16 . Örnek

Bilgi: Bir fonksiyonun sıfırının iki değer arasında kaldığı bilindiğinde bu iki değerin ortalaması alınıp fonksiyonun sıfırına adım adım yaklaşılarak fonksiyonun sıfırının bulunması yöntemine "ortalama alarak yineleme yöntemi" adı verilir. Bu yöntemde bir fonksiyonun sıfırının bulunması amacıyla fonksiyonun sıfırının arasında olduğu iki tahminî sayı alınır ve bu sayıların ortalaması ile yeni bir tahmin oluşturulur. Bu yeni tahmin oluşturma işlemi fonksiyonun sıfırının tahmin değeri sıfır olana kadar devam ettirilir.

Buna göre

a) Gerçek sayılarda tanımlı $f(x) = ax + b$ **doğrusal fonksiyonunun sıfırının ortalama alarak yineleme yöntemi ile bulunması işleminin algoritmasını ifade ediniz.**

b) Gerçek sayılarda tanımlı $f(x) = ax + b$ **doğrusal fonksiyonu için a ve b değerleri belirleyerek oluşturduğunuz algoritmayı test ediniz.**

Çözüm

a) $f(x) = ax + b$ doğrusal fonksiyonunun kökünü ortalama alarak yineleme yöntemi kullanarak bulmak için aşağıdaki adımlar izlenir:

1. adım: Kökün arasında olduğu tahmin edilen iki sayı belirlenir. Bu sayılar, x_1 ve x_2 olsun.

2. adım: Tahmin edilen sayıların fonksiyon değerleri hesaplanır. $f(x_1)$ ve $f(x_2)$ değerlerinden biri sıfır ise fonksiyonun sıfırı tahmin edilen sayıdır.

3. adım: $f(x_1)$ ve $f(x_2)$ değerlerinden biri sıfır değilse ilk tahmin edilen iki sayının ortalaması alınarak yeni tahmin yapılır. Bu ortalama $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ şeklinde bulunur.

4. adım: $f(x_3) = 0$ ise x_3 f fonksiyonunun sıfırıdır, 6. adıma git.

Eğer $f(x_3) \neq 0$ ise $f(x_3)$ işaretine göre yeni bir aralık belirlenir.

$f(x_3)$ ve $f(x_1)$ aynı işarete sahipse $x_1 = x_3$ olarak yenilenir.

$f(x_3)$ ve $f(x_1)$ zıt işarete sahipse $x_2 = x_3$ olarak yenilenir.

5. adım: $f(x_3)$ sıfıra yaklaşıncaya kadar adımları tekrarla.

6. adım: Bitir.

b) $a = 2$ ve $b = -6$ için $f(x) = ax + b$ doğrusal fonksiyonu için yazılan algoritma adımlarını uygulayalım.

1. adım: İlk tahminler $x_1 = 1$, $x_2 = 7$

2. adım: $f(x_1) = 2 \cdot 1 - 6 = -4$, $f(x_2) = 2 \cdot 7 - 6 = 8$ bulunur.

Burada f(1) negatif, f(7) pozitif olduğu için, fonksiyonun sıfır noktası bu iki değer arasındadır.

3. adım: Ortalama alarak yeni tahmin $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1 + 7}{2} = 4$, $f(4) = 2 \cdot 4 - 6 = 2$

(Sonuç sıfır olmadığından tahmin etmeye devam edilir.)

4. adım: f(4) pozitif olduğu için $x_1 = 1$, $x_2 = 4$ alınır.

5. adım: Ortalama alarak yeni tahmin $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1 + 4}{2} = 2,5$ $f(2,5) = 2 \cdot 2,5 - 6 = -1$

6. adım: f(2,5) negatif olduğu için $x_1 = 2,5$ $x_2 = 4$ alınır.

7. adım: Ortalama alarak yeni tahmin $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2,5 + 4}{2} = 3,25$

$f(3,25) = 2 \cdot 3,25 - 6 = 0,5$

8. adım: f(3,25) pozitif olduğu için $x_1 = 2,5$ $x_2 = 3,25$ alınır.

9. adım: Ortalama alarak yeni tahmin $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2,5 + 3,25}{2} = 2,875$

$f(2,875) = 2 \cdot 2,875 - 6 = -0,25$ olur. Bu işlem $f(x) \approx 0$ olana kadar devam ettirildiğinde fonksiyonun sıfırı yaklaşık 3 bulunur.