



## ❖ वास्तविक संख्या (Real Number)

### ❖ गणित

- गणित ऐसी विद्याओं का समूह है जो संख्याओं, मात्राओं, परिमाणों, रूपों और उनके आपसी रिश्तों, गुण, स्वभाव इत्यादि का अध्ययन करती हैं।
- गैलीलियो के अनुसार- “गणित वह भाषा है जिसमें परमेश्वर ने संपूर्ण जगत या ब्रह्माण्ड को लिख दिया है।”
- बर्टण रसैल- “गणित एक ऐसा विषय है जिसमें हम यह भी नहीं जानते कि हम किसके बारे में बात कर रहे हैं तथा न ही यह जान पाते हैं कि हम जो कह रहे हैं, वह सत्य है।”
- लौक के अनुसार- “गणित वह मार्ग है जिसके द्वारा बच्चों के मन अथवा मस्तिष्क में तर्क करने की आदत स्थापित होती है।”
- मार्शल, एच. स्टोन- “गणित ऐसी अमृत व्यवस्था का अध्ययन है जो कि अमृत तत्वों से मिलकर बनी है। इन तत्वों को मूर्त रूप में परिभाषित किया गया है।
- गणित की कई शाखाएँ हैं अंकगणित, रेखागणित, त्रिकोणमिति, सांखियकी, बीजगणित, कलन, इत्यादि।
- इसे English में Math है।
- Mathematics एक औपचारिक शब्द है, जिसका अर्थ गणित विषय से होता है।
- यूनान के महान दार्शनिक थेल्स को विश्व का सर्वप्रथम गणितज्ञ माना जाता है, जिन्होंने वस्तु की ऊंचाई को छड़ी द्वारा निक्षेपित परछाई से तुलना करके मापा था।
- आर्कमिडीज को गणित का पिता कहा जाता है।
- गणित का प्रयोग मेसोपोटामिया सभ्यता से ही माना जाता है।
- महान भारतीय खगोल शास्त्री आर्यभट्ट को गणित का जनक माना जाता है, जिन्होंने शून्य की खोज सबसे पहले की।
- ❖ संख्या पद्धति (Number System)
- संख्याओं को लिखने एवं नामकरण के सुव्यवस्थित पद्धति को संख्या पद्धति कहते हैं।

**Note:-** संख्याओं को लिखने के लिए दो प्रकार की प्रणाली प्रचलित हैं:-

1. दाशमिक प्रणाली
2. अंतरराष्ट्रीय प्रणाली

### ❖ संख्या रेखा (Number line)

- संख्या रेखा, संख्याओं को क्षैतिज या लंबवत रूप से खींची गई सीधी रेखा पर दर्शाने का एक तरीका है।

## CLASS 10

- संख्या रेखा को वास्तविक रेखा भी कहते हैं।
  - संख्या रेखा पर तीन भाग होते हैं - ऋणात्मक पक्ष, शून्य और धनात्मक पक्ष।
  - 0 के बाईं ओर की संख्याएं ऋणात्मक संख्याएं होती हैं और 0 के दाईं ओर की संख्याएं सभी धनात्मक संख्याएं होती हैं।
  - संख्या रेखा पर धन पूर्णांक, ऋण पूर्णांक, परिमेय संख्याएं, अपरिमेय संख्याएं, और अन्य वास्तविक संख्याएं दिखाई जा सकती हैं।
  - संख्या रेखा का इस्तेमाल गणित, विज्ञान और वित्त में किया जाता है।
  - क्षैतिज संख्या रेखा पर संख्याएँ दाईं ओर चलने पर बढ़ती हैं और बाईं ओर चलने पर घटती हैं।
- ❖ **संख्या (Number)**
- संख्या एक गणितीय वस्तु है जिनका उपयोग किसी वस्तु को गिनने, मापने और नामकरण करने के लिए किया जाता है।

**Note:-** अंकगणित में कुल 10 संख्या (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 ) है जिनकी मदद से बड़ी-बड़ी संख्याएँ बनती है।

**Note:-** शून्य को पूर्ण संख्या माना गया है तथा यह जिस संख्या के पीछे लग जाता है उस संख्या का मान 10 गुना बढ़ जाता है।

❖ **संख्याओं के प्रकार (Types of numbers)**

1. वास्तविक संख्या (Real number)
2. काल्पनिक संख्या (Imaginary number)

