Bài tập 3

Họ và tên: Mai Duy Nam

MSSV: 19120298

Lớp: 19TN

Câu a

$$T(n) = 2T(n/3) + n \lg n$$

Ta có $a = 2, b = 3, f(n) = n \lg n$. Ở đây để tìm độ phức tạp cho $T(n)$, ta áp dụng trường hợp 3 của định lý Master. Ta có $f(n) = n \lg n = \Omega(n^1) = \Omega(n^{\log_3 2+\epsilon})$ với $\epsilon \approx 0.37 > 0$.

Ta cần chứng minh $f(n)$ thỏa regularity condition.

$$\begin{aligned} af(n/b) &\leq cf(n) \\ 2\frac{n}{3} \lg \frac{n}{3} &\leq cn \lg n \\ \frac{2}{3} n(\lg n - \lg 3) &\leq cn \lg n \\ \frac{2}{3} n \lg n - \frac{2 \lg 3}{3} n &\leq cn \lg n \end{aligned}$$

Bất phương trình trên thỏa với $c = \frac{2}{3} < 1$ và với mọi $n \geq 1$.

Vậy $f(n)$ thỏa cả hai điều kiện của trường hợp 3 định lý Master, do đó $T(n) = \Omega(f(n)) = \Omega(n \lg n)$.

Câu b

$$T(n) = 3T(n/5) + \lg^2 n$$

Ta có $a = 3, b = 5$ và $f(n) = \lg^2 n$. Ta áp dụng trường hợp 1 của định lý Master bằng cách chứng minh $\lg^2 n = O(n^{1/2})$ như sau:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\lg^2 n}{n^{1/2}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2\lg n \frac{1}{n\ln 2}}{\frac{1}{2}n^{-1/2}} \\
&= \frac{4}{\ln 2} \lim_{n\to\infty} \frac{\lg n}{n^{1/2}} \\
&= \frac{4}{\ln 2} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n\ln 2}}{\frac{1}{2}n^{-1/2}} \\
&= \frac{8}{(\ln 2)^2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/2}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Do đó $\lg^2 n = o(n^{1/2}) = O(n^{1/2}) = O(n^{\log_5 3-\epsilon})$ với $\epsilon \approx 0.18 > 0$. Vậy trường hợp 1 của định lý Master thỏa, dẫn đến $T(n) = \Omega(n^{\log_5 3})$.

Câu c

$$T(n) = T(n/2) + 2^n$$

Ta có $a = 1$, $b = 2$, $f(n) = 2^n$. Ta áp dụng trường hợp 3 của định lý Master cho bài này. Đầu tiên ta có $f(n) = \Omega(n^{\log_2 1+\epsilon}) = \Omega(n^\epsilon)$ với $\epsilon > 0$ bất kỳ.

Ta có:

$$\begin{aligned}
af(n/b) &\leq cf(n) \\
2^{n/2} &\leq c2^n \\
2^{-n/2} &\leq c \\
\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n &\leq c
\end{aligned}$$

Ta lấy $c = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, phương trình trên thỏa với mọi $n \geq 1$.

Vậy $f(n)$ thỏa cả hai điều kiện của trường hợp 3 định lý Master, do đó $T(n) = \Theta(2^n)$.

Câu d

$$T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\lg\lg n)$$

Đặt $m = \lg n$, khi đó ta được $T(2^m) = T(2^{m/2}) + \Theta(\lg m)$.

Gọi $S(m) = T(2^m)$, ta được:

$$S(m) = S(m/2) + \Theta(\lg m)$$

Vì $f(m) = \Theta(\lg m) = \Theta(n^{\log_2 1} \lg^k m)$ với $k = 1$, do đó áp dụng trường hợp 2 của định lý Master, ta được:

$$\begin{gathered} S(m) = \Theta(n^{\log_2 1} \lg^{k+1} m) = \Theta(\lg^2 m) \\ \Leftrightarrow T(2^m) = \Theta(\lg^2 m) \\ \Leftrightarrow T(n) = \Theta(\lg^2 (\lg n)) \end{gathered}$$

Câu e

$$T(n) = 10T(n/3) + 17n^{1.2}$$

Ta có $a = 10$, $b = 3$, $f(n) = O(n^{\log_3 10 - \epsilon})$ với $\epsilon \approx 0.90 > 0$. Áp dụng trường hợp 1 định lý Master ta được $T(n) = \Omega(n^{\log_3 10})$.

