Instituto Jorge Sabato, 25 años.
Comisión Nacional de Energía atómica.

Modelización de Materiales 2018

MEF 02: Ensamble de Matrices (parte 1)

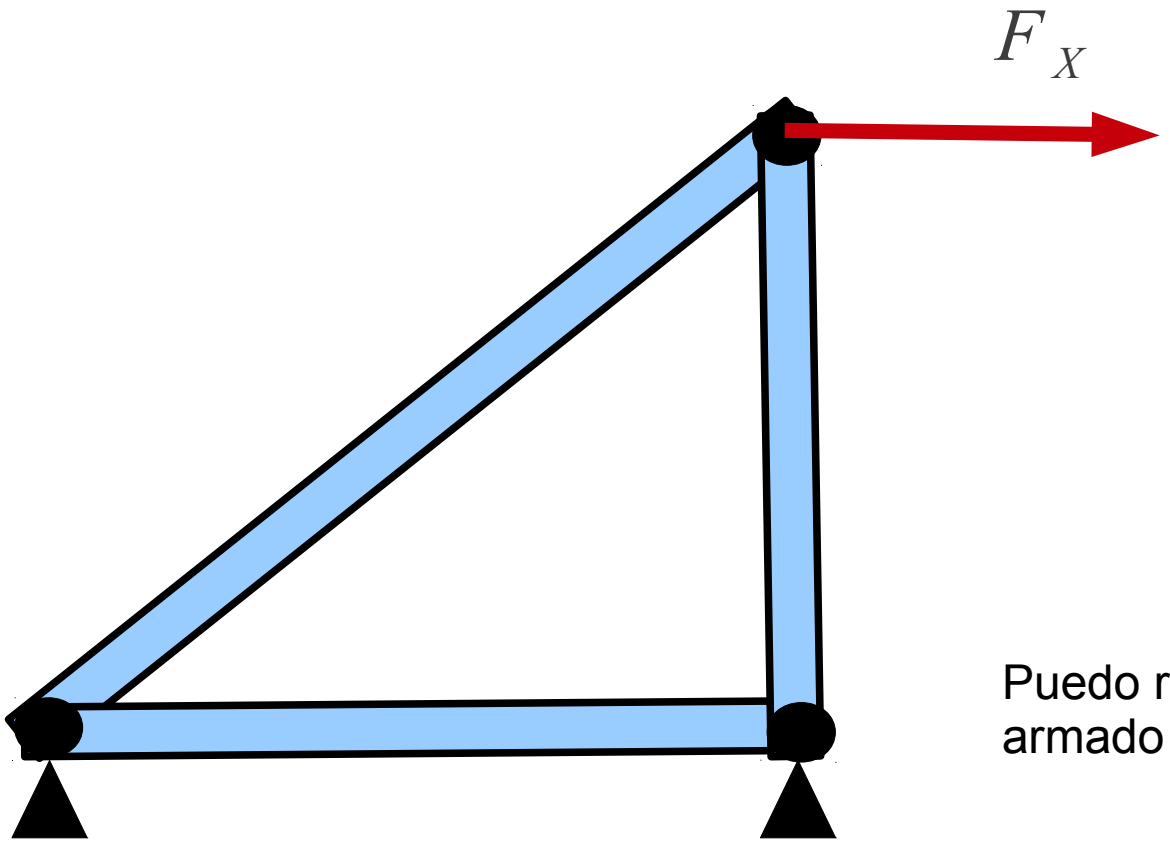
Mariano Forti - Ruben Weht

ruweht@cnea.gov.ar marianodforti@gmail.com

www.tandar.cnea.gov.ar/~weht/Modelizacion

https://mdforti.github.io/Modelizacion/

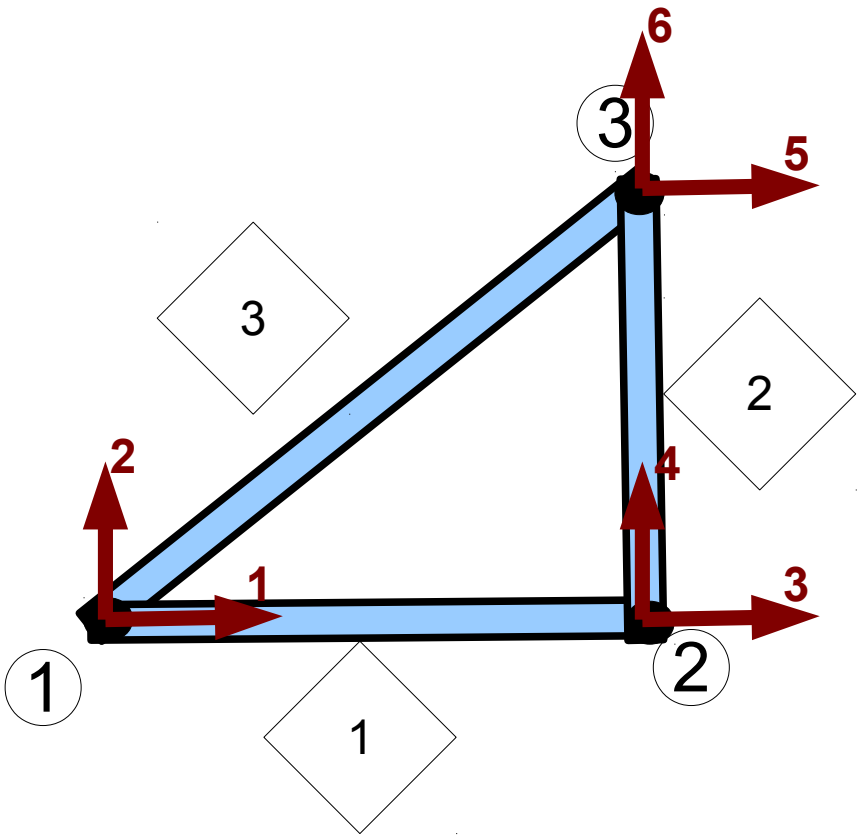
Ejemplo: Problema de la Ménsula



