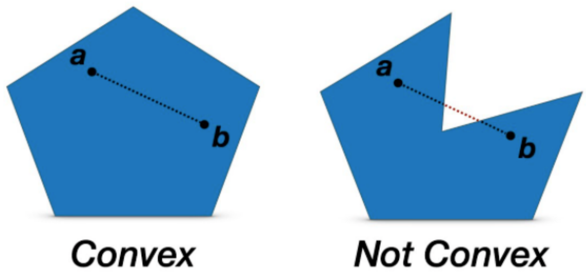
Выпуклые, аффинные множества, конусы, лин. комбинации, оболочки.

Основные понятия в выпуклом анализе.

Выпуклое множество

Определение 1: Множество $S \subseteq \mathbb{R}^n$ **выпуклое** (convex, конвексное), если: $\forall x_1, x_2 \in S, \lambda \in [0, 1] \Rightarrow$ точка $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in S$. То есть, выпуклое множество вместе с любыми двумя своими точками содержит и отрезок, соединяющий их. Пустое или состоящее из одного элемента множества считаются выпуклыми.

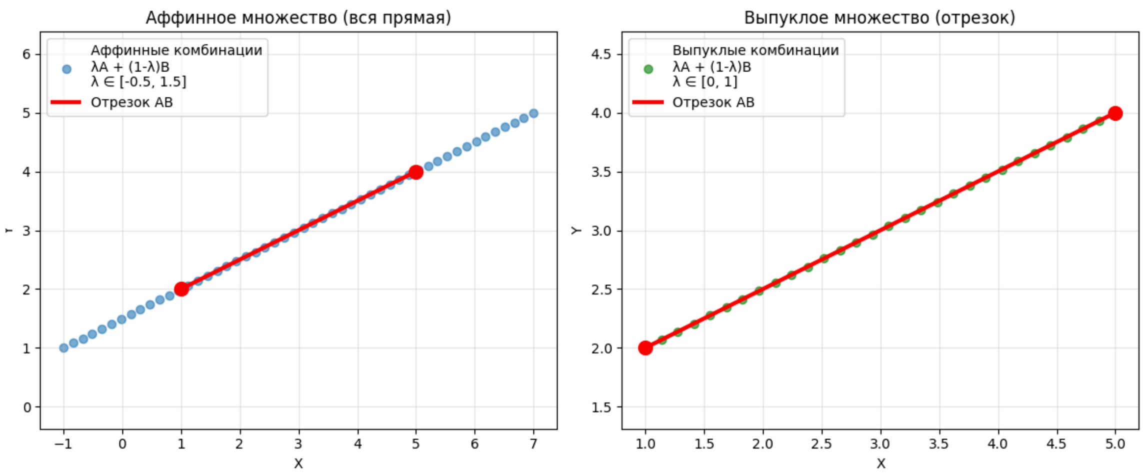
Примеры выпуклых множеств: шары в $\mathbb{R}^n : \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$, эллипсоид: $\left\{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, A^{-1}x \rangle \leq 1\right\}$, где $A \in \mathbb{S}^n_{++}$ симметрическая и положительно определенная матрица.



Операции над множествами сохраняющие выпуклость:
- Пересечение любого конечного числа выпуклых множеств - выпуклое множество.
- Произведение выпуклого множества на любое число $\alpha \in \mathbb{R}$ - выпуклое множество
- Сумма 2-х выпуклых множеств - выпуклое множество. Под суммой множеств понимается сумма Минковского: $S_1 + S_2 = \{s_1 + s_2 : s_1 \in S_1, s_2 \in S_2\}$.
- (следствие из прошлых подпунктов) линейная комбинация произвольных выпуклых множеств $S_1, ..., S_m$ с коэффициентами $\alpha_1, ..., \alpha_m$ из $\mathbb{R}$ имеет вид: $S = \sum_{i=1}^m \alpha_i S_i = \left\{x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i, x_i \in S_i\right\}$ и является выпуклым множеством.

Аффинное множество

Определение 2: Множество $A \subseteq \mathbb{R}^n$ **аффинное**, если: $\forall x_1, x_2 \in A, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$ точка $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in A$. То есть, аффинное множество вместе с любыми двумя своими точками содержит и всю прямую, проходящую через их. Пустое множество считается аффинным.



Пересечение и линейная комбинация любого конечного числа аффинных множеств - также аффинное множество.

