema lineal equivalente al subconjunto de ecuaciones correspondientes es

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Generalización del problema

Lo que se hizo hastá aquí no es ni mas ni menos que plantear un sistema lineal de ecuaciones de la forma

$$K_{i,j}u_j=F_i \tag{13}$$

En este conjunto de cuaciones existe un subconjunto que corresponden a aquellas donde los desplazamientos u son incógnitas y las fuerzas F son dadas. Nombremos r al índice que define este subconjunto, de manera que las ecuaciones correspondientes son:

$$K_{r,j}u_j=F_r \tag{14}$$

Como el índice *j* recorre todos los grados de libertad, es posible separar los vinculados de los libres, de manera que el sistema puede reorderarse de manera de separar un término para los vínculos y otro para las incógnitas.

$$K_{r,r'} u_{r'} + K_{r,s} u_s = F_r \tag{15}$$

donde r' es un índice 'copia' de r y s la lista de índices de los grados de libertad vinculados.

Por último, puede reordenarse de manera que solo aparezcan los grados de libertad incógnita a la derecha de la ecuación,

$$K_{r,r'} u_r = F_r - K_{r,s} u_s \tag{16}$$

que puede resolverse rápidamente,

$$u_r = K_{r,r'}^{-1} \left[F_r - K_{r,s} u_s \right] \tag{17}$$

Una vez resueltos los desplazamientos es posible recuperar las fuerzas de vínculo,

$$F_s = K_{s,j} u_j \tag{18}$$

Programación

La ventaja del planteo desarrollado arriba radica en que se puede aplicar fácilmente a cualquier lenguaje de programación moderno,i.e. fortan, python, matlab, o el que se le ocurra.

Es posible entender que cada una de las listas de grados de libertad definidas pueden escribirse como vectores. Cada componente del vector es el índice de un grado de libertad del problema que corresponda. En nuestro ejemplo del resorte,

$$r = (2,3), s = (1,4) \tag{19}$$

Si se ha definido la matriz de rigidez del problema, puede definirse la **matriz de rigidez reducida** del sistema de la siguiente forma:

$$K_{\text{red}} = K(r, r) \tag{20}$$

y la **matriz vinculada**,

$$K_s = K(r, s) \tag{21}$$

De esta forma es posible implementar la ecuación general de la ecuación (17) en forma inmediata,

$$U(r)=inv(K(r,r))*(F(r)-K(r,s)*U(s)) \tag{22}$$

Esto resuelve los desplazamientos desconocidos. Para resolver las fuerzas de vínculo, directamente se aplica:

