

## Análisis II – Análisis matemático II – Matemática 3.

### Segundo Cuatrimestre de 2025

#### Práctica 4 - Teoremas de Stokes y de Gauss. Campos conservativos. Aplicaciones.

**Ejercicio 1.** Verificar el teorema de Stokes para el hemisferio superior  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ,  $z \geq 0$ , y el campo vectorial  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ .

**Ejercicio 2.** Sea  $S$  la superficie cilíndrica con tapa, que es unión de dos superficies  $S_1$  y  $S_2$ , donde  $S_1$  es el conjunto de  $(x, y, z)$  con  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$  y  $S_2$  es el conjunto de  $(x, y, z)$  con  $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ ,  $z \geq 1$ , orientadas con la normal que apunta hacia afuera del cilindro y de la esfera, respectivamente. Sea  $\mathbf{F}(x, y, z) = (zx + z^2y + x, z^3yx + y, z^4x^2)$ . Calcular  $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$ .

**Ejercicio 3.**

- a). Considerar dos superficies  $S_1$  y  $S_2$  con la misma frontera  $\partial S$ . Describir, mediante dibujos, como deben orientarse  $S_1$  y  $S_2$  para asegurar que

$$\int_{S_1} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_2} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$$

- b). Deducir que si  $S$  es una superficie cerrada, entonces

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

(una superficie cerrada es aquella que constituye la frontera de una región en el espacio; así, por ejemplo, una esfera es una superficie cerrada).

- c). Calcular  $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$ , donde  $S$  es el elipsoide  $x^2 + y^2 + 2z^2 = 10$ , y  $\mathbf{F} = (\sin xy, e^x, -yz)$ .

**Ejercicio 4.** Estudiar la aplicabilidad del teorema de Stokes al campo  $\mathbf{F} = (-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0)$  y la superficie  $S$ , en cada uno de los siguientes casos:

- a).  $S$  = círculo de radio  $a > 0$  centrado en el origen en el plano  $z = 0$ .  
b).  $S$  = región del plano  $z = 0$  entre  $x^2 + y^2 = 1$  y  $x + y = 1$ .

**Ejercicio 5.** Evaluar  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ , donde

- a).  $\mathbf{F} = (2xyz + \sin x, x^2z, x^2y)$ , y  $C$  es la curva que está parametrizada por  $(\cos^5 t, \sin^3 t, t^4)$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ .  
b).  $\mathbf{F} = (\cos xy^2 - xy^2 \sin xy^2, -2x^2y \sin xy^2, 0)$ , y  $C$  es la curva parametrizada por  $(e^t, e^{t+1}, 0)$ ,  $-1 \leq t \leq 0$ .

**Ejercicio 6.** Calcular

$$\int_C (y + \sin x) dx + \left(\frac{3}{2}z^2 + \cos y\right) dy + 2x^3 dz,$$

donde  $C$  es la curva orientada parametrizada por  $\sigma(t) = (\sin t, \cos t, \sin 2t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

Sugerencia: Observar que  $C$  se encuentra en la superficie  $z = 2xy$ .

**Ejercicio 7.** Sea  $f \in C^1(B)$  donde  $B$  es una bola en  $\mathbb{R}^3$ . Deducir que si  $\nabla f = 0$  en  $B$  se sigue que  $f$  es constante en  $B$ .

**Ejercicio 8.** Calcular la integral de línea  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$  donde  $\mathbf{F}$  es el campo vectorial definido por:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy + z^2, x^2 - 2yz, 2xz - y^2)$$

y  $C$  es la curva que está contenida en la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  y el plano de ecuación  $3y = x$  recorrida desde el punto  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$  al polo norte.

**Ejercicio 9.** Rehacer el ejercicio 16) de la Práctica 2, usando el Teorema de Gauss.

**Ejercicio 10.** Calcular  $\int_S (x + y + z) dS$  donde  $S$  es el borde de la bola unitaria, es decir

$$S = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

**Ejercicio 11.** Calcular  $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ , siendo  $\mathbf{F} = (x^3, y^3, z^3)$  y  $S$  la esfera de radio  $R$  con la normal que apunta hacia adentro.

