

Análisis II – Análisis matemático II – Matemática 3.

Segundo Cuatrimestre de 2025

Práctica 1 - Curvas, integral de longitud de arco e integrales curvilíneas.

Curvas:

Ejercicio 1. a). Probar que

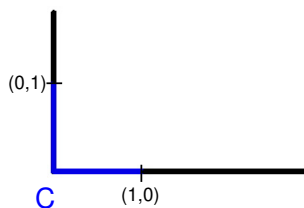
$$\begin{cases} x_1(t) = r \cos(2\pi t), \\ y_1(t) = r \sin(2\pi t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1, \quad \text{y} \quad \begin{cases} x_2(t) = r \cos(4\pi t), \\ y_2(t) = r \sin(4\pi t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1,$$

son dos parametrizaciones C^1 de la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio r .

b). Probar que la circunferencia es una curva cerrada, simple, suave.

c). Probar que $\sigma_2(t) = (x_2(t), y_2(t))$, $t \in [0, 1]$ no es una parametrización regular.

Ejercicio 2. Considerar la curva \mathcal{C} formada por los segmentos que unen el $(0, 1)$ con el $(0, 0)$ y el $(0, 0)$ con el $(1, 0)$.



Probar que

$$\sigma(t) := \begin{cases} (0, (1-t)^2), & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ ((t-1)^2, 0), & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

es una parametrización C^1 de la curva \mathcal{C} .

Observar que \mathcal{C} no tiene recta tangente en el $(0, 0)$. ¿Por qué no hay contradicción?

Ejercicio 3. Sea $\sigma(t) = (t^3, t^3)$ con $-1 \leq t \leq 1$.

Probar que σ es una parametrización C^1 del segmento $y = x$, $-1 \leq x \leq 1$ que es una curva suave.

Observar que $\sigma'(0) = (0, 0)$.

Ejercicio 4. Sea \mathcal{C} el arco de parábola $y = x^2$ con $0 \leq x \leq 1$.

a). Probar que \mathcal{C} es una curva abierta, simple, suave

b). Probar que $\bar{\sigma}(s) := (\bar{x}(s), \bar{y}(s))$ dada por

$$\begin{cases} \bar{x}(s) = e^s - 1 \\ \bar{y}(s) = (e^s - 1)^2 \end{cases} \quad 0 \leq s \leq \ln 2$$

es una parametrización regular de \mathcal{C} .

- c). Observar que $\sigma(t) := (t, t^2)$ con $t \in [0, 1]$ es otra parametrización regular.
 d). Hallar una función $g : [0, 1] \rightarrow [0, \ln 2]$ tal que $\bar{\sigma}(g(t)) = \sigma(t)$ para todo $t \in [0, 1]$.
 Observar que g es biyectiva y C^1 .

Repaso:

Definición 1. Una **curva** $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto de puntos en el espacio que puede describirse mediante un parámetro que varía de forma continua en un intervalo de la recta real. Más precisamente, \mathcal{C} es una curva si existen funciones continuas $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ definidas en algún intervalo $[a, b]$, tales que un punto $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{C}$ si y solo si existe $t \in [a, b]$ tal que:

$$(y_1, \dots, y_n) = (x_1(t), \dots, x_n(t)).$$

Llamemos $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ a la función

$$\sigma(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)).$$

Entonces, \mathcal{C} es la imagen de $[a, b]$ bajo σ , y a σ se le llama una **parametrización** de \mathcal{C} .

Definición 2. Una curva \mathcal{C} se dice **abierta y simple** si admite una parametrización inyectiva.

Una curva \mathcal{C} se dice **cerrada y simple** si existe una parametrización $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que:

- σ es inyectiva en $[a, b)$, es decir, $\sigma(t_1) \neq \sigma(t_2)$ para todo $t_1, t_2 \in [a, b)$ con $t_1 \neq t_2$.
- σ es continua en $[a, b]$.
- $\sigma(a) = \sigma(b)$, es decir, el punto inicial coincide con el punto final.
- La imagen de σ , definida como $\{\sigma(t) : t \in [a, b]\}$, es exactamente \mathcal{C} .