❖ **वास्तविक संख्या (Real number)**

- परिमेय और अपरिमेय संख्याओं के संग्रह को वास्तविक संख्या कहते हैं।
- इसे R से denote करते हैं।

**Example:-** 1, 2,  $\sqrt{3}$ , 43,  $\sqrt{5}$  etc.

❖ **वास्तविक संख्याओं के प्रकार**

**1. प्राकृतिक संख्या (Natural Number)**

- गिनती में प्रयुक्त होने वाली सभी संख्याएँ प्राकृतिक संख्या कहलाती हैं।
- इसे N से denote करते हैं।

**Example:-** N = (1, 2, 3, 4, 5,.....)

**Note :-** a) गिनती हमेशा 1 से शुरू होती है।

b) प्राकृत संख्याओं को धनात्मक संख्याएँ भी कहते हैं।

c) सबसे छोटी प्राकृत संख्या 1 तथा सबसे बड़ी प्राकृत संख्या अस्तित्व में नहीं है।

## CLASS 10

### 2. पूर्ण संख्याएँ (whole numbers)

- 0 सहित सभी धनात्मक संख्या पूर्ण संख्याएँ कहलाती है।
- इसे W से denote करते है।

**Example:-**  $W = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots, \infty \}$

**Note:-** सबसे छोटी पूर्ण संख्या 0 और सबसे बड़ी पूर्ण  $\infty$  संख्या है।

### 3. पूर्णांक (Integers)

- शून्य सहित सभी धनात्मक एवंऋणात्मक संख्याएँ पूर्णांक कहलाती है।
- इसे I या Z से दर्शाते है।

### 4. पूर्णांक तीन प्रकार का होता है:-

1. धनात्मक पूर्णांक (Positive Integers) :  $+I = \{ 1, 2, 3, 4, \dots, \infty \}$
2. ऋणात्मक पूर्णांक (Negative Integers) :  $-I = \{ -1, -2, -3, -4, \dots, -\infty \}$
3. शून्य पूर्णांक (zero Integers) :  $I = 0$

**Note:-** a) सबसे छोटी धनात्मक पूर्णांक 1 तथा सबसे बड़ी धनात्मक पूर्णांक  $\infty$  है।

- b) सबसे छोटी ऋणात्मक पूर्णांक  $-\infty$  तथा सबसे बड़ी ऋणात्मक पूर्णांक -1 है।
- c) सबसे छोटी एवं सबसे बड़ी पूर्णांक  $\infty$  है।
- d) 0 न तो धनात्मक पूर्णांक है और न ही ऋणात्मक पूर्णांक है।

### 5. सम संख्याएँ (Even Numbers)

- वैसी संख्याएँ जिसमें दो से पूरा-पूरा भाग लग जाए, सम संख्याएँ कहलाती है।  
**Example :-** 2, 4, 6, 8,.....
- सम संख्या का सामान्य रूप  $2k$  है, जहाँ  $k$  कोई पूर्णांक है।

**Notes:** - सबसे छोटी सम संख्या  $\infty$  तथा सबसे बड़ी संख्या अस्तित्व में नहीं है।

### 6. विषम संख्याएँ (Odd Numbers)

- वैसी संख्याएँ जिसमें दो से पूरा-पूरा भाग न लगे, विषम संख्याएँ कहलाती है।  
**Example:-** 1, 3, 5, 7,.....
- विषम संख्या का सामान्य रूप  $2k+1$  होता है जहाँ  $k$  कोई पूर्णांक है।

**Note:-** सबसे छोटी विषम संख्या =  $\infty$  तथा सबसे बड़ी विषम संख्या =  $\infty$

### 7. भाज्य संख्या (Composite number)

## CLASS 10

- वैसी संख्या जिनमें स्वयं और एक के अलावे अन्य संख्या से पूरा-पूरा भाग लगे उसे भाज्य संख्या कहते हैं। Example:- 4, 6, 8, 9, 10,.....etc

**Note:** a) भाज्य संख्या को यौगिक संख्या या भौतिक संख्या भी कहते हैं।

b) ये हमेशा धनात्मक होती हैं।

C) सबसे छोटी भाज्य संख्या 4 तथा सबसे छोटी भाज्य संख्या अस्तित्व में नहीं है।

### 8. अभाज्य संख्याएँ (Prime Number)

- वैसी संख्याएँ जो 1 और स्वयं के अतिरिक्त अन्य किसी दूसरी संख्या से पूर्णतः विभाजित न हो, अभाज्य संख्याएँ कहलाती हैं।