$$F(s)=K(s,:)U \tag{23}$$

Modelización de Materiales 2020

MEF 01: Resolución de problemas Mixtos

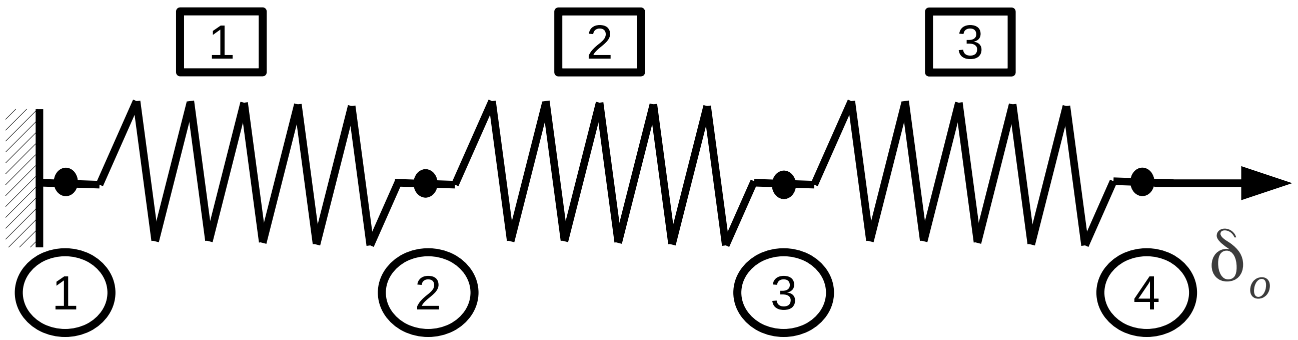
Mariano Forti - Ruben Weht

ruweht@cnea.gov.ar marianodforti@gmail.com

www.tandar.cnea.gov.ar/~weht/Modelizacion

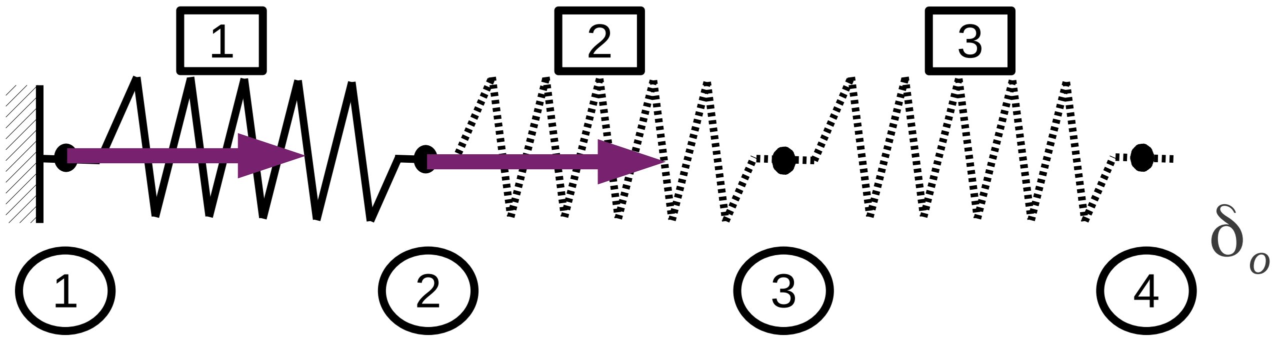
https://mdforti.github.io/Modelizacion/

Ejemplo: Problema de los resortes



Fuerzas en los nodos

Fuerzas en los nodos del elemento 1



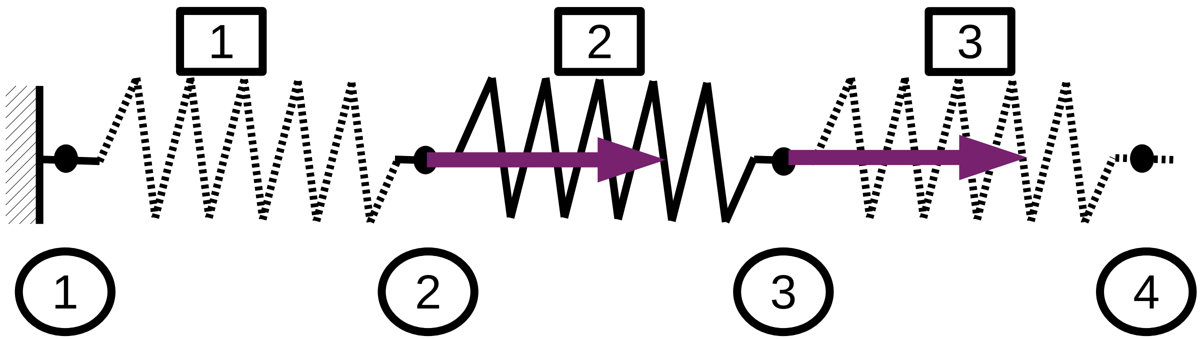
$$f_1^1 = -k_1 (x_2 - x_1)$$
$$f_2^1 = \quad k_1 (x_2 - x_1)$$

$$\begin{pmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$k_{el}^1 = k_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Fuerzas en los nodos

