Análisis II – Análisis matemático II – Matemática 3.

Segundo Cuatrimestre de 2025

Práctica 3 - Teorema de Green.

Ejercicio 1. Verificar el Teorema de Green para el disco D con centro $(0,0)$ y radio R y las siguientes funciones:

a) $P(x,y) = xy^2, \quad Q(x,y) = -yx^2$.
b) $P(x,y) = 2y, \quad Q(x,y) = x$.

Ejercicio 2. Verificar el Teorema de Green y calcular

$$\int_{\mathcal{C}} y^2\, dx + x\, dy,$$

siendo $\mathcal{C}$ la curva recorrida en sentido positivo:

a) Cuadrado con vértices $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$, $(0,2)$.
b) Elipse dada por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
c) $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, donde $\mathcal{C}_1 : y = x,\ x \in [0,1]$ y $\mathcal{C}_2 : y = x^2,\ x \in [0,1]$.

Ejercicio 3. Usando el teorema de Green, hallar el área de:

a) El disco D con centro $(0,0)$ y radio R.
b) La región dentro de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Ejercicio 4. Sea D la región encerrada por el eje x y el arco de cicloide:

$$x = \theta - \sin\theta, \quad y = 1 - \cos\theta, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Usando el teorema de Green, calcular el área de D.

Ejercicio 5. Hallar el área entre las curvas dadas en coordenadas polares por

$$\begin{aligned} r &= 1 + \cos\theta && \text{con } -\pi \le \theta \le \pi, \\ r &= \sqrt{\cos^2\theta - \sin^2\theta} && \text{con } -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Ejercicio 6. Probar la fórmula de integración por partes: Si $D \subset \mathbb{R}^2$ es un dominio elemental, ∂D su frontera orientada en sentido antihorario y $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ la normal exterior a D, entonces

$$\int_D u\, v_x\, dx\, dy = -\int_D u_x\, v\, dx\, dy + \int_{\partial D} u\, v\, n_1\, ds,$$

para todo par de funciones $u,\ v \in C(\bar{D}) \cap C^1(D)$.

Ejercicio 7. Sea C la curva definida por la ecuación $x^2 + 3y^2 = 9$, con $x \ge 0$, recorrida en sentido horario. Calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, siendo

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\sin(x)y - \frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} - \cos(x) \right).$$

Ejercicio 8. Sea $\mathcal{C}$ la curva

$$\begin{aligned}
&x = 0, \quad 0 \leq y \leq 4,\\
&y = 4, \quad 0 \leq x \leq 4,\\
&y = x, \quad 0 \leq x \leq 1,\\
&y = 2 - x, \quad 1 \leq x \leq 2,\\
&y = x - 2, \quad 2 \leq x \leq 3,\\
&y = 4 - x, \quad 2 \leq x \leq 3,\\
&y = x, \quad 2 \leq x \leq 4,
\end{aligned}$$

orientada positivamente. Calcular

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{y}{(x-1)^2 + y^2}\, dx + \frac{1-x}{(x-1)^2 + y^2}\, dy.$$

Ejercicio 9. Sea $D = \{(x, y) \,:\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0\}$. Calcular

$$\int_{\partial D} x^2 y\, dx - x y^2\, dy.$$

Como siempre, ∂D se recorre en sentido directo (sentido contrario a las agujas del reloj).

Ejercicio 10. Calcular el trabajo efectuado por el campo de fuerzas $F(x, y) = (y + 3x, 2y - x)$ al mover una partícula rodeando una vez la elipse $4x^2 + y^2 = 4$ en el sentido de las agujas del reloj.

Ejercicio 11. Sea $\mathbf{F}(x, y) = \big(P(x, y), Q(x, y)\big) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}\right)$. Calcular

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

donde $\mathcal{C}$ es la circunferencia unitaria centrada en el origen orientada positivamente. Calcular $Q_x - P_y$. ¿Se satisface en este caso el Teorema de Green?

Ejercicio 12. Calcular

$$\int_{\mathcal{C}} f_1\, dx + f_2\, dy,$$

siendo

$$f_1(x, y) = \frac{x \sin\left(\frac{\pi}{2(x^2+y^2)}\right) - y(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f_2(x, y) = \frac{y \sin\left(\frac{\pi}{2(x^2+y^2)}\right) + x(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2},$$

y

$$\mathcal{C} = \begin{cases} y = x + 1, & \text{si } -1 \leq x \leq 0, \\ y = 1 - x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

recorrida desde $(-1, 0)$ hasta $(1, 0)$.

Ejercicio 13. Determinar todas las circunferencias $\mathcal{C}$ en el plano $\mathbb{R}^2$ sobre las cuales vale la siguiente igualdad

$$\int_{\mathcal{C}} -y^2\, dx + 3x\, dy = 6\pi.$$

Ejercicio 14. Calcular la integral
$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$
donde
$$\mathbf{F}(x,y) = (y^2 e^x + \cos x + (x-y)^2,\ 2ye^x + \operatorname{sen} y),$$
y $\mathcal{C}$ es la curva
$$x^2 + y^2 = 1, \quad y \geq 0,$$
orientada de manera que comience en $(1,0)$ y termine en $(-1,0)$.

Ejercicio 15. Sean u, $v \in C^1(D)$, donde
$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right\}.$$
Consideremos los campos definidos por
$$\mathbf{F}(x,y) = (u(x,y), v(x,y)), \quad \mathbf{G}(x,y) = (v_x - v_y,\ u_x - u_y).$$
Calcular
$$\iint\limits_D (\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})(x,y)\, dx\, dy,$$
sabiendo que sobre el borde de D se tiene $u(x,y) = x$ y $v(x,y) = 1$.

Ejercicio 16. Probar el teorema de la divergencia para el plano: Si $D \subseteq \mathbb{R}^2$ es un dominio elemental, ∂D su frontera orientada y $\mathbf{n}$ su normal exterior, entonces:
$$\int\int_D \mathrm{Div}(F) dxdy = \int_{\partial D} F \cdot \mathbf{n}\ dS,$$
para todo campo $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de clase C^1.