带阶乘的极限的常用解决方法

2025 年 11 月 20 日

带阶乘的极限问题在数学分析中较为常见，通常出现在涉及数列、级数或组合数学的极限计算中。解决这类问题的方法较为丰富，以下是几种常用且有效的策略：

1. 斯特林公式（Stirling's Approximation）

适用于阶乘出现在分子或分母，且变量趋于无穷的情况。

斯特林公式：

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (n \to \infty)$$

适用场景：

- 形如 $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$
- 或更复杂的表达式如 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n)!}{(n!)^2 4^n}$

优点：可将阶乘转化为幂函数和指数函数，便于取对数或比较增长速度。

2. 比值判别法（Ratio Test 思想）

构造相邻项的比值，考察极限行为。

设 a_n 含有阶乘，考虑：

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$$

若用于极限本身（而非级数收敛性），有时可反推 $a_n \to 0$ 或 ∞。

例子：

$$a_n = \frac{n!}{n^n} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow a_n \to 0$$

3. 取对数转化为求和

利用 $\ln(n!) = \sum_{k=1}^n \ln k$，再用积分估计（如欧拉–麦克劳林公式或积分比较）。

积分估计：

$$\int_1^n \ln x\, dx < \ln(n!) < \int_1^{n+1} \ln x\, dx$$

可推得 $\ln(n!) \sim n\ln n - n$，这其实也是斯特林公式的对数形式。

适用场景：阶乘出现在指数或对数中，如 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$

4. 夹逼定理（Squeeze Theorem）

通过不等式对阶乘进行放缩。

例如：

$$\left(\frac{n}{2}\right)^{n/2} < n! < n^n$$

或利用组合数不等式：

$$\binom{2n}{n} \le 4^n \Rightarrow \frac{(2n)!}{(n!)^2} \le 4^n$$

5. 利用已知极限或级数展开

有些极限可通过幂级数（如 $e^x = \sum \frac{x^n}{n!}$）的性质间接求出。

例子：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = \infty \quad （因为e^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} > \frac{n^n}{n!}）$$

6. 伽马函数延拓（较少用）

对非整数阶乘，可使用 $\Gamma(n+1) = n!$，再用其积分表达式或渐近展开，但通常在高等分析中使用。

总结：选择策略的依据

情况	推荐方法
$n \to \infty$，阶乘在分子/分母	斯特林公式
含 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 结构	比值法
阶乘在根号或指数中	取对数 + 积分估计
可构造上下界	夹逼定理
与 e^x、$\sin x$ 等级数相关	利用泰勒展开

如你有具体的极限表达式，我可以帮你选择最合适的方法并详细计算。