**Ejercicio 12.** Sea  $\mathcal{C}$  la curva en el plano  $xz$  dada en polares por:

$$r(\varphi) = \frac{4\sqrt{3}}{9} (2 - \cos(2\varphi)) \quad \text{para } \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{6},$$

donde  $\varphi$  es el ángulo que forma el radio vector con el semieje positivo de las  $z$ . Sea  $S$  la superficie que se obtiene por **revolución** de esta curva alrededor del eje  $z$ .

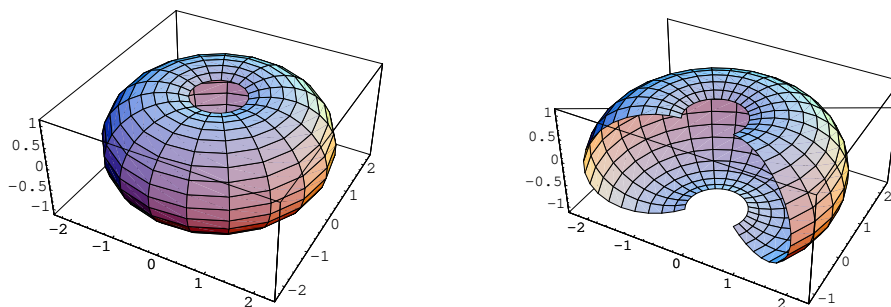


FIGURA 1

En el primer dibujo se muestra la superficie  $S$ , en el segundo se realizó un corte de la misma para que se aprecie mejor su forma.

Calcular el **flujo** a través de  $S$  en el sentido “externo” del campo

$$F(x, y, z) = (x, y, -2z).$$

**Ejercicio 13.** Calcular el flujo del campo  $F(x, y, z) = (0, 0, a^2 - x^2 - y^2)$  a través de las siguientes secciones oblicuas del cilindro  $x^2 + y^2 \leq a^2$ :

- Sección oblicua determinada por la intersección del cilindro con el plano de ecuación  $y + z = 1$ , de modo que la normal en el punto  $(0, 0, 1)$  apunte en la dirección  $(0, 1, 1)$ .
- Sección oblicua determinada por la intersección del cilindro con el plano de ecuación  $z = 0$ , de modo que la normal en el punto  $(0, 0, 0)$  apunte en la dirección  $(0, 0, 1)$ .

¿Depende el flujo del área de la sección?. Justifique.

**Ejercicio 14.** Dada la función  $f(x) = \frac{1}{2}xe^{2-2x}$  podemos describir la superficie de la calabaza de un mate como la superficie de rotación alrededor del eje  $z$  de la curva  $x=f(z)$ ,  $0 \leq z \leq 1$ .

Para una idea gráfica ver la figura.

Cuando el mate se encuentra cargado de yerba y de agua caliente, el calor es un campo dado por

$$F(x, y, z) = \left(x, y, z - \frac{1}{2}\right)$$

Calcular el flujo térmico saliente que atraviesa la superficie de la calabaza del mate.

**Ejercicio 15.** Sea  $S$  la superficie dada por el gráfico de la función  $f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$  con

$\|(x, y)\| \leq 1$  y sea  $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{zx}{x^2 + y^2}, \frac{zy}{x^2 + y^2}, 0\right)$ . Hallar

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Piense antes de actuar.