Geoméricamente, esto significa que la curva no se cruza a sí misma (excepto en el punto inicial y final, que coinciden), y su trayectoria forma un lazo cerrado.

Definición 3. Si \mathcal{C} es una curva cerrada, simple y suave, una parametrización $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ se dice **regular** si cumple:

- σ es inyectiva en $[a, b)$.
- La imagen de σ es \mathcal{C} .
- $\sigma \in C^1([a, b])$, es decir, σ es continuamente diferenciable en $[a, b]$.
- $\sigma(a) = \sigma(b)$.
- $\sigma'(a) = \sigma'(b)$.
- $\sigma'(t) \neq \mathbf{0}$ para todo $t \in [a, b]$.

Integral de longitud de arco

Ejercicio 5. Considere la curva definida por $\sigma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$. Calcular $\sigma'(t)$, la norma $\|\sigma'(t)\|$, y la longitud del arco entre los puntos $\sigma(0)$ y $\sigma(2\pi)$. Observe que σ describe la posición de un punto en el borde de un círculo de radio 1 que rueda sin deslizar. Esta curva es conocida como cicloide.

Ejercicio 6. En los siguientes casos, calcular la longitud de la curva, donde σ es una parametrización de la misma sobre el intervalo $[a, b]$, siendo:

- a) $\sigma(t) = (t, t^2)$, $a = 0$, $b = 1$.
 b) $\sigma(t) = (\sqrt{t}, t + 1, t)$, $a = 10$, $b = 20$.

Ejercicio 7. Sea C una curva simple, suave, y sea $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de C . Definimos la longitud del arco de curva entre los puntos $\sigma(a)$ y $\sigma(t)$ como

$$g(t) = \int_a^t \|\sigma'(\tau)\| d\tau, \quad t \in [a, b].$$

- (a) Demostrar que la función $g(t)$ es C^1 y calcular su derivada. Deducir que g es inversible y que su inversa es de clase C^1 .
 (b) Considerando $\ell = g(b)$, definir la nueva parametrización

$$\tilde{\sigma}(s) = \sigma(g^{-1}(s)), \quad s \in [0, \ell],$$

y demostrar que $\tilde{\sigma}$ es una parametrización regular de C .

- (c) Probar que la longitud del arco entre los puntos $\tilde{\sigma}(0)$ y $\tilde{\sigma}(s)$ es igual a s , para todo $s \in [0, \ell]$.

Esto justifica el uso de la notación ds para denotar el diferencial de la longitud de arco.

Ejercicio 8. Evaluar las integrales de longitud de arco $\int_C f(x, y, z) ds$, donde σ es una parametrización de C , en los casos siguientes:

- a). $f(x, y, z) = x + y + z$, $\sigma(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
 b). $f(x, y, z) = \cos z$, σ como en la parte 1.
 c). $f(x, y, z) = x \cos z$, $\sigma(t) = (t, t^2, 0)$, $t \in [0, 1]$.

Ejercicio 9. a). Mostrar que la integral de longitud de arco de $f(x, y)$ a lo largo de una curva dada en coordenadas polares por $r = r(\theta)$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ es

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta.$$

- b). Calcular la longitud de la curva $r = 1 + \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Ejercicio 10. Suponer que la semicircunferencia parametrizado por:

$$\sigma(\theta) = (0, a \sin \theta, a \cos \theta), \quad \theta \in [0, \pi],$$

con $a > 0$, está hecha de alambre con densidad uniforme de 2 gramos por unidad de longitud.

- a). ¿Cuál es la masa total del alambre?
 b). Si la temperatura ambiente es igual a $x + y - z$ en el punto (x, y, z) , calcular la temperatura promedio sobre el alambre.

Ejercicio 11. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continuamente diferenciable a trozos, el gráfico de f en $[a, b]$ es una curva que se puede parametrizar como $\sigma(t) = (t, f(t))$ para $t \in [a, b]$.

- a). Mostrar que la longitud del gráfico de f en $[a, b]$ es

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

- b). Hallar la longitud del gráfico de $y = \log x$ de $x = 1$ a $x = 2$.

