Bài tập 01

Họ và tên: Mai Duy Nam

MSSV: 19120298

Lớp: 19TN

Bài 1: Giải bằng phương pháp Gauss và thế ngược

Câu a

Đề bài:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 4 \\ -3x_1 + 8x_2 &= -1 \\ 4x_1 + 9x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Ta có ma trận $\bar{A}$ như sau:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 & 4 \\ -3 & -8 & 0 & -1 \\ 4 & 9 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Áp dụng biến đổi Gauss ta thu được ma trận bậc thang của $\bar{A}$ như sau:

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 & 4 \\ -3 & -8 & 0 & -1 \\ 4 & 9 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{3}{2}L_1} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -2 & -8 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

Với ma trận vừa tìm được, ta thu được hệ phương trình tuyến tính tương ứng và giải bằng cách thế ngược:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 7x_3 &= 7 \end{aligned} \implies \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}(4 - 6x_2 - 2x_3) = -5 \\ x_2 &= 5 - 3x_3 = 2 \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Câu b

Đề bài:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 1x_3 &= 1 \\ x_2 + 3x_3 &= 5 \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Do ma trận

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

đã ở dạng bậc thang cho nên ta không cần áp dụng biến đổi Gauss. Ta giải hệ phương trình trực tiếp bằng phương pháp thế ngược:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 + 3x_3 &= 5 \\ x_3 &= 1 \end{aligned} \implies \begin{aligned} x_1 &= 1 - 3x_2 - x_3 = -6 \\ x_2 &= 5 - 3x_3 = 2 \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Câu c

Đề bài:

$$\begin{aligned} 2x_1 &= 4 \\ -3x_1 + x_2 &= -1 \\ 4x_1 - 8x_2 + 7x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Ta có ma trận $\bar{A}$ như sau:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & -8 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Biến đổi Gauss để đưa $\bar{A}$ về dạng bậc thang:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & -8 & 7 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -8 & 7 & -8 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 8L_2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 32 \end{bmatrix}$$

Ta thu được nghiệm:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= 5 \\ x_3 &= \frac{32}{7} \end{aligned}$$

Bài 2: Giải bằng phương pháp Gauss-Jordan

Các bước giải bằng phương pháp Gauss-Jordan:

1. Sử dụng phương pháp Gauss để thu được ma trận bậc thang
2. Nhân các dòng khác không với hệ số thích hợp sao cho các phần tử dẫn đầu bằng 1.
3. Bắt đầu từ dòng khác không cuối cùng, thực hiện các phép biến đổi cơ sở sao cho các hệ số ở trên các phần tử dẫn đầu bằng 0.

Câu a

Từ bài 1a, ta thu được dạng bậc thang:

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

Nhân dòng 1 cho $\frac{1}{2}$ và nhân dòng 2 cho $\frac{1}{7}$, ta được:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Biến đổi sao cho các hệ số phía trên các phần tử dẫn đầu bằng 0:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 - L_3]{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Vậy nghiệm thu được là $x_1 = -5, x_2 = 2, x_3 = 1$

Câu b

Từ bài 1b, ta thu được ma trận bậc thang:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Các hệ số dẫn đầu đều đã bằng một. Ta tiến hành biến đổi để đưa các hệ số nằm trên các phần tử dẫn đầu về 0:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 - L_3]{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Vậy nghiệm thu được là $x_1 = -6, x_2 = 2, x_3 = 1$

Câu c

Từ bài 1c, ta thu được ma trận bậc thang:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 32 \end{bmatrix}$$

Nhân dòng 1 với $\frac{1}{2}$, dòng 3 với $\frac{1}{7}$ ta được:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{32}{7} \end{bmatrix}$$

Các hệ số dẫn đầu đều bằng 1 và các hệ số phía trên hệ số dẫn đầu đã bằng 0, do đó ta thu được nghiệm là $x_1 = 4, x_2 = 5, x_3 = \frac{32}{7}$

Bài 3: Viết phương pháp Gauss-Jordan bằng mã giả

```
procedure gauss_jordan(A) returns a reduced echelon matrix
    input A: an MxN matrix
    let:  A[i] be the ith row of A
          A[, j] be the jth column of A
          A[i, j] be the element at the ith row and jth row of A
          A[i:j] be the submatrix of A whose rows are A[i] to A[j]
          lead(A[i]) be the leading entry of the ith row
          index_of_lead(A[i]) be the index of ith-row's leading entry

    /* Performs Gauss elimination */
    t = 1 // Upper limit of the submatrix
    while t <= M do
        j = leftmost column of A[t:M] that does not contain all zeros
        if index_of_lead(A[t]) != j then
            swap A[t] with one of the rows whose leading entry's index is j
        for i = t+1 to M do
          A[i] = A[i] + (-lead(A[i]) / lead(A[t])) * A[t]
        t += 1

    /* Makes the leading entries become 1 */
    for i = 1 to M do
        if lead(A[i]) != 0 then
            A[i] = A[i] * (1 / lead(A[i]))

    /* Works upward from the last nonzero row */
    b = last nonzero row
    while b > 0
        j = index_of_lead(A[b])
        for i = b - 1 downto 1 do
            A[i] = A[i] + (-A[i, j] / lead(A[b])) * A[b]
        b -= 1
```

```
return A
```