Puedo resolver el sistema cuando tenga armado el sistema de ecuaciones:

$$F = K \cdot X$$

Indexación de los grados de libertad



Nodo	grados de libertad
1	u_1 , u_2
2	u_3 , u_4
3	u_5 , u_6

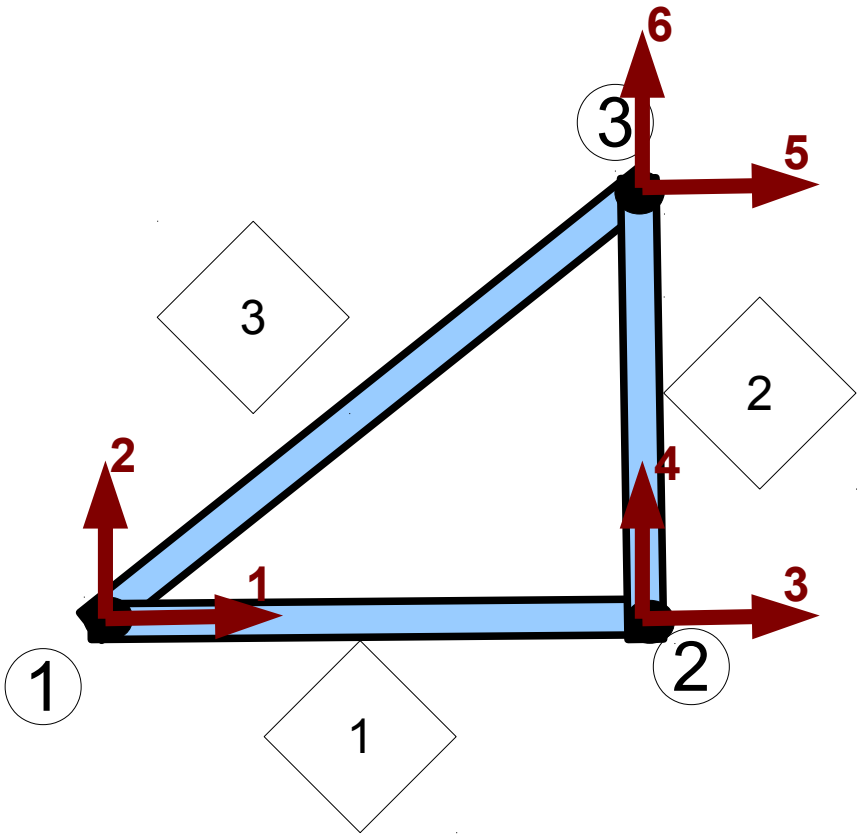
$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{pmatrix}$$

Matrices descriptivas del sistema

Es conveniente definir algunas variables descriptivas...

