10. Örnek

g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = (x-2)^2 + 1$ şeklinde tanımlı g fonksiyonu veriliyor.

Buna göre

a) g fonksiyonunun bire birliğini inceleyiniz.

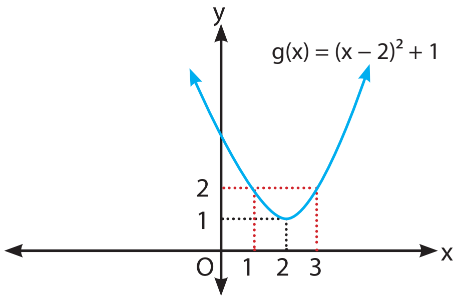
b) g fonksiyonunun örtenliğini inceleyiniz.

c) g fonksiyonunun tek ya da çift fonksiyon olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm

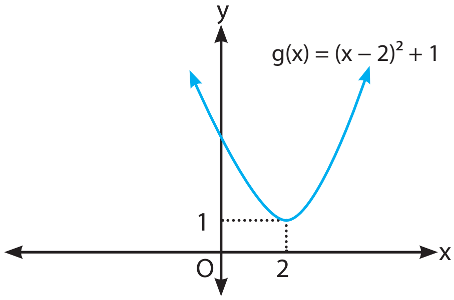
Grafik Yaklaşımı

a) g fonksiyonunun grafiği $f(x) = x^2$ karesel referans fonksiyonu yardımıyla çizilirse aşağıdaki grafik elde edilir.



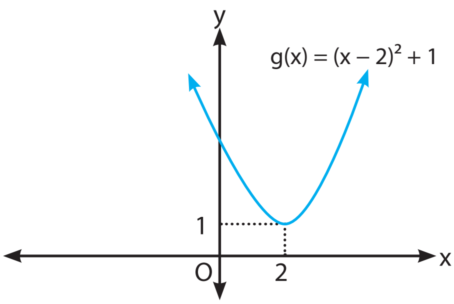
g fonksiyonunun değer aralığındaki bazı f(x) değerlerine karşılık gelen farklı x değerleri olduğundan f bire bir değildir. Örneğin $g(1) = g(3) = 2$ iken $1 \neq 3$ olduğundan bire bir değildir.

b)



Değer kümesindeki her g(x) değeri tanım aralığındaki en az bir x değerine karşılık gelmediğinden g fonksiyonu örten değildir. Örneğin $g(a) = -2$ olacak şekilde $a \in \mathbb{R}$ yoktur.

c)



g fonksiyonunun grafiği y eksenine göre simetrik olmadığı için g çift fonksiyon değildir. g fonksiyonunun grafiği orijine göre simetrik olmadığı için g tek fonksiyon değildir.

Cebirsel Yaklaşım

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için $g(x_1) = g(x_2)$ olsun.

$$(x_1 - 2)^2 + 1 = (x_2 - 2)^2 + 1$$
$$(x_1 - 2)^2 = (x_1 - 2)^2$$
$$|x_1 - 2| = |x_2 - 2|$$

elde edilir. Buradan

$x_1 - 2 = x_2 - 2$ ve $x_1 - 2 = -x_2 + 2$

$x_1 = x_2$ ve $x_1 = -x_2 + 4$ bulunur.

Sonuç olarak

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ şartı sağlanmadığı için g fonksiyonu bire bir değildir.

$\forall y_0 \in \mathbb{R}$ için $y_0 = g(x_0)$ olacak şekilde $\exists x \in \mathbb{R}$ bulunmadığı için g örten değildir. Örneğin $g(x_0) = -2$ olacak şekilde bir $x_0 \in \mathbb{R}$ yoktur.

$g(-x) = (-x-2)^2 + 1$ dir.

$g(-x) \neq g(x)$ olduğundan g fonksiyonu çift fonksiyon değildir.

$g(-x) = (-x-2)^2 + 1$ ve $-g(x) = -(x-2)^2 - 1$

fonksiyonlarına göre $g(-x) \neq -g(x)$ olduğundan g fonksiyonu tek fonksiyon değildir.

Başka bir deyişle g ne tek ne çift fonksiyondur.