

Основные определения и классификация задач оптимизации

Определения

Пусть X - множество возможных решений (множество альтернатив), $x \in X$ - его элемент (ie частное решение). По-умолчанию X определяется как область в \mathbb{R}^n ($X \subseteq \mathbb{R}^n$), если в задаче нет уточнения.

На X задается целевая функция или критерий $f(x)$. Если стоит задача ее минимизации, то для любых двух элементов X справедливо:

$$x_1 \text{ лучше } x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Если стоит задача максимизации f - знак неравенства меняется на противоположный. В классической постановке, задача оптимизации формулируется как минимизация целевой функции, но можно перейти от любой постановки к противоположной, если брать целевую функцию со знаком минус.

Задача минимизации целевой функции $f(x)$ - это задача нахождения такого наилучшего элемента x_* :

$$\forall x \in X \Rightarrow f(x_*) \leq f(x)$$

или

$$f(x) \rightarrow \min_{x \in X}$$

величина $f(x_*) = f_*$ называется оптимальным целевым значением функции.

Определение 1: $x_* \in X$ - глобальное решение задачи $f(x) \rightarrow \min_{x \in X}$ или глобальный минимум функции $f(x)$ на X , если:

$$f(x_*) \leq f(x) \forall x \in X$$

Множество всех таких решений $X_* = \{x \in X : f(x) = f_* = f(x_*)\} = \operatorname{Argmin}_{x \in X} f(x)$.
Элемент $x_* \in X_*$ - частное решение, обозначается через $\operatorname{argmin}_{x \in X} f(x)$.

Определение 2: $x_* \in X$ - локальное решение задачи $f(x) \rightarrow \min_{x \in X}$ или локальный минимум функции $f(x)$ на X , если $\exists \varepsilon > 0$ и выполнено:

$$f(x_*) \leq f(x) \forall x \in X \cap \Delta_\varepsilon(x_*)$$

где $\Delta_\varepsilon(x_*) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_*\| \leq \varepsilon\}$ - окрестность в \mathbb{R}^n , $\|\cdot\|$ - норма в \mathbb{R}^n

Если x_* - глобальное решение $\Rightarrow x_*$ также локальное решение. Обратное неверно.

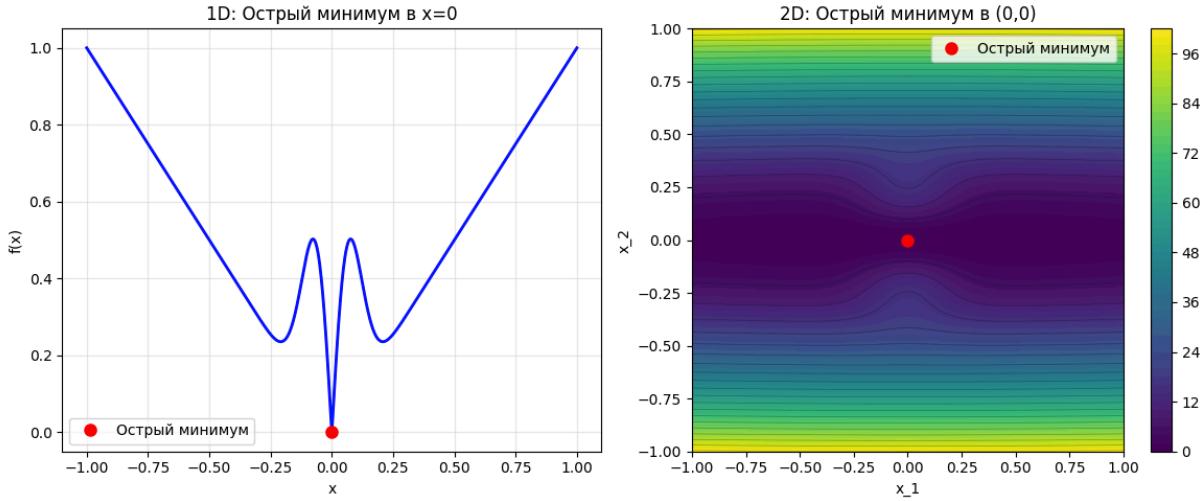
Если $f(x_*) \leq f(x)$ (локально или глобально) $\Rightarrow x_*$ - точка строгого минимума, всюду кроме $x \neq x_*$.

Определение 3: Точка $x_* \in X$ - точка острого минимума функции $f(x)$ на X , если для некоторого $\gamma > 0$ выполнено:

$$f(x) - f(x_*) \geq \gamma \|x - x_*\|, \forall x \in X$$

Точка острого минимума - всегда является точкой строгого минимума. Острый минимум также м/б определен локально или глобально.

Пример острого минимума функции для $x \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ на графике:



Из теоремы(Вейерштрасса), если $f(x)$ непрерывная на компакте X (т.е. замкнутом и ограниченном множестве), то решение $f(x) \rightarrow \min_{x \in X}$ не пусто. Если же условие компактности нарушено, решения может не существовать. Тогда решается задача

$$f_* = \inf_{x \in X} f(x)$$

где f_* - точная нижняя грань и выполнены условия:

- $f_* \leq f(x) \forall x \in X$
- $\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon : f(x_\varepsilon) < f_* + \varepsilon$

Если f неограниченная снизу, то $f_* = -\infty$

Последовательность $\{x_k\} \subset X$ называется **минимизирующей** f на X , если выполнено $f(x_k) \rightarrow f_*, k \rightarrow \infty$ (здесь под f_* подразумевается нижняя грань).

а

Классификация задач

По виду множества X задачи оптимизации можно условно разделить на классы. Вот основные из них.

Одномерная оптимизация

Если $X \subset \mathbb{R}$, в частности, если X это отрезок или положительная полуось \mathbb{R}_+

Безусловная оптимизация

Если $X = \mathbb{R}^n$.

Условная оптимизация

Если существуют явно заданные условия на \mathbb{R}^n , ограничивающие его до множества X . Например, $g(x)$ и $h(x)$ - некоторые векторные функции, $g(x)$ – l -мерная, а $h(x)$ – m -мерная на \mathbb{R}^n , множество X может задаваться функционально по условиям на эти функции, например:

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0_l; h(x) \leq 0_m\}$$

Такая задача иногда называется задачей **математического программирования**. Если каждая из $f(x), g(x), h(x)$ линейна - то это задача **линейного** программирования(аналогично определяется задача **квадратичного, нелинейного, выпуклого** etc программирования).

Также X может задаваться без явного определения функций-условий (ограничений), например как параллелепипед в \mathbb{R}^n :

$$X = \Pi = \{x \in \mathbb{R}^n : a \leq x \leq b\}; a, b \in \mathbb{R}^n$$

Термин “программирование” считается неудачным и устаревшим, рекомендуется заменять его на термин “оптимизация”.