

Contexte: positivité totale

Soit  $M \in \mathbb{C}^{k \times n}$ ,  $k < n$ .

Pour  $I \in \binom{[n]}{k} = \{I \subseteq \{1, \dots, n\} : \#I = k\}$ ,  $\Delta_I(M) = \det(M_I)$

$\uparrow$  sous-matrice sur les colonnes  $I$

$M$  est totalement non-négative (TNV) si  $\Delta_I(M) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \forall I \in \binom{[n]}{k}$ .

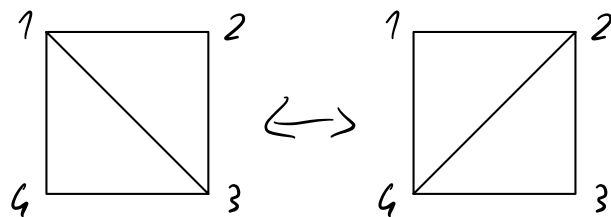
$\text{rg } M = k \Rightarrow$  <sup>positive (TP)</sup>  $[M] \in \text{Gr}_{k,n} = \text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ ; la grassmannienne

Grassmannienne - TNV  $\text{Gr}_{k,n}^{\geq 0} = \{[M] : M \text{ est TNV}\}$ .

pertinente à: théorie de positivité de Lusztig pour des variétés de drapeaux  
l'amplièdre / amplitudes de diffusion

Idee clé: pour prouver que  $M$  est TP, suffisant que  $\Delta_I(M) \in \mathbb{R}_{>0}$  pour  $\dim \text{Gr}_{k,n} = k(n-k)+1$  valeurs d' $I$  - choisis avec soin!

$$\Delta_{13} \Delta_{24} = \Delta_{12} \Delta_{34} + \Delta_{14} \Delta_{23}$$



Pour  $k=2$ : triangulation du  $n$ -gone  $\leadsto$  essai minimal pour positivité  
 $\leadsto$  ces essais "mutent" en échangeant les diagonals dans la triangulation.

Fomin-Zelevinsky: abstraite cette combinatoire aux structures amassées

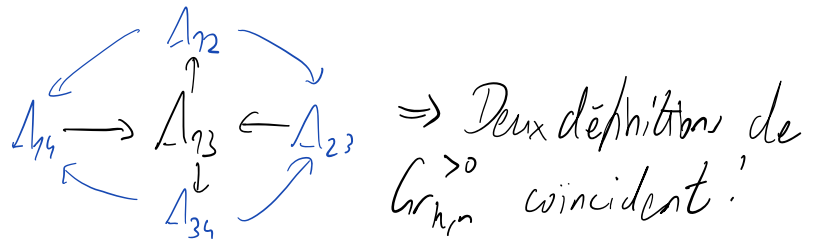
$\leadsto$  pour une variété  $X$ , choisissez  $\dim X$  fonctions (un amu) dans  $\mathbb{C}[X]$ ,  
algébriquement indépendantes (variables amassées)

$\leadsto$  une règle combinatoire permet des mutations: plus d'amu, des variables amassées  
(typiquement  $\infty$ )

Espoir : les variables amassées génèrent  $\mathbb{C}[X] \leadsto$  structure amassée sur  $X$ .

$\leadsto$  définition :  $X^{\geq 0} = \left\{ x \in X : f(x) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \ \forall f \text{ var. amassée} \right\}$   
 $= \left\{ \text{---} \parallel \text{---} \mid f \text{ dans un amas fixe} \right\}$   
 $\hookrightarrow$  difficile! Lee-Schiffler, Gross-Hacking-Keel-Kontsevich

Thm (Scott '06)  $\mathbb{C}[\hat{Gr}_{h,n}]$  a une structure amassée avec un amas de  $\Delta_{\pm}$ s, et toutes les  $\Delta_{\pm}$ s entre les variables amassées.



Le problème (Postnikov '06, Kontsevich-Lam-Speyer '13)  $Gr_{h,n}^{\geq 0}$  a une décomposition en cellules  $\Pi_{\mathcal{P}}^0 \cap Gr_{h,n}^{\geq 0}$  pour  $\Pi_{\mathcal{P}}^0$  une variété de positroïde ouverte associée à  $\mathcal{PC}\left(\begin{smallmatrix} n \\ h \end{smallmatrix}\right)$  positroïde. (un positroïde)

$\Pi_{\mathcal{P}}^0 = \left\{ x \in Gr_{h,n} : \Delta_I(x) = 0 \ \forall I \notin \mathcal{P}, \ \Delta_J(x) \neq 0 \text{ par certains } J \right\}$ .  
 $(\mathcal{P} = \begin{smallmatrix} n \\ h \end{smallmatrix}) \Rightarrow \Pi_{\mathcal{P}}^0 \cap Gr_{h,n}^{\geq 0} = Gr_{h,n}^{\geq 0}$ . (déterminé par  $\mathcal{P}$ )

Thm (Galashin-Lam '23) Chaque  $\hat{\Pi}_{\mathcal{P}}^0$  a une structure amassée — mais elle a deux!

Même structure combinatoire, variables amassées différentes : c'est-à-dire, une algèbre amassée abstraite  $\mathcal{A}$ , deux isomorphismes  $\eta^+, \eta^- : \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[\hat{\Pi}_{\mathcal{P}}^0]$ .

Conj (Muller-Speyer '16) Ces deux structures amassées quasi-coïncident.

$\Rightarrow \forall x \ \eta^-$ -variable amassée,  $\exists x' \ \eta^+$ -variable amassée,  $p, q$  des monômes en variables gelées, tel que  $x = x' \frac{p}{q}$ .

