MATEMÁTICA
AULA 08

Prof. Me. Julio Cesar Naves Fernandes

OLÁ!

Eu sou o Prof. Julio Cesar

Bacharel em Sistemas de Informação
Licenciatura Plena em Matemática
Pós Graduação em Ensino de Matemática
Mestrado em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologia

“Todas as coisas são números.”

- Pitágoras

01

POLINÔMIOS
AULA 01

INTRODUÇÃO AOS POLINÔMIOS

Os polinômios são expressões como:

$$x^5 + 2x - 1$$

$$x^2 - 2x$$

$$x - 1$$

Sabe o que tem em comum nesses termos? Vários x elevados a algum número sendo somados!

INTRODUÇÃO AOS POLINÔMIOS

Ou seja, um polinômio é qualquer expressão na forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Onde os a's são constantes reais, podendo valer zero. Tipo assim, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ e $a_3 = 4$...

INTRODUÇÃO AOS POLINÔMIOS

E as potências de x são números **sempre naturais.**

Ou seja, não são polinômios:

$$\sqrt{x^3} + 2x$$

$$x^{5/2} + 1$$

$$x^3 - 5x^{-2} + 3x$$

Pois tem expoentes não-naturais.

ORDEM DO POLINÔMIO

Até aqui, tudo bem? Então, vamos continuar. A ordem do polinômio é igual ao expoente da potência mais alta com coeficiente não nulo do polinômio, ou seja:

$$x^2 + 2x + 1$$

É um polinômio de grau ou ordem 2 (ou de segundo grau), já que a potência mais alta é a do x^2.

ORDEM DO POLINÔMIO

Outro exemplo:

$$0 \cdot x^4 + 2x^3 + 1$$

Aqui, apesar do x^4 ser a maior potência, ele tá multiplicado por zero e isso não vale! Então temos um polinômio de grau 3!

NOMECLATURA

O termo "poli" de polinômio indica várias. Várias o que? Várias potências de base x.

Assim, quando temos somente uma potência presente, podemos chamar o polinômio de monômio, com "mono" de único, como em:

$$x^2$$

NOMECLATURA

Há também, binômios, com dois:

$$x^3 + 1$$

E assim sucessivamente até o cara que fez a questão cansar de contar e falar que é polinômio mesmo.

VALOR NUMÉRICO

Pessoal, agora se segurem nas cadeiras que vamos ver um tópico muito difícil! Mentira, você vai ver que é mel na chupeta! Imagina que temos o seguinte polinômio:

$$x^3 + 2x^2 - 1$$

VALOR NUMÉRICO

$$x^3 + 2x^2 - 1$$

Muitas vezes, ele vai ser representado com $P(x)$, ou seja:

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - 1$$

VALOR NUMÉRICO

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - 1$$

Daí, o cara te pergunta: qual o valor do polinômio quando $x = 1$?

O que você precisa fazer? Simples, só colocar o 1 aonde tiver x e fazer as contas

$$1^3 + 2.1^2 - 1 = 2$$

VALOR NUMÉRICO

$$1^3 + 2.1^2 - 1 = 2$$

Representamos assim

$$P(1) = 2$$

IGUALDADE DE POLINÔMIOS

Bom, agora vou te contar uma parada que é pra você não ser mais enganado de forma alguma! Se liga:

$$x^2 + 2x + 1$$

$$x^2 + 3x + 1$$

IGUALDADE DE POLINÔMIOS

$$x^2 + 2x + 1$$

$$x^2 + 3x + 1$$

Se eu te disser que esses dois polinômios são iguais, você acredita? NÃO ACREDITE, É MENTIRA!

