Студент: Максим Васильев
Группа: M4140
Дата: 24 сентября 2023 г.

---

1 Асимптотика

1. Эквивалентны ли следующие факты?
   - $f = \Theta(g)$
   - $\exists C, 0 < C < \infty : \lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = C$

2. Дайте ответ для двух случаев $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и $\mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}$:

   (a) Если в определении $\mathcal{O}$ опустить условие про N (т.е. оставить просто $\forall n$), будет ли полученное определение эквивалентно исходному?

   (b) Тот же вопрос про o.

3. Продолжим отношение “$\preceq$” на функциях до отношения на классах эквивалентности по отношению эквивалентности “$\sim$”, введённому на практике. Правда ли, что получится отношение *линейного порядка* (то есть $\forall f, g : (f \preceq g) \lor (g \preceq f)$)?

4. Докажите, или приведите контрпример:

   (a) $g(n) = o(f(n)) \Rightarrow f(n) + g(n) = \Theta(f(n))$

   (b) $f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \Leftrightarrow f(n) = o(g(n)) \lor f(n) = \Theta(g(n))$

5. Заполните табличку и поясните (особенно строчки 4 и 7):

A	B	$\mathcal{O}$	o	Θ	ω	Ω
n	n^2	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$
$\log^k n$	n^ϵ					
n^k	c^n					
$\sqrt{n}$	$n^{\sin n}$					
2^n	$2^{n/2}$					
$n^{\log m}$	$m^{\log n}$					
$\log(n!)$	$\log(n^n)$					

Здесь все буквы, кроме n, — положительные константы.

Дополнительные задачи

6. Считайте здесь, что функции здесь $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и что $\forall n : f(n) > 1 \land g(n) > 1$.

   (a) $f(n) = \Omega(f(n/2))$?

   (b) $f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \Rightarrow \log f(n) = \mathcal{O}(\log g(n))$?

   (c) $f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \Rightarrow 2^{f(n)} = \mathcal{O}(2^{g(n)})$?

   (d) $f(n) = o(g(n)) \Rightarrow \log f(n) = o(\log g(n))$?

   (e) $f(n) = o(g(n)) \Rightarrow 2^{f(n)} = o(2^{g(n)})$?

7. Упорядочите функции по скорости роста и обозначьте неравенства между соседями. Укажите, в каких неравенствах $f = o(g)$, а в каких $f = \Theta(g)$

$\log(\log^* n)$	$2^{log^* n}$	$(\sqrt{n})^{\log n}$	n^2	$n!$	$(\log n)!$
$(3/2)^n$	n^3	$\log^2 n$	$\log n!$	2^{2^n}	$n^{1/\log n}$
$\ln\ln n$	$\log^* n$	$n \cdot 2^n$	$n^{\log\log n}$	$\ln n$	1
$2^{\ln n}$	$(\log n)^{\log n}$	e^n	$4^{\log n}$	$(n+1)!$	$\sqrt{\log n}$
$\log^* \log n$	$2^{\sqrt{2\log n}}$	n	2^n	$n \log n$	$2^{2^{n+1}}$

Примечание: $\log^*(n) = \begin{cases} 0 & \texttt{если } n \le 1; \\ 1 + \log^*(\log n) & \texttt{иначе.} \end{cases}$