$\leadsto$  raison structurelle, amas-théorique pour obtenir la même  $(\hat{\Pi}_{\mathcal{P}}^0)^{\geq 0}$  pour chaque structure.

Ex  $\underbrace{\Delta_{357} \frac{\Delta_{167}}{\Delta_{367}}}_{\eta^+} = \underbrace{\Delta_{157}}_{\eta^-}$  sur certain  $\Pi_{\mathcal{P}}^0$ , avec  $\Delta_{567} = 0$ .

Thm (P, 23<sup>+</sup>) la conjecture est vraie.

La solution 1) Catégorifier la structure amassée abstraite (P '23)

- ↪ les variables amassées deviennent des objets dans une catégorie exacte;
- ↪ la combinatoire amassée est encodée dans les espaces d'Hom et d'Ext?

Résultat général ↪ produit une catégorie exacte Frobenienne  $\mathcal{E}$  avec "la bonne combinatoire".

2) Comparer à la catégorie amassée de la grassmannienne par Jensen-King-Su.  
(Canakcı-King-P, '24).

Définir  $C = C_{h,n}$ :



$xy = yx$   
 $y^h = x^{n-h}$  (complète)

↪  $Z = \mathbb{C}[t]$ -algèbre f.g.,  $Z$ -module libre ( $t = xy$ )

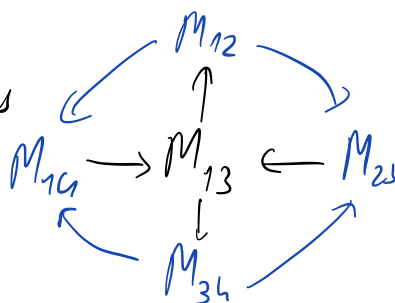
↪  $CM(C) = \{M \in \text{mod } C : {}_Z M \text{ libre + f.g.}\}$

$I \in \binom{[n]}{h} \rightsquigarrow M_I \in CM(C)$ :

$Z$  à chaque node;  $x_i$  agit comme  $\begin{cases} t, & i \in I \\ 1, & i \notin I \end{cases}$   $y_i$  agit comme  $\begin{cases} 1, & i \in I \\ t, & i \notin I \end{cases}$

$M_I \rightleftharpoons \Delta_I$  : par exemple, morphismes

$\text{Ext}^1$  = l'obstruction à l'apparition dans le même amas.



$\bullet = \text{proj} - \text{inj}$ .

Thm<sup>(S)</sup> (C, KP) Pour chaque positroïde  $P \subset \binom{[n]}{h}$ ,  $\exists Z$ -algèbre f.g.  $B$  + morphisme

$C \hookrightarrow B$  qui induit  $CM(B) \hookrightarrow CM(C)$ , tel que  
 $M_I \in CM(B) \Leftrightarrow I \in \mathcal{O}$ .

De plus,

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{gr}\text{-}\mathcal{C}\mathcal{M}(B) & \hookrightarrow & \mathcal{C}\mathcal{M}(B) \hookrightarrow \mathcal{C}\mathcal{M}(C); \\ & \searrow & \mathrm{gr}\text{-}\mathcal{H}\mathcal{J}\mathcal{C}\mathcal{M}(B) & \nearrow & \\ & & & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{gpr } CM(B) &= \{X \in CM(B) : Ext_B^{>0}(X, B) = 0\} \\ \text{ghv } CM(B) &= \left\{ \rule{1cm}{0.4pt} \parallel \rule{1cm}{0.4pt} (B^\vee, X) - \right\} \end{aligned}$$

$$M_I \in \text{gproj } CM(B) \Leftrightarrow \Delta_I \text{ est une } \eta^+ \text{-variable amassée}$$

3) Deducit la conjecture: le fait clé est que:

$$D^b(\mathrm{gr} \operatorname{proj} CM B) \xrightarrow{\sim} D^b(CM B) \xleftarrow{\sim} D^b(\mathrm{gr} \operatorname{inj} CM B).$$

$$\phi_+ \searrow \quad \mathbb{C}[\pi_0] \quad \swarrow \phi_-$$

$\phi^+, \phi^-$  sont des "caractères amassés" (Fraser-Keller);

$$\phi^\pm M_\pm = \Delta_\pm \text{ pour } M_\pm \in \mathfrak{g}_{\text{prin}}(M_B(\phi^+)) \text{ ou } \mathfrak{g}_{\text{prin}}(M_B(\phi^-)).$$

Calculation: soit  $X \in \text{ginj CMB}$ ; prendre syzygie

$$0 \rightarrow \Omega X \rightarrow P \rightarrow X \rightarrow 0$$

↑  
grgMB  
(GMP)

inj. dans gpr CMB  
↓ (pas CMB!)

gprof CMB  
///

puis "cosyzygic"  $0 \rightarrow \Omega X \rightarrow Q \rightarrow X' \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \phi^{-X} = \phi^+ X' \frac{\phi^+ \rho}{\phi^+ Q}$$

Ex  $0 \rightarrow M_{346} \rightarrow \begin{matrix} M_{167} \\ \oplus \\ M_{345} \end{matrix} \rightarrow M_{157} \rightarrow 0$

$$0 \rightarrow M_{346} \rightarrow \begin{matrix} M_{367} \\ \oplus \\ M_{345} \end{matrix} \rightarrow M_{357} \rightarrow 0$$

$$\sim \Delta_{357} = \Delta_{157} \frac{\Delta_{167}}{\Delta_{367}} \quad \checkmark$$