IGUALDADE DE POLINÔMIOS

Dois polinômios só são iguais quando TODOS os seus coeficientes são iguais! Então:

$$x^2 + 2x + 1$$

$$x^2 + 2x$$

IGUALDADE DE POLINÔMIOS

$$x^2 + 2x + 1$$

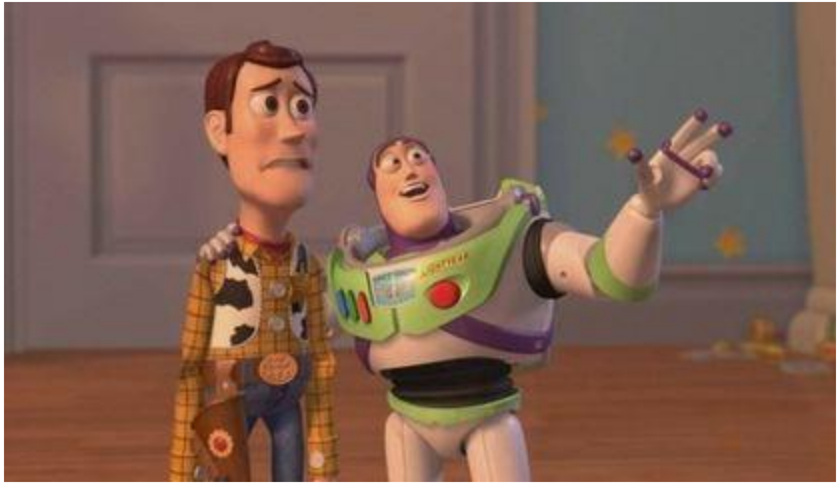
$$x^2 + 2x$$

NÃO SÃO IGUAIS, pois o termo independente é diferente. Preste atenção nesse detalhe!

APLICAÇÕES

Meu anjo, eu sei que você deve estar pensando: “Mas por que raios isso aparece sempre?” “Por que eu estudo isso desde que eu me entendo por gente”

A resposta é a seguinte: OS POLINÔMIOS ESTÃO POR TODA PARTE!



APLICAÇÕES

Se eu te digo que tenho um quadrado de lado L e te pergunto a área dele, o que você me diz?

$$L^2$$

Isso é um polinômio!!! E se eu te pergunto o perímetro?

$$4L$$

Também é um polinômio! Então não menospreze! Ele é muito é importante e provavelmente é a coisa que você mais usou na sua vida inteira!

Agora, partiu exercícios!

PRATICANDO

Classifique como polinômio ou não

$a)\ 2x^3 + x + 4$

$b)\ \sqrt{x^3} + 3x - 4$

$c)\ \dfrac{1}{x^2} + 2x$

$d)\ x^{1.3} + x - 7$

PRATICANDO

Classifique como polinômio ou não

$$a)\ 2x^3 + x + 4$$

Temos aí coeficientes constante e x com expoentes sempre naturais $(3,1,0)$. Logo, é um polinômio.

PRATICANDO

$$b)\ \sqrt{x^3} + 3x - 4$$

Temos uma raiz em cima do x^3, levando a:

$$\sqrt{x^3} = \left(x^3\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$$

Como $3/2$ não é natural, não se trata de um polinômio.

PRATICANDO

$$c)\ \frac{1}{x^2} + 2x$$

Temos um termo $1/x^2$ que é a mesma coisa que:

$$x^{-2}$$

Como -2 não é natural, não é um polinômio.

PRATICANDO

$$c)\ \frac{1}{x^2} + 2x$$

Rewrite $\frac{1}{x^2}$ as $\left(x^2\right)^{-1}$.

$$\frac{d}{dx}\left[\left(x^2\right)^{-1}\right]$$

Multiply the exponents in $\left(x^2\right)^{-1}$.

Apply the power rule and multiply exponents, $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$.

$$\frac{d}{dx}\left[x^{2\cdot -1}\right]$$

Multiply 2 by -1.

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-2}\right]$$

PRATICANDO

$d)\ x^{1.3} + x - 7$

Novamente temos aí 1.3 que não é natural, logo também não será um polinômio.

PRATICANDO

Dados os polinômios $P(x) = x^4 - 3x^2 + 7x$ e $Q(x) = 9x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 1$, determine:

(a) $P(x) + Q(x)$

(b) $P(x).Q(x)$

(c) $Q(x) - P(x)$

Diga qual o grau de cada polinômio encontrado nas alternativas.