Integrales curvilíneas

Ejercicio 12. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$. Evaluar la integral curvilínea de \mathbf{F} a lo largo de las curvas orientadas C dadas por las siguientes parametrizaciones:

- a). $\sigma(t) = (t, t, t)$, $0 \leq t \leq 1$.
 b). $\sigma(t) = (\sin t, 0, \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Ejercicio 13. Para las curvas orientadas C parametrizadas por las correspondientes funciones σ , evaluar las integrales siguientes:

- a). $\int_C x dy - y dx$, $\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
 b). $\int_C x dx + y dy$, $\sigma(t) = (\cos(\pi t), \sin(\pi t))$, $0 \leq t \leq 2$.

Ejercicio 14. Considerar la fuerza $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$. Calcular el trabajo realizado al mover una partícula a lo largo de la parábola $y = x^2$, $z = 0$, de $x = -1$ a $x = 2$.

Ejercicio 15. Sea \mathcal{C} una curva orientada suave parametrizada por σ .

a). Suponer que \mathbf{F} es perpendicular a $\sigma'(t)$ en $\sigma(t)$ para todo t . Mostrar que

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

b). Si \mathbf{F} es paralelo a $\sigma'(t)$ en $\sigma(t)$ para todo t , mostrar que

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}} \|\mathbf{F}\| ds.$$

(Aquí, por paralelo a $\sigma'(t)$ se entiende que $\mathbf{F}(\sigma(t)) = \lambda(t)\sigma'(t)$, donde $\lambda(t) > 0$.)

Ejercicio 16. ¿Cuál es el valor de la integral curvilínea de un campo gradiente sobre una curva cerrada \mathcal{C} ?

Ejercicio 17. Suponer que $\nabla f(x, y, z) = (2xyz e^{x^2}, z e^{x^2}, y e^{x^2})$. Si $f(0, 0, 0) = 5$, hallar $f(1, 1, 2)$.

Ejercicio 18. Considerar el campo de fuerza gravitacional (con $G = m = M = 1$) definido (para $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$) por:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{-1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}(x, y, z).$$

Mostrar que el trabajo realizado por la fuerza gravitacional conforme una partícula se mueve de (x_1, y_1, z_1) a (x_2, y_2, z_2) , a lo largo de cualquier trayectoria, depende solamente de los radios $R_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ y $R_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$.

Ejercicio 19. Considere la curva $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 1 - x^2, x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.

a) Obtenga una parametrización regular de \mathcal{C} que comience en $(0, 1, 0)$ y termine en $(1, 0, 0)$.

b) Calcule la integral $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ con \mathcal{C} orientada como en a), donde $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x, y, -z)$.

Ejercicio 20. Sean $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^1 , $\mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo C^1 y $\mathbf{F} = \nabla f + \mathbf{G}$. Sea \mathcal{C} una curva cerrada, simple, suave, orientada. Verificar que

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s}.$$

Ejercicio 21. Sea \mathcal{C} una curva suave, $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de \mathcal{C} . Sea $g : [\bar{a}, \bar{b}] \rightarrow [a, b]$ una biyección C^1 con $g'(\tau) \neq 0$ para todo $\tau \in [\bar{a}, \bar{b}]$. Sea $\bar{\sigma} : [\bar{a}, \bar{b}] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\bar{\sigma}(s) = \sigma(g(s))$. Llamamos a $\bar{\sigma}$ una **reparametrización** de σ .

a). Probar que $\bar{\sigma}$ es una parametrización regular de \mathcal{C} .

b). Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Ver que el cálculo de $\int_{\mathcal{C}} f d\mathbf{s}$ da el mismo resultado cuando la integral se evalúa utilizando la parametrización σ o la parametrización $\bar{\sigma}$.

c). Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ continua. Suponer que orientamos a \mathcal{C} con la orientación dada por σ . Ver que el cálculo de $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ utilizando la parametrización $\bar{\sigma}$ da el mismo resultado que cuando se utiliza σ , si $\bar{\sigma}$ preserva la orientación de \mathcal{C} . Ver que si no es así, los resultados difieren sólo en el signo.