Bài tập 2

Thông tin sinh viên

- Họ và tên: Mai Duy Nam
- MSSV: 19120298
- Lớp: 19TN

Bài 1

```
s <- 0, i <- 0
while i < n do
  j <- i
  while j <= n - i do
    s <- s + i * j
    j <- j + 1
  end
  i <- i + 1
end
```

Gọi $g(n)$ và $s(n)$ lần lượt là số phép gán và số phép so sánh của giải thuật với input n.

Tính số phép gán

Xét trường hợp $n = 0$, ta có $g(n) = 2$ vì vòng lặp `while` ngoài cùng không được thực thi, nên chỉ có 2 phép gán là `s <- 0` và `i <- 0`.

Xét trường hợp $n \geq 1$, ta có công thức cho $g(n)$ như sau:

$$g(n) = 2 + \sum_{i=0}^{n-1}(2 + g_i(n))$$

với $g_i(n)$ là số phép gán được thực hiện ở vòng lặp `while` phía trong. Số 2 ở phía bên ngoài tổng sigma tương ứng với hai phép gán của `s` và `i`. Số 2 ở phía bên trong tổng sigma tương ứng với hai phép gán của `j` và `i`.

$g_i(n)$ được tính bằng công thức sau:

$$g_i(n) = \begin{cases} \sum_{j=i}^{n-i} 2 = 2n + 2 - 4i & \text{nếu } i \le \lfloor n/2 \rfloor \\ 0 & \text{ngược lại} \end{cases}$$

Đặt $m = \lfloor n/2 \rfloor$, khai triển biểu thức của $g(n)$ ta được:

$$\begin{aligned} g(n) &= 2 + \sum_{i=0}^{n-1} (2 + g_i(n)) \\ &= 2 + \sum_{i=0}^{n-1} 2 + \sum_{i=0}^{n-1} g_i(n) \\ &= 2 + 2n + \sum_{i=0}^{m} (2n + 2 - 4i) \\ &= 2 + 2n + \sum_{i=0}^{m} (2n + 2) - 4 \sum_{i=0}^{m} i \\ &= 2 + 2n + (2n + 2)(m + 1) - 2m(m + 1) \\ &= 2m^2 - 2nm + 4n + 4 \end{aligned}$$

Với n chẵn, ta có $m = \frac{n}{2}$, thay vào $g(n)$ ta được:

$$g(n) = \frac{1}{2} n^2 + 4n + 4$$

Với n lẻ, ta có $m = \frac{n-1}{2}$, thay vào $g(n)$ ta được:

$$g(n) = \frac{1}{2} n^2 + 4n + \frac{7}{2}$$

Vậy tóm lại:

$$g(n) = \begin{cases} 2 & \text{với } n = 0 \\ \frac{1}{2} n^2 + 4n + 4 & \text{với } n \text{ chẵn} \\ \frac{1}{2} n^2 + 4n + \frac{7}{2} & \text{với } n \text{ lẻ} \end{cases}$$

Tính số phép so sánh

Xét trường hợp $n = 0$, ta có $s(n) = 1$ do điều kiện của vòng lặp `while` phía ngoài chỉ được kiểm tra duy nhất một lần.

Xét trường hợp $n \geq 1$, ta có:

$$s(n) = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} (1 + s_i(n))$$

với $s_i(n)$ là số phép so sánh thực hiện ở vòng lặp `while` phía trong. Số 1 trong $1 + s_i(n)$ đếm số lần phép so sánh `i < n` được thực hiện. Số 1 ở bên ngoài tổng tương ứng với khi `i == n` (khi vòng lặp dừng).

Công thức của $s_i(n)$ như sau:

$$s_i(n) = \begin{cases} 1 + \sum_{j=i}^{n-i} 1 = n + 2 - 2i & \text{nếu } i \leq \lfloor n/2 \rfloor \\ 1 & \text{ngược lại} \end{cases}$$

Đặt $m = \lfloor n/2 \rfloor$, khai triển biểu thức của $s(n)$ ta được:

$$\begin{aligned} s(n) &= 1 + \sum_{i=0}^{n-1} (1 + s_i(n)) \\ &= 1 + \sum_{i=0}^{m} (1 + n + 2 - 2i) + \sum_{i=m+1}^{n-1} (1 + 1) \\ &= 1 + \sum_{i=0}^{m} (n + 3) - 2 \sum_{i=0}^{m} i + 2(n - m - 1) \\ &= 2n - 2m - 1 + (n + 3)(m + 1) - m(m + 1) \\ &= -m^2 + nm + 3n + 2 \end{aligned}$$

