Análisis II – Análisis matemático II – Matemática 3.

Segundo Cuatrimestre de 2025

Práctica 2 - Integrales de superficie.

Ejercicio 1. Sea $\phi(r,\theta) : [0,1] \times [0,2\pi] \mapsto \mathbb{R}^3$ dada por

$$x = r\cos(\theta), \qquad y = r\,\mathrm{sen}(\theta), \qquad z = \theta,$$

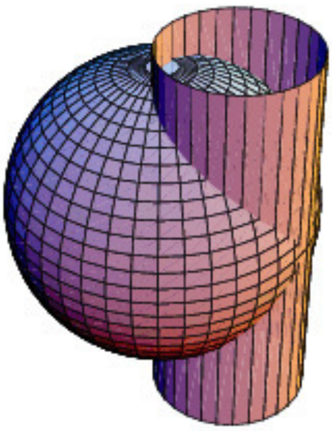
la parametrización de una superficie $\mathcal{S}$. Graficar $\mathcal{S}$, hallar un vector normal en cada punto y hallar su área.

Ejercicio 2. Sea $\phi(u,v) : D \mapsto \mathbb{R}^3$ (D el disco unitario centrado en el origen)

$$\phi(u,v) = (u-v, u+v, uv)$$

la parametrización de una superficie. Calcular su área.

Ejercicio 3. Calcular el área de la superficie $x^2+y^2+z^2 = R^2$ con $(x-R/2)^2 + y^2 \leq (R/2)^2$. Esta superficie se conoce como *bóveda de Viviani*.



Ejercicio 4. Sea la curva $z = f(x)$ $x \in [\alpha,\beta]$ con f y α positivos, girada alrededor del eje z. Mostrar que el área de la superficie barrida es

$$A = 2\pi \int_\alpha^\beta x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

Aplicar a la superficie dada en el ejercicio (2) item a) para calcular el área del paraboloide elíptico con $1 \leq z \leq 2$, y $a = b = 1$.

Ejercicio 5. Sea $\mathcal{C}$ la curva

$$\begin{cases} x = \cos^3\theta \\ y = \mathrm{sen}^3\theta \end{cases}$$

con $0 \leq \theta \leq 2\pi$ en el plano xy. Sea S la superficie que se obtiene al girar la curva $\mathcal{C}$ alrededor del eje x

a). Hallar una parametrización de S.
b). Hallar el área de S.

Ejercicio 6. Calcular $\int_S xy\,dS$ donde S es el borde del tetraedro con lados $z=0$, $y=0$, $x+z=1$ y $x=y$.

Ejercicio 7. Calcular $\int_S (x+y+z)dS$ donde S es el borde de la bola unitaria, es decir

$$S = \{(x,y,z)/x^2+y^2+z^2 = 1\}$$

Ejercicio 8. Hallar la masa de una superficie esférica de radio r tal que en cada punto $(x, y, z) \in S$ la densidad de masa es igual a la distancia entre (x, y, z) y el punto $(0, 0, r)$.

Definición .1. *Decimos que una superficie $\mathcal{S}$ es orientable si hay una forma de elegir en cada punto P de $\mathcal{S}$ un único versor normal $\nu(P)$ de modo que la función vectorial que esta elección define sobre $\mathcal{S}$ resulte continua.*

Por ejemplo, si $\mathcal{S}$ es un gráfico, $\mathcal{S}: \quad z = f(x, y)$, se puede elegir en todos los puntos un versor normal que apunte hacia arriba (es decir, con componente z positiva). Esta elección es continua en $\mathcal{S}$.

Si $\mathcal{S}$ es el borde de una región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ de tipos I, II o III, se puede elegir como $\nu(P)$ la normal que apunta hacia afuera de Ω.

Proposición .1. *Sea $\mathcal{S}$ una superficie suave y $T : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de $\mathcal{S}$. Para cada $P \in \mathcal{S}$, sea*

$$\nu(P) = \frac{T_u(u, v) \times T_v(u, v)}{\|T_u(u, v) \times T_v(u, v)\|}, \quad \text{donde } (u, v) \text{ es tal que } P = T(u, v).$$

Entonces, esta elección de versor normal orienta la superficie $\mathcal{S}$. En este caso, decimos que $\mathcal{S}$ está orientada por la parametrización T.

Definición .2. *Sea $\mathcal{S}$ una superficie orientada por el versor normal $\nu(P)$. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial continuo sobre $\mathcal{S}$. Llamamos flujo de $\mathbf{F}$ a través de $\mathcal{S}$ a la integral*

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \; := \int_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \nu \, dS.$$

Proposición .2. *Sea $\mathcal{S}$ una superficie suave orientada por la parametrización regular $T : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Sea $T_1 : D_1 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una reparametrización de T que preserva la orientación. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial continuo sobre $\mathcal{S}$. Entonces, el cálculo de $\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{S}$ da el mismo resultado cuando se utiliza la parametrización T o la parametrización T_1. Si T_1 invierte la orientación, los cálculos difieren sólo en el signo.*

Ejercicio 9. Probar la Proposición .2.

Ejercicio 10. Evaluar el flujo saliente del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ a través de la superficie del cubo $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

Ejercicio 11. Si la temperatura en un punto de $\mathbb{R}^3$ está dada por la función $T(x, y, z) = 3x^2 + 3z^2$, calcular el flujo de calor (es decir el flujo del campo $-\nabla T$) a traves de la superficie $x^2 + z^2 = 2$, $0 \leq y \leq 2$, orientada de forma que la normal en el punto $(0, 0, \sqrt{2})$ sea (0,0,1).

Ejercicio 12. Sea S la superficie de la esfera unitaria orientada según la normal exterior. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial y F_r su componente radial. Probar que

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F_r \operatorname{sen}(\phi) \, d\phi \, d\theta$$

Ejercicio 13. Sea S la parte del cono $z^2 = x^2 + y^2$ con z entre 1 y 2 orientada con la normal apuntando hacia el exterior del cono. Calcular $\int_S \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{S}$ con $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$.

Ejercicio 14. Sean S una superficie orientada y C una curva cerrada simple que es el borde de S con alguna de sus dos posibles orientaciones. Verificar que si $\mathbf{F}$ es un campo gradiente ($\mathbf{F} = \nabla f$) entonces

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\,\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{s}$$

Ejercicio 15. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, x^2, yx^2)$ que representa el campo de velocidad de un fluido (velocidad medida en metros por segundo). Calcular cuántos metros cúbicos de fluido por segundo cruzan el plano xy a través del cuadrado $0 \leq x \leq 1, \; 0 \leq y \leq 1$.