Présentation d'activités

Matthew Pressland

Université de Glasgow

Résumé

- **Carrière**
  - PhD : 2015, Université de Bath, Royaume-Uni, dir. A. King
  - 8 ans d'expérience postdoctorale :
    MPIM Bonn, Stuttgart, Leeds, Glasgow
  - Bourse EPSRC de 3 ans (375,000 £ $\approx$ 435,000 €)
  - 10 articles acceptés, 4 prépublications (toutes de 2023–24)
- **Intérêts / philosophie**
  - Théorie amassée, géométrie algébrique et combinatoire,
    théorie des représentations (des carquois et des algèbres)
  - Expliquer des phénomènes combin. et géométriques via algèbre
  - Utiliser ces développements pour résoudre des problèmes
    géométriques / combinatoires / amas-théoriques

Enseignement

- **Cours (Glasgow)**
  - « Metric Spaces and Basic Topology » ($\times 2$)
  - En ligne (2022), en présence (2024)
  - Prix « Jon Nimmo » (2022)
- **Cours et tutorats (Stuttgart)**
  - Mathématiques pour l'informatique, l'ingénierie, la physique
  - Très grands cours : 1500–2000 inscrits
  - Enseignement en allemand
- **Supervision (Glasgow)**
  - Projet d'été : motifs de frise (2022)
  - Projet de master : correspondance de McKay (2023)

Responsabilités collectives

- **FDLIST**
  - Liste de diffusion / site d'informations en algèbre
  - $\approx$ 400 membres enregistrés
- **Événements scientifiques**
  - Conférence internationale pour 100 personnes (Oxford, 2023)
    $\approx$ 25 000 € de financement externe
  - Conférence hybride (Leeds, 2022)
- **Réseau de recherche**
  - CLAN : interactions entre cinq universités britanniques
  - Financé par la Société Mathématique de Londres
- **Diffusion auprès du grand public**
  - Cours de la Société Royale, programme STEP

La positivité et la grassmannienne

Definition

$M \in \mathbb{C}^{k \times n}$, $k < n$, est *totalement positive* (TP) si ses mineurs maximaux $\Delta_I(M)$ sont réels et positifs.

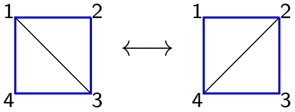
- $I \in \binom{[n]}{k}$ est un sous-ensemble de k colonnes, et $\Delta_I(M)$ la déterminante de la matrice $k \times k$ avec ces colonnes.
- $\operatorname{rg} M = k \implies$ le span $[M]$ des lignes est un sous-espace k-dimensionnel de $\mathbb{C}^n$: c.-à-d. $[M] \in \mathrm{Gr}_{k,n}$, la grassmannienne.
- La grassmannienne totalement positive : $\mathrm{Gr}_{k,n}^{>0} = \{[M] : M \text{ est TP}\}$.
- $\mathrm{Gr}_{k,n}^{>0}$ est important (en théorie de Lie, physique mathématique, ...)
- Un test minimale pour la positivité de M utilise seulement $k(n-k)+1$ mineurs, mais choisi avec soin !

$$k = 2,\ n = 4 : \quad \Delta_{13}\Delta_{24} = \Delta_{12}\Delta_{34} + \Delta_{14}\Delta_{23}$$

Structures amassées (I)

- **Outil moderne :** théorie amassée

$$\Delta_{13}\Delta_{24} = \Delta_{12}\Delta_{34} + \Delta_{14}\Delta_{23}$$



- **Idée** (Fomin–Zelevinsky '00) :
  - Pour une espace X (comme $X = \mathrm{Gr}_{k,n}$), choisir $\dim X$ fonctions continues indépendantes $f_1, \ldots, f_d \colon X \to \mathbb{C}$ (un amas).
  - Choisir un carquois (graphe orienté) avec les sommets $f_1, \ldots, f_d$.
  - Une règle (explicite, mais un peu longue !) permet des *mutations*, qui changent l'amas et le carquois $\rightsquigarrow$ nouveaux amas, procédure itérative

$$\begin{tikzcd} & f_2 \arrow[d] & \\ f_5 \arrow[ur] \arrow[dr] & f_1 \arrow[l] \arrow[r] & f_3 \arrow[ul] \arrow[dl] \\ & f_4 \arrow[u] & \end{tikzcd} \quad \xleftrightarrow{\mu_1} \quad \begin{tikzcd} & f_2 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ f_5 \arrow[r] & f_1' \arrow[u] \arrow[d] & f_3 \arrow[l] \\ & f_4 \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$f_1' f_1 = f_2 f_4 + f_3 f_5$$

Structures amassées (II)

$$\begin{tikzcd} & f_2 \arrow[d] & \\ f_5 \arrow[ur] \arrow[dr] & f_1 \arrow[l] \arrow[r] & f_3 \arrow[ul] \arrow[dl] \\ & f_4 \arrow[u] & \end{tikzcd} \quad \overset{\mu_1}{\longleftrightarrow} \quad \begin{tikzcd} & f_2 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ f_5 \arrow[r] & f_1' \arrow[u] \arrow[d] & f_3 \arrow[l] \\ & f_4 \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad f_1' f_1 = f_2 f_4 + f_3 f_5$$

