

# Présentation d'activités

Matthew Pressland

Université de Glasgow

# Résumé

## ► **Carrière**

- PhD : 2015, Université de Bath, Royaume-Uni, dir. A. King
- 8 ans d'expérience postdoctorale :  
MPIM Bonn, Stuttgart, Leeds, Glasgow
- Bourse EPSRC de 3 ans (375,000 £  $\approx$  435,000 €)
- 10 articles acceptés, 4 prépublications (toutes de 2023–24)

## ► **Intérêts / philosophie**

- Théorie amassée, géométrie algébrique et combinatoire, théorie des représentations (des carquois et des algèbres)
- Expliquer des phénomènes combin. et géométriques via algèbre
- Utiliser ces développements pour résoudre des problèmes géométriques / combinatoires / amas-théoriques

# Enseignement

## ► Cours (Glasgow)

- « Metric Spaces and Basic Topology » ( $\times 2$ )
- En ligne (2022), en présence (2024)
- Prix « Jon Nimmo » (2022)

## ► Cours et tutorats (Stuttgart)

- Mathématiques pour l'informatique, l'ingénierie, la physique
- Très grands cours : 1500–2000 inscrits
- Enseignement en allemand

## ► Supervision (Glasgow)

- Projet d'été : motifs de frise (2022)
- Projet de master : correspondance de McKay (2023)

# Responsabilités collectives

## ► **FDLIST**

- Liste de diffusion / site d'informations en algèbre
- $\approx$  400 membres enregistrés

## ► **Événements scientifiques**

- Conférence internationale pour 100 personnes (Oxford, 2023)  
 $\approx$  25 000 € de financement externe
- Conférence hybride (Leeds, 2022)

## ► **Réseau de recherche**

- CLAN : interactions entre cinq universités britanniques
- Financé par la Société Mathématique de Londres

## ► **Diffusion auprès du grand public**

- Cours de la Société Royale, programme STEP

# La positivité et la grassmannienne

## Definition

$M \in \mathbb{C}^{k \times n}$ ,  $k < n$ , est *totalelement positive* (TP) si ses mineurs maximaux  $\Delta_I(M)$  sont réels et positifs.

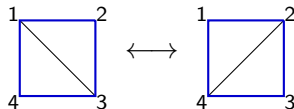
- ▶  $I \in \binom{[n]}{k}$  est un sous-ensemble de  $k$  colonnes, et  $\Delta_I(M)$  la déterminante de la matrice  $k \times k$  avec ces colonnes.
- ▶  $\text{rg } M = k \implies$  le span  $[M]$  des lignes est un sous-espace  $k$ -dimensionnel de  $\mathbb{C}^n$  : c.-à-d.  $[M] \in \text{Gr}_{k,n}$ , la grassmannienne.
- ▶ La grassmannienne totalelement positive :  $\text{Gr}_{k,n}^{>0} = \{[M] : M \text{ est TP}\}$ .
- ▶  $\text{Gr}_{k,n}^{>0}$  est important (en théorie de Lie, physique mathématique, ...)
- ▶ Un test minimale pour la positivité de  $M$  utilise seulement  $k(n - k) + 1$  mineurs, mais choisi avec soin !

$$k = 2, n = 4 : \quad \Delta_{13}\Delta_{24} = \Delta_{12}\Delta_{34} + \Delta_{14}\Delta_{23}$$

# Structures amassées (I)

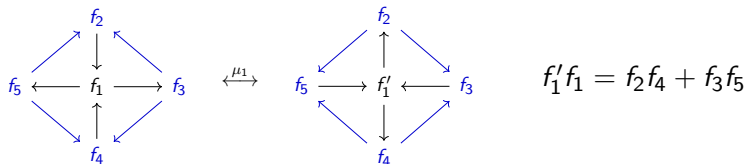
## ► Outil moderne : théorie amassée

$$\Delta_{13}\Delta_{24} = \Delta_{12}\Delta_{34} + \Delta_{14}\Delta_{23}$$

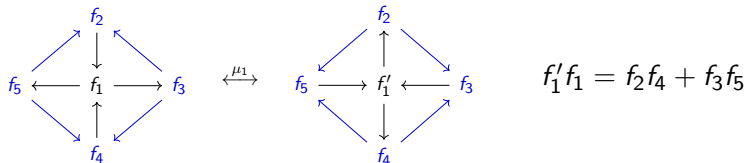


## ► Idée (Fomin–Zelevinsky '00) :

- Pour un espace  $X$  (comme  $X = \text{Gr}_{k,n}$ ), choisir  $\dim X$  fonctions continues indépendantes  $f_1, \dots, f_d: X \rightarrow \mathbb{C}$  (un amas).
- Choisir un carquois (graphe orienté) avec les sommets  $f_1, \dots, f_d$ .
- Une règle (explicite, mais un peu longue!) permet des *mutations*, qui changent l'amas et le carquois  $\leadsto$  nouveaux amas, procédure itérative



## Structures amassées (II)



- **Fait clé :** si  $f_1(x), \dots, f_d(x) \in \mathbb{R}_{>0}$ , pour  $x \in X$ , alors  $f(x) \in \mathbb{R}_{>0}$  pour *chaque* fonction  $f$  dans un amas (une variable amassée).
- Si les variables amassées génèrent l'anneau de fonctions sur  $X$ , on dit que  $X$  a une *structure amassée*.  
 $\leadsto X^{>0} := \{x \in X : f(x) \in \mathbb{R}_{>0} \text{ pour chaque variable amassée } f\}$

### Theorem (Scott '06)

$\text{Gr}_{k,n}$  a une structure amassée avec un amas de mineurs  $\Delta_I$ , et tous les mineurs parmi les variables amassées.