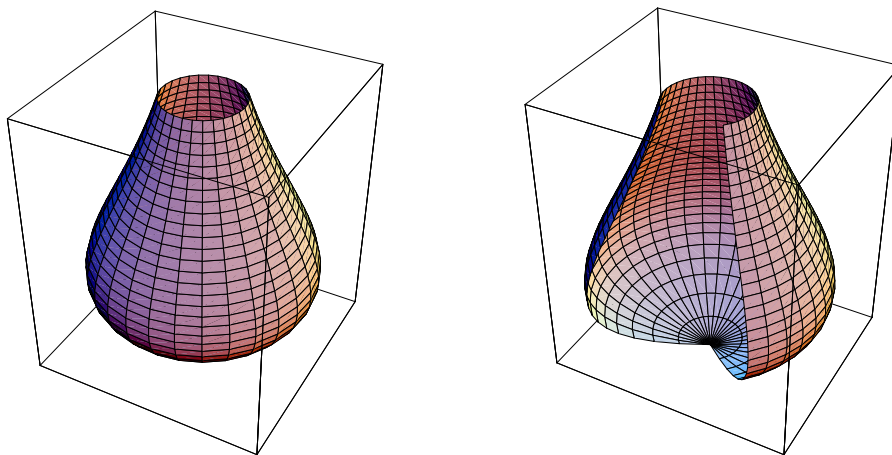


FIGURA 2

**Ejercicio 16.** Se sabe que  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{G} = 0$  para todo campo vectorial  $\mathbf{G} \in C^1$ . Además, si  $\mathbf{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$  es tal que  $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$  en  $\mathbb{R}^3$ , existe  $\mathbf{G} \in C^2(\mathbb{R}^3)$  tal que  $\mathbf{F} = \operatorname{rot} \mathbf{G}$ . Por ejemplo, tomar

$$\begin{aligned} G_1(x, y, z) &= \int_0^z F_2(x, y, t) dt - \int_0^y F_3(x, t, 0) dt, \\ G_2(x, y, z) &= - \int_0^z F_1(x, y, t) dt, \\ G_3(x, y, z) &= 0. \end{aligned}$$

Considerar el campo gravitatorio  $\mathbf{F} = -GmM \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ . Verificar que  $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ . ¿Existe un campo  $\mathbf{G} \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$  tal que  $\mathbf{F} = \operatorname{rot} \mathbf{G}$ ?

Sugerencia: Ver Ejercicio 12.

**Ejercicio 17.** ¿Es cada uno de los siguientes campos vectoriales el rotor de algún otro campo vectorial? De ser así, hallar el campo vectorial.

- $\mathbf{F} = (x, y, z)$ .
- $\mathbf{F} = (x^2 + 1, x - 2xy, y)$ .

**Ejercicio 18.** Para cada  $R > 0$  sea  $S_R = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$  orientada con la normal que apunta hacia arriba, y sea el campo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xz - x \cos z, -yz + y \cos z, 4 - x^2 - y^2).$$

Determinar  $R$  de modo que el flujo del campo  $\mathbf{F}$  a través de  $S_R$  sea máximo.

**Ejercicio 19.** Usando el teorema de Gauss, probar las *Identidades de Green*:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} f \nabla g \cdot \mathbf{n} dS &= \int_{\Omega} (f \Delta g + \nabla f \cdot \nabla g) dx dy dz, \\ \int_{\partial\Omega} (f \nabla g - g \nabla f) \cdot \mathbf{n} dS &= \int_{\Omega} (f \Delta g - g \Delta f) dx dy dz. \end{aligned}$$

Aquí  $\mathbf{n}$  es la normal exterior al dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ,  $f, g$  son de clase  $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  y, para una función  $u \in C^2(\Omega)$ ,  $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ .

**Ejercicio 20.** Decimos que  $\lambda \in \mathbb{R}$  es un autovalor del operador  $\Delta$  definido en el Ejercicio 25 en  $\Omega$  si existe una función  $f \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  con  $f = 0$  en  $\partial\Omega$ ,  $f \not\equiv 0$  tal que  $\Delta f = \lambda f$  en  $\Omega$ . En ese caso decimos que  $f$  es una autofunción asociada a  $\lambda$ .

Utilizando las identidades de Green del Ejercicio 25, mostrar que si  $\lambda \neq \mu$  son autovalores de  $\Delta$  en  $\Omega$  y  $f$  y  $g$  son autofunciones asociadas a  $\lambda$  y  $\mu$  respectivamente se tiene

$$\iiint_{\Omega} f g dV = 0$$

**Ejercicio 21.** Sea  $B$  una bola en  $\mathbb{R}^3$ . Ver que no puede haber una función  $f \neq 0$ ,  $f \in C^2(B) \cap C^1(\overline{B})$  que satisfaga

$$\Delta f = 0 \quad \text{en } B, \quad f = 0 \quad \text{en } \partial B.$$

Sugerencia: Utilizar las identidades de Green del Ejercicio 25 para deducir que  $\nabla f = 0$  en  $B$ . A continuación utilizaremos el Ejercicio 9 para deducir que  $f$  es constante.