Câu f

$$T(n) = 7T(n/2) + n^3$$

Ta có $a = 7$, $b = 2$, $f(n) = \Omega(n^{\log_7 2 + \epsilon})$ với $\epsilon = 0.19 > 0$.

Ta có:

$$\begin{gathered} af(n/b) \leq cf(n) \\ \frac{7}{8}n^3 \leq cn^3 \end{gathered}$$

Bất đẳng thức trên đúng với $c = \frac{7}{8} < 1$ và với mọi n. Do đó, áp dụng trường hợp 3 định lý Master, ta được $T(n) = \Omega(n^3)$.

Câu h

$$T(n) = T(n-2) + \lg n$$

Xét trường hợp n chẵn, đặt $n = 2k$:

$$
\begin{aligned}
T(2k) &= T(2k-2) + \lg 2k \\
&= T(2k-4) + \lg(2k-2) + \lg 2k \\
&= T(2k-6) + \lg(2k-4) + \lg(2k-2) + \lg 2k \\
&= \dots \\
&= T(0) + \lg(2k-(2k-2)) + \lg(n-(2k-4)) + \dots + \lg 2k \\
&= T(0) + \lg 2 + \lg 4 + \dots + \lg 2k \\
&= T(0) + \sum_{i=1}^{k} \lg 2i
\end{aligned}
$$

Xét trường hợp n lẻ, đặt $n = 2k+1$

$$
\begin{aligned}
T(2k+1) &= T(2k-1) + \lg(2k+1) \\
&= T(2k-3) + \lg(2k-1) + \lg(2k+1) \\
&= \dots \\
&= T(1) + \lg 3 + \dots + \lg(2k+1) \\
&= T(1) + \sum_{i=1}^{k} \lg(2i+1)
\end{aligned}
$$

Vậy tóm lại, ta có:

$$
T(n) = \begin{cases} T(0) + \sum_{i=1}^{k} \lg 2i & \text{, với } n \text{ chẵn} \\ T(1) + \sum_{i=1}^{k} \lg(2i+1) & \text{, với } n \text{ lẻ} \end{cases}
$$

Ta chứng minh $f(n) = \sum_{i=1}^{k} \lg 2i = \Theta(n \lg n)$ như sau. Ta có:

$$
\begin{aligned}
& \lg 2i \le \lg 2k, \forall k > 0, \forall i \le k \\
\Leftrightarrow & \sum_{i=1}^{k} \lg 2i \le \sum_{i=1}^{k} \lg 2k = k \lg 2k = \frac{n}{2} \lg n, \forall n > 0 \\
\Leftrightarrow & \sum_{i=1}^{k} \lg 2i = O(n \lg n)
\end{aligned}
$$

Ta có:

$$\sum_{i=1}^{k} \lg 2i \geq \sum_{i=k/2}^{k} \lg 2i \geq \sum_{i=k/2}^{k} \lg 2\frac{k}{2} = \frac{k}{2} \lg k = \frac{n}{4} \lg \frac{n}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} \lg 2i = \Omega(n \lg n)$$

Vì $f(n) = O(n \lg n)$ và $f(n) = \Omega(n \lg n)$ nên $f(n) = \Theta(n \lg n)$. Chứng minh tương tự với $g(n) = \sum_{i=1}^{k} \lg{(2i+1)}$, ta cũng được $g(n) = \Theta(n \lg n)$

Vì $T(0) = T(1) = C$, do đó

$$T(n) = C + \Theta(n \lg n) = \Theta(n \lg n)$$

Câu j

$$T(n) = \sqrt{n}T(\sqrt{n}) + 100n$$

Chia cả hai vế cho n ta được $T(n)/n = T(\sqrt{n})/\sqrt{n} + 100$. Đặt $S(n) = T(n)/n$, khi đó:

$$S(n) = S(\sqrt{n}) + 100$$

Tương tự như câu d, đặt $m = \lg n$, thay vào $S(n)$ ta được $S(2^m) = S(2^{m/2}) + 100$. Đặt $P(m) = S(2^m)$:

$$P(m) = P(m/2) + 100$$

Ta có $a = 1, b = 2$. Vì $100 = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(1)$, áp dụng trường hợp 2 của định lý Master:

$$\begin{aligned} P(m) &= \Theta(\lg m) \\ \Leftrightarrow S(2^m) &= \Theta(\lg m) \\ \Leftrightarrow T(n)/n &= \Theta(\lg \lg n) \\ \Leftrightarrow T(n) &= \Theta(n \lg \lg n) \end{aligned}$$