Example: 2, 3, 5, 7, .....etc

**Note:-** इन्हें रुढ़ संख्या भी कहते हैं।

➤ सबसे छोटी अभाज्य संख्या 2 तथा सबसे बड़ी अभाज्य अस्तित्व में नहीं है।

➤ ये हमेशा धनात्मक होती हैं।

➤ 1 न तो अभाज्य संख्या है और न ही भाज्य संख्या।

### ❖ सह-अभाज्य संख्याएँ (Co-Prime Numbers)

- वे दो संख्याएँ जिनमें एक के अतिरिक्त कोई और उभयनिष्ठ गुणनखंड न हो, सह अभाज्य संख्याएँ कहलाती हैं।

Example: (4,7), (2,5) etc. -

### ❖ परिमेय संख्या (Rational Number)

- वैसी संख्या जो  $p/q$  के रूप में निरूपित कि जा सकती है जहाँ  $p$  और  $q$  पूर्णांक हैं और दोनों का कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं है तथा  $q \neq 0$  हैं, परिमेय संख्या कहलाती है।

Example:- 7, 3, -1,  $4/3$  etc.

### ❖ अपरिमेय संख्या (Irrational Number)

- वैसी संख्या जिसे  $p/q$  के रूप में नहीं लिखा जा सकता है, अपरिमेय संख्या कहलाती है। Example:-  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{7}$ ,  $\sqrt{3}$ ..etc.

### ❖ काल्पनिक संख्याएँ (Imaginary Numbers)

- क्रृत्यात्मक संख्याओं के वर्गमूल को काल्पनिक संख्या कहते हैं।

Example :  $\sqrt{-3}$ ,  $\sqrt{-2}$ ,  $\sqrt{-5}$  etc.

## Some Important Points

## CLASS 10

- वास्तविक संख्याओं की संख्या रेखा पर प्रदर्शित किया जा सकता है।
- दो परिमेय संख्याओं के बीच अनगिनत वास्तविक संख्या, परिमेय संख्या या अपरिमेय संख्या हो सकती है।
- दो अपरिमेय संख्याओं के बीच अनगिनत वास्तविक संख्या, परिमेय संख्या या अपरिमेय संख्या हो सकती है।
- 1 न तो भाज्य है और न अभाज्य संख्या।
- दो एकमात्र ऐसी संख्या है जो सम होते हुए भी अभाज्य संख्या है।
- वे दो अभाज्य संख्याएँ जिनके बीच केवल एक सम संख्या होती है, अभाज्य जोड़ा कहलाती है।

Example:- (5 व 7), (3 व 5), (11 व 13), (17 व 19), (29 व 31) etc

- सभी प्राकृत संख्याएँ, पूर्ण, पूर्णांक, परिमेय एवं वास्तविक होती हैं।
- सभी पूर्ण संख्याएँ, पूर्णांक, परिमेय एवं वास्तविक होती हैं।
- सभी पूर्णांक, परिमेय एवं वास्तविक होते हैं।
- सभी पूर्णांक, परिमेय एवं अपरिमेय संख्याएँ वास्तविक होती हैं।
- अभाज्य (रुद) एवं यौगिक, सम तथा विषम संख्या होती हैं।
- सभी पूर्णांक, परिमेय एवं अपरिमेय संख्याएँ ऋणात्मक एवं धनात्मक दोनों होती हैं।
- प्राकृत (अभाज्य, यौगिक) एवं पूर्ण संख्याएँ कभी भी ऋणात्मक नहीं होती हैं।
- भिन्न संख्याएँ परिमेय होती हैं।
- 2 के अतिरिक्त सभी अभाज्य (रुद) संख्याएँ विषम होती हैं।
- शून्य (0) में किसी भी संख्या का भाग देने पर शून्य आता है।

Example:-  $0/a = 0$ , यहाँ  $a$  पर वास्तविक संख्या है।

- किसी भी संख्या में शून्य का भाग देना परिभाषित नहीं है अर्थात् यदि किसी भी संख्या में शून्य का भाग देते हैं, तो भागफल अनन्त (Infinite या Non Defined) आता है।

