Variétés de positroïde via des catégories triangulées — Versailles, 19.03.24

Contexte: positivité totale

Soit $M \in \mathbb{C}^{k \times n}$, $k < n$.

Pour $I \in \binom{n}{k} = \{ I \subseteq \{1, \dots, n\} : \# I = k \}$, $\Delta_I(M) = \det(M_I)$

$\uparrow$ sousmatrice sur les colonnes I

M est totalement non-négative (TNN) si $\Delta_I(M) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ $\forall I \in \binom{n}{k}$.
positive (TP) $\mathbb{R}_{>0}$

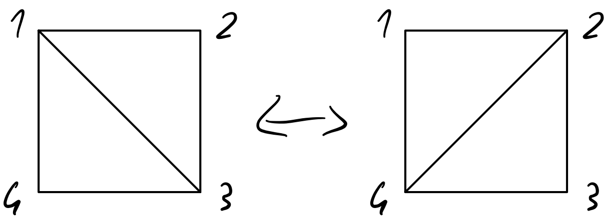
$\operatorname{rg} M = k \Longrightarrow$ travée des lignes $[M] \in Gr_{k,n} = Gr_k(\mathbb{C}^n)$; la grassmannienne

Grassmannienne-TNN $Gr_{k,n}^{\geq 0} = \{ [M] : M \text{ est TNN} \}$.

pertinant à: théorie de positivité de Lusztig pour des variétés de drapeaux
l'amplituèdre / amplitudes de diffusion

Idée clé: pour prouver que M est TP, suffisant que $\Delta_I(M) \in \mathbb{R}_{>0}$ pour $\dim \widehat{Gr}_{k,n} = k(n-k)+1$ valeurs d'I - choisis avec soin!

$$\Delta_{13}\Delta_{24} = \Delta_{12}\Delta_{34} + \Delta_{14}\Delta_{23}$$



Pour $k=2$: triangulation du n-gone $\rightsquigarrow$ essai minimal pour positivité
$\rightsquigarrow$ ces essaies "mutent" en échangeant les diagonals dans la triangulation.
Fomin-Zelevinsky: abstraite cette combinatoire aux structures amassées
$\rightsquigarrow$ pour une variété X, choisisez $\dim X$ fonctions (un amas) dans $\mathbb{C}[X]$, algébriquement indépendentes (variables amassées)
$\rightsquigarrow$ une règle combinatoire permet des mutations: plus d'amas, des variables amassées (typiquement ∞)

Espoir : les variables amassées génèrent $\mathbb{C}[X]$ $\rightsquigarrow$ structure amassée sur X.

$\rightsquigarrow$ définie :

$$X^{>0} = \{x \in X : f(x) \in \mathbb{R}_{>0} \ \forall f \text{ var. amassée}\}$$
$$= \{ \text{———} \ \text{"} \ \text{———} \ \forall f \text{ dans un amas fixe} \}$$

? difficile ! Lee-Schiffler, Gross-Hacking-Keel-Kontsevich

<u>Thm</u> (Scott '06) $\mathbb{C}[\widehat{Gr}_{k,n}]$ a une structure amassée avec un amas de Δ_I's, et toutes les Δ_I's entre les variables amassées.

$$\begin{tikzcd}
 & \Delta_{12} \arrow[dl, bend right] \arrow[dr, bend left] & \\
\Delta_{14} \arrow[r] & \Delta_{13} \arrow[u] \arrow[d] & \Delta_{23} \arrow[l] \\
 & \Delta_{34} \arrow[ul, bend left] \arrow[ur, bend right] &
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ Deux définitions de $Gr_{k,n}^{>0}$ coïncident !

<u>Le problème</u> (Postnikov '06, Knutson-Lam-Speyer '13) $Gr_{k,n}^{\geq 0}$ a une décomposition en cellules $\Pi_{\mathcal{P}}^{o} \cap Gr_{k,n}^{\geq 0}$ pour $\Pi_{\mathcal{P}}^{o}$ une variété de positroïde ouverte associée à $\mathcal{P} \subset \binom{n}{k}$ positroïde.

$$\Pi_{\mathcal{P}}^{o} = \{x \in Gr_{k,n} : \Delta_I(x) = 0 \ \forall I \notin \mathcal{P}, \ \Delta_J(x) \neq 0 \text{ par certains } J\}.$$

(déterminé par $\mathcal{P}$)

$$\left(\mathcal{P} = \binom{n}{k} \Rightarrow \Pi_{\mathcal{P}}^{o} \cap Gr_{k,n}^{\geq 0} = Gr_{k,n}^{>0}\right).$$

<u>Thm</u> (Galashin-Lam '23) Chaque $\hat{\Pi}_{\mathcal{P}}^{o}$ a une structure amassée — mais elle a deux !

Même structure combinatoire, variables amassées différentes : c'est-à-dire, une algèbre amassée abstraite $\mathcal{A}$, deux isomorphismes $\eta^+, \eta^- : \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[\hat{\Pi}_{\mathcal{P}}^{o}]$.

<u>Conj</u> (Muller-Speyer '16) Ces deux structures amassées quasi-coïncident.

$\Rightarrow \forall x$ η^--variable amassée, $\exists x'$ η^+-variable amassée, p, q des monômes en variables gelées, tel que $x = x' \frac{p}{q}$.

$\rightsquigarrow$ raison structurelle, amas-théorétique pour obtenir la même $(\hat{\Pi}^{o})^{\geq 0}$ pour chaque structure.