$\leadsto$  les deux définitions de  $\text{Gr}_{k,n}^{>0}$  conviennent.

# Théorie amassée

## ► Avantages :

- Combinatorisation : rendre problèmes en géométrie plus traitable (pour exemple par ordinateur)
- Applications surprenante ! En géométrie complexe, systèmes dynamiques, physique mathématique, ...

## ► Inconvénients :

- Combinatoire complexe : typiquement un nombre infini d'amas
- Définitions inductives, absence de structure : utile pour des computations, mais un défi pour des preuves générales

## ► Solution :

- Catégorification : étudier structures amassées avec théorie de représentations de carquois (« l'algèbre linéaire sous stéroïdes »)
- Retrouver structure : preuves générales et conceptuelles
- $\leadsto$  nouvelles découvertes importantes en algèbre



# Résultats principaux de recherche (I)

## ► Catégorification

- Première méthode générale pour la catégorification amassée additive dans des contextes géométriques (avec variables gelées)

*Math. Z.* (2015)

- Généralisation de la règle de mutation de Fomin–Zelevinsky : naturelle en physique mathématique et en algèbre homologique

*J. Algebra* (2020)

## ► Applications géométriques

- Conjecture de Muller–Speyer sur les variétés positroïdes : première preuve d'une conjecture en géométrie combinatoire, avec des méthodes homologiques

(Prépublication 2023, soumise)

# Résultats principaux de recherche (II)

## ► Applications géométriques (cont.)

- Pour catégorifier des positroïdes : généralisation des résultats en géométrie (torique et non commutative) aux modèles dimère  
*Forum Math. Sigma* (2022)
- Catégorification de la combinatoire et la géométrie de positroïdes : correspondances parfaites, automorphisme « twist », fonctions de partition  
*Adv. Math.* (2024), avec İ. Çanakçı et A. King

## ► Divers

- réduction, Grassmanniennes de carquois, motifs de frise, catégories extriangulées, ...
- plusieurs collaborations internationales  
(Faber, Gorsky, Grabowski, Kalck, Marsh, Palu, Plamondon, ...)

# Objectifs de recherche (I)

## ► Liens avec la topologie symplectique

- Seconde preuve de la conjecture de Muller–Speyer par Casals–Le–Sherman–Bennett–Weng
- Inspirée par la topologie et la géométrie symplectique :  
nœuds Legendriens et remplissages Lagrangiens  
(cf. variétés de tresse)
- La théorie amassée résout des problèmes symplectiques :  
 $\text{amas} \rightsquigarrow \text{remplissage Lagrangien}$  (pas attendu !)

## ► Objectifs / premiers pas

- La catégorification ajout de la structure  
 $\rightsquigarrow$  outils totalement nouveaux
- Question clé : chaque remplissage Lagrangien vient-il d'un amas ?
- Implications pour la conjecture de « nearby Lagrangians »
- BIRS Workshop mars 2025 : minicours par Casals et moi-même

# Objectifs de recherche (II)

## ► Quasi-équivalence et théorie basculante

- Étendre les techniques de ma preuve de la conjecture de Muller–Speyer d'autres structures amassées géométriques

## ► Actions de groupe / invariants

- Chekhov–Shapiro ferment les structures amassées sous quotients de groupe (algèbres amassées généralisées) : catégorification ?

## ► Recherche d'un caractère amassée quantique

- Problème ouvert majeur : liens avec les algèbres de Hall, diagrammes de diffusion, catégorification multiplicative, ...

## ► Projet d'intégration

- Théorie amassée : L. Pirio, P.-G. Plamondon
- Géométrie algébrique : A.-M. Castravet, O. Piltant
- Théorie de Lie : V. Sécherre, ...

# Développement

## ► **Financement d'ANR : JCJC**

- Développement d'un groupe de recherche
- Supervision postgraduée, opportunités postdoctorales (aussi programme Actions de Marie Skłodowska-Curie, FSMP, ...)

## ► **Financement d'ERC** (« Consolidator Grant »)

- Éligible jusqu'à 2027
- Ambitieux : mais expériences pertinentes (bourse EPSRC) et opportunité significative (liens avec la topologie symplectique)

## ► **Interactions**

- Successeur du réseau ANR CHARMS
- Réseau thématique ALGÈBRE : colloque tournant

Merci beaucoup !