Matriz de Nodos

Guarda las coordenadas de los nodos con el orden de la numeración



$$MN = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ L & 0 & 0 \\ L & L & 0 \end{bmatrix}$$

Dimensionalidad y grados de libertad

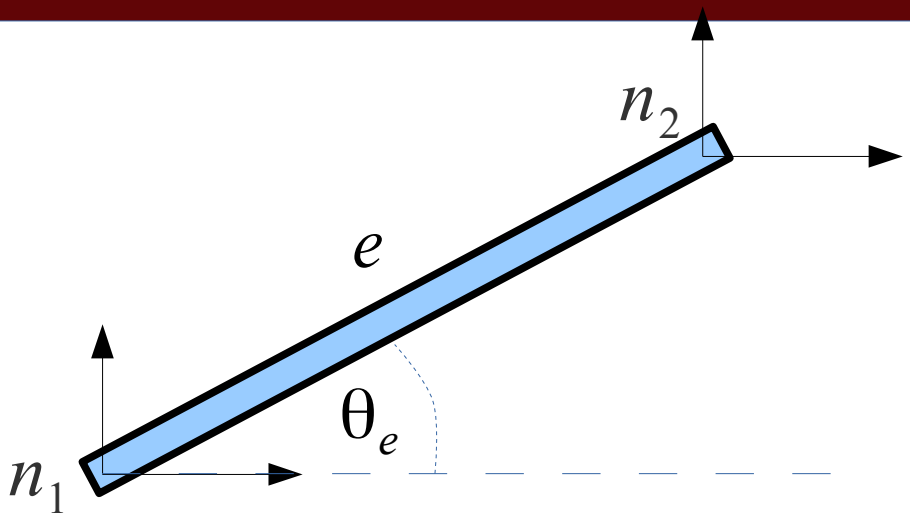
Dimension ≠ grados de libertad por nodo(glxn)

Matriz de Conectividad

una fila por elemento, y para cada elemento la lista de nodos que lo conforman

$$MC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Indexación y trazabilidad de nodos



$$n_i = MC(e,i)$$

$$x_i^e = MN(MC(e,i),1); \quad y_i^e = MN(MC(e,i),2)$$

$$\theta_e = arctg_2\left(\frac{x_2^e - x_1^e}{y_2^e - y_1^e}\right)$$

$$L_e = \sqrt{\left(x_2^e - x_1^e\right)^2 + \left(y_2^e - y_1^e\right)^2}$$

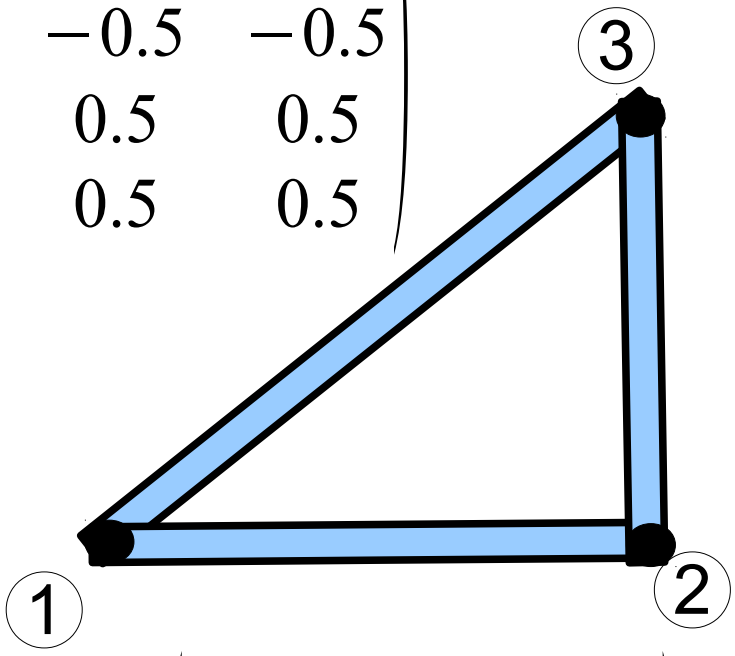
Matriz de Rigidez

A partir de las matrices de nodos y de conectividad...

$$[K]_e = k_e \begin{pmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{pmatrix}$$

Matrices de rigidez elementales

$$k_3 \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$



$$k_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$MC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrices Globales: Ensamble de matrices

