Análisis II – Análisis matemático II – Matemática 3.

Curso de verano 2025

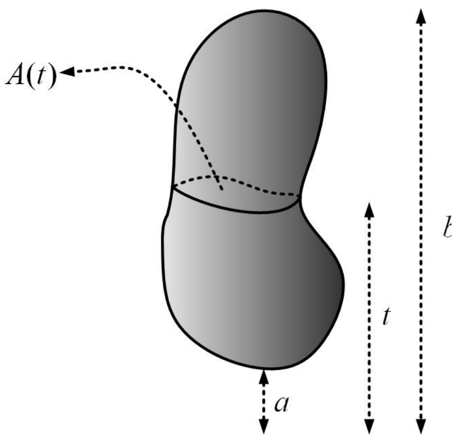
Práctica 0 - Repaso de integración y cambio de variables.

1. Principio de Cavalieri.

Ejercicio 1. Considerar un cuerpo que ocupa una región Ω en el espacio comprendida entre los planos $z = a$ y $z = \ell$. Deduzca que el volumen del cuerpo se puede calcular como

$$V = \int_a^\ell A(t)\,dt,$$

donde $A(t)$ es el área de la sección del cuerpo obtenido al intersecarlo con el plano $z = t$.



Ejercicio 2. Calcular el volumen de una región cilindríca. Verificar que la fórmula resultante coincide con la fórmula empírica *superficie de la base por altura.*

Ejercicio 3. Calcular el volumen de la región encerrada por el paraboloide de ecuación $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 2$.

2. Fubini.

Ejercicio 4. Enunciar el Teorema de Fubini.

Ejercicio 5. Sea R el rectángulo $R = [-1; 1] \times [0; 1]$. Evaluar las siguientes integrales dobles:

(a) $\iint_R x^2 y\,dA$,
(b) $\iint_R x\cos(xy)\,dA$,
(c) $\iint_R \frac{xy}{1+x^2}\,dA$,
(d) $\iint_R \frac{y^n}{(1-\frac{x^2}{4})^{-\frac{1}{2}}}\,dA$.

Ejercicio 6. Sea R el rectángulo arbitrario $[a; b] \times [c; d]$. Expresar mediante integrales simples la integral doble $\iint_R F(x, y)\,dA$ cuando $F(x, y)$ está dada por

(a) $F(x, y) = f(x)g(y)$.
(b) $F(x, y) = f(x) + g(y)$.

3. Descripción de Regiones.

Ejercicio 7. Sea T el triángulo de vértices $(0;0)$, $(2;3)$ y $(3;5)$. Describirlo como una región de tipo 1. Describirlo como una región de tipo 2. Hallar el área.

Ejercicio 8. Para cada una de las siguientes descripciones, graficar la región correspondiente y calcular el área respectiva.

(a) $-1 \leq x \leq 1 + y;\ -1 \leq y \leq 1,$

(b) $0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2};\ 0 \leq x \leq 1,$

Ejercicio 9. Sea $\mathcal{P}$ la pirámide cuyos vértices son $(0;0;0), (1;0;0), (0;1;0)$ y $(0;0;1)$. Describirla analíticamente. Hallar el volumen.

4. Aplicaciones de la integral.

Recuerdo: El valor medio de una función escalar $f(x)$ en una región $D \subseteq \mathbb{R}^n$ se define como:

$$M.V\,(f) = \frac{1}{\mathrm{Vol}(D)} \int_D f(x)\, dx,$$

si una región D tiene una densidad $\rho(x)$ que varía en el espacio, la masa M de la región se puede calcular integrando la densidad sobre D. Esto se expresa como:

$$M = \int_D \rho(x)\, dx.$$

Ejercicio 10. *Valor medio:* hallar el valor medio de la función $f(x,y) = x^2y$ en la región triangular de vértices $(1;1)$; $(2;0)$ y $(0;1)$.

Ejercicio 11. *Masa:* hallar la masa de la región esférica $x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2$ sabiendo que la densidad de masa es proporcional a la componente z, digamos $\varrho = \lambda z$.

5. Cambio de Variables.

Ejercicio 12. Enunciar el Teorema de Cambio de Variable.

Ejercicio 13. Sean $T(u,v) = T(x(u,v), y(u,v)) = (a_{11}u + a_{12}v, a_{21}u + a_{22}v)$ con $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Sea D^* el rectángulo $[0,3] \times [1,3]$.

(a) Hallar $D = T(D^*)$. ¿Es biyectiva T? Observar que D es un paralelogramo y hallar su área.

(b) Describir el área de D en términos de una integral sobre D^*. Indicar que función hay que integrar y que relación tiene con T.

Ejercicio 14. Sea D el paralelogramo de vértices $(1,2)$, $(5,3)$, $(2,5)$, $(6,6)$. Calcular

(a) $\int_D xy\, dxdy$

(b) $\int_D (x - y)\, dxdy$

Ejercicio 15. Sean $D^* = \{(r,\theta) : 0 \leq r \leq 1;\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ y P la transformación de coordenadas polares a cartesianas, es decir, $P(r,\theta) = (x(r,\theta), y(r,\theta)) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

(a) Demostrar que $P(D^*) = D$. ¿Es biyectiva P?

(b) ¿En qué transforma P el rectángulo $[r, r + \Delta r] \times [\theta, \theta + \Delta\theta]$?

(c) Calcular la matriz $DP(r,\theta)$. ¿En qué transforma la aplicación dada por esta matriz al rectángulo dado en b)? ¿Y en el caso $r = 0$?

Ejercicio 16. Sean $D_1 = \{(r,\theta) : 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 4\pi\}$ y P la transformación del ejercicio anterior.

(a) Hallar $D = P(D_1)$.

(b) Calcular $\int_D (x^2 + y^2)\, dxdy$ y $\int_{D_1} r^2 J\, drd\theta$ siendo J el jacobiano de la transformación polar.

¿Dan igual las dos integrales? ¿Por qué?

Ejercicio 17. Hallar el área acotada por la curva dada por la ecuación $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$. Esta curva se llama lemniscata.

Ejercicio 18. Sea B la región sobre el plano xy dentro del cilindro dado por $x^2 + y^2 \leq 1$ y debajo del cono dado por $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

(a) Describir B por ecuaciones.
(b) Calcular $\int_B z\, dx\, dy\, dz$

Ejercicio 19. Sea $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) \leq 1\}$.

(a) Dibujar E y hallar su volumen. ¿Qué es E?
(b) Calcular $\int_E [(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2)]\, dxdydz$.

Ejercicio 20. Sea R la región del primer cuadrante acotada por las hipérbolas $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{4}{x}$, y las rectas $y = \frac{x}{3}$, $y = 5x$. Calcular

$$\iint_R \left(x^2 - y^2\right) dA.$$

Ejercicio 21. Sea $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(x, y) = f(y, x)\, \forall x, y \in [0, 1]$. Probar que:

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f(x, y)\, dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^y f(x, y)\, dx \right) dy = \frac{1}{2} \int_{[0,1]^2} f(x, y)\, dx\, dy.$$