Fuerzas en los nodos del elemento 2



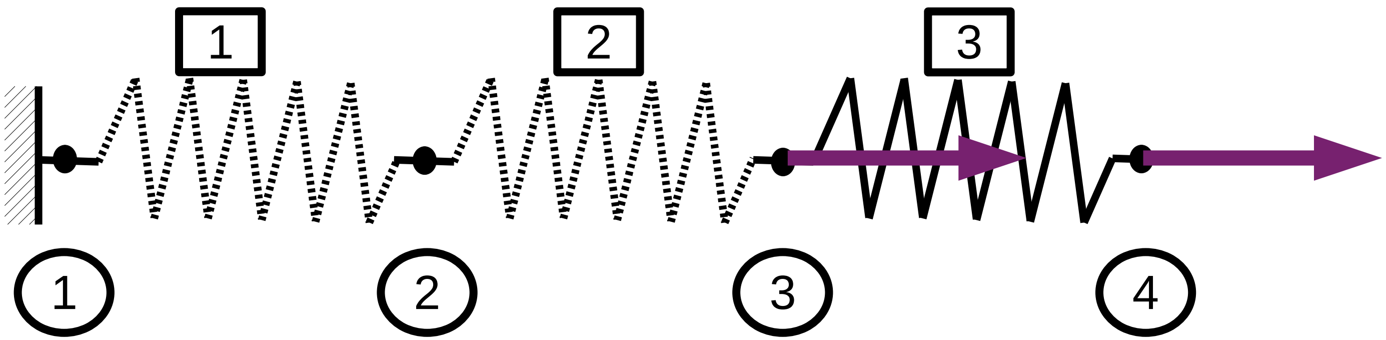
$$f_1^2 = -k_2 (x_3 - x_2)$$
$$f_2^2 = \quad k_2 (x_3 - x_2)$$

$$\begin{pmatrix} f_1^2 \\ f_2^2 \end{pmatrix} = k_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$k_{el}^2 = k_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Fuerzas en los nodos

Fuerzas sobre los nodos del elemento 3



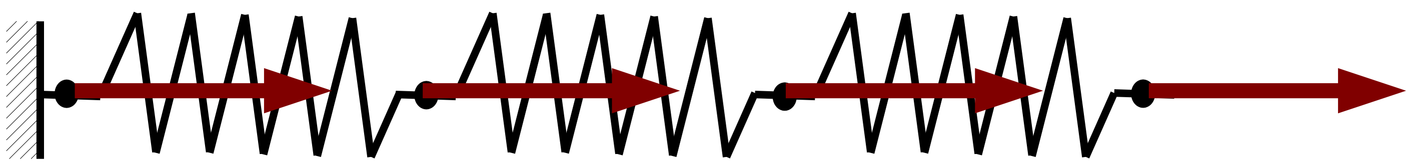
$$f_1^3 = -k_3 (x_4 - x_3)$$
$$f_2^3 = \quad k_3 (x_4 - x_3)$$

$$\begin{pmatrix} f_1^3 \\ f_2^3 \end{pmatrix} = k_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$k_{el}^3 = k_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Fuerzas Globales

Sistema de ecuacioens globales



$$F_1 = f_1^1 = -k_1(x_2 - x_1) = x_1(k_1) + x_2(-k_1) + x_3 \cdot (0) + x_4 \cdot (0)$$

$$F_2 = f_2^1 + f_1^2 = k_1(x_2 - x_1) - k_2(x_3 - x_2) = x_1(-k_1) + x_2(k_1 + k_2) + x_3 \cdot (-k_2) + x_4 \cdot (0)$$

$$F_3 = f_2^2 + f_1^3 = k_2(x_3 - x_2) - k_3(x_4 - x_3) = x_1 \cdot (0) + x_2(-k_2) + x_3 \cdot (k_2 + k_3) + x_4 \cdot (-k_3)$$

$$F_4 = f_2^3 = k_3(x_4 - x_3) = x_1 \cdot (0) + x_2 \cdot (0) + x_3 \cdot (-k_3) + x_4 \cdot (k_3)$$