<u>Ex</u> $$\underbrace{\Delta_{357} \frac{\Delta_{167}}{\Delta_{367}}}_{\eta^+} = \underbrace{\Delta_{157}}_{\eta^-} \quad \text{sur certain } \Pi_{\mathcal{P}}^{o}, \text{ avec } \Delta_{567} = 0.$$

Thm (P, 23+) La conjecture est vraie.

La solution 1) Catégorifie la structure amassée abstraite (P '23)

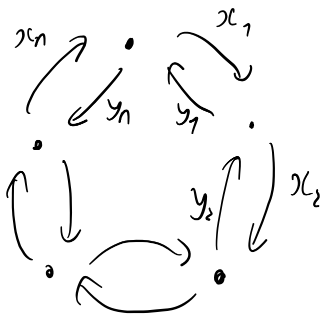
$\rightsquigarrow$ les variables amassées deviennent des objets dans une catégorie exacte;

$\rightsquigarrow$ la combinatoire amassée est encodée dans les espaces d'Hom et d'Ext^1.

Résultat général $\rightsquigarrow$ produit une catégorie exacte Frobénienne $\mathcal{E}$ avec "la bonne combinatoire".

2) Compare à la catégorie amassée de la grassmannienne par Jensen-King-Su. (Çanakçı-King-P, '24).

Définie $C = C_{k,n}$:



$/ \quad xy = yx, \quad y^k = x^{n-k}$ (complétée)

$\rightsquigarrow Z = \mathbb{C}[[t]]$-algèbre f.g., Z-module libre $(t = xy)$

$\rightsquigarrow CM(C) = \{M \in \mathrm{mod}\, C : {}_Z M \text{ libre + f.g.}\}$

$I \in \binom{n}{k} \rightsquigarrow M_I \in CM(C)$:

Z à chaque node; x_i agit comme $\begin{cases} t, & i \in I \\ 1, & i \notin I \end{cases}$ y_i agit comme $\begin{cases} 1, & i \in I \\ t, & i \notin I \end{cases}$

M_Is $\longleftrightarrow \Delta_I$s : par exemple, morphismes

Ext^1 = l'obstruction à l'apparition dans le même amas.

$$\begin{tikzcd} & M_{12} \arrow[dl, bend right] \arrow[dr, bend left] & \\ M_{14} \arrow[r] & M_{13} \arrow[u] \arrow[d] & M_{23} \arrow[l] \\ & M_{34} \arrow[ul, bend left] \arrow[ur, bend right] & \end{tikzcd}$$

$\bullet$ = proj-inj.

Thm(s) (ÇKP) Pour chaque positroïde $\mathcal{P} \subset \binom{n}{k}$, $\exists$ Z-algèbre f.g. B + morphisme

$C \hookrightarrow B$ qui induit $CM(B) \hookrightarrow CM(C)$, tel que $M_I \in CM(B) \Leftrightarrow I \in \mathcal{P}$.

De plus,

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{gproj}\, CM(B) \arrow[dr, hook] & & \\
\mathcal{E} \arrow[ur, "\sim"] \arrow[dr, "\sim"'] & & CM(B) \arrow[r, hook] & CM(C); \\
 & \mathrm{ginj}\, CM(B) \arrow[ur, hook] & &
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{gproj}\, CM(B) = \{X \in CM(B) : \mathrm{Ext}^{>0}_B(X, B) = 0\}$

$\mathrm{ginj}\, CM(B) = \{ \text{——} \;"\; \text{——} (B^\vee, X) \text{—} \}$ $\quad B^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B, \mathbb{Z})$.

$M_I \in \mathrm{gproj}\, CM(B) \Leftarrow \Delta_I$ est une η^+-variable amassée

—"— ginj ——— " —— η^- —— " ——

3) Déduit la conjecture : le fait clé est que :

$$\begin{tikzcd}
D^b(\mathrm{gproj}\, CMB) \arrow[r, hook, "\sim"] \arrow[dr, "\phi^+"'] & D^b(CMB) & D^b(\mathrm{ginj}\, CMB). \arrow[l, hook', "\sim"'] \arrow[dl, "\phi^-"] \\
 & \mathbb{C}[\Pi^\circ_\beta] &
\end{tikzcd}$$

ϕ^+, ϕ^- sont des "caractères amassés" (Fraser–Keller);

$\phi^\pm M_I = \Delta_I$ pour $M_I \in \mathrm{gproj}\, CMB$ (ϕ^+) ou $\mathrm{ginj}\, CMB$ (ϕ^-).

Calculation : soit $X \in \mathrm{ginj}\, CMB$; prendre syzygie

$$0 \to \underset{\substack{\mathrm{gproj}\, CMB \\ (GKP)}}{\Omega X} \to \underset{\text{projectif}}{P} \to X \to 0$$

puis "cosyzygie"

$$0 \to \Omega X \to \overset{\substack{\text{inj. dans gproj } CMB \\ \text{(pas } CMB!)}}{Q} \to \overset{\mathrm{gproj}\, CMB}{X'} \to 0$$

$$\Rightarrow \quad \phi^- X = \phi^+ X' \, \frac{\phi^+ P}{\phi^+ Q}$$

Ex

$$0 \to M_{346} \to \begin{matrix} M_{167} \\ \oplus \\ M_{345} \end{matrix} \to M_{157} \to 0$$

$$0 \to M_{346} \to \begin{matrix} M_{367} \\ \oplus \\ M_{345} \end{matrix} \to M_{357} \to 0$$

$$\rightsquigarrow \Delta_{357} = \Delta_{157} \, \frac{\Delta_{167}}{\Delta_{367}} \quad \checkmark$$