PRATICANDO

$$(a)\ P(x) + Q(x)$$

Ora, você lembra quem são esses caras?

$$P(x) = x^4 - 3x^2 + 7x$$

$$Q(x) = 9x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 1$$

PRATICANDO

Show, agora para somar esses caras, basta somarmos os termos semelhantes:

$$P(x) + Q(x) = \left(x^4 - 3x^2 + 7x\right) + \left(9x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 1\right)$$

$$P(x) + Q(x) = 9x^5 + (1 - 3)x^4 + 2x^3 + (-3 + 1)x^2 + 7x - 1$$

$$P(x) + Q(x) = 9x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 7x - 1$$

Bom, o grau desse polinômio que encontramos é a potência de maior valor, que no nosso caso é 5. Logo, o grau do polinômio é 5.

PRATICANDO

Bora pra próxima!

$$(b)\ P(x).Q(x)$$

Agora precisamos fazer a multiplicação entre os polinômios:

$$P(x).Q(x) = (x^4 - 3x^2 + 7x).(9x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 1)$$

PRATICANDO

$$P(x).\,Q(x) = \left(x^4 - 3x^2 + 7x\right).\left(9x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 1\right)$$

É só fazer o chuveirinho:

$$\begin{aligned} P(x).\,Q(x) = {} & x^4\left(9x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 1\right) \\ & - 3x^2\left(9x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 1\right) \\ & + 7x\left(9x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 1\right) \end{aligned}$$

PRATICANDO

É só fazer o chuveirinho:

$$P(x).\,Q(x) = x^4(9x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 1)$$
$$- 3x^2(9x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 1)$$
$$+ 7x(9x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 1)$$

$$P(x).\,Q(x) = 9x^9 - 3x^8 + 2x^7 + x^6 - x^4 - 27x^7 + 9x^6 - 6x^5 - 3x^4$$
$$+ 3x^2 + 63x^6 - 21x^5 + 14x^4 + 7x^3 - 7x$$

PRATICANDO

$$P(x).Q(x) = 9x^9 - 3x^8 + 2x^7 + x^6 - x^4 - 27x^7 + 9x^6 - 6x^5 - 3x^4$$
$$+ 3x^2 + 63x^6 - 21x^5 + 14x^4 + 7x^3 - 7x$$

Finalmente, juntando os termos:

$$P(x).Q(x) = 9x^9 - 3x^8 - 25x^7 + 73x^6 - 27x^5 + 10x^4 + 7x^3 + 3x^2 - 7x$$

Prontinho. E o grau desse polinômio é 9.

Lembrando que para o grau de um produto de polinômios, basta somar o grau de cada um.

No nosso caso: grau de $P(x)$ é 4 e o grau de $Q(x)$ é 5. Logo, o grau de $P(x).Q(x) = 4 + 5 = 9$.

PRATICANDO

Dá uma olhada nessa última:

$$(c)\ Q(x) - P(x)$$

Agora nós vamos subtrair um polinômio do outro:

$$Q(x) - P(x) = (9x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 1) - (x^4 - 3x^2 + 7x)$$

PRATICANDO

$$Q(x) - P(x) = (9x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 1) - (x^4 - 3x^2 + 7x)$$

Não se esqueça, só operamos os termos semelhantes (que têm o mesmo grau):

$$Q(x) - P(x) = 9x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 1 - x^4 + 3x^2 - 7x$$

$$Q(x) - P(x) = 9x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 7x - 1$$

E o grau desse amigo é 5, que é o maior expoente.

PRATICANDO

Seja

$$P(x) = 2x^3 + 3x^2 + x + 4$$

Então dê o valor de $P(1),\ P(-2)$ e $P(0)$.

PRATICANDO

Se $P(x) = 2x^3 + 3x^2 + x + 4$, para achar $P(1)$, basta substituir x por 1:

$$P(1) = 2(1)^3 + 3(1)^2 + 1 + 4 = 10$$

PRATICANDO

Da mesma maneira:

$$P(-2) = 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 2 + 4 = 2 \cdot (-8) + 3 \cdot 4 - 2 + 4 = -2$$

PRATICANDO

E também:

$$P(0) = 2(0)^3 + 3(0)^2 + 0 + 4 = 4$$

Obrigado!

Alguma dúvida?

juliocesarnaves@hotmail.com

+35 99985 2104

@juliocesarnf