Ecuación Global

Sistema de ecuaciones Lineales

$$\begin{pmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix}$$

x_i : desplazamiento nodo i

F_i : fuerza total en el nodo i

Vínculos: x_1 , x_4

Conocidas: F_2 , F_3

Resolución: Ejemplo de los Resortes

Desarrollamos las ecuaciones para las incógnitas

$$\begin{pmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix}$$

$$x_1(-k_1)+x_2(k_1+k_2)+x_3\cdot(-k_2)+x_4\cdot(0)=F_2$$

$$x_2(k_1+k_2)+x_3\cdot(-k_2)=F_2-x_1(-k_1)-x_4\cdot(0)$$

$$x_1\cdot(0)+x_2(-k_2)+x_3\cdot(k_2+k_3)+x_4\cdot(-k_3)=F_3$$

$$x_2(-k_2)+x_3\cdot(k_2+k_3)=F_3-x_1\cdot(0)-x_4\cdot(-k_3)$$

Reducción del sistema lineal

Interpretamos matricialmente el sistema de ecuaciones reducido:

$$x_2(k_1+k_2)+x_3\cdot(-k_2)=F_2-x_1(-k_1)-x_4\cdot(0)$$
$$x_2(-k_2)+x_3\cdot(k_2+k_3)=F_3-x_1\cdot(0)-x_4\cdot(-k_3)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{pmatrix}}_{K_{reducida}}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}-\underbrace{\begin{pmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_3 \end{pmatrix}}_{K_{vin}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Resolvemos:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=K_{reducida}^{-1}\left[\begin{pmatrix} F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}-K_{vin}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix}\right]$$

Reducción del sistema lineal

Desarrollamos ahora para las fuerzas de vínculo

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \\ \\ \\ \longrightarrow \end{array} \begin{pmatrix} \boxed{k_1 \quad -k_1 \quad 0 \quad 0} \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad -k_3 \quad k_3} \end{pmatrix} \boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \boxed{F_1} \\ F_2 \\ F_3 \\ \boxed{F_4} \end{pmatrix}$$

$$x_1 \cdot k_1 + x_2 \cdot (-k_1) + x_3 \cdot (0) + x_4 \cdot (0) = F_1$$

$$x_1 \cdot (0) + x_2 \cdot (0) + x_3 \cdot (-k_3) + x_4 \cdot (k_3) = F_4$$

Reducción del sistema lineal

Interpretamos matricialmente la solución para las fuerzas

$$x_1 \cdot k_1 + x_2 \cdot (-k_1) + x_3 \cdot (0) + x_4 \cdot (0) = F_1$$

$$x_1 \cdot (0) + x_2 \cdot (0) + x_3 \cdot (-k_3) + x_4 \cdot (k_3) = F_4$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix}}_{K_{fuerzas}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} F_1 \\ F_4 \end{pmatrix}}_{F_{vin}}$$

Generalización del Problema

Sistema de ecuaciones: $K_{i,j} \; u_j = F_i$

Consideramos las filas de los grados de libertad incógnitas: $K_{r,j} \; u_j = F_r$

Donde *r* es un índice que recorre dichos grados de libertad (incógnitas).
Ahora bien, como *j* recorre todos los grados de libertad, podemos separar aquellos vinculados de los libres (incógnitas).
Sea *r'* recorriendo las incógnitas, *s* recorriendo los vínculos.

$$\underbrace{K_{r,r'} \; u_{r'}}_{\text{Incógnitas}} + \underbrace{K_{r,s} u_s}_{\text{Vínculos}} = F_r$$

Generalización

Por último: $$K_{r,r'}\; u_{r'} = F_r - K_{r,s} u_s$$

Que se resuelve rápidamente: $$u_{r'} = K_{r',r}^{-1}\; \left[F_r - K_{r,s} u_s\right]$$

Una vez que se conocen todos los ui se pueden recuperar las fuerzas de vínculo:

$$F_s = K_{s,j} u_j$$

Programación

Podemos entender que *r* es un vector con los índices que identifican a los grados de libertad incógnitas. En nuestro ejemplo del resorte, `r = (2,3)`. *s* sería entonces el vector que recorre los índices de los grados de libertad vinculados, `s = (1,4)`. Lenguajes de programación como Matlab, cualquier derivado de Fortran 90 o incluso Python pueden construir las matrices reducidas con la siguiente notación:

```
Kred = K (r , r) ;

Ks= K(s,:);
```

De forma que la implementación de la formula general es inmediata:

```
U(r) = inv(K(r , r))*( F(r) - K(r,s)*U(s));
```

Esto resolvera los desplazamientos desconocidos. Para resolver las fuerzas de vínculo:

```
F(s) = K(s,:) U
```