Example:  $a/0 = \text{infinite}$

- किसी संख्या में किसी अंक का जो वास्तविक मान होता है, उसे जातीय मान कहते हैं।

Example: 5283 में 2 का जातीय मान 2 है।

- किसी संख्या में किसी अंक का स्थान के अनुसार जो मान होता है उसे उसका स्थानीय मान कहते हैं,

Example- 528395 में 2 का स्थानीय मान 20000 है।

- दो परिमेय संख्याओं का योगफल अथवा गुणनफल सदैव एक परिमेय संख्या होती है।
- दो अपरिमेय संख्याओं का योगफल अथवा गुणनफल कभी परिमेय संख्या तथा कभी अपरिमेय संख्या होता है।
- एक परिमेय संख्या तथा एक अपरिमेय संख्या का गुणनफल अथवा योगफल सदैव एक अपरिमेय संख्या होता है।
- ना एक अपरिमेय संख्या है।

## CLASS 10

- परिमेय संख्या का दशमलव निरूपण या तो सीमित होता है या असीमित आवर्ती होता है।

**Example:**  $\frac{3}{4} = 0.75$  (सीमित)

$11/3 = 3.666$  (असीमित आवर्ती)

- अपरिमेय संख्या का दशमलव निरूपण अनन्त व अनावर्ती होता है।

**Example:**  $\sqrt{2}, \sqrt{3}$  etc.

- प्रत्येक सम संख्या का वर्ग एक सम संख्या होती है तथा प्रत्येक विषम संख्या का वर्ग एक विषम संख्या होती है।
- प्रथम  $n$  प्राकृतिक संख्याओं का योग

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- प्रथम  $n$  सम संख्याओं का योग  $S_e = n(n + 1)$  होता है।
- प्रथम विषम संख्याओं का योग  $S_o = n^2$  होता है।
- यदि दशमलव संख्याएँ  $0.x$  तथा  $0.xy$  के रूप में दी होती हैं, तो इन्हें परिमेय संख्या के रूप में निम्नवत् बदलते हैं-

$$0.x = \frac{x}{10} \text{ and } 0.xy = \frac{xy}{100}$$

**Note:-** अर्थात् दशमलव के बाद 1 अंक है, तो 10 का, दो अंक हैं, तो 100 का, तीन अंक हैं, तो 1000 का भाग देने पर दशमलव संख्या परिमेय (भिन्न) बन जाती है।

- यदि अशान्त (अनन्त) आवर्ती दशमलव संख्याएँ  $0.x^-$  तथा  $0.xy^-$  के रूप की हैं, तो इन्हें परिमेय संख्या के रूप में निम्नवत् बदलते हैं-

$$0.x^- = \frac{x}{9} \text{ and } 0.xy^- = \frac{x}{99}$$

अर्थात् दशमलव के बाद 1 अंक बार सहित हो, तो 9 का, दो अंक बार सहित हों तो 99 का, तीन अंक हों तो 999 का भाग करके दशमलव संख्या परिमेय में बदल जाती है।

- यदि अशान्त आवर्ती दशमलव संख्याएँ  $0.xy$  तथा  $0.xyz$  के रूप की हों, तो इन्हें परिमेय संख्या के रूप में निम्नवत् बदलते हैं-

$$0.xy = \frac{xy-x}{90} \text{ and } 0.xyz = \frac{xyz-x}{990}$$

- किसी भी पहाड़े का योग उस संख्या (पहाड़े) के 55 गुने के बराबर होता है अर्थात् के पहाड़े का योगफल = 55।

Q. 12 के पहाड़े का योगफल कितना होगा ?

Ans.  $12+24+36+\dots+120 = 55 \times 12 = 660$

❖ प्रमेयिका (Lemma)

- प्रमेयिका एक सिद्ध किया हुआ कथन होता है जिसकी सहायता से अन्य कथन को सिद्ध किया जाता है।

❖ युक्लिड विभाजन प्रमेयिका (Euclid's division lemma)

- यदि  $a$  और  $b$  धनात्मक पूर्णांक हैं तो ऐसी अद्वितीय पूर्ण संख्याएँ (धनात्मक पूर्णांक)  $p$  और  $q$  विद्यमान हैं कि

$$a = bq + r \quad \text{where, } 0 \leq r < b$$

- युक्लिड विभाजन प्रमेयिका विभाजन के नियम पर आधारित है।

**भाज्य = भाजक × भागफल शेषफल**

$$a = bq + r \quad \text{where, } 0 \leq r < b$$

❖ यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका की मदद से ज्ञात कर सकते हैं -

