

# Bài tập 1

Họ và tên: Mai Duy Nam

MSSV: 19120298

Lớp: 19TN

## Bài 1.1

(a)  $f(n) = O(f(n)^2)$

Đáp án: Sometimes true

- Trường hợp làm mệnh đề đúng:  $f(n) = n$
- Trường hợp làm mệnh đề sai:  $f(n) = \frac{1}{n}$

(b)  $f(n) + g(n) = \Theta(\max(f(n), g(n)))$

Đáp án: Always true

Ta có:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n) + g(n)}{\max(f(n), g(n))} &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{\min(f(n), g(n))}{\max(f(n), g(n))} \\ &= 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\min(f(n), g(n))}{\max(f(n), g(n))} \\ &= 1 + C\end{aligned}$$

với  $C < \infty$ , do  $\min(f(n), g(n)) \leq \max(f(n), g(n))$ . Theo đó,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n) + g(n)}{\max(f(n), g(n))} \neq \infty \Rightarrow f(n) + g(n) = \Theta(\max(f(n), g(n)))$$

(c)  $f(n) + O(f(n)) = \Theta(f(n))$

Đáp án: Always true

Với mọi  $g(n) = O(f(n))$ , tồn tại một số dương  $M$  và  $n_0$  sao cho  $g(n) \leq Mf(n)$ ,  $\forall n \geq n_0$ . Điều đó dẫn đến:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} \leq M$$

Áp dụng điều trên vào giới hạn sau ta được:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n) + O(f(n))}{f(n)} &= 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{O(f(n))}{f(n)} \leq 1 + M \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n) + O(f(n))}{f(n)} &\neq \infty \\ \Rightarrow f(n) + O(f(n)) &= \Theta(f(n)) \end{aligned}$$

(d)  $f(n) = \Omega(g(n))$  và  $f(n) = o(g(n))$

Đáp án: Never true

Giả sử mệnh đề trên đúng. Theo đó, vì  $f(n) = \Omega(g(n))$ :

$$\exists M > 0, \exists n_1, \forall n > n_1, |f(n)| \geq Mg(n) \quad (1)$$

Vì  $f(n) = o(g(n))$ :

$$\forall K > 0, \exists n_2, \forall n > n_2, |f(n)| < Kg(n) \quad (2)$$

Vậy với mỗi cặp  $M$  và  $n_1$  thỏa phương trình (1), xét  $K = M$ , ta được:

$$\begin{cases} \forall n > n_1, |f(n)| \leq Mg(n) \\ \exists n_2, \forall n > n_2, |f(n)| < Mg(n) \end{cases}$$

Đặt  $n^* = \max(n_1, n_2)$ , khi đó:

$$\forall n > n^*, |f(n)| \geq Mg(n) \wedge |f(n)| < Mg(n)$$

Đây là điều vô lý. Ta không thể tìm được hàm  $f(n)$  sao cho  $|f(n)|$  vừa lớn hơn hoặc bằng  $Mg(n)$  vừa bé hơn  $Mg(n)$ .

(e)  $f(n) \neq O(g(n))$  và  $g(n) \neq O(f(n))$

Đáp án: Sometimes true

- Trường hợp làm mệnh đề đúng:  $f(n) = \sin n$ ,  $g(n) = \tan n$ .

- Trường hợp làm mệnh đề sai:  $f(n) = g(n) = n$