Với n chẵn, ta có $m = \frac{n}{2}$, thay vào $s(n)$ ta được:

$$s(n) = \frac{1}{4} n^2 + 3n + 2$$

Với n lẻ, ta có $m = \frac{n-1}{2}$, thay vào $s(n)$ ta được:

$$s(n) = \frac{1}{4} n^2 + 3n + \frac{7}{4}$$

Vậy tóm lại:

$$s(n) = \begin{cases} 1 & \text{với } n = 0 \\ \frac{1}{4}n^2 + 3n + 2 & \text{với } n \text{ chẵn} \\ \frac{1}{4}n^2 + 3n + \frac{7}{4} & \text{với } n \text{ lẻ} \end{cases}$$

Bài 2

```
s <- 1, i <- 1
while i < n do
  j <- 1
  while j <= i do
    s <- s + i*j
    j <- j + 1
  end
  i <- 2*i
end
```

Gọi $g(n)$ và $s(n)$ lần lượt là số phép gán và số phép so sánh của giải thuật với input n.

Tính số phép gán

Xét trường hợp $n = 0$ hay $n = 1$, ta có $g(n) = 2$.

Xét trường hợp $n \geq 2$, ta nhận thấy vòng lặp `while` ở phía ngoài sẽ được thực hiện với các giá trị của i lần lượt là $1, 2, 4, 8, \ldots, 2^k \leq n - 1$. Lấy logarit cơ số 2 cho hai vế, khi đó vòng lặp được thực hiện với các giá trị của k lần lượt là $0, 1, 2, 3, \ldots, \lfloor \log_2(n-1) \rfloor$.

Đặt $L = \lfloor \log_2(n-1) \rfloor$, ta có:

$$g(n) = 2 + \sum_{k=0}^{L} (2 + g_i(n))$$

với $g_i(n)$ là số thao tác gán được thực hiện ở vòng lặp `while` phía trong. Công thức của $g_i(n)$ là:

$$g_i(n) = \sum_{j=1}^{i} 2 = 2i = 2^{k+1}$$

Thay vào $g(n)$ ta được:

$$
\begin{aligned}
g(n) &= 2 + \sum_{k=0}^{L} (2 + g_i(n)) \\
&= 2 + \sum_{k=0}^{L} 2 + \sum_{k=0}^{L} 2^{k+1} \\
&= 2 + 2(L+1) + 2 \cdot \frac{1 - 2^{L+1}}{1 - 2} \\
&= 4 \cdot 2^L + 2L + 2
\end{aligned}
$$

Vậy tóm lại:

$$
g(n) = \begin{cases} 2 & \text{với } n = 0 \vee n = 1 \\ 4 \cdot 2^L + 2L + 2 & \text{với } n \geq 2 \end{cases}
$$

Tính số phép so sánh

Xét trường hợp $n = 0 \vee n = 1$, ta có $s(n) = 1$.

Xét trường hợp $n \geq 2$, tương tự như với $g(n)$, vòng lặp `while` phía ngoài được thực thi lần lượt với các giá trị $i = 2^k$, với $k = 0, 1, 2, \ldots, \lfloor \log_2(n-1) \rfloor$. Khi đó:

$$
s(n) = 1 + \sum_{k=0}^{L} (1 + s_i(n))
$$

với $s_i(n)$ là số phép gán được thực hiện ở vòng lặp `while` phía trong.

Công thức cho $s_i(n)$ như sau:

$$
s_i(n) = 1 + \sum_{j=1}^{i} 1 = 1 + i = 1 + 2^k
$$

Thay vào $s(n)$ ta được:

$$
\begin{aligned}
s(n) &= 1 + \sum_{k=0}^{L} (1 + s_i(n)) \\
&= 1 + \sum_{k=0}^{L} (1 + 1 + 2^k) \\
&= 1 + 2(L+1) + \frac{1 - 2^{L+1}}{1 - 2} \\
&= 2 \cdot 2^L + 2L + 2
\end{aligned}
$$

Vậy tóm lại:

$$
s(n) = \begin{cases} 1 & \text{với } n = 0 \lor n = 1 \\ 2 \cdot 2^L + 2L + 2 & \text{với } n \geq 2 \end{cases}
$$