- a) कोई सम पूर्णांक किस रूप का होता है।
- b) कोई विषम पूर्णांक किस रूप का होता है।
- c) किसी पूर्णांक का वर्ग या घन किस रूप का होता है।
- d) किसी पूर्णांक के गुणज किस रूप के होते हैं।

❖ एल्गोरिथ्म (Algorithm)

- यह सु-परिभाषित चरणों की एक शृंखला होती है जो एक विशेष प्रकार की समस्या को हल करने के लिए एक प्रक्रिया प्रदान करती है।

या, VISION ACADEMY

- किसी भी समस्या का चरणबद्ध तरीके से समाधान निकालने की प्रक्रिया को एल्गोरिथ्म (Algorithm) कहते हैं।

- इसके जरिये हम पहले problem को छोटे-छोटे हिस्सों में बाँट कर उसे solve करते हैं।

**Note:-** एल्गोरिथ्म शब्द एक फ्रांसिसी गणितज्ञ अल-खवाज़मी के नाम से लिया गया है।

❖ अंक गणित की आधारभूत प्रमेय (Fundamental Theorem Of Arithmetic)

- प्रत्येक भाज्य संख्या को अभाज्य संख्याओं के एक गुणन फल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है तथा वह गुणनफल अगाज्य गुणनखंडों के आने वाले क्रम के बिना अद्वितीय होता है।

Example:-  $8 = 2 \times 2 \times 2$

❖ परिमेय संख्याओं का दशमलव प्रसार (Decimal Expression of real number)

- यदि  $\frac{p}{q}$  एक परिमेय संख्या है और  $q = 2^m \times 5^n$  के रूप में है जहाँ  $p$  और  $q$  पूर्ण संख्या हैं और  $P$  और  $q$  सह अभाज्य संख्या हो तब परिमेय संख्या  $\frac{p}{q}$  का दशमलव प्रसार सांत होगा।
- यदि  $\frac{p}{q}$  एक परिमेय संख्या है और  $q = 2^m \times 5^n$  के रूप में नहीं है जहाँ  $p$  और  $q$  पूर्ण संख्या हैं और  $p$  और  $q$  सह अभाज्य संख्या हो तब परिमेय संख्या  $p/q$  का दशमलव प्रसार असांत होगा।

### ❖ L.C.M (लघुतम समापवर्त्य)

- दो या दो से अधिक संख्याओं का लघुतम समापवर्त्य वह सबसे छोटी संख्या होती है, जो उनमें से प्रत्येक से पूर्णतः विभाज्य होती है।
- किसी संख्या से पूर्णतः विभाजित होने वाली समस्त संख्याओं को उस संख्या का अपवर्त्य कहते हैं।  
Ex:- 5 का अपवर्त्य 10.15.20, 25, 30 etc.

Note:- a) प्रत्येक संख्या का सबसे छोटा अपवर्त्य वह स्वयं होता है।

b) प्रत्येक संख्या के अनगिनत अपवर्त्य होते हैं।

c) शून्य का अपवर्त्य केवल शून्य होता है।

- दो शून्येतर पूर्णांकों a और b के HCF और LCM में निम्नलिखित सम्बन्ध पाया जाता है:-

$$\text{HCF}(a, b) \times \text{LCM}(a, b) = a \times b$$

- मान लीजिए कि p एक अभाज्य संख्या है। यदि p,  $a^2$  को विभाजित करती है, तो p, a को भी विभाजित करेगी, जहाँ a एक धनात्मक पूर्णांक है।
- अपूर्ण वर्ग संख्या के ऊपर करणी चिन्ह (radical sign) लगा हो, तो वह एक अपरिमेय संख्या होती है।
- जिस परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार सांत होता है, उसे p/q के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ p और q सहभाज्य है तथा q का अभाज्य गुणनखंड  $2^n \cdot 5^m$  के रूप का है, जहाँ n, m कोई धनात्मक पूर्णांक है। इसका विलोम भी सत्य है।
  - जिस परिमेय संख्या p/q में q का अभाज्य गुणनखंड  $2^n \cdot 5^m$  के रूप का नहीं होता, उसका दशमलव प्रसार असांत आवर्ती होता है। इसका विलोम भी सत्य है।