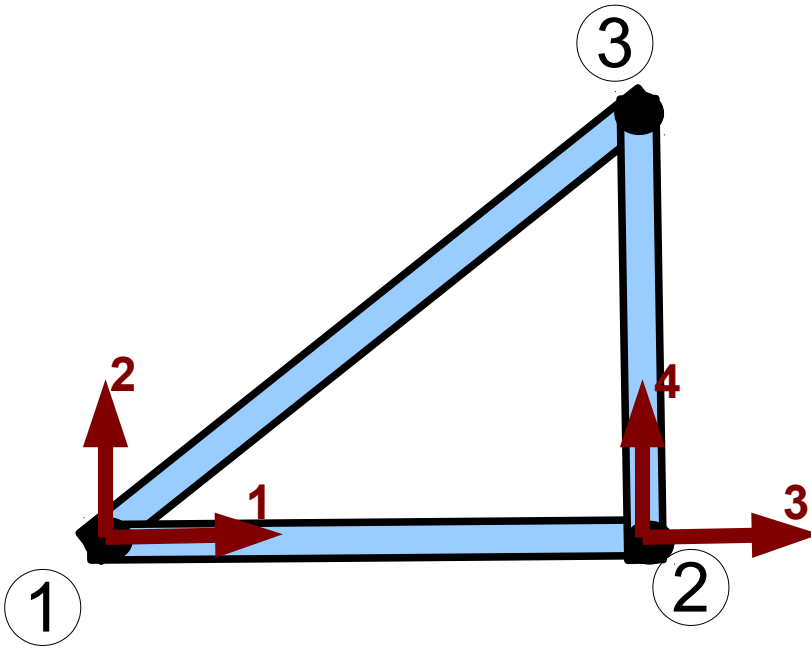
$$F = M\ X$$

Ecuación global para el elemento 1

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc} k_1 & 0 & -k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -k_1 & 0 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

$$MC = \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F^{(1)} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc|cc} k_1 & 0 & -k1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -k1 & 0 & k1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix}$$

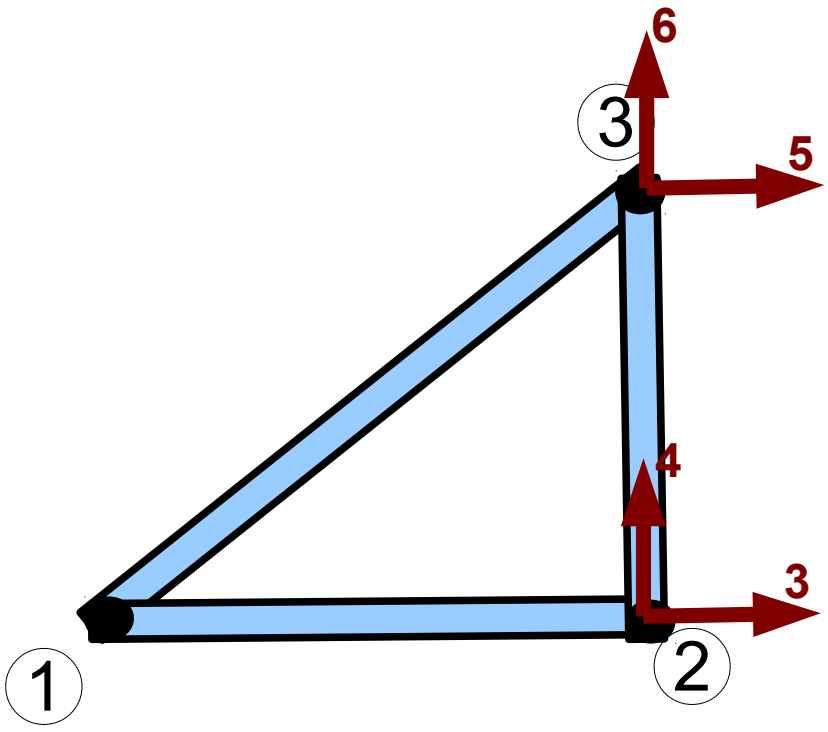


Ecuación global para el elemento 2

$$\begin{array}{c} \\ 3 \\ 4 \\ \\ 5 \\ 6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 & -k_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_1 & 0 & k_1 \end{array}\right] \end{array}$$

$$MC = \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$F^{(1)} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \\ 3 \\ 4 \\ \\ 5 \\ 6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_1 & 0 & -k_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_1 & 0 & k_1 \end{array}\right] \end{array}\begin{array}{c} \\ \left\{\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{array}\right. \end{array}$$



Ecuación global para el elemento 3

$$MC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$k_3 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ \\ 1 \\ \\ \end{matrix}$$

$$M^3 = k_3 \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Ecuación Global

$$F = F^{(1)} + F^{(2)} + F^{(3)}$$

$$F = \left(M^{(1)} + M^{(2)} + M^{(3)} \right) X$$

$$F = M\ X$$

$$M = M^{(1)} + M^{(2)} + M^{(3)}$$

Command Window

```
>> M/(E*A)

ans =

    1.3536    0.3536   -1.0000         0   -0.3536   -0.3536
    0.3536    0.3536         0         0   -0.3536   -0.3536
   -1.0000         0    1.0000    0.0000   -0.0000   -0.0000
         0         0    0.0000    1.0000   -0.0000   -1.0000
   -0.3536   -0.3536   -0.0000   -0.0000    0.3536    0.3536
   -0.3536   -0.3536   -0.0000   -1.0000    0.3536    1.3536

fx >>
```

$$E = 300\,GPa \quad ; \quad A = 1 \times 10^{-4}\,m^2$$

Resolución del sistema