- **Fait clé :** si $f_1(x), \ldots, f_d(x) \in \mathbb{R}_{>0}$, pour $x \in X$, alors $f(x) \in \mathbb{R}_{>0}$ pour *chaque* fonction f dans un amas (une variable amassée).
- Si les variables amassées génèrent l'anneau de fonctions sur X, on dit que X a une *structure amassée*.
  $\rightsquigarrow X^{>0} := \{x \in X : f(x) \in \mathbb{R}_{>0}$ pour chaque variable ammassée $f\}$

Théorème (Scott '06)

$\mathrm{Gr}_{k,n}$ a une structure amassée avec un amas de mineurs Δ_I, et tous les mineurs parmi les variables amassées.
$\rightsquigarrow$ les deux définitions de $\mathrm{Gr}_{k,n}^{>0}$ conviennent.

Théorie amassée

- **Avantages :**
  - Combinatorisation : rendre problèmes en géométrie plus traitable (pour exemple par ordinateur)
  - Applications surprenante ! En géométrie complexe, systèmes dynamiques, physique mathématique, ...
- **Inconvénients :**
  - Combinatoire complexe : typiquement un nombre infini d'amas
  - Définitions inductives, absence de structure : utile pour des computations, mais un défi pour des preuves générales
- **Solution :**
  - Catégorification : étudier structures amassées avec théorie de représentations de carquois (« l'algèbre linéaire sous stéroïdes »)
  - Retrouver structure : preuves générales et conceptuelles
  - $\rightsquigarrow$ nouvelles découvertes importantes en algèbre

Résultats principaux de recherche (I)

- **Catégorification**
  - Première méthode générale pour la catégorification amassée additive dans des contextes géométriques (avec variables gelées)

    Math. Z. (2015)
- **Applications géométriques**
  - Première preuve d'une conjecture en géométrie combinatoire, avec des méthodes homologiques (Prépublication 2023, soumise)

Theorem (P '23, conj. Muller–Speyer '16)

Les deux structures amassées naturelles sur une variété positroïde dans la grassmannienne quasi-coïncident.

$\rightsquigarrow$ *une relation précise entre les amas dans les deux structures*

$\rightsquigarrow$ *ces structures définissent la même partie positive de la variété*

E.g., sur une variété positroïde avec $\Delta_{567} = 0$: $\quad \Delta_{357}\dfrac{\Delta_{167}}{\Delta_{367}} = \Delta_{157}$

Résultats principaux de recherche (II)

- **Applications géométriques (cont.)**
  - Pour catégorifier des positroïdes : généralisation des résultats en géométrie (torique et non commutative) aux modèles dimère

    Forum Math. Sigma (2022)
  - Catégorification de la combinatoire et la géométrie de positroïdes : correspondances parfaites, automorphisme « twist », fonctions de partition

    Adv. Math. (2024), avec İ. Çanakçı et A. King
- **Divers**
  - réduction, Grassmanniennes de carquois, motifs de frise, catégories extriangulées, ...
  - plusieurs collaborations internationales (Faber, Gorsky, Grabowski, Kalck, Marsh, Palu, Plamondon, ...)

Objectifs de recherche (I)

- **Liens avec la topologie symplectique**
  - Seconde preuve de la conjecture de Muller–Speyer par Casals–Le–Sherman-Bennett–Weng
  - Inspirée par la topologie et la géométrie symplectique : nœuds Legendriens et remplissages Lagrangiens (cf. variétés de tresse)
  - La théorie amassée résout des problèmes symplectiques : amas $\rightsquigarrow$ remplissage Lagrangien (pas attendu !)
- **Objectifs / premiers pas**
  - La catégorification ajout de la structure $\rightsquigarrow$ outils totalement nouveaux
  - Question clé : chaque remplissage Lagrangien vient-il d'un amas ?
  - Implications pour la conjecture de « nearby Lagrangians »
  - BIRS Workshop mars 2025 : minicours par Casals et moi-même

Objectifs de recherche (II)

- **Quasi-équivalence et théorie basculante**
  - Étendre les techniques de ma preuve de la conjecture de Muller–Speyer d'autres structures amassées géométriques
- **Actions de groupe / invariants**
  - Chekhov–Shapiro ferment les structures amassées sous quotients de groupe (algèbres amassées généralisées) : catégorification ?
- **Recherche d'un caractère amassée quantique**
  - Problème ouvert majeur : liens avec les algèbres de Hall, diagrammes de diffusion, catégorification multiplicative, ...
- **Projet d'intégration**
  - Théorie amassée : L. Pirio, P.-G. Plamondon
  - Géométrie algébrique : A.-M. Castravet, O. Piltant
  - Théorie de Lie : V. Sécherre, ...

Développement

- **Financement d'ANR : JCJC**
  - Développement d'un groupe de recherche
  - Supervision postgraduée, opportunités postdoctorales (aussi programme Actions de Marie Skłodowska-Curie, FSMP, ...)
- **Financement d'ERC** (« Consolidator Grant »)
  - Éligible jusqu'à 2027
  - Ambitieux : mais expériences pertinentes (bourse EPSRC) et opportunité significative (liens avec la topologie symplectique)
- **Interactions**
  - Successeur du réseau ANR CHARMS
  - Réseau thématique ALGÈBRE : colloque tournant

Merci beaucoup !