Примеры аффинных множеств: $\mathbb{R}^n$, множество решений системы уравнений $Ax = b, x \in X$ —аффинное множество.

Пусть A - аффинное множество, линейным подпространством называют множество $L = A - a_0$, параллельное A и также аффинное.

Теорема 1: Если X - аффинное множество, тогда X - множество решений системы линейных уравнений для некоторой матрицы A и вектора b: $X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$. Аналогично, множество решений любой системы линейных уравнений - аффинное множество.

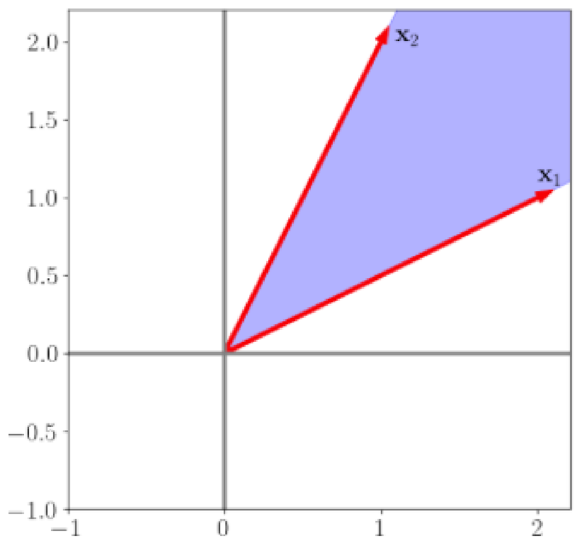
Конусы, выпуклые конусы (cone, convex cone)

Определение 3: Непустое множество $C \subseteq \mathbb{R}^n$ **конус (cone)**, если $\forall x \in C, \lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda x \in C$. То есть, конус содержит вместе с каждой своей точкой и луч, проходящий через начало координат и эту точку.

Определение 4: Непустое множество $C \subseteq \mathbb{R}^n$ **выпуклый конус (convex cone)**, если $\forall x_1, x_2 \in C, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0 \Rightarrow \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in C$. Такое множество выпукло, то есть $\forall \lambda \in [0,1] \forall x_1, x_2 \in C \Rightarrow \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in C$

Пересечение и линейная комбинация любого конечного числа выпуклых конусов - также выпуклый конус.

Примеры выпуклого конуса: $\mathbb{R}^n$ или любое аффинное множество с точкой {0}.



Линейные комбинации

Линейные комбинации могут быть классифицированы по условию на коэффициенты (в $\mathbb{R}^n$).
Определение 5: Пусть $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i, x_i$ - линейная комбинация, с коэффициентами $\lambda_i \in \mathbb{R}$, называется

1. **Выпуклой**, если $\lambda_i \geq 0 \forall i \in [1, m]$ и $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$
2. **Неотрицательной**, если $\lambda_i \geq 0 \forall i \in [1, m]$
3. **Аффинной**, если $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$

Существует связь между классами множеств и их линейными комбинациями.

Так, если множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ выпукло $\Leftrightarrow$ оно содержит все выпуклые комбинации своих точек

Если множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ - выпуклый конус $\Leftrightarrow$ оно содержит все неотрицательные комбинации своих точек.

Если множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ - аффинное $\Leftrightarrow$ оно содержит все аффинные комбинации своих точек.

Оболочки множеств

Если множество X не выпукло, тогда его можно сделать выпуклым, дополнив новыми точками.

Определение 6: Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ - некоторое множество. Пересечение всех выпуклых множеств (выпуклых конусов,аффинных множеств) из $\mathbb{R}^n$, содержащих множество X называется выпуклой (конической, аффинной) оболочкой множества X, и обозначается как $\operatorname{conv} X(\operatorname{cone} X, \operatorname{aff} X)$.

Справедливы отношения:
- $X \subseteq \operatorname{conv} X$
- Если $X \subseteq Y$ и Y - выпуклое, то $\operatorname{conv} X \subseteq Y$. В частности $\operatorname{conv} X = X$, если X - выпуклое множество.
- Аналогичные утверждения выполнены и для конических и аффинных множеств

Теорема 2: Выпуклая (коническая, аффинная) оболочка множества $X \subseteq \mathbb{R}^n$ совпадает со множеством всех выпуклых (неотрицательных, аффинных) комбинаций всех точек из X